О КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАХ ПОДАЛГЕБР

КИРА АДАРИЧЕВА, АГАТА ПИЛИТОВСКА, ДАВИД СТАНОВСКИ

Аннотация. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр. Мы находим условие (так называемое *обобщенное свойство перестановочности*), эквивалентное тому, что для любой алгебры $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ множество подалгебр в $\mathbf{A}$ является носителем комплексной алгебры подалгебр $\mathbf{A}$. Мы исследуем взаимосвязь обобщенного свойства перестановочности и свойства перестановочности. Для многообрзий с обобщенным свойством перестановочности мы исследуем тождества, выполняющиеся на комплексных алгебрах подалгебр.

Посвящается 70-летию Джорджа Гретцера

1. Введение

Для алгебры $\mathbf{A} = (A, F)$ определим *комплексные операции* на множестве $\mathcal{P}(A)$ всех непустых подмножеств в A, полагая

$$f(A_1, \dots, A_n) = \{f(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i\}$$

для любых непустых множеств $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ и любого n-арного функционального символа $f \in F$. Множество $f(A_1, \dots, A_n)$ называется *комплексным произведением* подмножеств A_i, а алгебра $\mathbf{Cm}\,\mathbf{A} = (\mathcal{P}(A), F)$ называется *комплексной алгеброй* алгебры $\mathbf{A}$. Комплексные алгебры (называемые также *глобалами* или *произведениями* алгебр) изучались несколькими авторами; см., например, следующие работы: Дж. Гретцер, Х. Лаксер [1], Дж. Гретцер, С. Уитни [2], А. Шафат [3], К. Бринк [4], И. Бошняк, Р. Мадараш [5].

Понятие комплексных операций также широко используется. К примеру, в группах смежный класс xN элемента x по подгруппе N является комплексным произведением одноэлементного множества $\{x\}$ и подгруппы N. Для решетки $\mathbf{L}$ множество $\mathbf{Id}\,\mathbf{L}$ ее непустых идеалов образует решетку относительно включения. Если $\mathbf{L}$ дистрибутивна, то решеточные операции в $\mathbf{Id}\,\mathbf{L}$ являются комплексными операциями, полученными из решеточных операций $\mathbf{L}$; поэтому $\mathbf{Id}\,\mathbf{L}$ является подалгеброй в $\mathbf{Cm}\,\mathbf{L}$.

Пусть CSub$\mathbf{A}$ обозначает множество всех непустых подалгебр алгебры $\mathbf{A} = (A, F)$. Это множество не обязано быть замкнутым относительно комплексных операций. К примеру, если $\mathbf{A}$ — абелева группа, то CSub$\mathbf{A}$ замкнуто относительно таких операций. Однако же для большинства групп

Key words and phrases. complex algebra, complex algebra of subalgebras, mode, entropic, medial, linear identity.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 06B20, 06B05.

Авторы были частично поддержаны проектом ИНТАС #03-51-4110. Последний автор был также поддержан грантом MSM 0021620839, финансирующимся МШМТ ЧР, и грантом #201/05/0002 Грантового Агенства Чешской Республики.

это не верно. Если CSub$\mathbf{A}$ замкнуто относительно комплексных операций, то абгебра $\mathbf{CSub}\,\mathbf{A} = (\mathrm{CSub}\mathbf{A}, \mathrm{F})$ является подалгеброй в $\mathbf{Cm}\,\mathbf{A}$; мы называем ее *комплексной алгеброй подалгебр.* Мы также будем говорить в этом случае, что $\mathbf{A}$ *имеет комплексную алгебру подалгебр* или что $\mathbf{CSub}\,\mathbf{A}$ *существует.* Комплексные алгебры подалгебр были определены и изучались А. Романовской и Дж. Смитом в [6]. Очень естественным классом для рассмотрения комплексных алгебр подалгебр является многообразие *мод* (идемпотентных алгебр со свойством перестановочности). Комплексные алгебры подмод изучались в работах А. Романовской и Дж. Смита [7], [8], а также вторым автором настоящей работы в [9], [10]. В работе [11] комплексные алгебры подалгебр были рассмотрены и в неидемпотентном случае.

Нас интересует следующий вопрос: *Для каких многообразий каждая алгебра имеет комплексную алгебру подалгебр?* В разделе 2 мы вводим *обобщенное свойство перестановочности*, которое оказывается эквивалентным тому, что в многообразии каждая алгебра имеет комплексную алгебру подалгебр. Поскольку обобщенное свойство перестановочности является обобщением свойства перестановочности, естественным является изучение взаимосвязи этих свойств.

Эта взаимосвязь изучается в разделах 3 и 4. В общем случае, обобщенное свойство перестановочности и свойство перестановочности не эквивалентны. Мы рассматриваем несколько примеров, для которых это так: идемпотентная алгебра с бесконечным числом бинарных операций (пример 3.1), неидемпотентный групоид (пример 4.1), унарные алгебры (пример 4.3). Однако оказывается, что обобщенное свойство перестановочности и свойство перестановочности эквивалентны при некоторых дополнительных предположениях; например, они эквивалентны в для групоидов с единицей, для коммутативных идемпотентных групоидов, а также для идемпотентных полугрупп. Мы также приводим несколько результатов, которые в частных случаях подтверждают нашу гипотезу о том, что эти два свойства эквивалентны для идемпотентных групоидов (теорема 3.3 и другие).

В разделах 5 и 6 мы продолжаем исследования, начатые вторым автором в работе [10], и изучаем тождества, выполняющиеся на комплексных алгебрах подалгебр. Мы описываем эти тождества в теореме 5.3. Мы не знаем, верна ли гипотеза, высказанная в [10], о том, что многообразие, порожденное комплексными алгебрами подалгебр алгебр, принадлежащих некоторому идемпотентному многообразию $\mathcal{V}$, совпадает с $\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ имеет базис линейных идемпотентных тождеств. Однако, мы показываем, что аналогичное утверждение для неидемпотентных многообразий не верно (пример 5.10).

Обозначения и терминология. Через $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ мы обозначаем $\mathcal{V}$-свободную алгебру, порожденную X. Как обычно, мы рассматриваем $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ как фактор-алгебру алгебры термов по конгруенции, порожденной тождествами $\mathcal{V}$. Запись $t(x_1, \dots, x_n)$ означает, что все переменные, встречающиеся в t, содержатся среди $x_1, \dots, x_n$; в этом случае мы говорим, что терм t является n-арным, что равносильно включению $t \in \mathbf{F}(\{x_1, \dots, x_n\})$. Терм t называется *линейным*, если каждая переменная встречается в t не более одного раза. Тождество

$t \approx u$ называется *линейным*, если оба терма t, u линейные. Тождество $t \approx u$ называется *регулярным*, если термы t, u содержат одни и те же переменные.

Алгебра $\mathbf{A} = (A, F)$ имеет *свойство перестановочности*, если для всякого n-арного функционального символа $f \in F$ и всякого m-арного функционального символа $g \in F$ в $\mathbf{A} = (A, F)$ выполняется тождество

$$g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})) \approx f(g(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, g(x_{n1}, \dots, x_{nm}));$$

другими словами, если все основные операции $\mathbf{A}$ перестановочны). Отметим, что *групоид* (то есть алгебра с одной бинарной операцией, для которой обычно используется мультипликативное обозначение) имеет свойство перестановочности, если он удовлетворяет тождеству

$$xy \cdot uv \approx xu \cdot yv,$$

которое иногда называется тождеством *медиальности*, см. работу [12]. Многообразие $\mathcal{V}$ имеет *свойство перестановочности*, если любая алгебра из $\mathcal{V}$ обладает этим свойством. Алгебра (A, F) *идемпотентна*, если $f(a, \dots, a) = a$ для всякого функционального символа $f \in F$ и любого элемента $a \in A$. *Мода* — это идемпотентная алгебра со свовством перестановочности. В монографии А. Романовской и Дж. Смита [13] содержится наиболее полное собрание результатов о модах.

2. Обобщенное свойство перестановочности

Здесь мы рассмотрим обобщенное свойство перестановочности, центральное понятие настоящей работы.

Определение 2.1. Многообразие $\mathcal{V}$ [алгебра $\mathbf{A}$] имеет *обобщенное свойство перестановочности*, если для любого n-арного функционального символа f и любого m-арного функционального символа g сигнатуры $\mathcal{V}$ [сигнатуры $\mathbf{A}$, соответственно] найдутся m-арные термы $t_1, \dots, t_n$, такие что тождество

$$g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})) \approx f(t_1(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, t_n(x_{n1}, \dots, x_{nm}))$$

выполняется в $\mathcal{V}$ [в $\mathbf{A}$, соответственно].

Т. Эванс доказал в [14], что каждый групоид, принадлежащий многообразию $\mathcal{V}$, обладает комплексной алгеброй подалгебр тогда и только тогда, когда многообразие $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности. Ниже мы покажем, что это утверждение справедливо в произвольной сигнатуре. Отметим, что необходимость обобщенного свойства перестановочности в случае произвольной сигнатуры была доказана в работе [10], где само обобщенное свойство перестановочности носило имя "комплексное свойство".

