DÍL I.

Pojem nekonečna používají matematici téměř odjakživa. Vzpomeňme např. na Zénóna (asi 480 – 430) a jeho úlohu o Achillovi a želvě, či na úvahy Řeků o tom, že přímka vede na obě strany do nekonečna. Až do doby relativně nedávné však šlo výhradně o slovních spojení užívající nekonečno při popisu nějaké činnosti či vlastnosti (tzv. *potenciální* forma nekonečna) — např. „Achilles želvu *nikdy* nedohoní“, „posloupnost čísel *roste nade všechny meze*“ apod. Zato existence nekonečných souborů objektů (tzv. *aktuálního* nekonečna) nebyla diskutována, popřípadě byla z filozofických důvodů rovnou zavrhována. Dnešní (moderní) matematika však s aktuálním nekonečnem pracuje. Cílem seriálu je seznámit vás se základními principy práce s nekonečnými množinami a ukázat vám některé výsledky teorie množin, které jsou velmi zajímavé a často dosti překvapivé. Věřím, že vás nekonečno zaujme nejméně tak, jak zaujalo kdysi mě.

Proč studovat nekonečno. Již staří řečtí geometři pracovali z dnešního pohledu s nekonečnými soubory objektů. Pro ně ovšem přímka nebo rovina *nebyla* souborem bodů; byl to jeden nedělitelný geometrický objekt. O žádné nekonečné množině tedy nemohla být řeč. Tento přístup překvapivě vydržel více než 2000 let, až do 19. století.

Problémem nekonečna se v průběhu dějin zabývali někteří filozofové a teologové (Aristoteles, sv. Augustin, Tomáš Akvinský, Descartes, Spinoza, Leibnitz, Kant a další). Někteří ho byli ochotni přijmout, jiní ho horlivě zavrhovali. Na matematický pohled na věc však bylo třeba ještě dlouho počkat.

Od dob Gottfrieda Leibnitze (1646 – 1716) a Isaaca Newtona (1642 – 1727) se rozvíjela matematická analýza (studium reálných funkcí), založená na infinitesimálním počtu, čili počítání pomocí nekonečně malých a nekonečně velkých veličin. Až do začátku 19. století byly řešeny základní úlohy, které si s potenciálním nekonečnem a s geometrickou představou reálných čísel jako přímky vystačily. Ještě Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) pravil: *„Nekonečno nelze v matematice použít jako něco definitivního, je to jen způsob vyjádření, který označuje jistou hranici, k níž se některé veličiny mohou libovolně blížit, pokud jiné veličiny rostou neomezeně.“* (Což je mimochodem docela pěkná definice potenciálního nekonečna.)

V 19. století však přibyly problémy týkající se značně složitých částí reálné přímky, např. při vyšetřování definičních oborů funkcí vzniklých jako limita posloupnosti funkcí. Bylo třeba rozbít přímku na body a z těchto bodů sestavovat množiny. Pojem *množina* se poprvé vyskytl u pražského matematika Bernarda Bolzana (1781 – 1848). Ten jako první zkoumal nekonečné množiny reálných čísel. Šlo o velký zlom, neboť všichni Bolzanovi předchůdci používali nekonečno jen v jeho potenciální formě. Bolzanova kniha však nevzbudila velký ohlas. Až v roce 1873 se problémům nekonečných množin (motivován opět analýzou) začal věnovat Georg Cantor (1845 – 1918). Vzhledem k tomu, že mezitím byla vypracována moderní teorie reálných čísel (založená na zúplnění čísel racionálních), začínala se rýsovat i praktická aplikace jeho výsledků.

G. Cantor je považován za zakladatele moderní *teorie množin.* Vypracoval v letech 1873 – 1897 sérii prací, kde rozvinul metody zacházení s nekonečnými množinami. Objevil několik překvapivých faktů, které řada soudobých matematiků dlouho odmítala; některé si v seriálu ukážeme. Na přelomu 19. a 20. století se ale začaly objevovat skutečné paradoxy (lépe řečeno spory) v Cantorově pojetí teorie množin. Ač se velmi snažil je odstranit, do konce jeho života se to nepovedlo ani jemu, ani nikomu jinému. Říká se, že následkem všeobecného odporu proti své životní teorii zemřel v psychiatrické léčebně. Problémy teorie množin byly odstraněny až mnohem později, díky moderní logice a tzv. axiomatickému přístupu k teorii množin.

Ponechme však zatím moderní trendy stranou, vrátíme se k nim krátce v závěru seriálu. Nyní si předvedeme původní Cantorovy výsledky, které jsou samy o sobě v pořádku. Na problémy včas upozorníme, abychom neskončili jako on.

Cantorova diagonální metoda. Jedním z prvních překvapivých výsledků, které G. Cantor publikoval, byl fakt, že *reálných čísel je více než přirozených*. Formálně řečeno, není možné vzájemně jednoznačně přiřadit každé reálné číslo k nějakému číslu přirozenému. Čili nelze reálná čísla „očíslovat" přirozenými čísly. Zajímavý je nejen výsledek, nesmírně důležitá je i použitá metoda, v logice a teorii množin často užívaná.

Důkaz. Předpokládejme, že $a_1, a_2, \dots$ je posloupnost, která obsahuje všechna reálná čísla z intervalu $(0,1)$. Jak známo, každé reálné číslo $r \in (0,1)$ lze napsat v desítkovém rozvoji jako $r = 0{,}r_1 r_2 r_3 \dots$ Máme tedy

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}\boxed{a_{11}}a_{12}a_{13}a_{14}\dots\\
a_2 &= 0{,}a_{21}\boxed{a_{22}}a_{23}a_{24}\dots\\
a_3 &= 0{,}a_{31}a_{32}\boxed{a_{33}}a_{34}\dots\\
a_4 &= 0{,}a_{41}a_{42}a_{43}\boxed{a_{44}}\dots\\
&\dots
\end{aligned}$$

Nyní sestrojíme reálné číslo $b \in (0,1)$, které není v posloupnosti $a_1, a_2, \dots$, čímž dostaneme spor s volbou této posloupnosti. Položme pro každé i přirozené $b_i = 1$, pokud $a_{ii} \neq 1$, a $b_i = 2$, pokud $a_{ii} = 1$. Máme tedy $b_i \neq a_{ii}$, díky čemuž číslo $b = 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots$ nemůže být rovno žádnému a_i, neboť se od něj liší v i-té číslici v jeho desetinném rozvoji.

Neexistuje tedy ani posloupnost, která by obsahovala všechna reálná čísla, neboť taková by měla podposloupnost obsahující všechna reálná čísla z intervalu $(0,1)$.

Úloha, kterou v důkazu hrály diagonální prvky a_{ii}, je důvodem, proč se metodě říká *diagonální*. Nesetkáváte se s ní naposledy.

Důsledek. *Existují (co do velikosti) různá nekonečna.*

Poznamenejme, že už s touto překvapivou skutečností se řada Cantorových současníků těžko vyrovnávala, neboť naprosto nezapadala do tehdejší vžité představy nekonečna potenciálního.

Terminologie. Odpusťte jeden technický odstavec. Žádný delší matematický text se neobejde bez terminologie, která zjednodušuje a zpřesňuje vyjadřování. Většinu následujících pojmů již asi znáte, některé však budou nové.

Kartézský součin množin A, B je množina $A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$. Dále značíme $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ množinu všech uspořádaných n-tic prvků z A.

Zobrazení $f : A \to B$ je podmnožina kartézského součinu $f \subseteq A \times B$ taková, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ s vlastností $(a,b) \in f$. Prvek b se značí $f(a)$ a f je tedy množina všech dvojic $(a, f(a))$, $a \in A$. (Srovnejte s intuitivní definicí zobrazení jako předpisu, který každému prvku množiny A přiřadí nějaký prvek množiny B.)

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, pak $g \circ f : A \to C$ je zobrazení definované předpisem $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, $a \in A$.

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *prosté*, pokud různým $a_1, a_2 \in A$ přiřadí různé hodnoty, tj. $f(a_1) \neq f(a_2)$. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *surjektivní* (též *na* B), pokud každé $b \in B$ má vzor v A, tj. existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *bijekce* (též *vzájemně jednoznačné*), pokud je prosté a na B, tj. ke každému $b \in B$ existuje právě jedno $a \in A$ takové, že $f(a) = b$.

Očíslováním množiny A pomocí množiny I rozumíme bijekci $f : I \to A$. Prvky množiny A pak značíme a_i, $i \in I$, přičemž $a_i = f(i)$. Obvykle používáme v případě $I = \mathbb{N}$, kdy je očíslování množiny A totéž jako seřazení prvků množiny A do posloupnosti.

Je-li A množina, označíme $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ množinu všech podmnožin A; nazýváme ji *potenční množinou* A. Píšeme-li $X \subset A$, myslíme tím $X \subseteq A$ a zároveň $X \neq A$.

Porovnávání velikostí množin. Jak poznáme, která množina je větší? Přiřadíme k sobě (vzájemně jednoznačně) jejich prvky, načež nám buď nic nezbyde — pak jsou stejné, nebo nám v některé z nich něco zbyde — a ta je větší. Z toho vycházejí následující definice.

