Domácí úkol č. 11 k přednášce NMAG 112: Lineární algebra 2, letní semestr 2019–2020

(11.1) Pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$

(a) najděte matici P, pro kterou $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, a

(b) dokažte, že neexistuje žádná matice Q, pro kterou $P^T A P = I_3$.

Nápověda: Využijte toho, že v tělese $\mathbb{Z}_5$ platí, že $1^2 = (-1)^2 = 1$ a $2^2 = (-2)^2 = -1$, tudíž $a^2 \in \{0, 1, 4\}$, proto můžeme symetrickými úpravami diagonální matice nad $\mathbb{Z}_5$ „měnit na diagonále znaménko". Dále si všimněte, že $\det(P^T A P) = \det(P)^2 \det(A)$ a použijte předchozí pozorování.

Je-li f symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ a $U \subseteq \mathbf{V}$, pak f-ortogonálním doplňkem množiny U rozumíme množinu

$$U^{\perp_f} = \{\mathbf{x} \in V : (\forall \mathbf{u} \in U)\ f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\} \ .$$

(Poznámka: Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nazýváme f-ortogonální, pokud $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$; f-ortogonální doplněk množiny U tedy tvoří ty vektory z $\mathbf{V}$, které jsou f-ortogonální ke všem vektorům z U.)

(11.2) Bilineární forma f na prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$[f]_K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Spočítejte f-ortogonální doplněk množiny

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\} \ .$$

Nápověda: Ukažte, že f-ortogonální doplněk podprostoru $W = \mathrm{LO}\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ je roven množině všech vektorů, které jsou f-ortogonální ke všem generátorům $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$. Najděte nějakou množinu generátorů podprostoru U a použijte učiněné pozorování.

Bonusový problém: Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{C}$ nazýváme *seskvilineární forma* na $\mathbf{V}$, pokud pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, t \in \mathbb{C}$ platí

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
- $f(\mathbf{u}, t\mathbf{v}) = tf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $f(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{t} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Seskvilineární forma se nazývá hermitovská, pokud $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{f(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Seskvilineární formy jsou zobecněním skalárního součinu nad $\mathbb{C}$.

(a) Dokažte, že bilineární forma f na komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je antisymetrická právě tehdy, když pro každý vektor $\mathbf{u} \in V$ platí $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.

(b) Dokažte, že seskvilineární forma f na komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je hermitovská právě tehdy, když je pro každý vektor $\mathbf{u} \in V$ číslo $f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ reálné.