Предложение 2.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр сигнатуры σ. Алгебра* $\mathbf{CSub\,A}$ *существует для всех $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности. Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathrm{CSub}\mathbf{A}$ и пусть $f \in \sigma^n$, $g \in \sigma^m$. Чтобы доказать, что $\mathbf{CSub\,A}$ существует, достаточно показать, что $f(A_1, \dots, A_n)$ замкнуто относительно g. Если $x_1, \dots, x_m \in f(A_1, \dots, A_n)$, то найдутся $a_{ij} \in A_i$, $1 \leq$

$i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, такие что $x_j = f(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ для любого $1 \leq j \leq m$. Используя обобщенное свойство перестановочности, имеем

$$g(x_1, \dots, x_m) = g(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm})) =$$
$$f(t_1(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, t_n(a_{n1}, \dots, a_{nm})) \in f(A_1, \dots, A_n)$$

для некоторых термов $t_1, \dots, t_n$.

Обратно, предположим, что $\mathbf{CSub}\,\mathbf{A}$ существует для всех $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$. Пусть $f \in \sigma^n$, $g \in \sigma^m$. Выберем попарно различные переменные x_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, и положим $X_i = \{x_{ij} : 1 \leq j \leq m\}$. Пусть X — счетное множество, содержащее $\bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i$. Полагаем также $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ и $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X_i)$ для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n \in \mathbf{CSub}\,\mathbf{F}$. Поскольку $f(F_1, \dots, F_n) \in \mathrm{CSub}\mathbf{F}$, множество $f(F_1, \dots, F_n)$ замкнуто относительно g. В частности,

$$g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})) \in f(F_1, \dots, F_n).$$

Таким образом, $g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})) = f(b_1, \dots, b_n)$ для некоторых $b_i \in F_i$, $1 \leq i \leq n$. Это означает, что найдутся термы t_i, $1 \leq i \leq n$, такие что $b_i = t_i(x_{i1}, \dots, x_{im})$. Так как тождество

$$g(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1m}, \dots, x_{nm})) \approx f(t_1(x_{11}, \dots, x_{1m}), \dots, t_n(x_{n1}, \dots, x_{nm}))$$

выполняется на $\mathcal{V}$-свободной алгебре счетного ранга, оно также выполняется и в $\mathcal{V}$. Таким образом, $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности. □

Пример 2.3. *Если* $\mathbf{CSub}\,\mathbf{A}$ *существует для алгебры* $\mathbf{A}$*, то* $\mathbf{A}$ *не обязана обладать обобщенным свойством перестановочности.*

Рассмотрим 3-элементный групоид $\mathbf{G}_1$:

$\cdot$	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	a	b	c

Заметим, что $\mathbf{G}_1$ не имеет свойства перестановочности, поскольку $c = aa \cdot ba \neq ab \cdot aa = a$. Непосредственно можно проверить, что $\mathbf{CSub}\,\mathbf{G}_1$ является подгрупоидом в $\mathbf{Cm}\,\mathbf{G}_1$, где умножение определено так:

$\cdot$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$
$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$

Однако, в многообразии $\mathrm{V}(\mathbf{G}_1)$ найдется групоид $\mathbf{F}$, такой что $\mathbf{CSub}\,\mathbf{F}$ не является подгрупоидом в $\mathbf{Cm}\,\mathbf{F}$. Чтобы проверить это, положим $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathrm{V}(\mathbf{G}_1)}(x, y, z)$ и рассмотрим подгрупоид $\mathbf{A}$ в $\mathbf{F}$, порожденный x, y, и подгрупоид $\mathbf{B} = (\{z\}, \cdot)$. Непосредственно проверяется, что $A = \{x, y, xy, yx\}$, $x \approx (xz)x$ и $((yx)z)y, x \in (AB)A$, но $(((yx)z)y)x \notin (AB)A$. Таким образом, множество $(AB)A$ не является подгрупоидом в $\mathbf{F}$ и поэтому $\mathbf{G}_1$ не обладает обобщенным свойством перестановочности. (Отметим также, что поскольку c является левосторонней единицей в $\mathbf{G}_1$, последнее утверждение вытекает также из следствия 3.9.)

3. Обобщенное свойство перестановочности и свойство перестановочности: идемпотентный случай

Свойство перестановочности является частным случаем обобщенного свойства перестановочности: термы $t_1, \dots, t_n$ в определении обобщенного свойства перестановочности все равны g. В общем случае эти два свойства не эквивалентны. Здесь мы рассмотрим их взаимосвязь в идемпотентном случае. Сначала мы приведем пример идемпотентных алгебр с обобщенным свойством перестановочности, которые не обладают свойством перестановочности. Затем мы укажем несколько достаточных условий, при которых рассматриваемые два совйства совпадают. Теорема 3.3, основной результат этого раздела, будет применяться несколько раз в доказательствах утверждений и в примерах.

Пример 3.1. *Существуют идемпотентные алгебры с обобщенным свойством перестановочности, которые не обладают свойством перестановочности.*

Пусть $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1)$ — кольцо с единицей 1, пусть $\mathbf{G}$ — подмоноид в $(R, \cdot, 1)$, являющийся группой, и пусть множество $X \subseteq G$ замкнуто относительно сопряжения, а также относительно операции $x \mapsto 1 - x$. Рассмотрим левый модуль $\mathbf{M}$ над $\mathbf{R}$ и для каждого $r \in R$ определим бинарную операцию $\underline{r}$ на M, полагая

$$\underline{r}(x, y) = (1 - r)x + ry.$$

Для любого $r \in R$ групоид $(M, \underline{r})$ является идемпотентным и обдадает свойством перестановочности. Рассмотрим теперь алгебру $\underline{\mathbf{M}}_X = (M, \underline{X})$, где $\underline{X} = \{\underline{r} : r \in X\}$. Для любых $r, t \in X$ мы полагаем $t_1 = (1 - r)^{-1} t (1 - r)$ и $t_2 = r^{-1} t r$. Тогда

$$\underline{t}(\underline{r}(x_1, x_2), \underline{r}(y_1, y_2)) \approx (1 - t)(1 - r)x_1 + (1 - t)rx_2 + t(1 - r)y_1 + try_2 \approx$$
$$\approx (1 - r)(1 - t_1)x_1 + r(1 - t_2)x_2 + (1 - r)t_1 y_1 + rt_2 y_2 \approx \underline{r}(\underline{t_1}(x_1, y_1), \underline{t_2}(x_2, y_2)).$$

Таким образом, $\underline{\mathbf{M}}_X$ имеет обобщенное свойство перестановочности. Подставляя 0 вместо x_1, y_1, y_2 и 1 вместо x_2 в приведенном выше тождестве, мы получаем, что алгебра $\underline{\mathbf{M}}_X$ имеет свойство перестановочности тогда и только тогда, когда $rt = tr$ для любых $r, t \in X$.

Поэтому если $\mathbf{R}$ является некоммутативным телом, а $X = R \setminus \{0, 1\}$, то $\underline{\mathbf{M}}_X$ является (бесконечной) идемпотентной алгеброй, обладающей обобщенным свойством перестановочности, но не обладающей свойством перестановочности.

В отличие от предыдущего, наш следующий пример конечен. Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо 2×2-матриц над полем $\mathbb{F}$, пусть $G = \{A \in R : |A| = 1\}$, $X = \{A \in G : tr(A) = 1\}$, где $tr(A)$ обозначает *след* матрицы A. Поскольку и детерминант и след матрицы инвариантны относительно сопряжения, а $A \in X$ тогда и только тогда, когда $E - A \in X$ (здесь E обозначает единичную матрицу), мы вновь получаем, что алгебра $\underline{\mathbf{M}}_X$ идемпотентна и обладает обобщенным свойством перестановочности. Если $\mathbb{F} = \mathrm{GF}(2)$, то X имеет два элемента, которые перестановочны. Таким образом, в этом случае $\underline{\mathbf{M}}_X$ имеет свойство перестановочности. Если же $\mathbb{F} = \mathrm{GF}(3)$, то X имеет девять элементов, не все из которых перестановочны, поэтому $\underline{\mathbf{M}}_X$ не имеет свойства перестановочности.

Наконец, отметим, что похожие примеры могут быть получены для операций любой арности $n \geq 2$; например, для операции

$$\underline{(r_2, \ldots, r_n)}(x_1, \ldots, x_n) = (1 - r_2 - \cdots - r_n)x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n.$$

Поскольку для любого r алгебра $(M, \underline{r})$ имеет свойство перестановочности, можно высказать такую гипотезу:

Гипотеза 3.2. *Любая идемпотентная алгебра (A, f), имеющая обобщенное свойство перестановочности, имеет и свойство перестановочности.*

В оставшейся части этого раздела мы покажем справедливость этой гипотезы для некоторых групоидов. Напомним, что групоид имеет обобщенное свойство перестановочности, если для некоторых бинарных термов t, s имеет место тождество

$$xy \cdot uv \approx t(x, u)s(y, v). \tag{G1}$$

Непосредственными следствиями обобщенного свойства перестановочности для идемпотентных групоидов являются следующие важные тождества, которые можно рассматривать как тождества *псевдодистрибутивности*:

$$xy \cdot xz \approx xs(y, z), \tag{G2}$$

$$yx \cdot zx \approx t(y, z)x, \tag{G3}$$

$$x \cdot yz \approx t(x, y)s(x, z), \tag{G4}$$

$$yz \cdot x \approx t(y, x)s(z, x). \tag{G5}$$

(G2) утверждает, что для каждого a, *левая трансляция* $L_a : x \mapsto ax$ является гомоморфизмом из (G, s) в $(G, \cdot)$, в то время как (G3) утверждает, что *правая трансляция* $R_a : x \mapsto xa$ является гомоморфизмом из (G, t) в $(G, \cdot)$.

