Domácí úkol č. 7 k přednášce NMAG 112: Lineární algebra 2, letní semestr 2019–2020

(7.1) Matice lineárního operátoru f na $\mathbb{R}^8$ vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_8)$ je matice v Jordanově tvaru s dvěma buňkami příslušnými vlastnímu číslu 0 řádů 4 a 3 (v tomto pořadí). Pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ určete dimenzi a najděte pomocí vektorů báze B nějakou bázi prostoru $(\operatorname{Ker} f^i) \cap (\operatorname{Im} f^j)$.

(7.2) Označme $\mathbf{V}$ vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 s běžnými operacemi. Lineární operátor ϕ na $\mathbf{V}$ je definovaný vztahem $\phi(p) = p' - x^2 p''$ (p' značí derivaci, p'' druhou derivaci; všechny polynomy jsou v proměnné x). Najděte matici J v Jordanově tvaru a bázi B prostoru $\mathbf{V}$ tak, aby $[\phi]^B_B = J$.

Nápověda: Začněte tím, že najdete matici operátoru ϕ vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathbf{V}$.

Poznámka: Není třeba ověřovat, že ϕ je skutečně lineární operátor.

Bonusový problém: Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n je *divná*, pokud $a_{i+1,i} = 1$ pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ a $a_{i,j} = 0$ pro $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $i \neq j+1$ (tedy poslední sloupec je libovolný, bod diagonálou jsou jedničky a jinde nuly). Ukažte, že každá čtvercová matice nad libovolným tělesem je podobná blokově diagonální matici, jejíž bloky jsou divné. Najděte, jak se divné matice ve skutečnosti nazývají.