Domácí úlohy 10.

odevzdat do 29.4. 9:00

1. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a, b \in S$ algebraické nad $\mathbf{T}$. Předpokládejme, že stupně polynomů $m_{a,\mathbf{T}}$, $m_{b,\mathbf{T}}$ jsou nesoudělné. Pak $[\mathbf{T}(a,b) : \mathbf{T}] = [\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}] \cdot [\mathbf{T}(b) : \mathbf{T}]$. Uveďte protipříklad na tuto rovnost, pokud stupně nesoudělné nejsou.

2. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{U}$ rozšíření těles, $\mathbf{U}$ algebraické nad $\mathbf{S}$ a $\mathbf{S}$ algebraické nad $\mathbf{T}$. Je nutně $\mathbf{U}$ algebraické nad $\mathbf{T}$? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Reálné číslo a nazveme *konstruovatelné*, pokud lze z úsečky délky 1 sestrojit úsečku délky a.

3. Dokažte, že pravítkem a kružítkem lze sestrojit pravidelný n-úhelník právě tehdy, když je konstruovatelné číslo $\cos(2\pi/n)$.

4. Buď p prvočíslo. Dokažte, že pokud lze sestrojit pravítkem a kružítkem pravidelný p-úhelník, pak $p-1$ je mocnina dvou.

Poznámky.

- Dokonce platí, že $p-1$ musí být tvaru 2^{2^k} pro nějaké k, tj. že p je tzv. *Fermatovo prvočíslo.*
- Jak ukázal Gauss (není to snadné), platí i opak: všechny takové p-úhelníky lze zkonstruovat.
- Snadno nahlédneme, že pokud lze zkounstruovat n-úhelník, tak lze zkonstruovat i $2n$-úhelník. O něco méně snadno nahlédneme, že pokud lze zkounstruovat m-úhelník a n-úhelník a m, n jsou nesoudělné, tak lze zkonstruovat i mn-úhelník.
- Tzv. *Gauss-Wantzelova věta* říká, že pravidelný n-úhelník lze zkonstruovat právě tehdy, když n je součin mocniny dvojky a různých Fermatových prvočísel.
- Více viz `http://en.wikipedia.org/wiki/Constructible_polygon`