Domácí úlohy 8.

odevzdat do 9.12. 15:40 (pondělí)

Uvažujte konečně generovaný modul M nad okruhem $T[x]$, T těleso. Jak jsme si říkali, jde o vektorový prostor V nad T konečné dimenze n a akci $n \times n$ matice A na V.

1. (bodů) Uvažujte konečně generovaný modul M nad okruhem $T[x]$, T těleso, a jeho dva podmoduly N_1, N_2 (jinými slovy, A-invariantní podprostory). Dokažte, že $M = N_1 \oplus N_2$ právě tehdy, když existuje báze prostoru V, ve které ma matice A blokově diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme nyní T algebraicky uzavřené. (Např. $T = \mathbb{C}$.)

Každý konečně generovaný $T[x]$-modul je torzní, jak plyne z Cayley-Hamiltonovy věty (viz přednáška), tedy M je direktní sumou svých $(x-\lambda)$-komponent (jiné ireducibilní polynomy v $T[x]$ nejsou). Každá taková komponenta je direktní sumou cyklických modulů $T[x]/((x-\lambda)^n)$.

Přeloženo do lineární algebry za pomoci první úlohy (aplikované induktivně na rozklady o větším množství podmodulů), ke každé matici existuje báze, v níž má blokově diagonální tvar a tyto bloky odpovídají cyklickým modulům uvedeného typu. Zbývá ukázat, že vhodnou volbou báze můžeme tyto bloky dostat ve tvaru Jordanovy buňky.

Uvažujte konečně generovaný modul M nad okruhem $T[x]$, reprezentovaný jako vektorový prostor V a matice A. Tento prostor můžeme považovat za $T[x]/I$-modul, pokud $IM = 0$.

2. (bodů) Dokažte, že M (reprezentovaný pomocí V, A) je cyklický $T[x]/((x-\lambda)^n)$-modul právě tehdy, když $\dim V = n$ a existuje báze prostoru V, ve které ma matice A tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ & & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}.$$

Návod: ($\Leftarrow$) Stačí dokázat, že to je opravdu $T[x]/((x-\lambda)^n)$-modul. Spočtěte charakteristický polynom a použijte Cayley-Hamiltonovu větu. ($\Rightarrow$) Zvolte bázi takto: buď v_1 nějaký generátor toho cyklického modulu, $v_{i+1} = (A - \lambda E)v_i$, $i = 2, \dots, n$. Dokažte, že to je doopravdy báze — zde se využije cykličnost modulu. Vyjádřete matici A vzhledem k této bázi.