Řekneme, že množina A má *nejvýše tolik prvků jako* množina B, pokud existuje prosté zobrazení $A \to B$; píšeme $A \preceq B$. Řekneme, že množiny jsou *stejně velké* (mají stejně prvků), pokud existuje bijekce $A \to B$; píšeme $A \approx B$. Řekneme, že množina A má *méně prvků* než množina B, pokud $A \preceq B$ a $A \not\approx B$; píšeme $A \prec B$. Zatím ponecháme stranou, co to vlastně ten *počet prvků* množiny je.

Množiny dělíme podle velikosti následujícím způsobem.

(1) *Konečné* nazýváme ty, které lze očíslovat čísly $1, \ldots, n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, a množinu prázdnou. Tedy ty, které jsou stejně velké jako nějaká $\{1, \ldots, n\}$ nebo $\emptyset$. Ostatní množiny se nazývají *nekonečné*.

(2) *Spočetné* nazýváme ty, které lze očíslovat množinou všech přirozených čísel. Tedy ty, které jsou stejně velké jako $\mathbb{N}$. Ostatní nekonečné množiny se nazývají *nespočetné* (např. $\mathbb{R}$, jak jsme již ukázali).

(3) Je-li A nespočetná množina, která je stejně velká jako $\mathbb{R}$, říkáme, že A má *mohutnost kontinua*.

Rozmyslete si, že má-li množina A velikost menší než $\mathbb{N}$, pak už je konečná. Tedy žádná nekonečná množina menší než spočetná neexistuje.

Základní vlastnosti $\prec, \approx$. Velikosti množin definované výše splňují několik „samozřejmých“ vlastností. Zkuste si je sami dokázat s použitím níže uvedeného návodu!

(1) $A \approx A$.

(2) *Pokud* $A \approx B$, *pak* $B \approx A$.
(3) *Pokud* $A \approx B$, $B \approx C$, *pak* $A \approx C$.
(4) *Pokud* $A \preceq B$, $B \preceq C$, *pak* $A \preceq C$.
(5) *Pokud* $A \approx B$, *pak* $A \preceq B$ *a* $B \preceq A$.
(6) *Pokud* $A \subseteq B$, *pak* $A \preceq B$.
(7) $A \preceq B$ *právě tehdy, když existuje surjektivní zobrazení* $B \to A$.

Idea důkazu.

(1) Identické zobrazení $A \to A$ je bijekce.
(2) Je-li $f : A \to B$ bijekce, pak $f^{-1} : B \to A$ je také bijekce.
(3) Jsou-li $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijekce, pak $g \circ f : A \to C$ je také bijekce.
(4) Jsou-li $f : A \to B$, $g : B \to C$ prostá, pak $g \circ f : A \to C$ je také prosté.
(5) Je-li $f : A \to B$ bijekce, pak f i f^{-1} jsou prostá.
(6) Identické zobrazení $A \to B$ je prosté.
(7) Použijte něco jako inverzní zobrazení.

Možná vás zarazí, že mezi pravidly není uvedeno následující (velmi důvěryhodné) tvrzení: má-li A nejvýše tolik prvků jako B a zároveň B má nejvýše tolik prvků jako A, tak jsou množiny A, B stejně velké. Pravda to sice je, ale rozmyslete si, že to vůbec není zřejmé (podívejte se na definice pojmů týkajících se velikostí množin)! Tomuto tvrzení se říká Cantor–Bernsteinova věta. Její užitečnost je nasnadě: ne vždy je snadné zkonstruovat bijekci mezi dvěma stejně velkými množinami, může však být snadné zkonstruovat prosté zobrazení tam i zpět (zkuste např. zkonstruovat bijekci mezi intervaly $(0,1)$ a $\langle 0,1\rangle$).

Věta (Cantor–Bernstein). *Nechť* A, B *jsou libovolné množiny. Pokud* $A \preceq B$ *a* $B \preceq A$, *pak* $A \approx B$.

Důkaz. Nechť $f : A \to B$, $g : B \to A$ jsou prostá zobrazení. Chceme sestrojit bijekci $h : A \to B$.

Kde je problém? Funkce f není surjektivní. Množina B obsahuje *špatné* prvky, tj. ty, které nejsou obrazem žádného $a \in A$. Obarvíme množinu A dvěma barvami. Červeně ty prvky, které lze dostat jako obraz nějakého špatného prvku $b \in B$ při střídání zobrazení g, f, tedy všechny $a \in A$ takové, že existuje špatný $b \in B$, pro který $a = g(f(\dots g(f(g(b)))))$. Ostatní prvky A obarvíme modře.

Nyní definujeme zobrazení h. Pro červený prvek a položíme $h(a) = g^{-1}(a)$ (existuje právě jeden vzor prvku a, protože je g prosté). Pro modrý prvek a položíme $h(a) = f(a)$.

Dokážeme, že takto definované h je skutečně prosté a na. Jsou-li a_1, a_2 stejně barevné, pak zjevně $h(a_1) \neq h(a_2)$, neboť f je prosté, resp. vzor při g je jednoznačný. Nechť a_1 je červený, a_2 modrý a $h(a_1) = h(a_2)$. Pak ovšem $g^{-1}(a_1) = h(a_1) = h(a_2) = f(a_2)$, čili $a_1 = g(f(a_2))$, a tudíž a_2 je obrazem téhož špatného b jako a_1. Tedy a_2 není modrý, spor.

Zbývá dokázat surjektivitu h. Nechť $b \in B$, chceme najít $a \in A$ takový, že $h(a) = b$. Pokud $b = f(g(\dots f(g(b_0))))$ pro nějaký $b_0 \in B$ špatný, pak je $g(b)$ červený, a tudíž $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$. V opačném případě existuje $a \in A$ takový, že $b = f(a)$, přičemž a musí být modrý. Tedy $h(a) = f(a) = b$.

Konečné vs. nekonečné množiny. Porovnávání velikostí konečných množin je velmi snadné — očíslujeme jejich prvky a vidíme, kde nám vyšlo nejvíc. Povšimněte si následujících vlastností konečných množin.

(1) *Je-li A konečná, $a \notin A$, pak $A \prec (A \cup \{a\})$.*
(2) *Je-li A konečná, $B \subset A$, pak $B \prec A$.*
(3) *Je-li A konečná s aspoň dvěma prvky, pak $A \prec A \times A$.*

Ani jedno z těchto „očividných“ tvrzení však neplatí pro nekonečné množiny. Zvolme např. $A = \mathbb{N}$. Potom $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \approx \mathbb{N}$, stačí vzít bijekci $f(x) = x + 1$. Je-li B množina sudých přirozených čísel, máme $B \subset A$, ale $B \approx A$ při bijekci $f(x) = x/2$. A nakonec, a to již tak snadné není,

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Potřebujeme seřadit dvojice přirozených čísel do posloupnosti, čímž budeme mít očíslování $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ přirozenými čísly, a tedy $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots
\end{array}$$

Namalujme si dvojice do tabulky. Budeme postupně odkrajovat čtverce z levého horního rohu a čerstvě odkrojené dvojice dávat do posloupnosti. Např. takto:

$$(1,1) \quad (1,2)\ (2,2)\ (2,1) \quad (1,3)\ (2,3)\ (3,3)\ (3,2)\ (3,1) \quad \dots$$

Poznamenejme, že dokonce pro *každou* nekonečnou množinu A platí $A \times A \approx A$. Důkaz lze vést podobně jako v případě $\mathbb{N}$, ale je třeba překonat jisté obtíže. Uvidíte příště.

Spočetné vs. nespočetné množiny. Uvedeme si několik příkladů spočetných a nespočetných množin. Při znalosti výše uvedených skutečností nebude problém dokázat (zkuste si sami dříve, než se podíváte na řešení!), že

(1) *$\mathbb{Z}$ (celá čísla) a $\mathbb{Q}$ (racionální čísla) jsou spočetné množiny.*
(2) *Intervaly $(0,1)$ a $\langle 0,1 \rangle$ mají mohutnost kontinua.*

Důkaz.

(1) K důkazu $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ stačí najít očíslování celých čísel čísly přirozenými, tzn. stačí seřadit celá čísla do posloupnosti. To je snadné: např. $0, 1, -1, 2, -2, \dots$ Nyní budeme s využitím základních vlastností $\preceq$ a $\approx$ hledat prostá zobrazení $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Každému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$ (p, q nesoudělná, $q > 0$) můžeme jednoznačně přiřadit dvojici $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Máme tedy $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Jak už jsme ukázali, platí $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$, a tudíž také $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (rozmyslete si, jak vypadá příslušná bijekce!). Dále již víme, že $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, a tudíž máme $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, tj. $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$. Na druhou stranu, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, a tedy $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$. Užitím Cantor–Bernsteinovy věty dostaneme $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.
(2) Funkce $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definovaná $f(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$ pro všechna $x \in (0,1)$ je zřejmě bijekce, čímž máme $(0,1) \approx \mathbb{R}$.

Dále $\langle 0,1\rangle \subseteq \mathbb{R} \approx (0,1)$, a tudíž $\langle 0,1\rangle \preceq (0,1)$. Na druhou stranu, $(0,1) \subseteq \langle 0,1\rangle$, a tedy $(0,1) \preceq \langle 0,1\rangle$. Užitím Cantor–Bernsteinovy věty dostaneme $(0,1) \approx \langle 0,1\rangle$.