Основным результатом в подтверждение гипотезы 3.2 служит следующая теорема.

Теорема 3.3. *Если идемпотентный групоид* $\mathbf{G}$ *имеет обобщенное свойство перестановочности, и один из термов t, s в его определении линеен, то* $\mathbf{G}$ *имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Если терм t линеен, то применяем одну из лемм 3.4–3.7. Если же терм s линеем, рассмотрим двойственный групоид $\mathbf{G}^\partial$ (где основная операция определена так: $x \bullet y = yx$). Этот групоид имеет обобщенное свойство перестановочности с заменой t на s и наоборот, поэтому согласно леммам 3.4–3.7, оба групоида $\mathbf{G}^\partial$ и $\mathbf{G}$ имеют обобщенное свойство перестановочности одновременно; отметим также, что и свойство перестановочности имеет место для групоидов $\mathbf{G}^\partial$ и $\mathbf{G}$ одновременно. □

Лемма 3.4. *Если идемпотентный групоид* $\mathbf{G}$ *имеет обобщенное свойство перестановочности для терма $t(x, y) = x$ и произвольного терма s, то* $\mathbf{G}$ *имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Обобщенное свойство перестановочности утверждает, что $xy \cdot uv \approx xs(y, v)$. Поскольку значение терма $xy \cdot uv$ не зависит от u, получаем $xy \cdot uv \approx xy \cdot vv \approx xy \cdot v$. Полагая $x = y$, имеем также $x \cdot uv \approx xv$. Применяя это тождество к терму $xs(y, v)$, получаем $xs(y, v) \approx xw$, где $w \in \{y, v\}$ есть крайняя правая переменная, входящая в запись терма $s(y, v)$. Таким образом, мы имеем $xy \cdot uv \approx xy \cdot v \approx xs(y,v) \approx xw$. Если $w = y$, то полагая $x = y$ and $u = v$, получаем $xv \approx xx \cdot vv \approx xx \approx x$. Если $w = v$, то значение терма $xy \cdot uv$ не зависит от y и u, поэтому заменяя все вхождения y на u, а все вхождения u на y, вновь получаем свойство перестановочности. □

Лемма 3.5. *Если идемпотентный групоид* $\mathbf{G}$ *имеет обобщенное свойство перестановочности для терма* $t(x,y) = y$ *и произвольного терма* s, *то* $\mathbf{G}$ *имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Согласно обобщенному свойству перестановочности, $xy \cdot uv \approx us(y,v)$. Поскольку значение $xy \cdot uv$ не зависит от x, имеем $xy \cdot uv \approx yy \cdot uv \approx y \cdot uv$. Полагая $u = v$, мы получим $xy \cdot u \approx yu$. Применяя это тождество к терму $s(x,y)z$, получаем $s(x,y)z \approx wz$, где $w \in \{x,y\}$ есть крайняя правая переменная, входящая в запись терма $s(x,y)$. Таким образом, $s(x,y) \approx s(x,y)s(x,y) \approx ws(x,y) = t(x,w)s(x,y)$, и поэтому $s(x,y) \approx x \cdot wy$ согласно обобщенному свойству перестановочности. Таким образом, мы можем предполагать, что крайняя правая переменная, входящая в запись терма $s(x,y)$ есть y, то есть $w = y$. Следовательно, $s(x,y) \approx xy$ и поэтому $xy \cdot uv \approx u \cdot yv \approx y \cdot uv \approx xu \cdot yv$ согласно (G1), (G4) и (G1). □

Лемма 3.6. *Если идемпотентный групоид* $\mathbf{G}$ *имеет обобщенное свойство перестановочности для терма* $t(x,y) = xy$ *и произвольного терма* s, *то* $\mathbf{G}$ *имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Согласно тождеству правой дистрибутивности (G3) имеем $r(x,y)z \approx r(xz,yz)$ для любого терма r.
Утверждение 1. $s(x,z) \cdot xz \approx s(x,z)$.

Применяя тождество правой дистрибутивности к терму s, затем дважды используя обобщенное свойство перестановочности и вновь тождество правой дистрибутивности для s, получаем

$$\begin{aligned} s(x,z) \cdot xz &\approx s(x \cdot xz, z \cdot xz) \approx s(xs(x,z), zx \cdot z)) \approx s(xs(x,z), zs(x,z)) \\ &\approx s(x,z)s(x,z) \approx s(x,z). \end{aligned}$$

Утверждение 2. $xs(y,z) \approx x \cdot yz$.

Используя нужное число раз обобщенное свойство перестановочности и тождество идемпотентности, получаем

$$\begin{aligned} xs(y,z) &\approx xy \cdot xz \approx (xy)(xz \cdot xz) \approx (x \cdot xz)s(y,xz) \approx (xs(x,z))s(y,xz) \\ &\approx (xy)(s(x,z) \cdot xz) \approx (xy)s(x,z) \approx x \cdot yz, \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство следует из утверждения 1.

Наконец, из утверждения 2 вытекают тождества $xy \cdot uv \approx xu \cdot s(y,v) \approx xu \cdot yv$. □

Лемма 3.7. *Если идемпотентный групоид* $\mathbf{G}$ *имеет обобщенное свойство перестановочности для терма* $t(x,y) = yx$ *и произвольного терма* s, *то* $\mathbf{G}$ *имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Применяя (G3) к терму $t(y,x)$, имеем $xy \cdot z \approx yz \cdot xz$: последнее тождество может рассматриваться как тождество *правой антидистрибутивности.* Индукцией по сложности терма можно проверить, что $r(x,y)z \approx r^{\partial}(xz,yz)$ для любого терма r; здесь r^{∂} обозначает терм,

двойственный к r (то есть терм, получающийся при чтении r справа налево; более точно, $x^\partial = x$ и $(r_1r_2)^\partial = r_2^\partial r_1^\partial$).
Утверждение 1. $s(x,z)\cdot xz \approx s(x,z)$.

Применяя тождество правой антидистрибутивности к терму s, затем трижды используя обобщенное свойство перестановочности и вновь тождество правой антидистрибутивности для s, получаем

$$\begin{aligned} s(x,z)\cdot xz &\approx s^\partial(x\cdot xz, z\cdot xz) \approx s^\partial(xs(x,z), xz\cdot z)) \approx s^\partial(xs(x,z), zx\cdot z)) \\ &\approx s^\partial(xs(x,z), zs(x,z)) \approx s(x,z)s(x,z) \approx s(x,z). \end{aligned}$$

Утверждение 2. $s(x,y) \approx xy$.

Используя дважды утверждение 1 и трижды — обобщенное свойство перестановочности, получаем

$$\begin{aligned} s(x,y) &\approx s(x,y)(xy) \approx (s(x,y)\cdot xy)(xy) \approx (xs(x,y))s(xy,y) \approx (x\cdot xy)s(xy,y) \\ &\approx (xy\cdot xy)(xy) \approx xy. \end{aligned}$$

Таким образом, групоид $\mathbf{G}$ удовлетворяет тождеству $xy\cdot uv \approx ux\cdot yv$. Рассмотрим двойственный групоид $\mathbf{G}^\partial$; он удовлетворяет тождеству $xy\cdot uv \approx xu\cdot vy$ и поэтому имеет свойство перестановочности согласно предыдущей лемме. Так как свойство перестановочности самодвойственно, $\mathbf{G}$ также обладает свойством перестановочности. □

Теорема 3.3 имеет несколько интересных следствий.

Следствие 3.8. *Пусть многообрзие идемпотентных групоидов $\mathcal{V}$ таково, что каждый бинарный терм эквивалентен в $\mathcal{V}$ некоторому линейному терму. Если $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности, то $\mathcal{V}$ имеет свойство перестановочности.*

Групоиды, в которых каждый бинарный терм эквивалентен некоторому линейному терму, были охарактеризованы Я. Дудеком в [15], см. также [16]. Групоид $\mathbf{G}_1$, рассмотренный в примере 2.3, удовлетворяет этому условию.

Будем говорить, что элемент $e \in G$ является *односторонней единицей* групоида $\mathbf{G}$, если $ex = x$ для всех $x \in G$ или $xe = x$ для всех $x \in G$.

Следствие 3.9. *Пусть групоид $\mathbf{G}$ идемпотентен и имеет одностороннюю единицу. Если $\mathbf{G}$ имеет обобщенное свойство перестановочности, то он имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Предположим, что e — левосторонняя единица в $\mathbf{G}$. Тогда

$$xy \approx ex\cdot ey \approx t(e,e)s(x,y) \approx es(x,y) \approx s(x,y)$$

выполняется в $\mathbf{G}$, поэтому требуемое заключение следует из теоремы 3.3. Если e — правосторонняя единица, то рассуждения двойственны. □

Отметим, что элемент c является левосторонней единицей групоида $\mathbf{G}_1$ из примера 2.3. Поскольку $\mathbf{G}_1$ не имеет свойства перестановочности, он также не может иметь и обобщенного свойства перестановочности.

Следующее замечание окажется полезным в дальнейшем.

