Domácí úlohy 1.

odevzdat do 14.10. 15:40

Ve všech úlohách se předpokládá, že R je komutativní okruh s jednotkou.

1. (5 bodů) Buď $I = (a_1, \ldots, a_n)$ a $J = (b_1, \ldots, b_m)$ dva konečně generované ideály v R. Dokažte, že

$$IJ = \{\sum_{i,j} r_{i,j} a_i b_j : r_{i,j} \in R\}.$$

(Speciálním případem je jedno pozorování z přednášky, které říká, že $(aR)(bR) = (ab)R$.)

2. (10 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující ideály (i) hlavní, (ii) prvoideály, (iii) maximální.

a) $(x^3 - 1, x^5 - 1)$ v $\mathbb{Z}[x]$,
a) $(x^3 - 1, x^5 - 1)$ v $\mathbb{Q}[x]$,
b) (x, y) v $\mathbb{Q}[x, y]$,
d) (x^2y, xy^3) v $\mathbb{Q}[x, y]$,
e) $(xy, 2x^3y + 3)$ v $\mathbb{Q}[x, y]$.

Z uvedených příkladů vyberte ten, který dokládá, že NSD(a, b) může existovat i když ideál $aR + bR$ není hlavní.

(Na přednášce jsme dokázali, že pokud $aR + bR$ je hlavní, pak NSD existuje a lze vyjádřit jako lineární kombinace a, b. Příklad s uvedenou vlastností tedy implikuje, že v daném oboru neplatí Bezoutova věta. Také si vzpomeňte, že jsme na přednášce dokázali, že maximální ideály jsou vždy prvoideály, ale opačná implikace neplatí.)

Doplňující cvičení

3. Uvažujte okruh spojitých reálných funkcí (tj. prvky jsou spojité funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a operace se provádějí po bodech, tj. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ apod.). Je to obor integrity? Je to noetherovský okruh?

4. Dokažte, že R je noetherovský právě tehdy, když pro každou podmnožinu $U \subseteq R$ existuje konečně mnoho prvků $a_1, \dots, a_n \in U$ takových, že každý prvek $u \in U$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $u = \sum r_i a_i$ s nějakými koeficienty $r_1, \dots, r_n \in R$.

5. Uvažujte obor $R = T[x_1, x_2, x_3, x_4]$, kde T je těleso. Buď $I = (x_1, x_2)$ a $J = (x_3, x_4)$. Dokažte, že $IJ \neq \{fg : f \in I, g \in J\}$.

6. Buď I ideál a J hlavní ideál v R a předpokládejme, že $IJ = J$. Dokažte, že pak nutně $I = R$.

7. Buď $a, b \in R$ a předpokládejme, že $aR \cap bR$ je hlavní ideál. Dokažte, že existuje nejmenší společný násobek prvků a, b.

8. Buď R obor integrity, S jeho podobor a $a_1, \dots, a_n \in R$. Označme

$$I = \{f \in S[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0\}.$$

Dokažte, že I je prvoideál v oboru $S[x_1, \dots, x_n]$. Uveďte nějaký příklad, kdy tento prvoideál není maximální (obor R si zvolte libovolně).

9. Buď T těleso a $a_1, \dots, a_n \in T$. Dokažte, že $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ je maximální ideál v oboru $T[x_1, \dots, x_n]$.

10. Rozhodněte, zda jsou následující ideály hlavní. Pokud ano, najděte generátor.

a) $(105, 70, 30)$ v $\mathbb{Z}$,
b) $((4,3), (6,5))$ v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

11. Buď I, J ideály v R. Označme $(I : J) = \{r \in R : rb \in I$ pro všechna $b \in J\}$.

(1) Dokažte, že $(I : J)$ je ideál v R.
(2) Předpokládejme, že R je obor integrity hlavních ideálů. Co je generátorem ideálu $(aR : bR)$?