Podobným způsobem není těžké nahlédnout, že každá podmnožina reálných čísel obsahující interval má mohutnost kontinua, tj. je stejně velká jako celé $\mathbb{R}$.

Tvrzení. *Spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina.*

Důkaz. Nechť $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, přičemž A_n jsou spočetné. Zvolme bijekce $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Definujeme zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, které dvojici (m,n) přiřadí prvek $f_m(n)$. Toto zobrazení je zjevně surjektivní, a tudíž máme $A \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. Protože je A zřejmě aspoň spočetná, z Cantor–Bernsteinovy věty plyne $A \approx \mathbb{N}$.

Právě dokázaný fakt lze s úspěchem použít např. v první části následujícího příkladu i v některých úlohách.

(1) *Množina všech konečných podmnožin* $\mathbb{N}$ *je spočetná.*
(2) *Množina všech podmnožin* $\mathbb{N}$ *má mohutnost kontinua.*

Důkaz.

(1) Množinu všech konečných podmnožin $\mathbb{N}$ rozložíme na spočetně mnoho množin P_n, $n = 0,1,2,\ldots$, přičemž P_n bude obsahovat všechny n-prvkové podmnožiny $\mathbb{N}$. Nechť $A \in P_n$, $n \geq 1$. Označme (libovolným způsobem) $k_1,\ldots,k_n$ prvky A a přiřaďme množině A n-tici $(k_1,\ldots,k_n)$. Dostáváme prosté zobrazení množiny P_n do množiny $\{(k_1,\ldots,k_n) : k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^n$. Protože je $\mathbb{N}^n$ spočetná, P_n je také spočetná. (Čtenář nechť si rozmyslí, že ze spočetnosti $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ plyne spočetnost $\mathbb{N}^n$ pro libovolné n přirozené; dokažte indukcí!) Užitím tvrzení dostaneme spočetnost $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, což je množina všech konečných podmnožin $\mathbb{N}$.

(2) Označme P množinu všech posloupností čísel 0, 1. Stačí dokázat, že $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx P \approx (0,1)$, neboť již víme, že $(0,1)$ má mohutnost kontinua.
Nechť zobrazení f přiřadí podmnožině $A \subseteq \mathbb{N}$ posloupnost $(a_n^A)_{n=1}^{\infty}$, přičemž $a_n^A = 1$ právě tehdy, když $n \in A$. Vidíme, že f je prosté (pokud $m \in A$, $m \notin B$, pak $a_m^A = 1 \neq 0 = a_m^B$) a zároveň f je surjektivní (posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ odpovídá množina $\{n \in \mathbb{N} : b_n = 1\}$). Tudíž $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to P$ je bijekce, tj. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx P$.
Ke každému reálnému číslu $r \in (0,1)$ s dvojkovým rozvojem $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ přiřadíme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ z P. Protože je toto přiřazení prosté, máme $(0,1) \preceq P$. Na druhou stranu, každé posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ z P můžeme přiřadit reálné číslo s trojkovým rozvojem $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ I toto přiřazení je prosté, takže $P \preceq (0,1)$. Z Cantor–Bernsteinovy věty plyne $P \approx (0,1)$.

Problém na závěr. Každý dobrý matematický text obsahuje alespoň jeden těžký problém, aby měl čtenář nad čím přemýšlet. Nuže, zkuste se zamyslet nad následujícím. Všechny dosud diskutované množiny byly buď konečné, nebo spočetné, nebo mohutnosti kontinua. Příště si ukážeme, že existuje strašně moc množin větších než $\mathbb{R}$ (např. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). Dnešní otázka tedy zní:

Existuje množina A taková, že $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$?

DÍL II.

V úvodu druhého dílu předvedeme řešení dvou klasických problémů, v nichž se nekonečné množiny explicitně vůbec nevyskytují. Přitom velmi fundamentálně použijeme znalosti o velikostech nekonečných množin získané minule. Obě dvě řešení jsou založena na následujícím pozorování (pro B mohutnosti kontinua a A spočetnou).

Pozorování. *Nechť $A \subset B$ jsou množiny a platí $A \prec B$. Pak existuje prvek $x \in B$, který neleží v A.*

Důkaz. Kdyby neexistoval, tak $A = B$, a tudíž $A \approx B$, což je spor s $A \prec B$.

Poznamenejme, že platí obecnější tvrzení. Je-li $A \subset B$, $A \prec B$ a B je nekonečná, pak $B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}$ je stejně velká jako B. Důkaz snadno vymyslíte pomocí faktu, že $B \times B \approx B$ (viz níže).

Algebraická a transcendentní čísla. Jednou z prvních aplikací teorie množin bylo řešení problému existence tzv. *transcendentních čísel.* Jedná se o reálná čísla, která nejsou kořenem žádného polynomu s celočíselnými koeficienty, tj. nejsou řešením žádné rovnice typu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Čísla, která jsou řešením nějaké takové rovnice, se nazývají *algebraická.* Algebraických čísel je velká spousta a mohou vypadat dost podezřele: např. všechna racionální čísla, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{3}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ atd. (dokažte!). Prastarou otázkou bylo, zda náhodou nejsou všechna čísla algebraická — ještě v polovině 19. století nebylo nalezeno žádné transcendentní číslo. První sestrojil až v roce 1851 J. Liouville. (Dnes už víme, že např. π nebo e jsou transcendetní, ale není to vůbec snadné dokázat.) V roce 1874 přišel Cantor s revoluční myšlenkou. Aniž by jakékoliv transcendentní číslo sestrojil, dokázal, že jich je mnohem více než čísel algebraických. Ukážeme si jeho úvahu.

Každé algebraické číslo je kořenem nějakého polynomu tvaru (1). Analogicky jako v 1. úloze dokážeme, že množina P_n všech celočíselných polynomů stupně n je spočetná — takový polynom je jednoznačně určen $n+1$ celými čísly (svými koeficienty), a tudíž $P_n \approx \mathbb{Z}^{n+1} \approx \mathbb{N}^{n+1} \approx \mathbb{N}$. Dále využijeme známý fakt, že každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů. Množina všech kořenů polynomů z P_n má tedy nejvýše tolik prvků jako $\{1, \ldots, n\} \times P_n$, čili je opět spočetná. Množina všech algebraických čísel tedy není větší než $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{1, \ldots, n\} \times P_n)$, což je spočetné sjednocení spočetných množin, tj. spočetná množina (viz tvrzení minule). Takže algebraických čísel je spočetně mnoho, ale přitom reálných čísel je nespočetně mnoho. Aplikací pozorování dostáváme, že existuje nealgebraické, tj. transcendentní číslo (a dokonce jich existuje nespočetně mnoho, tedy více než čísel algebraických).

Eukleidovsky konstruovatelné body. Eukleidovskou konstrukcí v rovině myslíme konstrukci pravítkem a kružítkem. Nechť X je alespoň dvoubodová konečná množina bodů v rovině. Body *eukleidovsky konstruovatelné z množiny X* (krátce *eukleidovské*) získáme konečným počtem aplikací následujících pravidel:

(1) Každý bod množiny X je eukleidovský (zadané body).

(2) Jsou-li A, B, C, D eukleidovské body, pak průsečík přímek AB, CD je eukleidovský (umíme zkonstruovat průsečík dvou přímek).
(3) Jsou-li A, B eukleidovské body a r, s vzdálenosti nějakých dvojic eukleidovských bodů, pak průsečíky kružnic $k(A, r)$ a $k(B, s)$ jsou eukleidovské (umíme vzít do kružítka vzdálenost, opsat kružnice se středem v daných bodech a zkonstruovat průsečíky těch kružnic).
(4) Jsou-li A, B, C eukleidovské body a r je vzdálenost nějakých dvou eukleidovských bodů, pak průsečíky přímky AB a kružnice $k(C, r)$ jsou eukleidovské (umíme zkonstruovat průsečíky přímky a kružnice).

Je každý bod roviny eukleidovsky zkonstruovatelný z množiny X?

Použijeme podobnou fintu. Označme X_n množinu všech bodů zkonstruovatelných v n krocích. Množina všech eukleidovských bodů tedy je $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Ze zadání plyne, že $X_1 = X$ je konečná. Indukcí dokážeme, že je-li X_n konečná, pak X_{n+1} je konečná také. Máme-li v X_n konečně mnoho bodů, existuje jen konečně mnoho různých přímek a kružnic jimi určených. Protože X_{n+1} obsahuje právě všechny možné průsečíky těchto přímek a kružnic, je X_{n+1} konečná. Máme tedy spočetné sjednocení konečných množin a to je spočetné. (Přesněji řečeno, je konečné nebo spočetné, ale snadno nahlédneme, že eukleidovských bodů je nekonečně mnoho.) Jenže rovina obsahuje nespočetně mnoho bodů (např. proto, že obsahuje přímku, tj. $\mathbb{R}$). Takže existuje bod, který není eukleidovsky zkonstruovatelný z X (a je jich dokonce více než těch zkonstruovatelných).