Лемма 3.10. *Если идемпотентная алгебра $\mathbf{A} = (A,F)$ имеет обобщенное свойство перестановочности, причем для любой пары $f,g \in F$ соответствующие термы $t_1,\dots,t_n$ из определения обобщенного* *свойства перестановочности все совпадают, то* **A** *имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Пусть $t = t_1 = \cdots = t_n$. Тогда

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_m) &\approx g(f(x_1, \ldots, x_1), \ldots, f(x_m, \ldots, x_m)) \\ &\approx f(t(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t(x_1, \ldots, x_m)) \approx t(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

□

Применим теперь полученные результаты к некоторым известным классам групоидов. Напомним, что идемпотентные полугруппы также называются *связками.*

Предложение 3.11. *Любая связка с обобщенным свойством перестановочности имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. В связке любой бинарный терм эквивалентен одному из термов x, y, xy, yx, xyx, yxy: используя идемпотентность, можно увидеть, что никакая переменная не появляется в терме два раза подряд, а также терм xy не может повторяться дважды. Таким образом, если t или s эквивалентен одному из четырех первых термов в списке (каждый из которых линеен), мы можем применить теорему 3.3. Если термы t, s оба эквивалентны одному и тому же терму, то мы используем лемму 3.10. Таким образом, нерассмотренными остаются два случая:

$$xyuv \approx uxuyvy \qquad \text{и} \qquad xyuv \approx xuxvyv.$$

Если выполняется первое тождество, то беря $x = y = u$, получаем $xv \approx xvx$, а беря $y = u = v$, получаем $xv \approx vxv$. Таким образом, наша связка коммутативна, поэтому она, конечно, имеет свойство перестановочности.

Если выполняется второе тождество, то $xuw \approx xxuw \approx xuxwxw \approx xuxw$, где последнее тождество следует из идемпотентности, и, аналогично, $wvyv \approx wyv$. Поэтому $xuxvyv$ равен $(xux)(vyv) \approx (xu)(vyv) \approx (xu)(yv)$. □

Предложение 3.12. *Идемпотентный коммутативный групоид, обладающий обобщенным свойством перестановочности, имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Используя тождество (G3), коммутативность, а также тождество (G2), мы имеем

$$t(x, y)z \approx xz \cdot yz \approx zx \cdot zy \approx zs(x, y) \approx s(x, y)z.$$

Следовательно,

$$s(x, u) \approx s(x, u)s(x, u) \approx t(x, u)s(x, u) \approx xx \cdot uu \approx xu.$$

Для t доказательство аналогично. □

Групоид **G** называется групоидом с *левым* (*правым*) *сокращением*, если равенство $zx = zy$ влечет равенство $x = y$ ($xz = yz$ влечет $x = y$ соответственно) для любых $x, y, z \in G$. Например, квазигруппы являются групоидами с левым и правым сокращением.

Предложение 3.13. *Идемпотентный групоид с левым* (*правым*) *сокращением, обладающий обобщенным свойством перестановочности, имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. Предположим, что рассматриваемый групоид имеет левое сокращение. Тогда $x{\cdot}xy \approx xx{\cdot}xy \approx t(x,x)s(x,y) \approx x{\cdot}s(x,y)$ и поэтому, сокращая x, мы имеем $s(x,y) \approx xy$. Требуемое заключение следует из теоремы 3.3. Для правого сокращения рассуждения двойственны. ☐

Применим теперь следствие 3.8 для того, чтобы показать, что существуют многообразия, не имеющие обобщенного свойства перестановочности, несмотря на то что порождающие алгебры этих многообразий имеют комплексные алгебры подалгебр.

Пример 3.14. *Многообразие, порожденное алгебрами эквивалентностей, не имеет обобщенного свойства перестановочности, однако любая такая алгебра имеет комплексную алгебру подалгебр.*

Пусть A — множество и пусть $\alpha \subseteq A \times A$ — отношение эквивалентности на A. *Алгебра эквивалентности* $\mathbf{A}(\alpha)$ является по определению групоидом, в котором умножение определено следующим образом (см., например, [17]):

$$x \cdot y = \begin{cases} x, & \text{если } (x,y) \in \alpha, \\ y, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что любая подалгебра и любой гомоморфный образ алгебры эквивалентности вновь является такой алгеброй. В действительности, любое подмножество носителя образует подалгебру. Таким образом, любая алгебра эквивалентности имеет комплексную алгебру подалгебр.

Рассмотрим многообразие $\mathcal{E}$, порожденное алгебрами эквивалентностей. Это многообразие не имеет свойства перестановочности, поскольку в алгебре экввивалентности, определенной на множестве $\{a,b,c\}$ и соответствующей эквивалентности с двумя смежными классами $\{a,b\}$ and $\{c\}$, мы имеем $a = (ca)b \neq (cb)(ab) = b$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{E}$-свободная алгебра с двумя порождающими имеет четыре элемента: x, y, xy, yx. Поэтому согласно следствию 3.8, многообразие $\mathcal{E}$ не имеет обобщенного свойства перестановочности.

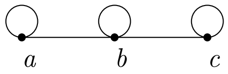
Пример 3.15. *Многообразие, порожденное алгебрами графов, не имеет обобщенного свойства перестановочности, однако любая алгебра графа имеет комплексную алгебру подалгебр.*

Пусть $G = (V,E)$ — граф с множеством V вершин и множеством $E \subseteq V \times V$ ребер. *Алгебра графа* $\mathbf{A}(G) = (V \cup \{0\}, \cdot)$ является по определению групоидом, в котором умножение определено следующим образом:

$$x \cdot y = \begin{cases} x, & \text{если } (x,y) \in E, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Как показанао в работе [18], каждая подалгебра, содержащая 0, а также любой гомоморфный образ алгебры графа вновь является такой алгеброй. В действительности, любое подмножество носителя, содержащее 0, образует подалгебру. Более того, если подалгебры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ алгебры $\mathbf{A}(G)$ таковы, что $(a,b) \in E$ для любых $a \in A$ и $b \in B$, то $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$. С другой стороны, если $(a,b) \notin E$ для некоторых $a \in A$ и $b \in B$, то $0 \in AB$. Таким образом, любая алгебра графа имеет комплексную алгебру подалгебр.

Рассмотрим многообразие $\mathcal{G}_I$, порожденное идемпотентными алгебрами графов. Это многообрзие не имеет свойства перестановочности, поскольку в алгебре, соответствующей графу



выполняется $b = (bc)a \neq (ba)(ca) = 0$. Так же, как и в примере 3.14, можно заключить, что $\mathcal{G}_I$-свободная алгебра с двумя порождающими имеет четыре элемента: x, y, xy, yx. Согласно следствию 3.8, многообразие $\mathcal{G}_I$ не имеет обобщенного свойства перестановочности.

Мы закончим этот раздел следующим наблюдением.

Предложение 3.16. *Любой идемпотентный групоид, имеющий обобщенное свойство перестановочности, удовлетворяет тождествам*

$$xy \cdot uv \approx (xy \cdot uy)(xv \cdot uv) \approx (xy \cdot xv)(uy \cdot uv).$$

Доказательство. Используя (G1) и (G2), получаем $xy \cdot uv \approx t(x,u)s(y,v) \approx t(x,u)y \cdot t(x,u)v$, поэтому первое тождество следует из (G3). Аналогично, используя (G1), (G3) и (G2), получаем $xy \cdot uv \approx t(x,u)s(y,v) \approx xs(y,v) \cdot us(y,v) \approx (xy \cdot xv)(uy \cdot uv)$. □

Однако, утверждение, обратное к утверждению предложения 3.16, не верно. Можно проверить, что групоид $\mathbf{G}_2$ с таблицей умножения

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	a
b	c	b	c
c	c	b	c

удовлетворяет обоим тождествам предложения 3.16, однако не имеет обобщенного свойства перестановочности.

4. ОБОБЩЕННОЕ СВОЙСТВО ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ И СВОЙСТВО ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ: НЕИДЕМПОТЕНТНЫЙ СЛУЧАЙ

Следующий пример показывает, что обобщенное свойство перестановочности и свойство перестановочности для неидемпотентных групоидов, вообще говоря, не эквивалентны.

Пример 4.1. *Существует многообразие неидемпотентных групоидов, не имеющее свойства перестановочности, но обладающее обобщенным свойством перестановочности.*

Пусть $\mathcal{V}_A$ обозначает многообразие групоидов, удовлетворяющее тождеству

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \approx (x_3x_1)(x_2x_4).$$

Очевидно, $\mathcal{V}_A$ имеет обобщенное свойство перестановочности. Из леммы 4.2 вытекает, что $\mathcal{V}_A$ не имеет свойства перестановочности: если взять $A = \{(1,3,2)\}$, то подгруппа, порожденная A в группе $\mathbf{S}_4$, не содержит транспозиции $(2,3)$.

Лемма 4.2. *Пусть $A \subseteq S_4$ — множество подстановок на четырехэлементном множетве, такое что многообразие групоидов $\mathcal{V}_A$ удовлетворяет тождеству*

$$x_1x_2 \cdot x_3x_4 \approx x_{\pi 1}x_{\pi 2} \cdot x_{\pi 3}x_{\pi 4}$$

для любой подстановки $\pi \in A$. $\mathcal{V}_A$ имеет свойство перестановочности тогда и только тогда, когда транспозиция $(2,3)$ принадлежит подгруппе, порожденной A в $\mathbf{S}_4$.

