

Kapitola 1

Nekonečné číselné řady

Definice 1.1 *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

nazýváme nekonečnou číselnou řadou. $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nazveme n -tý částečný součet řady a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů.

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s .

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Divergentní řady dále dělíme na tři případy:

- *Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, řekneme, že řada diverguje k $+\infty$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,*
- *je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$, řekneme, že řada diverguje k $-\infty$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$,*
- *jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje, řekneme, že řada osciluje.*

Příklad 1.1 *Určete, kdy konverguje geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, kde $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a zjistěte její součet.*

Řešení:

1. *Nechť $q = 1$, pak $s_n = na$ a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ pro $a > 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$ pro $a < 0$. Řada je tedy divergentní a diverguje k $+\infty(-\infty)$ pro $a > 0(a < 0)$.*

2. Necht $q = -1$, pak $s_n = 0$ pro n sudé a $s_n = a$ pro n liché, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje. Řada osciluje.

3. Necht $|q| \neq 1$.

$$\begin{aligned}s_n &= a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} \\s_n q &= aq + aq^2 + \dots + aq^n \\s_n - s_n q &= s_n(1 - q) = a - aq^n = a(1 - q^n) \\s_n &= a \frac{1 - q^n}{1 - q}.\end{aligned}$$

- Pro $|q| < 1$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q},$$

řada konverguje a má součet $\frac{a}{1-q}$.

- Pro $q > 1$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} = \pm \infty,$$

řada diverguje k $\pm \infty$.

- Pro $q < -1$ limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje, řada tedy osciluje.

Definice 1.2 Řada se nazývá omezená, je-li posloupnost $\{s_n\}$ omezená.

Věta 1.1 Konvergentní řada je omezená.

Důkaz

Viz. věta z prvního semestru, má-li posloupnost vlastní limitu, pak je omezená. $\square$

Poznámka 1.1 Obrácené tvrzení neplatí. Např. řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní (osciluje), ale je omezená.

Věta 1.2 Necht jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \gamma b_n)$ a platí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \gamma b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz

Důsledek věty o aritmetice limit.

□

Poznámka 1.2 *Konvergentní řady tvoří vektorový prostor.*

Věta 1.3 *(nutná podmínka konvergence) Je-li $\sum a_n$ konvergentní, pak*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Důkaz

Sporem. Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $m > n_0$ takové, že $|a_m| > \varepsilon$, tedy $|s_m - s_{m-1}| > \varepsilon$ a proto není posloupnost $\{s_n\}$ Cauchyovská, tedy není ani konvergentní.

□

Poznámka 1.3 *Obráceně věta neplatí.*

Příklad 1.2 *Vyšetřete konvergenci harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.*

Řešení:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{i} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &\geq \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{i} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \geq \sum_{i=1}^{2^{n-2}} \frac{1}{i} + 2 \cdot \frac{1}{2} \geq \dots \geq 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů této řady je rostoucí, jelikož $a_n = \frac{1}{n} > 0$, tedy limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existuje. Jelikož je $s_{2^n} \geq \frac{n+1}{2} \rightarrow \infty$, je tato limita $+\infty$. Tedy harmonická řada diverguje k $+\infty$.

Věta 1.4 *Nechť $p \in \mathbb{N}$, pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně buď konvergují nebo divergují.*

Důkaz

Označme $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=p+1}^n a_i$, pak $s_n = \sum_{i=1}^p a_i + \hat{s}_n$ a jelikož $\sum_{i=1}^p a_i \in \mathbb{R}$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n = \pm\infty$.

□

Poznámka 1.4 *Z předcházející věty plyne, že na konvergenci, resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů.*

1.1 Řady s nezápornými členy

Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme řadou s nezápornými členy.

Věta 1.5 *Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, pak součet této řady existuje.*

- Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neomezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.
- Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz

Přímý důsledek věty z prvního semestru "rostoucí posloupnost má limitu, která je vlastní (rovna $\sup\{a_n\}$), je-li tato posloupnost omezená a je rovna $+\infty$, je-li posloupnost $\{a_n\}$ neomezená.

□

1.1.1 Kritéria konvergence

Věta 1.6 *(srovnávací kritérium) Nechť $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$, pak platí:*

- Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Jestliže diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz

Označme $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^n b_i$, pak $s_n \leq \hat{s}_n$. Jelikož jsou posloupnosti $\{s_n\}$ a $\{\hat{s}_n\}$ neklesající, tak mají limitu. Navíc platí $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n$ ¹.

