Domácí úkol č. 3

Poznámka (kontext úlohy (3.1)): Co je „nejlepší aproximací" funkce x^2 pomocí lineární funkce na intervalu $[0,1]$? Na přednášce jsme spočítali, že to je funkce $-\frac{1}{6}+x$, pokud za nejlepší aproximaci považujeme ortogonální projekci do podprostoru LO$\{1,x\}$ v prostoru spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$ se skalárním součinem daným integrálem $\int_0^1 fg$. V úkolu (3.1) si spočítejte, co vyjde, pokud budeme používat lineární regresi ve vhodně zvolených bodech.

(3.1) Uvažujte funkci $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ a dvojice hodnot $(\frac{i}{n}, f(\frac{i}{n}))$, $i=0,\ldots,n$.

a) Sestavte soustavu lineárních rovnic, která provede lineární regresi v těchto bodech (někde si najděte vzorce pro součty $\sum_{i=0}^n i$ a $\sum_{i=0}^n i^2$).

b) Spočtěte tuto soustavu pro funkci $f(x)=x^2$ a $n=5$, napište výslednou lineární funkci.

Bonusový problém: K jaké lineární funkci konverguje úloha 3.1.b) pro $n\to\infty$?

(3.2) Nechť $A=(\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_n)$ je regulární reálná matice řádu n. Dokažte, že absolutní hodnota determinantu matice A je menší nebo rovná součinu norem vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ (normy bereme vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu). Pro $n=3$ interpretujte tuto nerovnost geometricky.

Nápověda: Použijte QR-rozklad. Ukažte, že ortogonální matice má determinant ± 1 a že prvky na diagonále matice R lze odhadnout velikostmi vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Bonusový problém: Ukažte, že každé zobrazení $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, které zachovává skalární součin, je lineární.