Domácí úlohy 4.

odevzdat do 7.11. 14:00 (čtvrtek)

1. (6 bodů) Dokažte za pomoci Zornova lemmatu, že každé částečné uspořádání na dané množině lze rozšířit do lineárního uspořádání. (Rozšířením uspořádání $\leq$ se rozumí uspořádání $\preccurlyeq$ na téže množině takové, že pokud $x \leq y$, pak $x \preccurlyeq y$.)

2. (6 bodů) Spočtěte nil-radikál a Jacobsonův radikál komutativního okruhu $\mathbb{Z}_n$. (Nezapomeňte, že pro n složené to není obor integrity. Pokud používáte nějaké tvrzení o tom, jak vypadají ideály v těchto okruzích, tak jej nezapomeňte dokázat.)

3. (3 body) Buď I ideál v R. Dokažte, že $\sqrt{I}$ v R je rovno sjednocení bloků, které jsou v nilradikálu okruhu R/I. Stručně řečeno, $\sqrt{I} = \bigcup \sqrt{0/I}$.

Tedy pokud budete rozumět nilradikálům, budete umět počítat i ostatní radikály tím, že přejdete k faktorokruhu.

Doplňující cvičení

Ve všech úlohách se předpokládá, že R je komutativní okruh s jednotkou.

4. Dokažte, že $\sqrt{P^n} = P$ pro každý prvoideál P a $n \in \mathbb{N}$ (zde P^n značí součin n kopií prvoideálu P). Speciálně to znamená, že prvoideály jsou radikály.

5. Dokažte, že Jacobsonův radikál je radikál, tj. $\sqrt{J(R)} = J(R)$.

6. Buď I, J ideály. Dokažte, že
- $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$,
- $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$,
- $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$,
- $\sqrt{I} = R$ právě tehdy, když $I = R$.

7. Buď $a \in R$. Dokažte, že a je invertibilní právě tehdy, když nenáleží do žádného maximálního ideálu.

8. Dokažte, že R obsahuje právě jeden maximální ideál právě tehdy, když množina všech neinvertibilních prvků tvoří ideál. [Návod: použijte předchozí cvičení.]

9. Dokažte, že R obsahuje právě jeden prvoideál právě tehdy, když pro každý neinvertibilní prvek a existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a^k = 0$.

10. Rozmyslete si, co říkají předchozí dvě úlohy pro okruhy $\mathbb{Z}_n$ a pro okruhy formálních mocninných řad nad tělesem.

11. Buď R okruh všech spojitých reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, s operacemi po složkách. Spočtěte $J(R)$.

12. Buď $p_1, \dots, p_n$ prvočísla. Označme $R = \{\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} : p_1, \dots, p_n \nmid s\}$ (rozumí se zlomek v základním tvaru, tj. $\mathrm{NSD}(r, s) = 1$).

(1) Dokažte, že R je podokruh tělesa $\mathbb{Q}$, tedy je oborem integrity.
(2) Dokažte, že R má přesně n maximálních ideálů.
(3) Spočtěte $J(R)$.