□

Poznámka 1.5 *Předpoklad $a_n \leq b_n$ nemusí platit pro všechna n , ale stačí, aby platil $\forall n > n_0$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Příklad 1.3 *Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

¹věta o nerovnostech a limitách v prvním semestru

Řešení: Jelikož $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, tak se stačí zaměřit na konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje a tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Věta 1.7 (limitní srovnávací kritérium) Necht $a_n \geq 0$ a $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, pak obě řady buď konvergují, nebo obě divergují.

Důkaz

Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{A}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2A$, $\forall n > n_0$. Tedy $\frac{A}{2} \cdot b_n \leq a_n \leq 2A \cdot b_n$, $\forall n > n_0$ a dál jen využijeme věty 1.6 a 1.2.

□

Příklad 1.4 Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8 \ln n},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}.$

Řešení:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+3n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 3 \in (0, \infty)$. Jelikož harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz příklad 1.2), tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8 \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, \infty)$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz příklad 1.3), tak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8 \ln n}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi \in (0, \infty)$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ diverguje.

Věta 1.8 (Odmocninové kritérium - Cauchyho) Necht $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq 0$.

a) i) Jestliže existuje $q < 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
 ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

b) Existuje-li limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, pak:

i) Je-li $q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
 ii) Je-li $q > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz

a) i) Je-li $q < 1$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak $a_n \leq q^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jelikož geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (viz. příklad 1.1), tak konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dle věty 1.6.
 ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (viz. věta 1.3).

b) Existuje-li limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, pak:

i) Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $q + \varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dále postupujeme stejně jako v části a) i).
 ii) Je-li $q > 1$, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n > 1 \forall n > n_0$. Dále viz. a) ii).

□

Příklad 1.5 Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Řešení:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(3 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

proto řada konverguje.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} \\ &\stackrel{L'H}{=} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}} \cdot \frac{-2}{\pi \sqrt{1-1/n^2}} \cdot \frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}} = e^{\frac{-2}{\pi}} < 1, \end{aligned}$$

tedy řada konverguje.

Věta 1.9 (Podílové kritérium - d'Alembertovo) Necht $a_n \geq 0$.

i) Jeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

ii) Existuje-li limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak:

- je-li $q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- je-li $q > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz

i) Jelikož $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, tak $a_{n+1} \leq a_n q$, tedy indukci dokážeme, že $a_n \leq a_1 q^{n-1}$. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ je konvergentní geometrická řada ($|q| < 1$), tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje dle věty 1.6. Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak $a_{n+1} \geq a_1$ a jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1$ diverguje², tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) – Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, tak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1$ pro všechna $n > n_0$. Označme $\hat{q} = q + \varepsilon$ a postupujme dále jako v první části důkazu, tedy dostaneme $a_{n+1} \leq a_n \hat{q}$ pro všechna $n > n_0$ a proto $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} \hat{q}^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Jelikož je $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n} \hat{q}^n$ konvergentní geometrická řada, tak je i $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergentní dle věty 1.6 a tedy je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dle věty 1.4.

² $a_1 > 0$, jelikož výraz $\frac{a_2}{a_1}$ má smysl z předpokladu věty, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

- Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, tak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pro všechna $n > n_0$, tedy $a_{n_0+k} > a_{n_0} \quad \forall n > n_0$.
Dále postupujeme jako v předchozích částech důkazu.

□

Příklad 1.6 Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-7)2^n}{n!}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Řešení:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n-5)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(2n-7)2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-5)2}{(2n-7)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-10}{2n^2-7n} = 0 < 1,$$

tedy řada konverguje.

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

tedy řada diverguje.

Poznámka 1.6 V situaci, kdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, kritérium "mlčí". Tato situace může nastat jak pro konvergentní řadu (viz. příklad 1.3), tak pro divergentní řadu (viz. příklad 1.2).