Доказательство. В общем случае, термы p, q эквивалентны в многообразии $\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность термов $p = w_1, w_2, \dots, w_n = q$, такая что для любого i найдется тождество $t(x_1, \dots, x_n) = r(x_1, \dots, x_n)$, а также термы $t_1, \dots, t_n$, такие что $\mathcal{V} \models t(x_1, \dots, x_n) = r(x_1, \dots, x_n)$, терм $t(t_1(y_1, \dots, y_m), \dots t_n(y_1, \dots, y_m))$ является подтермом в w_i, а w_{i+1} получается из w_i подстановкой вместо некоторого вхождения $t(t_1(y_1, \dots, y_m), \dots t_n(y_1, \dots, y_m))$ терма $r(t_1(y_1, \dots, y_m), \dots t_n(y_1, \dots, y_m))$. Если мы последовательно применяем подстановки $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ к терму $x_1x_2 \cdot x_3x_4$, мы получаем терм $x_{\pi 1}x_{\pi 2} \cdot x_{\pi 3}x_{\pi 4}$, где $\pi = \pi_{n-1} \cdots \pi_1$. Таким образом, свойство перестановочности имеет место тогда и только тогда, когда $(2,3)$ лежит в подгруппе, порожденной A. ☐

Свойство перестановочности и обобщенное свойство перестановочности также не эквивалентны и для унарных алгебр (которые идемпотентны лишь в тривиальном случае).

Пример 4.3. *Существует неидемпотентная унарная алгебра, имеющая обобщенное свойство перестановочности, но не имеющая свойства перестановочности.*

Пусть F содержит лишь унарные операции. Очевидно, унарная алгебра $\mathbf{A}$ имеет свойство перестановочности тогда и только тогда, когда $fg \approx gf$ для любых $f, g \in F$.

Рассмотрим подмножество B группы подстановок на X, такое что $B = B^{-1}$. Полагаем $\mathbf{B} = (X, \{f : f \in B\})$. Для любых $f, g \in B$ мы всегда можем найти терм t такой что $fg = gt$ (а именно, $t = g^{-1}fg$). Таким образом, $\mathbf{B}$ имеет обобщенное свойство перестановочности. С другой стороны, если $fg \neq gf$ для некоторых $f, g \in B$, то $\mathbf{B}$ не имеет свойства перестановочности.

Во многих важных классах алгебр два свойства перестановочности эквивалентны и без вовлечения в игру идемпотентности. Например, как мы уже видели, таким образом обстоит дело для групоидов с едницей. Следующее утвердение, однако, справедливо и в более общем случае. Элемент e является *единицей* для операции f, если

$$f(x, e, \dots, e) \approx f(e, x, e, \dots, e) \approx \dots \approx f(e, \dots, e, x) \approx x$$

для любого $x \in A$. Элемент e является *единицей* для алгебры (A, F), если e является единицей для каждой операции $f \in F$.

Лемма 4.4. *Пусть алгебра $\mathbf{A} = (A, F)$ имеет одноэлементную подалгебру $\{e\}$ и пусть e является единицей для n-арной операции $f \in F$. Если (A, F) обобщенное свойство перестановочности, то $fg = gf$ для всех $g \in F$.*

Доказательство. Согласно обобщенному свойству перестановочности,

$$g(f(x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,f(x_{1m},\dots,x_{nm})) \approx f(t_1(x_{11},\dots,x_{1m}),\dots,t_n(x_{n1},\dots,x_{nm}))$$

для некоторых термов $t_1,\dots,t_n$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(x_1,\dots,x_m) &\approx g(f(e,\dots,x_1,\dots,e),f(e,\dots,x_2,\dots,e),\dots,f(e,\dots,x_m,\dots,e)) \\ &\approx f(t_1(e,\dots,e),\dots,t_k(x_1,\dots,x_m),\dots,t_n(e,\dots,e)) \\ &\approx f(e,\dots,t_k(x_1,\dots,x_m),\dots,e) \approx t_k(x_1,\dots,x_m), \end{aligned}$$

для любого $k \leq n$. Таким образом,

$$g(f(x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,f(x_{1m},\dots,x_{nm})) \approx f(g(x_{11},\dots,x_{1m})\dots,g(x_{n1},\dots,x_{nm})).$$

□

В качестве следствия мы получаем

Предложение 4.5. *Пусть алгебра* **A** *имеет единичный элемент* e*. Если* **A** *имеет обобщенное свойство перестановочности, то* **A** *имеет свойство перестановочности.*

Добавление внешней единицы яляется стандартной процедурой при работе с алгебрами. Следующий пример показывает однако, что получающиеся таким образом алгебры с единицей могт не иметь обобщенного свойства перестановочности.

Пример 4.6. *Существует групоид* $(G \cup \{e\}, \cdot)$ *с единицей* e*, не имеющий обобщенного свойства перестановочности, в то время как групоид* $(G, \cdot)$ *имеет это свойство.*

Рассмотрим любой некоммутативный групоид **G**, имеющий обобщенное свойство перестановочности. Пусть $\mathbf{G}^*$ обозначает групоид, полученный из **G** добавлением единицы e. Если $ab \neq ba$ для некоторых $a, b \in \mathbf{G}$, то $ea \cdot be = ab \neq ba = eb \cdot ae$. Поэтому $\mathbf{G}^*$ не имеет свойства перестановочности. Таким образом, несмотря на то, что сам **G** имеет обобщенное свойство перестановочности, по предложению 4.5 групоид $\mathbf{G}^*$ этого свойства не имеет.

Алгебра $\mathbf{A} = (A, \cdot, /, \backslash, e)$ называется *лупой*, если в **A** выполняются тождества

$$\begin{aligned} x\backslash(xy) &\approx y, \qquad (yx)/x \approx y, \\ x(x\backslash y) &\approx y, \qquad (y/x)x \approx y, \\ &xe \approx ex \approx x. \end{aligned}$$

Другими словами, лупы могут рассматриваться как "неассоциативные группы". С другой стороны, группы могут рассматриваться в сигнатуре луп, где $x/y = xy^{-1}$ и $y\backslash x = y^{-1}x$.

Предложение 4.7. *Пусть* $\mathcal{V}$ *— некоторое многообразие луп. Эквивалентны следующие условия.*

1. $\mathcal{V}$ *имеет обобщенное свойство перестановочности.*
2. $\mathcal{V}$ *имеет свойство перестановочности.*
3. *Все лупы из* $\mathcal{V}$ *являются абелевыми группами.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$. По лемме 4.4 группоид $(A, \cdot)$ имеет свойство перестановочности. Нетрудно видеть, что если $(A, \cdot)$ имеет свойство перестановочности, а $\mathbf{A}$ является лупой, то и $\mathbf{A}$ имеет свойство перестановочности.

(2) $\Rightarrow$ (3). Если лупа $\mathbf{A}$ имеет свойство перестановочности и $x, y, z \in A$, то

$$xy \cdot z = xy \cdot ez = xe \cdot yz = x \cdot yz$$

(и поэтому $\mathbf{A}$ является группой) и

$$xy = (xy)(x^{-1}x) = (xx^{-1})(yx) = yx.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Хорошо известно, что комплексное произведение двух подгрупп вновь является подгруппой исходной группы. ☐

В заключение приведем один результат о коммутативных групоидах. Терм r называется $\mathbf{G}$-*симметричным*, если в $\mathbf{G}$ выполняется тождество $r(x, y) \approx r(y, x)$.

Предложение 4.8. *Если коммутативный групоид* $\mathbf{G}$ *имеет обобщенное свойство перестановочности, и хотя бы один из термов* t, s *в определении этого свойства является линейным или* $\mathbf{G}$-*симметричным, то* $\mathbf{G}$ *имеет свойство перестановочности.*

Доказательство. В силу коммутативности, мы можем полагать, что терм t линеен или $\mathbf{G}$-симметричен. Если t $\mathbf{G}$-симметричен, то используя несколько раз коммутативность и обобщенное свойство перестановочности, получаем

$$xy \cdot uv \approx yx \cdot uv \approx t(y, u) \cdot s(x, v) \approx t(u, y) \cdot s(x, v) \approx ux \cdot yv \approx xu \cdot yv.$$

Если же t линеен, то либо $t(x, y) \in \{xy, yx\}$ (и поэтому t $\mathbf{G}$-симметричен), либо $t(x, y) = x$, либо $t(x, y) = y$. Предположим сначала, что $t(x, y) = x$ и поэтому $xy \cdot uv \approx xs(y, v)$. Таким образом, терм $xy \cdot uv$ не зависит от u, и мы получаем, используя коммутативность:

$$xy \cdot uv \approx xy \cdot yv \approx yv \cdot xy \approx yv \cdot yx \approx yv \cdot ux \approx ux \cdot yv \approx xu \cdot yv.$$

Если же $t(x, y) = y$, то $xy \cdot uv \approx us(y, v)$, поэтому терм $xy \cdot uv$ не зависит от x. Аналогичными вычислениями мы придем к требуемому заключению. ☐

