Domácí úkol č. 2

(2.1) Báze B je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle , \rangle$ na $\mathbb{C}^2$. Určete $\left\langle (x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \right\rangle$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} \right)$$

(2.2) Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor spojitých reálných funkcí s definičním oborem $[1, 4]$ a $\langle , \rangle$ je skalární součin na $\mathbf{V}$ daný vztahem

$$\langle f, g \rangle = \int_1^4 fg \ .$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru $\mathrm{LO}\{1, x, x^2\}$ a ortogonální projekci funkce $\sin(x)$ na tento podprostor.

Poznámky:

- Funkce 1, x, x^2, $\sin(x)$ chápeme jako prvky V, tj. zužujeme je na interval $[1, 4]$.
- K výpočtu integrálů použijte libovolný software (např. WolframAlpha), výsledky **počítejte numericky** s rozumnou přesností (např. 2–3 platné cifry).
- Interpretace výsledku je následující: jde o "nejlepší"aproximaci funkce sinus polynomem stupně ≤ 2 na intervalu $[1, 4]$. Rozmyslete si, v jakém smyslu "nejlepší".

Bonusový problém: Ukažte, že skalární součin je až na násobek určen kolmostí. Přesněji: Nechť $\langle , \rangle_1$ a $\langle , \rangle_2$ jsou dva skalární součiny na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ takové, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ právě když $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$. Pak existuje kladné reálné číslo t takové, že $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 = t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_2$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.