Věta 1.10 (Raabeovo kritérium) Nechť $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- i) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
ii) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz

- i) Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a n_0 takové, že $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dostaneme tedy:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &> 1 + \varepsilon, \\ n(a_n - a_{n+1}) &> a_{n+1} + \varepsilon a_{n+1}, \\ na_n - (n+1)a_{n+1} &> \varepsilon a_{n+1}, \\ \frac{1}{\varepsilon}(na_n - (n+1)a_{n+1}) &> a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i < a_1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\varepsilon}((i-1)a_{i-1} - ia_i) \right) \\ &= a_1 + \frac{1}{\varepsilon}(a_1 - 2a_2 + 2a_2 - 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} - na_n) \\ &= a_1 + \frac{1}{\varepsilon}(a_1 - na_n) \leq a_1 + \frac{1}{\varepsilon}a_1. \end{aligned}$$

Jelikož posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající a omezená, je také konvergentní. Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- ii) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$ pro všechna $n > n_0$. Pak

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &< 1 \\ na_n - na_{n+1} &< a_{n+1} \\ na_n &< (n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Dostáváme $(n_0+1)a_{n_0+1} < (n_0+2)a_{n_0+2} < \dots < na_n$ a tedy $a_n > \frac{1}{n}(n_0+1)a_{n_0+1}$. Proto

$$\sum_{i=n_0+1}^n a_i > \sum_{i=n_0+1}^n \frac{1}{i}(n_0+1)a_{n_0+1} = (n_0+1)a_{n_0+1} \sum_{i=n_0+1}^n \frac{1}{i}.$$

Z divergence harmonické řady (viz. příklad 1.2) a věty 1.6 plyne divergence řady $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ a tedy i divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (dle věty 1.4).

□

Poznámka 1.7 Někdy se Raabeovo kritérium uvádí ve tvaru³

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 1$... řada konverguje,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1$... řada diverguje.

Příklad 1.7 Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)},$$

kde $a > 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)(a+n+1)}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a}{n+1} = a. \end{aligned}$$

Je-li tedy $a > 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pro $a \in (0, 1)$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pro $a = 1$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, což je harmonická řada bez prvního členu a tedy řada divergentní.

Poznamenejme, že v této úloze by nám nepomohlo d'Alembertovo kritérium, jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Věta 1.11 (Integrální kritérium) Nechť je funkce f nerostoucí, nezáporná a definovaná na intervalu $[1, \infty)$. Pokud $a_n = f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$.

Důkaz

³zne uvedeno bez předpokladů, které jsou ale stejné jako v výše uvedené verzi tohoto kritéria

f je nerostoucí, tedy $f(n-1) \geq f(x) \geq f(n) \quad \forall x \in [n-1, n]$. Dále dostaneme

$$\begin{aligned}
 f(n-1) &= \int_{n-1}^n f(n-1)dx \geq \int_{n-1}^n f(x)dx && \geq \int_{n-1}^n f(n)dx = f(n) \\
 \sum_{n=2}^k f(n-1) &\geq \sum_{n=2}^k \int_{n-1}^n f(x)dx && \geq \sum_{n=2}^k f(n) \\
 \sum_{n=1}^k f(n) &\geq \int_1^k f(x)dx && \geq \sum_{n=2}^k f(n) \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k f(n) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f(x)dx && \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^k f(n) \\
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &\geq \int_1^{\infty} f(x)dx && \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.
 \end{aligned}$$

Z první nerovnosti dostaneme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (konvergentní) $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$. Z druhé nerovnosti dostaneme: $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n < \infty$ a tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Příklad 1.8 Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

kde $\alpha \neq 1$.

Řešení: Zavedeme funkci $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, pak funkce f splňuje pro $\alpha > 0$ podmínky věty 1.11. Dostaneme

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

tedy $\int_1^{\infty} f(x)dx = -\frac{1}{1-\alpha}$ pro $\alpha > 1$ a $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$ pro $\alpha \in (0, 1)$.

Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverguje pro $\alpha = 1$ (jde o harmonickou řadu viz. příklad 1.2) a pro $\alpha \leq 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$ ⁴, tak dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

⁴není splněna nutná podmínka konvergence viz. věta 1.3

1.2 Řady s obecnými členy

Věta 1.12 (Bolzano-Cauchyova podmínka) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : |s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{i=1}^p a_{n+i} \right| < \varepsilon$.

Důkaz Jde o přímý důsledek definice a Bolzano-Cauchyho věty pro posloupnosti. $\square$

Věta 1.13 Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, tak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tak dle předchozí věty 1.12 platí: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=1}^p a_{n+i} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^p |a_{n+i}| \right| < \varepsilon$. Tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje BC podmínku a je také konvergentní. $\square$

Definice 1.3 Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně.

Příklad 1.9 Rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$

Řešení:

a) Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right|$ konverguje (příklad 1.3), tak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ (dle věty 1.13) a tedy řada konverguje absolutně.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je harmonická řada, o které víme, že je divergentní. Musíme tedy zkoumat konvergenci přímo řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}. \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní (viz. příklad 1.3) a tedy je limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ konečná a proto je konečná i limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$. Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = A$ a tedy je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentní, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje relativně.

