

Tvrzení: Bud' G grupa, $H \leq G$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $gH = Hg \quad \forall g \in G$

(2) $ghg^{-1} \in H \quad \forall h \in H \quad \forall g \in G$

def: Takovým podgrupám se říká **NORMÁLNÍ**, značíme $H \trianglelefteq G$.

Tvrzení: Je-li $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfismus grp, pak $\ker \varphi \trianglelefteq G$.

Konstrukce FAKTORGRUPY:

Uvažuj $N \trianglelefteq G$.

Definujeme relaci na G : $a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} a \cdot b^{-1} \in N$

☹ je to ekvivalence, $a \sim b \iff aN = bN \iff Na = Nb$, bloky jsou $[a] = aN = Na$

Definujeme operace na blocích: $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$, $[a]^{-1} := [a^{-1}]$

$\leadsto G/N := (\{[a] : a \in G\}, \cdot, ^{-1}, [1])$ se nazývá faktorgrupa G podle N

☹ operace jsou dobře definované

☹ výsledná struktura je grupa

☹ $G \rightarrow G/N, a \mapsto [a]$ je homomorfismus

Věta o homomorfismu: Bud' $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfismus grup.

(1) Je-li $N \trianglelefteq G, N \subseteq \text{Ker } \varphi$, tak $\psi: G/N \rightarrow H$ je dobře definovaný homomorfismus.

(2) $G/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$
 $[a] \mapsto \varphi(a)$

1. věta o izomorfismu

1. věta o izomorfismu: Bud' $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfismus grup. Pak $G/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi$
 $[a] \mapsto \varphi(a)$

2. věta o izomorfismu: Bud' $N \trianglelefteq G$. Pak

(1) normální podgrupy grupy G/N jsou právě grupy H/N t.ž. $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$

(2) $\forall N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$

$$G/N / H/N \cong G/H$$

$$[a]_N / H/N \mapsto [a]_H$$

3. věta o izomorfismu: Bud' $N \trianglelefteq G, H \leq G$. Pak $HN \leq G, H \cap N \trianglelefteq H$ a

$$HN/N \cong H/H \cap N$$

Grupa G se nazývá **ŘEŠITELNÁ**, pokud $\exists k \exists N_0, N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$ takové, že

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_k = G$$

↳ faktorgrupy N_i/N_{i-1} jsou abelovské $\forall i=1, \dots, k$.

Nejmenším takovým k se říká stupeň řešitelnosti.

Pozn.: Galoisova věta říká, že polynomiální rovnice $f(x)=0$ je řešitelná vzorcem $\Leftrightarrow$ tzv. Galoisova grupa polynomu f je řešitelná.

Lemma: (1) Je-li G řešitelná grupa, $H \leq G$, pak H je řešitelná.

(2) Je-li G řešitelná grupa, $N \trianglelefteq G$, pak G/N je řešitelná.

(3) Je-li G grupa a $N \trianglelefteq G$ taková, že N i G/N jsou řešitelné, pak je G řešitelná.