5. Тождества, выполняющиеся на комплексных алгебрах подалгебр

Рассмотрим произвольное многообразие $\mathcal{V}$. Пусть $\mathbf{Cm}\,\mathcal{V}$ обозначает многообразие, порожденное комплексными алгебрами алгебр из $\mathcal{V}$, то есть

$$\mathbf{Cm}\,\mathcal{V} = \mathrm{V}(\{\mathbf{Cm}\,\mathbf{A} : \mathbf{A} \in \mathcal{V}\}).$$

Если $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности, пусть $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ обозначает многообразие, порожденное комплексными алгебрами подалгебр алгебр из $\mathcal{V}$, то есть

$$\mathbf{CSub}\,\mathcal{V} = \mathrm{V}(\{\mathbf{CSub}\,\mathbf{A} : \mathbf{A} \in \mathcal{V}\}).$$

Очевидно, $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V} \subseteq \mathbf{Cm}\,\mathcal{V}$, поскольку $\mathbf{CSub}\,\mathbf{A}$ является подалгеброй в $\mathbf{Cm}\,\mathbf{A}$. Кроме того, $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{Cm}\,\mathcal{V}$, поскольку каждая алгебра $\mathbf{A}$ вкладывается в $\mathbf{Cm}\,\mathbf{A}$ отображением $x \mapsto \{x\}$. Если многообразие $\mathcal{V}$ идемпотентно, то $\{x\}$ является подалгеброй в $\mathbf{A}$, поэтому $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$. С другой стороны, в общем случае включение $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ может не иметь места. Например, в многообразии $\mathcal{A}$ абелевых групп это не так: многообразие $\mathbf{CSub}\,\mathcal{A}$ определено согласно предложению 4.7 и идемпотентно, а само $\mathcal{A}$ неидемпотентно.

В работе [1], Дж. Гретцер и Х. Лаксер доказали такое утверждение.

Теорема 5.1. *Для произвольного многообразия $\mathcal{V}$ многообразие $\mathbf{Cm}\,\mathcal{V}$ удовлетворяет в точности тем тождествами, которые получаются из линейных тождеств, выполняющихся в $\mathcal{V}$, посредством идентификации переменных.*

Следствие 5.2. *Для произвольного многообразия $\mathcal{V}$ равенство $\mathcal{V} = \mathbf{Cm}\,\mathcal{V}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ имеет базис линейных тождеств.*

Нас интересует вопрос поставленный в работе [9]: *Каким тождествам удовлетворяет многообразие $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$, если оно определено?* В частности, *при каких условиях имеет место равенство $\mathcal{V} = \mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$?*

Из теоремы 5.1 следует, что $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ удовлетворяет всем линейным тождествам, выполняющимся в $\mathcal{V}$. Если $\mathcal{V}$ идемпотентно, то $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ тоже идемпотентно, но тождество идемпотентности не линейно. Более того, $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ может оказаться идемпотентным, даже если для исходного многообразия $\mathcal{V}$ это было не так; как, например, это случилось для абелевых групп. Здесь мы докажем аналог теоремы 5.1, характеризующий тождества, выполняющиеся в $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$. Но сначала введем определение *полулинейного предшественника.*

Тождество $t \approx s$ называется *полулинейным*, если хотя бы один из термов t, s линеен. *Линеаризацией* терма $t(x_1, \dots, x_n)$ называется терм t^*, получающийся из t заменой j-ого вхождения переменной x_i в t переменной x_{ij}, где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$, а k_i — число вхождений переменной x_i в t.

Для термов t, s пусть k_i, l_i обозначает число вхождений x_i в t, s, соответственно. Если x_i не входит в t, мы полагаем $k_i = 1$.

Тождество $t^* \approx \tilde{s}$ называется *полулинейным предшественником* для упорчядоченной пары (t, s), если найдутся термы $r_{ij}(x_{i1}, \dots, x_{ik_i})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq l_i$, такие что

$$\tilde{s} = s^*(r_{11}(\overline{x_1}), \dots, r_{1l_1}(\overline{x_1}), \dots, r_{n1}(\overline{x_n}), \dots, r_{nl_n}(\overline{x_n}))$$

(здесь $\overline{x_i}$ обозначает последовательность $(x_{i1}, \dots, x_{ik_i})$). Например, полулинейными предшественниками пары $(xy \cdot xz, yz \cdot x)$ являются в точности тождества вида $x_1 y \cdot x_2 z \approx p(y)q(z) \cdot r(x_1, x_2)$, где термы p, q унарны, а терм r бинарен. Полулинейными предшественниками пары $(yz \cdot x, xy \cdot xz)$ являются в точности тождества вида $yz \cdot x \approx p_1(x)q(y) \cdot p_2(x)r(z)$, где термы p_1, p_2, q, r унарны. (В обоих примерах вместо использования двойных индексов мы использовали различные буквы для обозначения переменных и термов.)

Тождество $t \approx s$ получается из любого полулинейного предшественника пары (t, s) посредством идентификации переменных $x_{i1}, \dots, x_{ik_i}$ и заменой унарных подтермов $r_{ij}(x_i, \dots, x_i)$ единственной переменной. В частности, тождество $t \approx s$ является следствием любого полулинейного предшественника пары (t, s) и идемпотентности.

Теорема 5.3. *Пусть многообразие $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности. Тогда $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $t \approx s$ тогда и только тогда, когда многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому* *полулинейному предшественнику пары* (t, s) *и некоторому полулинейному предшественнику пары* (s, t).

Доказательство. Предположим сначала, что тождество $t(x_1, \dots, x_n) \approx s(x_1, \dots, x_n)$ выполняется в $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$. Пусть k_i, l_i обозначают число вхождений переменной x_i в термы t, s. Если x_i не входит в t, мы полагаем $k_i = 1$.

Пусть $\mathbf{A}_i$ обозначает подалгебру $\mathcal{V}$-свободной алгебры $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$, порожденную множеством $\{x_{i1}, \dots, x_{ik_i}\}$, $i = 1, \dots, n$ (где $X = \{x_{ij} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le k_i\}$). Поскольку $t(A_1, \dots, A_n) = s(A_1, \dots, A_n)$, имеем

$$t^*(x_{11}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk_n}) \in s(A_1, \dots, A_n).$$

Это означает, что найдутся термы $r_{ij}(x_{i1}, \dots, x_{ik_i}) \in A_i$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le l_i$, такие что

$$t^*(x_{11}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk_n}) \approx$$
$$s^*(r_{11}(\overline{x_1}), \dots, r_{1l_1}(\overline{x_1}), \dots, r_{n1}(\overline{x_n}), \dots, r_{nl_n}(\overline{x_n})).$$

Последнее тождество является полулинейным предшественником для пары (t, s). Это тождество выполняется в $\mathcal{V}$, поскольку оно выполняется на $\mathcal{V}$-свободной алгебре $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$. Чтобы получить полулинейного предшественника для пары (s, t), мы применим ту же процедуру с заменой t на s и наоборот.

Докажем обратное. Пусть для термов $t(x_1, \dots, x_n), s(x_1, \dots, x_n)$ некоторые полулинейные предшественники $t^* \approx \tilde{s}$ и $s^* \approx \tilde{t}$ выполняются в $\mathcal{V}$. Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$; рассмотрим произвольные подалгебры $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ в $\mathbf{A}$. Для доказательства включения $t(A_1, \dots, A_n) \subseteq s(A_1, \dots, A_n)$ предположим, что $a \in t(A_1, \dots, A_n)$. Это означает, что найдутся $a_{i1}, \dots, a_{ik_i} \in A_i$, $i = 1, \dots, n$, такие что

$$a = t^*(a_{11}, \dots, a_{nk_n}).$$

Алгебра $\mathbf{A}$ удовлетворяет тождеству $t^* \approx \tilde{s}$, поэтому

$$a = s^*(r_{11}(\overline{a_1}), \dots, r_{1l_1}(\overline{a_1}), \dots, r_{n1}(\overline{a_n}), \dots, r_{nl_n}(\overline{a_n})).$$

Пускольку $r_{ij}(a_{i1}, \dots, a_{ik_i}) \in A_i$ для всех i, j, мы видим, что

$$a \in s^*(A_1, \dots, A_1, \dots, A_n \dots, A_n) = s(A_1, \dots, A_n).$$

Обратное включение $s(A_1, \dots, A_m) \subseteq t(A_1, \dots, A_m)$ получается похожим образом с использованием тождества $s^* \approx \tilde{t}$. Таким образом, тождество $t \approx s$ выполняется в $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$. □

Следствие 5.4. *Для многообразия* $\mathcal{V}$ *с обобщенным свойством перестановочности включение* $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любого истинного в* $\mathcal{V}$ *тождества* $t \approx s$ *некоторый полулинейный предшественник пары* (t, s) *выполняется в* $\mathcal{V}$.

Следствие 5.5. *Для идемпотентного многообразия* $\mathcal{V}$ *с обобщенным свойством перестановочности равенство* $\mathcal{V} = \mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любого истинного в* $\mathcal{V}$ *тождества* $t \approx s$*, некоторый полулинейный предшественник пары* (t, s) *выполняется в* $\mathcal{V}$.

Следствие 5.6. *Пусть многообразие* $\mathcal{V}$ *идемпотентно и имеет обобщенное свойство перестановочности. Пусть терм* $t(x_1, \dots, x_n)$ *линеен, а терм* $s(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ *таков, что каждая из переменных* $x_1, \dots, x_n$ *встречается в* s *не более одного раза. Тождество* $t \approx s$ *истинно в* *многообразии* **CSub** $\mathcal{V}$ *тогда и только тогда, когда в* $\mathcal{V}$ *истинно линейное тождество* $t \approx s^*$.

