

Diofantické rovnice. Dnešní triky:

- *nekonečný sestup*: z netriviálního řešení x_0, y_0, z_0 odvodit v nějakém smyslu *menší* řešení x_1, y_1, z_1 .
(Pak bych stejným postupem dostal taky x_2, y_2, z_2 atd., a získal bych nekonečnou klesající posloupnost přirozených čísel, spor. „Nějaký smysl“ je typicky $|x_1| < |x_0|$ apod.)
- *geometrický náhled*, hodit se může např. následující věta:
Je-li k racionální kuželosečka a $A \in k$ racionální bod, pak $\{X \in k : X \text{ racionální}\} = \{k \cap p : p \text{ je racionální přímka procházející bodem } A\}$.

Geometrickou metodou lze najít řešení tzv. *Pythagorejské rovnice*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Řešením jsou právě všechna

$$(t(u^2 - v^2), 2tuv, t(u^2 + v^2)) \text{ a } (2tuv, t(u^2 - v^2), t(u^2 + v^2)),$$

kde $t, u, v \in \mathbb{Z}$ a u, v jsou nesoudělné a různé parity.

(Tip: převedte danou rovnici na Pythagorejskou pomocí substituce.)

1. Řešte $x^3 = 2y^3 + 4z^3$.
2. Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální.
3. Řešte $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz$.
4. Řešte $x^2 + y^2 = 7z^2$.
5. * Řešte $x^2 + y^2 = z^2$.
6. Řešte $x^2 + y^2 = z^2 + 3xy + xz$.
7. * Řešte $x^2 + 2y^2 = 5z^2$.
8. * Řešte $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$.