Uvědomte si, že z důkazu plynou i silnější tvrzení: např. že na každé úsečce (obecně v každé nespočetné podmnožině roviny) existuje bod, který není eukleidovsky zkonstruovatelný.

Opět poznamenejme, že odpověď na výše uvedenou otázku je dávno známá — vzpomeňme např. na věhlasné problémy typu kvadratura kruhu, která říká, že z dané dvouprvkové množiny $X = \{A, B\}$ nelze eukleidovsky sestrojit žádné dva body se vzdáleností $\sqrt{\pi} \cdot |AB|$, neboť takové by byly hranou čtverce, který má stejný obsah jako kruh o poloměru $|AB|$ se středem v A. Náš postup je však patrně o dost kratší a myšlenkově jednodušší, než důkaz neřešitelnosti kterékoliv z proslulých geometrických úloh. Na druhou stranu nám ale nedává žádnou konkrétní úlohu, kterou bychom neuměli eukleidovsky řešit.

Další vlastnosti nekonečných množin. V minulé části jsme se soustředili na spočetné množiny. Většinu dokázaných tvrzení však lze zobecnit na libovolné nekonečné množiny. Klíčovým poznatkem je následující věta.

Věta. *Je-li A nekonečná množina, pak $A \times A \approx A$.*

Její důkaz sice není těžký, avšak vyžaduje jisté další znalosti o uspořádaných množinách. Prozatím větu necháme nedokázanou a vrátíme se k ní v příštím dílu.

Důsledkem této věty jsou následující užitečná tvrzení, analogická těm, která jsme minule dokázali pro spočetné množiny (srovnejte jejich důkazy).

Tvrzení. *Buď A nekonečná množina, $I \preceq A$ a $A_i \preceq A$ pro všechna $i \in I$. Pak $\bigcup_{i \in I} A_i \preceq A$. Speciálně, sjednocení množin stejně velkých jako A přes indexovou množinu stejně velkou jako A je stejně velké jako A.*

Důkaz. Označme $B = \bigcup_{i \in I} A_i$. Zvolme surjektivní zobrazení $f_i : A \to A_i$ (viz 3. úloha). Definujeme zobrazení $f : I \times A \to B$, které dvojici (i, a) přiřadí prvek $f_i(a)$. Toto zobrazení je zjevně surjektivní, a tudíž máme $B \preceq I \times A \preceq A \times A \approx A$. Je-li aspoň jedna z množin A_i stejně velká jako A, pak je zřejmě $A \preceq B$, a tedy z Cantor–Bernsteinovy věty plyne $A \approx B$.

Věta. *Buď A nekonečná množina. Pak*

(1) *množina všech konečných podmnožin A je stejně velká jako A.*
(2) *množina všech podmnožin A je větší než A.*

Důkaz.

(1) Množinu všech konečných podmnožin množiny A rozložíme na spočetně mnoho množin P_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, přičemž P_n bude obsahovat všechny n-prvkové podmnožiny A. Nechť $X \in P_n$, $n \geq 1$. Označme (libovolným způsobem) $x_1, \ldots, x_n$ prvky X a přiřaďme množině X n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$. Dostáváme prosté zobrazení množiny P_n do množiny $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in A\} = A^n$. Protože je $A^n \approx A$ (viz 3. úloha), máme $P_n \preceq A$. Užitím tvrzení dostáváme $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n \preceq A$ (sjednocujeme přes $\mathbb{N} \cup \{0\} \approx \mathbb{N} \preceq A$). Protože množina všech konečných podmnožin A není menší než A, musí být $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n \approx A$.
(2) Použijeme Cantorovu diagonální metodu. Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že $A \approx \mathcal{P}(A)$ a zvolme libovolnou bijekci $f : A \to \mathcal{P}(A)$ (tj. f přiřazuje každému prvku A nějakou podmnožinu A). Zkonstruujeme množinu $B \in \mathcal{P}(A)$, která není obrazem žádného $a \in A$, čímž dostaneme spor se surjektivitou f. Položme

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(A).$$

Nechť $f(a) = B$ pro nějaký prvek $a \in A$. Jsou dvě možnosti. Buď $a \in B$. Pak podle definice množiny B platí $a \notin f(a) = B$, spor. Takže musí platit $a \notin B$. Jenže v tom případě $a \notin f(a) = B$, takže podle definice množiny B je $a \in B$. Opět spor.

Uvědomte si, že druhá část předchozí věty (poněkud překvapivě) tvrdí, že ke každé množině umíme najít nějakou větší. Takže škála velikostí množin není shora omezená!

Cantorův paradox. Označme V množinu, která obsahuje všechny množiny. Podle předešlé věty $\mathcal{P}(V) \succ V$. Přitom ale $\mathcal{P}(V) \subseteq V$ (podmnožiny V jsou také množiny), a tudíž $\mathcal{P}(V) \preceq V$. To ale vyvrací Cantor–Bernsteinovu větu! Takže máme spor v matematice? Anebo musíme přijmout fakt, že objekt, který obsahuje všechny množiny, není sám množinou.

Právě předvedené argumentaci se říká Cantorův paradox. Byla to jedna ze záležitostí, která značně podryla všeobecnou důvěru v Cantorovu teorii nekonečných množin. Poznamenejme, že na tento fakt přišel sám Cantor a nijak se jej nesnažil skrývat. Doufal, že se tento problém dalším vývojem teorie množin nějak odstraní. Dnes tento paradox řešíme mírnou opatrností v tom, co všechno ještě nazveme množinou. Více v závěrečném dílu seriálu.

Hypotéza kontinua. Povšimněte si, že až dosud jsme pracovali výhradně s množinami, které byly buď spočetné, nebo mohutnosti kontinua (s výjimkou právě diskutované neomezené škály množin). Na konci minulé části jste se měli zamyslet nad problémem, zda existuje množina A taková, že $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$, tj. která by byla nespočetná, ale menší než kontinuum. Kdysi dávno (kdo jiný než) G. Cantor formuloval tzv. *hypotézu kontinua*, která říká, že taková množina neexistuje. S hypotézou však nepohnul ani on, ani mnoho jeho nástupců a vy patrně také ne. A jak to tedy je? Asi budete překvapeni: existence takové množiny A nejde ani dokázat, ani vyvrátit (takže pokud jste nějakou našli, asi to nebude dobře). Kurt Gödel v 30. letech dokázal, že taková množina není zkonstruovatelná pomocí běžných množinových operací (jako např. $\cap, \cup, \times, \mathcal{P}$ apod.). V 60. letech pak P. J. Cohen zjistil, že přesto není sporné její existenci předpokládat. Více opět v závěru seriálu.

Mocniny množin. Následující terminologie nám v dalším textu značně zjednoduší život. *Mocninou množin* A, B nazveme množinu všech zobrazení $A \to B$ a označíme ji B^A. Proč se užívá zrovna tohle označení? Je-li $N = \{1, \dots, n\}$, máme očividnou bijekci mezi B^N a B^n — stačí funkci $f : N \to B$ přiřadit n-tici $(f(1), f(2), \dots, f(n))$. Symbol B^A tedy značí něco jako množinu všech „A-tic“ prvků z B, tj. něco jako $B \times B \times \dots$ „A-krát“. Speciálně, $B^{\mathbb{N}}$ značí množinu všech posloupností prvků B. Krom toho si uvědomte, že jsou-li A, B konečné, A má a prvků a B má b prvků, tak B^A má b^a prvků. Zaveďme ještě konvenci, že je-li $B = \{0, \dots, n-1\}$, budeme psát pouze n^A.

Věta. *Je-li A nekonečná, pak $2^A \approx A^A \approx \mathcal{P}(A)$.*

Důkaz. Ukážeme, že

$$2^A \preceq A^A \preceq \mathcal{P}(A \times A) \approx \mathcal{P}(A) \approx 2^A,$$

z čehož užitím Cantor–Bernsteinovy věty obdržíme požadované rovnosti.

První nerovnost je jasná. Druhá nerovnost plyne z toho, že každé zobrazení $f : A \to A$ je zároveň množinou všech dvojic $(a, f(a)) \in A \times A$, tj. je podmnožinou $A \times A$. První rovnost plyne z faktu $A \times A \approx A$. Zbývá tedy dokázat rovnost poslední.

Budeme postupovat analogicky jako v případě $A = \mathbb{N}$ (viz minule). Nechť zobrazení f přiřadí podmnožině $B \subseteq A$ funkci $\chi_B : A \to \{0, 1\}$, přičemž $\chi_B(a) = 1$ právě tehdy, když $a \in B$ (tj. χ_B je funkce, které zadáte a a ona vám odpoví, zda $a \in B$). Vidíme, že f je prosté (pokud $a \in B$, $a \notin C$, pak $\chi_B(a) = 1 \neq 0 = \chi_C(a)$) a zároveň f je surjektivní (zobrazení $g : A \to \{0, 1\}$ odpovídá množina $\{a \in A : g(a) = 1\}$). Tudíž $f : \mathcal{P}(A) \to 2^A$ je bijekce.