Из теоремы 5.1 вытекает, что **CSub** $\mathcal{V}$ удовлетворяет всем линейным тождествам, истинным в $\mathcal{V}$. Это также следует из теоремы 5.3. Для любой пары (t, s) линейных термов тождество $t \approx s$ является полулинейным предшественником пары (t, s), поскольку $t^* = t$ and $s^* = s$. Таким образом, если $t \approx s$ истинно в $\mathcal{V}$, то $t \approx s$ истинно и в **CSub** $\mathcal{V}$.

Следующая пара примеров иллюстрирует возможности теоремы 5.3.

Пример 5.7. *Для любого многообразия* $\mathcal{V}$ *абелевых групп многообразие* **CSub** $\mathcal{V}$ *идемпотентно.*

Найдем сначала полулинейного предшественника пары $(x, x + x)$, который выполнялся бы в $\mathcal{V}$: $s^*(x, y) = x + y$ для терма $s(x) = x + x$, поэтому мы можем полагать $\tilde{s}(x) = s^*(x, 0)$ (0 является термом). Тождество $x \approx x + 0$ истинно в $\mathcal{V}$. Найдем теперь полулинейного предшественника пары $(x + x, x)$, который выполнялся бы в $\mathcal{V}$: $t^*(x, y) = x + y$ для терма $t(x) = x + x$. Поскольку $s(x) = s^*(x) = x$, подставляя терм $x + y$ вместо x, мы получаем истинное в $\mathcal{V}$ тождество $x + y \approx x + y$.

Пример 5.8. *Если многообразие* $\mathcal{V}$ *идемпотентных группоидов, имеющих свойство перестановочности, удовлетворяет тождеству* $x(xy) \approx y$, *то это тождество также истинно в* **CSub** $\mathcal{V}$.

Предположим противное. Пусть $t(x, y) = x(xy)$, $s(y) = y$ и пусть $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому полулинейному предшественнику $t^* \approx \tilde{s}$. Это означает, что найдется унарный терм u, такой что тождество $x_1(x_2y) = u(y)$ истинно в $\mathcal{V}$. Так как $\mathcal{V}$ идемпотентно, $u(y) = y$. Нетрудно найти группоид в $\mathcal{V}$, для которого таблица умножения отлична от приведенной ниже:

$\cdot$	0	1	2
0	0	1	2
1	2	1	0
2	0	1	2

К сожалению, теорема 5.3 не может нам помочь установить справедливость следующей гипотезы, высказанной в [9].

Гипотеза 5.9. *Пусть многообразие* $\mathcal{V}$ *идемпотентно и имеет обобщенное свойство перестановочности. Равентсво* $\mathcal{V} =$ **CSub** $\mathcal{V}$ *имеет место тогда и только тогда, когда многообразие* $\mathcal{V}$ *имеет базис, состоящий из линейных тождеств и тождеств* $f(x, \ldots, x) \approx x$, *где* f *пробегает все множество основных операций.*

Отметим, что обратное утверждение верно для любого идемпотентного многообразия.

Все известные идемпотентные многообразия, для которых $\mathcal{V} =$ **CSub** $\mathcal{V}$, имеют линейный и идемпотентный базис. Например, это так для многообразия мод произвольной сигнатуры, для многообразия коммутативных бинарных мод, для многообразия дифференциальных группоидов (то есть группоидных мод, удовлетворяющих тождеству $x(yz) \approx xy$), для многообразия нормальных полугрупп (полугрупповых мод), а также для любого подмногообразия указанных многообразий; в частности, для многообразия полурешеток, для многообразий левых ($xy \approx x$) и правых ($xy \approx y$) связок с нулем, для многообразия прямоугольных связок ($xyz \approx xz$), для многообразий левых ($xyz \approx xzy$) и правых ($zyx \approx yzx$) нормальных связок, а также для многообразия барицентрических алгебр, см. [13].

Отметим также, что нам не известно ни одного примера идемпотентного многообразия $\mathcal{V}$ без свойства перестановочности, для которого $\mathcal{V} = \mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$. Все известные нам примеры идемпотентных алгебр без свойства перестановочности (но с обобщенным свойством перестановочности) указаны в примере 3.1. Например, нетрудно проверить, что для $\mathbb{F} = \mathrm{GF}(3)$, алгебра $\underline{\mathbf{M}}_X$ удовлетворяет тождеству $\underline{r}(x, \underline{r}(y, x)) \approx y$, где $\underline{r}$ — основная операция из $\underline{X}$. Однако это тождество не выполняется в $\mathbf{CSub}\,\underline{\mathbf{M}}_X$.

Пример 5.10. *Гипотеза 5.9 не верна, если опустить требование идемпотентности.*

Рассмотрим многообразие $\mathcal{V}$ групоидов со свойством перестановочности, удовлетворяющих тождествам $(xx)y \approx xy$ и $y(xx) \approx yx$. Очевидно, $\mathcal{V}$ имеет обобщенное свойство перестановочности. Из теоремы 5.1 следует, что многообразие $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ имеет свойство перестановочности. Кроме того, нетрудно проверить, что $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$ удовлетворяет обоим тождествам, выполняющимся в $\mathcal{V}$. Поэтому $\mathbf{CSub}\,\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$. Если $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, то мы можем вложить $\mathbf{A}$ в $\mathbf{CSub}\,\mathbf{A}$ по правилу $x \mapsto \{x, xx\}$. Таким образом, $\mathcal{V} = \mathbf{CSub}\,\mathcal{V}$. Покажем, что $\mathcal{V}$ не имеет базиса линейных тождеств.

Все тождества, истинные в $\mathcal{V}$, *регулярны* (то есть имеют одни и те же переменные в обоих частях), так как $\mathcal{V}$ имеет базис, состоящий из регулярных тождеств. Очевидно, каждое регулярное линейное тождество *сбалансировано* (то есть числа вхождений каждой переменной в левую и правую части тождества совпадают). Нетрудно видеть, что следствия сбалансированных тождеств сами сбалансированы. Поскольку тождества $(xx)y \approx xy$ и $y(xx) \approx yx$ не сбалансированы, они не могут быть выведены из линейных тождеств, истинных в $\mathcal{V}$.

6. БОЛЕЕ СИЛЬНАЯ ГИПОТЕЗА НЕ ВЕРНА

В этом разделе мы рассмотрим многообразия, которые не обязательно имеют обобщенное свойство перестановочности. Наша цель — показать, что соответствующее усиление гипотезы 5.9 не верно. А именно, мы покажем, что существует идемпотентная алгебра $\mathbf{A}$, такая что $\mathbf{CSub}\,\mathbf{A}$ существует, $\mathrm{V}(\mathbf{CSub}\,\mathbf{A}) = \mathrm{V}(\mathbf{A})$, но многообразие $\mathrm{V}(\mathbf{A})$ не имеет базиса идемпотентных линейных тождеств. Весь раздел посвящен построению такой алгебры.

Вновь рассмотрим групоид $\mathbf{G}_1$ из примера 2.3.

$\cdot$	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	a	b	c

Мы уже отмечали, что $\mathbf{CSub}\,\mathbf{G}_1$ существует несмотря на то, что $\mathbf{G}_1$ не имеет обобщенного свойства перестановочности. Мы покажем, что групоиды $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{CSub}\,\mathbf{G}_1$ порождают одно и то же многообразие (лемма 6.5), но что $\mathrm{V}(\mathbf{G}_1)$ не имеет базиса идемпотентных линейных тождеств. На самом деле мы покажем, что все линейные тождества, выполняющиеся на $\mathbf{G}_1$, регулярны (лемма 6.3) и поэтому нерегулярные тождества

$$(xy)x \approx x \qquad \text{и} \qquad (yx)x \approx x,$$

выполняющиеся на $\mathbf{G}_1$, не могут быть получены из идемпотентных линейных тождеств, выполняющихся на $\mathbf{G}_1$.

Каждый терм t может быть записан в виде

$$t = t_1(t_2(\ldots t_{k-1}(t_k x)\ldots)),$$

где $t_1, \ldots, t_k$ — термы, а x — переменная. В этом случае переменная x называется *фокалом терма* t и обозначается $fc(t)$.

Лемма 6.1. *Если* $\mathbf{G}_1$ *удовлетворяет тождеству* $t \approx u$, *то* $fc(t) = fc(u)$.

Доказательство. Предположим, что $fc(t) \neq fc(u)$. Подставим c вместо $fc(t)$ и a вместо всех остальных переменных, входящих в t и u. Тогда значение t равно c, а значение u равно a, поскольку элементы a, c являются правыми нулями подгрупоида $\{a, c\}$. Поэтому тождество $t \approx u$ не выполняется в $\mathbf{G}_1$, противоречие. ☐

Лемма 6.2. *Если* $\mathbf{G}_1$ *удовлетворяет линейному тождеству* $t \approx u$, $t = t_1(t_2(\ldots t_{k-1}(t_k x)\ldots))$ *и* $u = u_1(u_2(\ldots u_{m-1}(u_m x)\ldots))$, *то*

1. $\{fc(t_i) : i \leq k\} = \{fc(u_j) : j \leq m\}$. *В частности,* $m = k$.
2. *Для любого* $i \leq k$ *существует* $j \leq k$, *такой что линейное тождество* $t_i \approx u_j$ *выполняется в* $\mathbf{G}_1$.

