Domácí úkol č. 6

(6.1) Lineární operátor f na prostoru $\mathbf{V} = \mathrm{LO}\left\{(1,3,-1,1)^T, (0,1,-1,4)^T\right\}$ (jde o podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$) splňuje

$$f((1,3,-1,1)^T) = (1,2,0,-3)^T, \quad f((0,1,-1,4)^T) = (0,-1,1,-4)^T$$

Spočítejte $f^n((7,17,-3,-9)^T)$.

Nápověda: Začněte tím, že najdete matici f vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathbf{V}$.

(6.2)] Vyřešte pro každé celé n reálný spojitý dynamický systém

$$\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix}$$

s počátečními podmínkami $u_i(0) = i$ pro $i = 1,2,3$. (Značení: $A^n = (A^{-1})^{|n|}$ pro záporná n).

Nápověda: Využijte toho, že vlastní vektory regulární matice A tvoří vlastní vektory každé její mocniny A^n.

Bonusový problém:

Dokažte, že pro každý operátor na $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, který nemá (reálná) vlastní čísla, existuje ortogonální báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že matice f vzhledem k B je tvaru

$$[f]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Dále ukažte, že nelze požadovat, aby B byla ortonormální.