Věta vlastně říká, že je-li $B \preceq A$ aspoň dvouprvková, pak vždy vyjde $B^A \approx \mathcal{P}(A)$. Přirozenou otázkou je, jak velké jsou mocniny pro $B \succ A$. Je-li A konečná n-prvková, pak $B^A \approx B^n \approx B$. Ovšem pro A nekonečnou je situace překvapivě složitá. Jednoznačnou odpověď nedostaneme ani pro $A = \mathbb{N}$, tj. pro množiny posloupností. My se proto zatím omezíme jen na konkrétní příklady.

Reálné posloupnosti. Ukážeme, že množina všech reálných posloupností má mohutnost kontinua, tj. že $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$. K tomu vtipně využijeme počítání s mocninami množin. Platí totiž, že $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx 2^{\mathbb{N}}$ (viz minulý díl a předchozí věta), a tudíž

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \approx (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \approx 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \approx 2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}.$$

Jediná rovnost vyžadující komentář je ta druhá — tu si však snadno odvodíte sami (viz 6. úloha).

Situace, kdy $B^{\mathbb{N}} \approx B$, je spíše obvyklá. Vždy to tak ale není. Zkuste se zamyslet nad následujícím (těžkým, ale tentokrát už řešitelným) problémem:

Najděte nespočetnou množinu B takovou, že $B^{\mathbb{N}} \succ B$.

Reálné funkce. Poznamenejme, že množina všech reálných funkcí je už větší než mohutnost kontinua — podle věty o mocninách platí $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \approx \mathcal{P}(\mathbb{R}) \succ \mathbb{R}$.

Limita posloupnosti. Pro účely následujícího odstavce připomeneme definici limity posloupnosti. Pokud tento pojem neznáte, nevadí — pro naše účely bude stačit intuitivní představa (nebo nahlédněte do nějaké učebnice). Neformálně řečeno, posloupnost reálných čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k $x \in \mathbb{R}$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$), pokud počínaje nějakým (dostatečně velkým) indexem N se všechny další prvky posloupnosti od x skoro neliší. Formálně, pokud pro každé (libovolně malé) $\varepsilon > 0$ existuje (dostatečně velké) N takové, že pro všechna $n \geq N$ je $|x_n - x| < \varepsilon$.

Spojité funkce. Neformálně řečeno, spojitou reálnou funkcí myslíme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jejíž graf lze nakreslit souvislou čarou (bez zvedání tužky z papíru). Formálních definic je více, nám se bude hodit tato: funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *spojitá*, pokud pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Množinu všech spojitých reálných funkcí značíme $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Ukážeme, že spojitých reálných funkcí je méně než všech reálných funkcí.

Tvrzení. *Množina všech spojitých reálných funkcí má mohutnost kontinua.*

Důkaz. Každá spojitá reálná funkce f je jednoznačně určena svými hodnotami na racionálních číslech. Máme-li totiž x iracionální, existuje posloupnost racionálních čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (nalezněte nějakou! návod: užijte desetinný rozvoj x). Díky spojitosti je tedy hodnota $f(x)$ jednoznačně určena jako $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Spojitých funkcí tedy určitě není více, než zobrazení $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ (máme prosté zobrazení přiřazující spojité reálné funkci f zobrazení $f|_{\mathbb{Q}}$). Jenže $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, a tedy množina $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ je stejně velká jako množina $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a o té již víme, že má mohutnost kontinua. Protože např. všechny konstantní funkce jsou spojité, máme $\mathbb{R} \preceq \mathcal{C}(\mathbb{R}) \preceq \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \approx \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$, a tak z Cantor-Bernsteinovy věty plyne $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.

Pokrytí roviny přímkami. Na závěr malý kvíz. Přímka je stejně velká jako rovina ($\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$). Kolik však je třeba přímek na pokrytí celé roviny? (Zkuste sami vymyslet řešení dříve, než budete číst dále!)

Mějme množinu P přímek v rovině, nechť $P \prec \mathbb{R}$. Ukážeme, že P nepokrývá celou rovinu. Zvolme přímku p, která neleží v P (taková jistě existuje). Ta má s každou přímkou z P nejvýše jeden průsečík. Na p je tedy pokryto nejvýše tolik bodů, kolik je v P přímek. Protože $p \approx \mathbb{R}$, ale $P \prec \mathbb{R}$, existuje na p nepokrytý bod (viz pozorování v úvodu dnešního dílu). K pokrytí roviny je tedy třeba alespoň mohutnost kontinua přímek. Na druhou stranu, mohutnost kontinua stačí — zvolíme libovolnou přímku p a rovinu pokryjeme všemi přímkami rovnoběžnými s p.

DÍL III.

V minulých dílech jsme se naučili porovnávat velikosti množin. Přesto nepadlo ani slovo o tom, co to vlastně ta *velikost množiny* je. O tom bude pojednávat dnešní díl seriálu. Předvedeme také další užitečnou techniku na řešení úloh s teorií množin zdánlivě nesouvisejících.

Rád bych se ještě předem omluvil, že v části věnované ordinálním číslům bude několik tvrzení uvedeno bez důkazu, neboť tato problematika je technicky poměrně náročná. Pro pozdější použití však snad bude stačit intuitivní náhled.

Motivace pojmů. Počet prvků konečné množiny je určen celým nezáporným číslem. Potřebovali bychom tato čísla nějakým způsobem rozšířit tak, abychom i ke každé nekonečné množině mohli přiřadit právě jedno „nekonečné číslo“ udávající počet jejích prvků, a to tak šikovně, že stejně velkým množinám přiřadíme stejné „číslo“. Jak to ale udělat? Idea je taková, že ze všech stejně velkých množin vybereme jako reprezentanta nějakou v jistém smyslu „nejmenší“. Tato myšlenka vypadá nesmyslně — vždyť z každé nekonečné množiny můžeme ubrat jeden prvek, a přitom ta množina bude pořád stejně velká. Musíme na to jít trochu oklikou.

Celá nezáporná čísla (označme je $\mathbb{N}_0$) mají i jinou užitečnou vlastnost — jsou uspořádána. Povšimněte si následujících faktů. Pro každá $a, b \in \mathbb{N}_0$ platí právě jedna z možností $a = b$, nebo $a < b$, nebo $b < a$. Pro každá $a, b, c \in \mathbb{N}_0$, pokud $a < b$ a $b < c$, pak také $a < c$. A zejména, každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}_0$ má nejmenší prvek. Pojem uspořádání na $\mathbb{N}_0$ zobecníme na libovolnou množinu tak, aby vykazovalo podobné vlastnosti.

Dobré uspořádání. Buď A nějaká množina, buď $\lhd$ relace na A (jsou-li prvky $a, b \in A$ v relaci, píšeme $a \lhd b$,). Řekneme, že $\lhd$ je *dobré uspořádání na* A, pokud platí následující podmínky:

(1) pro každá $a, b \in A$ platí právě jedna z možností $a = b$, nebo $a \lhd b$, nebo $b \lhd a$;
(2) pro každá $a, b, c \in A$, pokud $a \lhd b$, $b \lhd c$, pak také $a \lhd c$;
(3) je-li $B \subseteq A$ neprázdná, pak existuje $b \in B$ takové, že pro každé $a \in B$, $a \neq b$, platí $b \lhd a$ (tj. B má v uspořádání $\lhd$ nejmenší prvek b).

Příkladem dobře uspořádané množiny jsou samozřejmě celá nezáporná čísla s běžným uspořádáním. Příkladem uspořádané množiny, která není dobře uspořádaná, jsou reálná čísla — žádný otevřený interval nemá nejmenší prvek. Dobrých uspořádání je velmi mnoho. Dá se dokázat, že *na každé množině existuje nějaké dobré uspořádání.*[1] My se budeme dále zabývat jistým speciálním, avšak velmi důležitým, případem.

Ordinální čísla. Řekneme, že množina A je *ordinální číslo* (krátce *ordinál*), pokud

(a) $\in$ je dobré uspořádání na A;
(b) pokud $b \in a \in A$, pak $b \in A$ (tj. pro každé $a \in A$ platí $a \subset A$).

[1]Pro pokročilé poznamenejme, že tato věta je ekvivalentní s tzv. axiomem výběru.

Uvědomte si, že podmínka (a) znamená, že o dvou prvcích A říkáme, že a je menší než b, pokud $a \in b$. Ordinální čísla bývá zvykem značit malými řeckými písmeny. Nesmíte se ovšem nechat zmást: ordinál α je množinou, která obsahuje jiné množiny, které zase obsahují množiny, atd. Přitom lze nahlédnout, že všechny tyto množiny jsou opět ordinální čísla, a proto je všechny značíme malými písmeny.

Označme Ord souhrn všech ordinálních čísel. Lze snadno nahlédnout, že Ord splňuje také podmínky (a),(b). Pokud by tedy Ord byla množina, bylo by Ord ordinální číslo, a tady by platilo $Ord \in Ord$. Z tohoto faktu již není těžké odvodit (obdobným způsobem jako v minulém díle u Cantorova paradoxu) spor. Ord tedy není množina. Vlastnosti (a),(b) však budeme hojně využívat.

Definice ordinálního čísla se může jevit dosti podivná. Není však kupodivu těžké zjistit, jak ordinální čísla vypadají. Je snadné nahlédnout následující tvrzení (dokažte!):

(1) $\emptyset$ je ordinální číslo;
(2) je-li α ordinální číslo, pak $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ je také ordinální číslo (tzv. *následník* čísla α);
(3) je-li A množina ordinálních čísel, pak $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ je také ordinální číslo.

