Domácí úkol č. 8 k přednášce NMAG 112: Lineární algebra 2, letní semestr 2019–2020

(8.1) Uvažujme pro matici $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ lineární operátor f_A na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte všechny roviny U, pro které platí, že $f_A(U) = U$ a v každé z těchto rovin najděte takovou bázi B_U, aby matice zúženého lineárního operátoru $[f_A|_U]_{B_U}^{B_U}$ byla Jordanova matice.

Nápověda: Využijte tvrzení o vlastních číslech operátorů zúžených na invariantní podprostory. Musí být báze B_U podposloupností báze, ve které má f_A Jordanův tvar? Pro výpočty vlastních čísel a vlastních vektorů můžete použít WolframAlpha.

(8.2) Mějme čtvercovou matici A stupně n nad nějakým tělesem T, definujme podprostor $\mathcal{M}(A) = \mathrm{LO}\left\{A^i \mid i \geq 0\right\}$ vektorového prostoru všech čtvercových matic stupně n nad tělesem T. Dokažte, že

(a) $\mathcal{M}(A) = \mathrm{LO}\left\{A^0, A^1, \ldots, A^{n-1}\right\}$,

(b) je-li $B \in \mathcal{M}(A)$ regulární, pak $B^{-1} \in \mathcal{M}(A)$,

(c) pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ je posloupnost $N = (A^0, A^1, A^2, A^3, A^4)$ báze $\mathcal{M}(A)$ (nemusíte dokazovat); spočítejte souřadnice $[A^{-1}]_N$.

Nápověda: (a) Použijte Cayleyho-Hamiltonovu větu pro A. (b) Ověřte, že $B^i \in \mathcal{M}(A)$ pro každé $i \geq 0$ a použijte Cayleyho-Hamiltonovu větu pro B. (c) Použijte postup z bodu (b), nepočítejte ani mocniny ani inverz matice A. (Připomeňme, že A^0 je jednotková matice.)

Bonusový problém: Je-li matice A stupně n v úloze 8.2 diagonalizovatelná, pak dokažte, že $\dim \mathcal{M}(A) = n$, právě když má A n různých vlastních čísel.