Domácí úlohy 5.

odevzdat do 14.11. 14:00 (čtvrtek)

1. (9 bodů) Dokažte 1., 2. a 3. větu o izomorfismu pro moduly.

2. (6 bodů) Rozhodněte zda, je $\mathbb{Q}$ noetherovský a) $\mathbb{Z}$-modul, b) $\mathbb{Q}$-modul, c) $\mathbb{Q}_p$-modul. Rozumí se $\mathbb{Q}_p = \{\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} : p \nmid s\}$, p prvočíslo.

Doplňující cvičení

3. Dokažte větu o korespondenci podmodulů modulu M a faktormodulu M/K.

4. Dokažte pečlivě, že pro R-moduly $K_i \leq M$, $i \in I$, platí

$$\langle \bigcup K_i \rangle = \{\sum_{i \in I} k_i : \ k_i \in K_i, \text{ jen konečně mnoho z nich nenulových}\}.$$

5. Dokažte, že každý podmodul je jádrem nějakého homomorfismu. (Návod: uvažujte faktormodul.)

6. Dokažte, že kongruence daného modulu si vzájmeně jednoznačně odpovídají s podmoduly. (Pokud nevíte, co je kongruence, úlohu ignorujte.)

7. Buď M R-modul, označme $\mathrm{Ann}(M) = \{\alpha \in R : \alpha x = 0 \text{ pro všechna } x \in M\}$, říkejme tomu *anihilátor* modulu M. Dokažte, že

(1) $\mathrm{Ann}(M)$ je ideál;
(2) $\mathrm{Ann}(R/I) = I$, kde R/I uvažujeme jako R-modul;
(3) $\mathrm{Ann}(\sum K_i) = \bigcap \mathrm{Ann}(K_i)$, kde K_i, $i \in I$, jsou podmoduly daného modulu M.

8. Buď M R-modul a I ideál v R. Pak $IM = \{\alpha x : \alpha \in I, x \in M\}$ je zřejmě podmodulem modulu M. Dokažte, že $I \subseteq \mathrm{Ann}(M/IM)$. Dedukujte, že M/IM má strukturu R/I-modulu, kde $[\alpha]_I \cdot [x]_{IM} = [\alpha x]_{IM}$.

9. Buď M noetherovský R-modul a $\varphi : M \to M$ homomorfismus na M. Dokažte, že je to izormofismus. (Návod: uvažujte $\mathrm{Ker}(\varphi \circ \varphi)$.)

10. Buď $K, L \leq M$ R-moduly a předpokládejme, že $M/K, M/L$ jsou noetherovské. Dokažte, že $M/(K \cap L)$ je noetherovský.