Ještě důležitější však je, že všechna ordinální čísla lze dostat uvedeným způsobem.

Věta. *Ord je nejmenší souhrn množin splňující (1), (2), (3).*

Důkaz této věty nebudeme uvádět, protože je dlouhý a technický, ale větu budeme klíčovým způsobem využívat.

Můžeme její pomocí popsat všechna konečná ordinální čísla. Na začátku máme prázdnou množinu. Z ní vytvoříme jednoprvkový ordinál $\emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$. Z něj dále dvouprvkový ordinál $\{\emptyset\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. A tak můžeme postupovat dále. Je vidět, že v každém kroku přibyde právě jeden prvek, a tedy pro každé celé nezáporné číslo n existuje právě jeden n-prvkový ordinál — označme jej $\underline{n}$ — a přitom $\underline{n}^+ = \underline{n+1}$. Takže konečná ordinální čísla modelují celá nezáporná čísla.

Povšimněte si také této vlastnosti: $\underline{0} = \emptyset$, $\underline{1} = \{\emptyset\} = \{\underline{0}\}$, $\underline{2} = \{\underline{0}, \underline{1}\}$, atd. Indukcí je snadné nahlédnout, že $\underline{n} = \underline{n-1} \cup \{\underline{n-1}\} = \{\underline{0}, \dots, \underline{n-1}\}$. Také si všimněte, že $m < n$ právě tehdy, když $\underline{m} \in \underline{n}$.

Jak vypadá nejmenší nekonečné ordinální číslo? Buď A množina všech konečných ordinálních čísel, tj. $A = \{\underline{0}, \underline{1}, \dots\}$. Podle podmínky (3) je $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha = A$ také ordinální číslo. Náš model celých nezáporných čísel je tedy sám ordinálním číslem. A to nejmenším nekonečným. Tento ordinál je zvykem značit ω. Ordinální číslo ω nelze dostat jako následník žádného jiného ordinálu. Takovým ordinálním číslům se říká *limitní.*

Závěrem zmiňme jednu veledůležitou vlastnost naznačenou v odstavci o dobrém uspořádání (opět ponecháme bez důkazu). *Je-li $\lhd$ dobré uspořádání na množině A, pak existuje právě jedno ordinální číslo α a bijekce $f : A \to \alpha$ taková, že $a \lhd b$ právě tehdy, když $f(a) \in f(b)$.* Ke každému dobrému uspořádání tedy můžeme najít ordinální číslo, které se vzhledem k uspořádání $\in$ „chová stejně“.

Mohutnost množiny. Nyní již můžeme říci, co budeme rozumět velikostí množiny. *Mohutnost množiny A* (též *kardinalita*) se nazývá nejmenší (v uspořádání $\in$) ordinální číslo κ takové, že $\kappa \approx A$. Takové ordinální číslo existuje právě jedno a stejně velkým množinám je zřejmě přiřazeno stejné ordinální číslo. Píšeme $|A| = \kappa$.

Existence vůbec nějakého κ plyne z toho, že na každé množině (čili i na A) existuje dobré uspořádání a z každé dobře uspořádané množiny existuje bijekce na nějaké (stejně velké) ordinální číslo. Dobrých uspořádání však na A může existovat více. Je tedy třeba vzít to, které dá bijekci na *nejmenší* ordinál. A proč existuje *nejmenší* takový ordinál? Je-li $B \subset Ord$ je množina všech ordinálů, které takto dostaneme, pak třetí podmínka u dobrého uspořádání říká, že B obsahuje nejmenší prvek.

A jsme u toho, co jsme v úvodu mysleli tím „nejmenším" reprezentantem.

Kardinální čísla. Některá ordinální čísla jsou rovna své mohutnosti — platí pro ně $|\kappa| = \kappa$. To znamená, že takové κ je nejmenší (v uspořádání $\in$) ze všech ordinálních čísel stejně velkých jako κ. Neboli pro každé $\alpha \in \kappa$ platí $\alpha \prec \kappa$. Tato ordinální čísla tedy slouží jako reprezentanti pro počet prvků množiny. Říkáme jim *kardinální čísla* (krátce *kardinály*).

Je zřejmé, že $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots$ jsou kardinální čísla. Bývá zvykem vynechávat podtržítko, abychom mohli psát počet prvků konečné množiny běžnými celými nezápornými čísly. Budeme tedy psát $\underline{0} = 0$, $\underline{1} = 1, \ldots$ a nulu a všechna přirozená čísla budeme považovat za kardinální čísla.

Dále si uvědomte, že nejmenší nekonečný ordinál, tj. ω, je zároveň nejmenším nekonečným kardinálním číslem. Na druhou stranu, ne každé ordinální číslo je zároveň kardinálem — např. $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$ je zřejmě spočetná, a tedy $|\omega^+| = \omega$. O nekonečných kardinálních číslech více v závěru dnešního dílu.

Mohutnost kartézského součinu. Následující věta zůstala minule bez důkazu, což nyní napravíme.

Věta. *Je-li A nekonečná množina, platí $A \times A \approx A$.*

Důkaz. Platí-li $A \times A \succ A$ pro nějakou nekonečnou množinu A, pak také zřejmě platí $\kappa \times \kappa \succ \kappa$ pro $\kappa = |A|$. Tvrzení tedy stačí dokázat pro všechna kardinální čísla.

Pro spočetný kardinál (tj. pro ω) tvrzení platí (viz první díl). Dále budeme postupovat sporem. Buď κ nejmenší kardinální číslo takové, že $\kappa \times \kappa \succ \kappa$ (zde je klíčový důvod toho, proč nebylo možné důkaz provést minule — bez dobrého uspořádání jsme nemohli mluvit o nejmenší množině, pro kterou tvrzení neplatí).

Označme $\lambda = |\kappa \times \kappa|$. Nechť $f : \lambda \to \kappa \times \kappa$ je bijekce, která „ukrajuje z $\kappa \times \kappa$ po čtvercích" — tím máme na mysli analogii zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z prvního dílu. (Neformálně řečeno, namalujeme tabulku, kde v prvním řádku budou všechny dvojice $(0, \alpha)$, v druhém $(1, \alpha)$, atd., ukrajujeme „čtverce" z levého horního rohu.)

Protože $\kappa \prec \lambda$, platí také $\kappa \in \lambda$ (ordinální čísla jsou uspořádána relací $\in$), a tudíž podle podmínky (b) také $\kappa \subset \lambda$. Podíváme se, na co zobrazí f prvky κ. Označme $B = \{f(\alpha) : \alpha \in \kappa\} \subset \kappa \times \kappa$. Určitě bude B podmnožinou nějakého menšího „čtverce", řekněme s „hranou" $\beta \in \kappa$ — tedy f zobrazuje κ bijektivně na $B \subseteq \beta \times \beta$, a tudíž $\kappa \approx B \preceq \beta \times \beta$. Protože je κ kardinál a $\beta \in \kappa$, nutně z definice kardinálu plyne $\beta \prec \kappa$. Pak ale platí $\beta \times \beta \approx \beta$, neboť κ bylo nejmenší, pro které to neplatí. Dostáváme $\beta \prec \kappa \preceq \beta \times \beta \approx \beta$, tj. $\beta \prec \beta$, což je spor.

Rekurze. Nyní představíme jednu metodu, která šikovně využívá právě nabytých znalostí o ordinálních číslech. Předvedeme si, jak lze její pomocí vyřešit některé úlohy s teorií množin zdánlivě nesouvisející.

Jistě jste se již setkali s nějakou definicí podle následujícího schématu: (I) definujeme objekt A_0; (II) jsou-li definovány objekty $A_0, \ldots, A_n$, definujeme s jejich pomocí objekt A_{n+1}. (Pod pojmem objekt si lze představit prvky posloupnosti, množiny, apod.). Typickou ukázkou je vzorové řešení 5. úlohy, kde se nejprve definuje množina M_1, a poté se pomocí množiny M_n zkonstruuje množina M_{n+1}. Skrytě se vlastně využívá princip indukce — množina M_1 má požadovanou vlastnost a dále, za předpokladu, že množina M_n má požadovanou vlastnost, zkonstruujeme množinu M_{n+1} s požadovanou vlastností.

Tento postup lze zobecnit s drobným rozšířením i na „nekonečná čísla", tj. ordinály. Druhá část 5. úlohy již tento princip částečně používá — spočetné řešení se najde jako „nekonečně-tý" prvek posloupnosti M_n. Podobně by pak šlo pokračovat v konstrukci i dále, „za konečnými čísly". Tomuto postupu se říká transfinitní rekurze.

Transfinitní rekurze. Definice transfinitní rekurzí probíhá podle následujícího schématu (pro přehlednost ji formulujeme pro množiny).

(I) Definujeme množinu A_0.

(II) Je-li $\alpha = \beta^+$ a jsou-li definovány množiny $A_0, \ldots, A_\beta$, definujeme množinu A_α.

(III) Je-li α limitní ordinál a jsou-li definovány množiny A_β pro všechna $\beta \in \alpha$ (tj. pro všechna β menší než α), definujeme množinu A_α.

