

1. Řešte  $x^2y^2 = x^2 + y^2$ .
2. Řešte  $3x^2 - 4y^2 = 13$ .
3. Řešte  $15x^2 - 7y^2 = 9$ .
4. Řešte  $2^x = 1 + 3^y$ .

*Ciferné zápisy.*

Zápis  $\overline{a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0}$  značí číslo  $\sum_{i=0}^{k-1} a_i 10^i$ . V úlohách se typicky hodí rozepsat např.

- $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ ,
- $\underbrace{\overline{aa\dots a}}_k = a \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = \frac{a}{9} \cdot (10^k - 1)$ .

5. Najděte všechna dvouciferná čísla  $x = \overline{ab}$  taková, že  $x = a + b^2$ .
6. Najděte všechna čtyřciferná čísla  $\overline{aabb}$ , která jsou druhou mocninou.
7. Najděte všechna čísla začínající šestkou, která se po vymazání této šestky zmenší 25-krát.
8. Najděte všechna trojciferná čísla  $x = \overline{abc}$  taková, že  $x = a! + b! + c!$ .
9. Buď  $x = \underbrace{\overline{11\dots 1}}_{2k}$ ,  $y = \underbrace{\overline{11\dots 1}}_{k+1}$ ,  $z = \underbrace{\overline{66\dots 6}}_k$ . Dokažte, že  $x + y + z + 8$  je druhou mocninou.
10. Dokažte, že pro každé  $a, n$  platí  $3^n \mid \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{3^n}$ .
11. Pro která  $a$  existuje  $n > 3$  takové, že  $1 + 2 + \dots + n = \overline{aa\dots a}$ ?
12. Pro dané  $k$  najděte nejmenší  $\overline{11\dots 1}$  dělitelné číslem  $\underbrace{\overline{33\dots 3}}_k$ .