Доказательство. Чтобы доказать (1), положим $fc(t) = fc(u) = x$ и предположим, что переменная $y = fc(t_i)$ не принадлежит $\{fc(u_j) : j \leq m\}$. Пусть $x = a$, $y = b$, а все остальные переменные равны c. Тогда значения всех переменных в $\{fc(u_j) : j \leq k\}$ равны c и поэтому значения всех термов u_j после такой подстановки равны c, а значение терма u равно a. С другой стороны, значение терма t_i равно b, а значения всех термов t_p, $p \neq i$, равны c. Поэтому значение терма t равно c, что противоречит истинности тождества $t \approx u$ на $\mathbf{G}_1$.

Чтобы доказать (2), для каждого терма t_i выберем терм u_j с тем же самым узлом y. Предположим, что значения термов t_i и u_j не совпадают для некоторого означивания переменных. Тогда значение переменной y должно быть a или b.

Если $y = a$, то $\{t_i, u_j\} = \{a, c\}$ после подстановки. Пусть, скажем, $t_i = a$ и $u_j = c$. Полагаем значение $fc(t) = fc(u)$ равным b, а значения всех переменных $fc(t_p)$, $p \neq i$, и переменных $fc(u_q)$, $q \neq j$, равными c. Тогда после подстановки мы получаем $t = c$ и $u = b$, что противоречит истинности тождества $t \approx u$ на $\mathbf{G}_1$. Случай $y = b$ рассматривается аналогично. ☐

Лемма 6.3. *Каждое линейное тождество, истинное на* $\mathbf{G}_1$, *регулярно.*

Доказательство. Пусть $r(t, u)$ обозначает число различных переменных, входящих в тождество $t \approx u$ (например, $r(xy, (xz)y) = 3$). Доказательство будем вести индукцией по $r(t, u)$. Если $r(t, u) = 1$, то $t = u = x$, и требуемое заключение выполнено.

Предположим, что для всякого линейного тождества $t' \approx u'$ с условием $r(t', u') \leq n$ заключение леммы верно и рассмотрим линейное тождество $t \approx u$, для которого $r(t, u) = n + 1$. Согласно лемме 6.2, $t = t_1(t_2(\ldots t_{k-1}(t_k x)\ldots))$

и $u = u_1(u_2(\ldots u_{k-1}(u_k x)\ldots))$ для некоторого k и некоторых термов t_i, u_i. Кроме того, для каждого $i \leq k$ существует $j \leq k$, такой что тождество $t_i \approx u_j$ истинно на $\mathbf{G}_1$. Это тождество линейно и $r(t_i, u_j) \leq n$, потому что x не входит в $t_i \approx u_j$. Согласно индукционному предположению, тождество $t_i \approx u_j$ регулярно. Поэтому множество переменных, встречающихся в t, содержится во множестве переменных, встречающихся в u. Применяя лемму 6.2 к тождеству $u \approx t$, мы получим совпадение этих двух множеств. Поэтому тождество $t \approx u$ регулярно. ☐

Комбинируя полученные результаты, мы можем получить описание линейных тождеств, истинных в $\mathbf{G}_1$. Для этого определим сначала *фокально эквивалентные* термы $t \equiv_f u$ рекурсивно по сложности термов t, u:

1. Если один из термов t, u содержит единственную переменную x, то $t \equiv_f u$ тогда и только тогда, когда $t = u = x$.
2. Если оба терма t, u содержат по крайней мере две переменных и $t = t_1(t_2(\ldots t_{k-1}(t_k x)\ldots))$, $u = u_1(u_2(\ldots u_{l-1}(u_l y)\ldots))$, то $t \equiv_f u$ тогда и только тогда, когда выполняются условия: $k = l$, $x = y$, для любого $i \leq k$ существует $j \leq k$, такой что $t_i \equiv_f u_j$, а для любого $i \leq k$ существует $j \leq k$, такой что $u_i \equiv_f t_j$.

Следствие 6.4. *$\mathbf{G}_1$ удовлетворяет линейному тождеству $t \approx u$ тогда и только тогда, когда термы t, u фокально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство ведется индукцией по сложности термов t, u с привлечением лемм 6.1 и 6.2. ☐

Лемма 6.5. *Групоиды $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{CSub}\,\mathbf{G}_1$ порождают одно и то же многообразие.*

Доказательство. Поскольку идемпотентная алгебра вложима в комплексную алгебру своих подалгебр (когда последняя существует), достаточно показать, что групоид $\mathbf{CSub}\,\mathbf{G}_1$ вложим в произведение $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_1$. Существуют два гомоморфизма из $\mathbf{CSub}\,\mathbf{G}_1$ на $\mathbf{G}_1$:

$$\begin{aligned} f_1(\{a\}) = f_1(\{a,c\}) = f_1(\{a,b,c\}) &= a, \\ f_1(\{b\}) &= b, \\ f_1(\{c\}) = f_1(\{b,c\}) &= c \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f_2(\{b\}) = f_2(\{b,c\}) = f_2(\{a,b,c\}) &= b, \\ f_2(\{a\}) &= a, \\ f_2(\{c\}) = f_2(\{a,c\}) &= c. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $ker(f_1) \cap ker(f_2) = 0$, поэтому $\mathbf{CSub}\,\mathbf{G}_1$ является подпрямой степенью $\mathbf{G}_1$. ☐

Благодарности. Работа была начата во время визита первого автора в Варшавский технический университет летом 2003 года. Автор благодарен проф. Анне Романовской и группе ее сотрудников за оказанную поддержку и балагоприятную атмосферу. Работа была продолжена во время совместной работы по проекту ИНТАС в Праге летом 2004 года, а также во время визитов последнего и первого автора в Варшаву в 2005 году.

Несколько раз авторы использовали "Оттер" [19]. Некоторые доказательства, представленные в разделе 3, появились в результате переработки и упрощения доказательств, полученных "Оттером".

Авторы благодарны Питеру Джоунсу за проявленный интерес к работе, в частности, за предоставление прямого доказательства предложения 3.11. Много полезных замечаний о настоящей работе сделали также Джонатан Смит, Михал Стронковски, Марина Семенова и Джордж Гретцер.

Список литературы

[1] G. Grätzer, H. Lakser, *Identities for globals (complex algebras) of algebras*, Colloq. Math. 56 (1988), 19–29.
[2] G. Grätzer, S. Whitney, *Infinitary varieties of structures closed under the formation of complex structures*, Colloq. Math. 48 (1984), 1–5.
[3] A. Shafaat, *On varieties closed under the construction of power algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. 11 (1974), 213–218.
[4] C. Brink, *Power structures*, Algebra Univers. 30 (1993), 177–216.
[5] I. Bošnjak, R. Madarász, *On power structures*, Algebra and Discr. Math. 2 (2003), 14–35.
[6] A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Modal Theory—an Algebraic Approach to Order, Geometry, and Convexity*, Heldermann Verlag, Berlin, 1985.
[7] A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Subalgebra systems of idempotent entropic algebras*, J. Algebra 12 (1989), 247–262.
[8] A. Romanowska, J.D.H. Smith, *On the structure of the subalgebra systems of idempotent entropic algebras*, J. Algebra 12 (1989), 263–283.
[9] A. Pilitowska, *Modes of submodes*, PhD thesis, Warsaw University of Technology, 1996.
[10] A. Pilitowska, *Identities for classes of algebras closed under the complex structures*, Discuss. Math. Algebra and Stochastic Methods 18 (1998), 85–109.
[11] A. Pilitowska, *Enrichments of affine spaces and algebras of subalgebras*, Discuss. Math. Algebra and Stochastic Methods 19 (1999), 207–225.
[12] J. Ježek, T. Kepka, *Medial groupoids,* Rozpravy ČSAV 93/2 (1983).
[13] A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Modes.* World Scientific, 2002.
[14] T. Evans, *Properties of algebras almost equivalent to identities*, J. London Math. Soc. 35 (1962), 53–59.
[15] J. Dudek, *Small idempotent clones I.*, Czech. Math. J. 48/1 (1998), 105–118.
[16] P. Đapić, J. Ježek, P. Marković, R. McKenzie, D. Stanovský, *$*$-linear equational theories of groupoids*, Algebra Univers. 56/3-4 (2007), 357-397.
[17] J. Ježek, R. McKenzie, *The variety generated by equivalence algebras*, Algebra Univers. 45 (2001), 211–219.
[18] S. Oates-Williams, *Graphs and universal algebras*, Lecture Notes Math. 884 (1981), 351–354.
[19] W.W. McCune, *Otter: An Automated Deduction System.*
Available at `http://www-unix.mcs.anl.gov/AR/otter/`

Harold Washington College, 30 East Lake St., Chicago, IL 60601, USA
E-mail address: `kadaricheva@ccc.edu`

Warsaw University of Technology, Plac Politechniki 1, 00-661 Warsaw, Poland
E-mail address: `apili@mini.pw.edu.pl`

Charles University, Sokolovská 83, 186 00 Prague, Czech Republic
E-mail address: `stanovsk@karlin.mff.cuni.cz`