Uvědomte si nutnost třetího kroku — např. ordinální číslo ω nemá žádného předchůdce, ale přesto je třeba definovat A_ω. Podobně jako u (obyčejné) rekurze, pokud požadujeme, aby všechny množiny měly nějakou vlastnost, pak stačí v každém kroku zkontrolovat, že nově definovaná množina příslušnou vlastnost má.

Transfinitní rekurzi ilustrujeme na dvou příkladech; další najdete mezi úlohami. Nejprve předvedeme úplné řešení 5. úlohy (čtěte zároveň se vzorovým řešením pro konečný a spočetný případ!). Připomeňme, že množina M bodů v rovině se nazývá *pěkná*, pokud žádné tři body z M neleží na přímce a žádné tři přímky určené body z M se neprotínají v bodě neležícím v M.

Úloha. *Existuje pěkná množina M mohutnosti kontinua?*

Řešení. Označme $|\mathbb{R}| = \kappa$. Zkonstruujeme množiny M_α, $\alpha \in \kappa \cup \{\kappa\}$ (tj. α probíhá ordinální čísla menší než κ včetně), takové, že M_α bude $|\alpha|$-prvková pěkná množina a bude platit $M_\alpha \subset M_\beta$ kdykoliv $\alpha \in \beta$. Řešením úlohy pak bude množina M_κ.

(I). Položíme $M_0 = \emptyset$. Každá jednoprvková množina je zřejmě pěkná, vybereme tedy libovolný bod Z a položíme $M_1 = \{Z\}$.

(II). Nechť nyní máme zkonstruovánu množinu M_α. Hledáme vhodný bod X takový, aby $M_{\alpha^+} = M_\alpha \cup \{X\}$ byla pěkná množina. Množina M_α obsahuje $|\alpha|$ bodů, které určují nejvýše $|\alpha^2|$ přímek (píšeme A^2 místo $A \times A$). Tyto přímky se protínají v nejvýše $|(\alpha^2)^2| = |\alpha^4|$ bodech, které určují nejvýše $|\alpha^8|$, tedy méně než κ, přímek (je-li α konečné, pak $|\alpha^8|$ je konečné; je-li α nekonečné, pak $|\alpha^8| = |\alpha| \prec \kappa$). Říkejme všem těmto přímkám ošklivé. Protože méně než mohutnost kontinua přímek nepokryje celou rovinu, existuje bod X neležící na žádné ošklivé přímce. Dokážeme, že takový bod X vyhovuje našim podmínkám. V $M_{\alpha^+} = M_\alpha \cup \{X\}$

neleží žádné tři různé body na přímce, protože v opačném případě by buď ležely tři různé body z M_α na jedné přímce (což nelze, neboť M_α je pěkná), nebo by bod X ležel na nějaké přímce určené dvěma body z M_α (což nelze, neboť taková přímka je ošklivá). Dále, kdyby se tři přímky p, q, r určené body M_{α^+} protínaly v jednom bodě mimo M_{α^+}, pak (protože M_α je pěkná) jedna z nich, řekněme p, by byla určena bodem X a nějakým bodem $Y \in M_\alpha$. Bod X by tedy ležel na přímce určené bodem Y a průsečíkem přímek q, r, a tedy X by ležel na ošklivé přímce, což je spor. Množina M_{α^+} je tedy také pěkná, $|\alpha^+|$-prvková.

(III). Je-li α limitní ordinál, položíme $M_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} M_\beta$. Podle jednoho z dříve dokázaných tvrzení má tato množina mohutnost $|\alpha|$, neboť jde o sjednocení $|\alpha|$ množin, z nichž žádná není větší než α. Dokážeme, že je M_α pěkná. Nechť leží tři různé body $X, Y, Z \in M_\alpha$ na přímce. Protože $X, Y, Z \in \bigcup_{\beta\in\alpha} M_\beta$, existují $\gamma, \delta, \eta < \alpha$ taková, že $X \in M_\gamma$, $Y \in M_\delta$, $Z \in M_\eta$. Protože $M_\mu \subset M_\nu$ pro každá $\mu < \nu$, všechny tři body X, Y, Z leží v M_β, kde β je největší z ordinálních čísel γ, δ, η. Tím však máme spor s pěkností množiny M_β. Analogicky se ukáže i druhá vlastnost — kdyby se tři přímky určené body M_α protínaly v jednom bodě mimo M_α, pak by tato situace nastala již v nějakém M_β, $\beta \in \alpha$, spor.

Druhý příklad bude vychytralejší. Půjde sice pouze o rekurzi obyčejnou (pro přirozená čísla), přičemž na závěr se použije jeden krok typu (III) (takže to je vlastně transfinitní rekurze pro ω^+), avšak řešení této úlohy vám poslouží jako návod k 7. úloze, kde je potřeba transfinitní rekurze až do $|\mathbb{R}|$.

Úloha. *Dokažte, že existuje funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, která na každém intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, nabývá všech racionálních hodnot (tj. pro každé $y \in \mathbb{Q}$ existuje $x \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ takové, že $f(x) = y$).*

Řešení. Snadno nahlédneme, že množina $\mathcal{I} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ všech racionálních intervalů je spočetná. Tudíž i množina $\mathbb{Q} \times \mathcal{I}$ je spočetná. Zvolíme tedy očíslování této množiny $\mathbb{Q} \times \mathcal{I} = \{(y_0, I_0), (y_1, I_1), \dots\}$ nezápornými celými čísly (tj. konečnými ordinály). Definujeme množiny A_n a funkce $f_n : A_n \to \mathbb{Q}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ podmínky:

(i) existuje $x \in I_n \cap \mathbb{Q}$ takové, že $f(x) = y_n$;
(ii) $A_n \subset A_{n+1}$, $|A_n| = n + 1$;
(iii) $f_{n+1}(u) = f_n(u)$ pro každé $u \in A_n$.

Pomocí těchto funkcí pak na závěr definujeme hledanou funkci.

(I). Zvolme libovolné $x \in I_0 \cap \mathbb{Q}$ a položme $A_0 = \{x\}$ a $f_0(x) = y_0$. Všechny tři podmínky jsou zjevně splněny.

(II). Mějme nyní definovány funkce $f_0, \dots, f_n$ tak, že jsou podmínky splněny. Protože každý interval obsahuje spočetně mnoho racionálních čísel, kdežto A_n je pouze konečná, existuje $x \in I_{n+1} \setminus A_n$. Definujeme $A_{n+1} = A_n \cup \{x\}$, $f_{n+1}(x) = y_{n+1}$ a $f_{n+1}(u) = f_n(u)$ pro každé $u \in A_n$. Všechny tři podmínky jsou zjevně zachovány.

(III). Položme $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ a definujme $f : A \to \mathbb{Q}$ předpisem $f(x) = f_n(x)$, kde n je libovolné takové, že $x \in A_n$. Zobrazení je korektně definováno, neboť hodnoty $f_n(x)$ jsou stejné pro všechna f_n, do jejichž definičního oboru x patří.

Je-li dán interval (a, b) a $y \in \mathbb{Q}$, existuje n takové, že $(a, b) = I_n$ a $y = y_n$ (neboť jsme číslovali všechny takové dvojice). Podle podmínky (i) existuje $x \in I_n \cap \mathbb{Q}$

takové, že $f_n(x) = y_n$, a tedy také $f(x) = y_n = y$.

Zobrazení f by splňovalo zadání úlohy, kdyby $A = \mathbb{Q}$. Pokud tomu tak není, položíme $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{Q} \setminus A$. Takto dodefinovaná funkce je řešením úlohy.

Funkce $\aleph$. Na závěr se krátce vrátíme k nekonečným kardinálním číslům. Jak bylo řečeno, konečné kardinály splývají s celými nezápornými čísly. Jak ale vypadají nekonečné kardinály? Umíme popsat nejmenší z nich — tím je samozřejmě nejmenší nekonečné ordinální číslo ω. Pro popis dalších kardinálních čísel se zavádí funkce $\aleph$, která je čísluje podle velikosti. Symbolem $\aleph_0$ tedy značíme nejmenší nekonečné kardinální číslo, $\aleph_1$ pak je druhé nejmenší nekonečné kardinální číslo, $\aleph_2$ další, atd. Formálně definujeme kardinální čísla $\aleph_\alpha$ transfinitní rekurzí. (I) $\aleph_0 = \omega$. (II) Je-li $\alpha = \beta^+$, pak $\aleph_\alpha$ je nejmenší kardinální číslo větší než $\aleph_\beta$. (Uvědomte si, že existuje alespoň jedno kardinální číslo větší než $\aleph_\beta$ — např. $2^{\aleph_\beta}$.) (III) Je-li α limitní ordinál, pak $\aleph_\alpha$ je nejmenší kardinální číslo větší než každé $\aleph_\beta$, $\beta \in \alpha$. (Opět je třeba si rozmyslet, že nějaké takové kardinální číslo existuje — např. $\bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$.)

Mohutnost kontinua a hypotéza kontinua. Podle definice $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Jistě vás tedy napadá otázka, kolik je $|\mathbb{R}|$. Určitě $|\mathbb{R}| \succeq \aleph_1$. Jak jsme ale psali v odstavci o hypotéze kontinua, nelze dokázat ani vyvrátit existenci množiny A s vlastností $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$. Pokud taková neexistuje, musí platit $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, neboť $\mathbb{N} \approx \aleph_0 \prec \aleph_1 \preceq \mathbb{R}$. Pokud ovšem taková množina A existuje, pak nutně $|\mathbb{R}| \succ \aleph_1$. Není tedy bez dodatečných předpokladů možné určit mohutnost kontinua v řeči funkce $\aleph$. Mohutnost $|\mathbb{R}|$ může být skoro libovolné kardinální číslo, klidně třeba $\aleph_2$ nebo $\aleph_{158}$.

Zdá se tedy, že užitečnost funkce $\aleph$ bude mizivá, když s ní nezapíšeme ani mohutnost kontinua. Není to tak úplně pravda. Mnoho množin lze vyjádřit pomocí výrazů užívajících mocniny. Např. $\mathbb{R} \approx 2^{\mathbb{N}}$ (viz minulý díl), a proto se obvykle píše $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Kardinál $\aleph_\omega$. Kardinál $\aleph_\omega$ je nejmenší ze všech kardinálů, které jsou větší než každý z kardinálů $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ Tento kardinál je zároveň řešením problému, který byl položen v minulém dílu. Platí totiž, že $\aleph_\omega^{\mathbb{N}} \succ \aleph_\omega$. (Důsledkem mimo jiné je, že $|\mathbb{R}| \neq \aleph_\omega$, protože $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$.)

Důkaz provedeme Cantorovou diagonální metodou, analogicky jako při důkazu nespočetnosti $\mathbb{R}$. Nechť jsou obě množiny stejně velké. Označme $A = \aleph_\omega$ a zvolme očíslování $A^{\mathbb{N}}$ pomocí prvků $\aleph_\omega$ — nechť $A^{\mathbb{N}} = \{(b_n^\alpha)_{n=1}^\infty : \alpha \in \aleph_\omega\}$ (představte si posloupnosti (b_n^α) vypsané po řádcích pod sebou). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme $c_n \in A$ takové, že $c_n \neq b_n^\alpha$ pro každé $\alpha \in \aleph_n$ (určitě takové existuje, neboť všech možností je $\aleph_\omega$, kdežto zakázaných pouze $\aleph_n$). Je zřejmé, že posloupnost $(c_n)_{n=1}^\infty$ není v seznamu, neboť od posloupnosti (b_n^α), $\alpha \in \aleph_\omega$ se liší ve všech členech počínaje n-tým (přičemž $|\alpha| = \aleph_n$). Spor.

DÍL IV.

Závěrečný díl seriálu bude sestávat z krátkého dovětku o základech moderní matematiky. V průběhu seriálu se vyskytly některé nejasnosti, jako třeba jak je možné, že nějaké tvrzení nelze dokázat ani vyvrátit, nebo Cantorův paradox. Naším cílem je ukázat, jak jsou tyto problémy řešeny současnou matematikou.

Co to je množina? Pojem *množina* se zdá být intuitivně jasný, a proto vám jistě nečinilo problémy jej po celou školní docházku používat. Podobně si vystačili i matematikové v 19. století (připomeňme, že množiny se používají až od 19. století — viz historický úvod k seriálu). Uveďme definici, kterou formuloval Georg Cantor (1845 – 1918) a která dosti přesně vystihuje, co si představujeme jako množinu.

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku.

Paradoxy. Problémy nastaly poté, co se začal Cantor důkladně zabývat základy teorie množin. Objevila se sporná tvrzení, eufemisticky nazývaná *paradoxy.* Jedním z nich (a také jedním z prvních objevených, v roce 1899), je Cantorův paradox uvedený v druhém dílu seriálu: je-li V množina všech množin, pak $\mathcal{P}(V) \subseteq V$, neboť podmnožiny jsou také množiny, a tudíž $\mathcal{P}(V) \preceq V$. Jenže jak jsme kdysi dokázali, platí $V \prec \mathcal{P}(V)$. Spor. Ještě přímočařejší spor nalezl v roce 1902 Bertrand Russel: definujeme množinu (v souladu s Cantorovou definicí) předpisem $A = \{B : B \notin B\}$. Jsou dvě možnosti. Pokud $A \in A$, tak podle podmínky pro prvky A platí $A \notin A$, spor. Takže musí být $A \notin A$. Jenže pak A splňuje podmínku pro prvky A, a tudíž $A \in A$. Spor.

Zdá se, že oba tyto paradoxy jsou poněkud umělé a zacházejí příliš daleko za objekty, které běžně užíváme. Nuže, zde je jeden spor popsaný pouze pomocí přirozených čísel a českého jazyka. Nechť A je množina všech přirozených čísel, které lze definovat nejvýše 10 slovy českého jazyka (opět definice v souladu s Cantorem). Nyní definujeme číslo n jako „nejmenší přirozené číslo, které není prvkem A“. Číslo n je definované pomocí 7 slov a přitom neleží v A, spor.

Axiomatika. Je jasné, že odstranění zmíněných paradoxů je možné pouze přesnějším vymezením pojmu množina. Od všeobjímající Cantorovy definice se nakonec většina matematiků přiklonila k podmínkám, tzv. *axiomům*, které striktně omezují, co lze považovat za množinu. Obvykle se používá tzv. Zermelo-Fraenkelův systém, jehož axiomy říkají přibližně toto: dvě množiny jsou stejné, mají-li stejné prvky; jsou-li A, B množiny, pak $\{A, B\}$ je množina; je-li A množina (obsahující množiny), pak $\bigcup_{B \in A} B$ je množina; je-li A množina, pak $\mathcal{P}(A)$ je množina; je-li A množina a Φ nějaká množinová vlastnost, pak $\{B \in A : B \text{ splňuje } \Phi\}$ je množina; je-li A množina a ψ definovatelné zobrazení, pak $\psi(A)$ je množina; neexistuje nekonečná posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$ splňující $A_{i+1} \in A_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$; existuje nekonečná množina. Dále se obvykle předpokládá tzv. axiom výběru (my jsme ho používali), který umožňuje určité nekonečné konstrukce — jedním z jeho ekvivalentních vyjádření je např. fakt, že na každé množině existuje dobré uspořádání.

Všimněte se, že žádný axiom nás neopravňuje definovat množinu nějakým příliš obecným výrazem (typu množina všech množin, resp. množina všech množin, pro které platí jistá podmínka) — vždy máme nějakou výchozí množinu a nějakou jinou z ní vyrobíme. Nejasné ještě zůstává, co to je *množinová vlastnost* a *definovatelné zobrazení*. K přesné definici bychom potřebovali vyložit základy matematické logiky, proto si musíme vystačit s intuitivním náhledem: jde o vlastnost (resp. zobrazení) popsatelnou výrazem používajícím pouze proměnné, logické spojky, kvantifikátory a relaci $\in$. Tedy žádný přirozený jazyk — čímž je řešen třetí paradox.

(Ne)dokazatelnost. Je-li dán systém axiomů, tj. jakýchsi výchozích vlastností, můžeme z něj pomocí logiky vyvozovat platná tvrzení. Je jasné, že je-li axiomů málo, mnoho toho pomocí nich nedokážeme. Toto je i případ Zermelo-Fraenkelova systému axiomů — zůstávají tvrzení, u nichž neexistuje ani jejich důkaz, ani důkaz jejich negace, tj. nejdou dokázat ani vyvrátit (takovým tvrzením se říká *nerozhodnutelná*). Jedním z nerozhodnutelných tvrzení je např. hypotéza kontinua.

Pokud se vám zdá, že je nějaký systém axiomů špatný, když umožňuje existenci nerozhodnutelných tvrzení, pak vězte, že jinak to být ani nemůže. Kurt Gödel dokázal, že každý konečně popsatelný axiomatický systém, který umožňuje vybudovat aritmetiku přirozených čísel (např. teorie množin), má nutně nerozhodnutelná tvrzení. Na druhou stranu, co by podle vás mělo platit: hypotéza kontinua nebo její negace? Nekonečná množina nikde v přírodě neroste, a tak můžeme pouze filozofovat, co by se nám zdálo hezčí.

Literatura. O teorii množin existují desítky knih. Přesto (nebo právě proto) bych rád dvě doporučil.

Učebnice [1] je napsána pro studenty učitelství matematiky, díky čemuž je přístupná i lepším středoškolákům. Najdete v ní další zajímavá témata, na která nezbylo v seriálu místo. Učebnice také obsahuje dosti rozsáhlou a velmi čtivou kapitolu o historických a filozofických souvislostech teorie množin.

Pro další studium pak doporučuji excelentní učebnici [2], která určitě patří do knihovny každého zájmce o teorii množin. Obsahuje velmi pěkně podaný přehled moderní teorie množin. Autor z ní do značné míry čerpal náplň seriálu.

[1] E. Fuchs, *Teorie množin pro učitele*, PřF MU Brno, 1999.
[2] B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia Praha, 1986, 2001.

Také můžete nalistovat 6. sérii našeho korespondenčního semináře v ročníku 1996/97, ve které byly také zadány úlohy na téma velikosti množin. Najdete tam další úlohy i stručné shrnutí některých probraných faktů.