Věta 1.14 (Leibnitzovo kritérium) Necht pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

I. $a_n \geq 0$,

II. $a_{n+1} \leq a_n$,

III. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Důkaz $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$, tedy je posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající.

Jelikož

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \end{aligned}$$

je navíc posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ omezená a tedy konvergentní. Označme $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = A,$$

tedy je posloupnost $\{s_n\}$ konvergentní a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje. $\square$

Příklad 1.10 Vraťme se k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Využijeme-li Leibnitzovo kritérium, tak I. $\frac{1}{n} > 0$, II. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ a III. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje.

Lemma 1.15 Mějme posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a čísla $n, p \in \mathbb{N}$, $n < p$. Označme $\beta_k = \sum_{i=1}^k b_i$. Pak

$$\sum_{k=n+1}^p a_k b_k = \sum_{k=n+1}^p \beta_k (a_k - a_{k+1}) + \beta_p a_{p+1} - \beta_n a_{n+1}. \quad (1.1)$$

Důkaz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^p a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^p a_k (\beta_k - \beta_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_k - \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_{k-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} \beta_k = \sum_{k=n+1}^p a_k \beta_k - \left(a_{n+1} \beta_n - a_{p+1} \beta_p + \sum_{k=n+1}^p a_{k+1} \beta_k \right) \\
&= \sum_{k=n+1}^p \beta_k (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n.
\end{aligned}$$

□

Věta 1.16 (*Abelovo-Dirichletovo kritérium*) *Necht $\{a_n\}$ je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:*

1. (*Dirichlet*) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezené částečné součty.
2. (*Abel*) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní a posloupnost $\{a_n\}$ je omezená.

Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Důkaz

1. Použijeme B-C podmínku (věta 1.12) a předchozí lemma. Stejně jako v přechodícím lemmatu používáme značení $\beta_k = \sum_{i=1}^k b_i$. Jelikož má řada $\sum b_n$ omezené částečné součty, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|\beta_k| < M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. BÚNO předpokládáme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^p \beta_k (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^p |\beta_k (a_k - a_{k+1})| + |a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n| \\
&= \sum_{k=n+1}^p |\beta_k| (a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1} \beta_p - a_{n+1} \beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^p M (a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1} \beta_p| + |a_{n+1} \beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^p M (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1} M + a_{n+1} M \\
&= M (a_{n+1} - a_{p+1} + a_{p+1} + a_{n+1}) = 2M a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pak pro každé $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $a_n < \varepsilon$. Tedy pro $n_0 < n < p$ platí:

$$\left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| < 2M\varepsilon,$$

a proto je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní (dle věty 1.12).

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, označme tedy její součet $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Z rovnosti $\sum_{k=n+1}^p (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{p+1}$ dostaneme rovnost

$$0 = \sum_{k=n+1}^p \beta(a_k - a_{k+1}) + \beta a_{p+1} - \beta a_{n+1}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^p \beta_k(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^p (\beta_k - \beta)(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n+1}^p |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1}) \right| + |a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta)| \\ &\leq \left| \sum_{k=n+1}^p |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1}) \right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta|. \end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, tak pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\beta - \beta_k| < \varepsilon$ pro všechna $k > n_0$. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|a_n| < M$. Tedy pro $n, p > n_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^p |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1}) \right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta| \\ &< \left| \sum_{k=n+1}^p \varepsilon(a_k - a_{k+1}) \right| + \varepsilon|a_{p+1}| + \varepsilon|a_{n+1}| \\ &\leq \varepsilon(|a_{n+1} - a_{p+1}| + |a_{p+1}| + |a_{n+1}|) \leq 2\varepsilon(|a_{p+1}| + |a_{n+1}|) < 4\varepsilon M. \end{aligned}$$

Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje (dle věty 1.12).

□

Příklad 1.11 Necht $a_n > 0$, $\{a_n\}$ je nerostoucí a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ukažme, že pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ konvergují.

Nejdříve ukážeme, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ mají pro $x \neq 2\pi l$ omezené částečné součty. Mějme geometrickou řadu s kvocientem $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. Pak $s_n = \sum_{i=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$, tedy

$$\begin{aligned} |s_n| &= \left| e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right| = |e^{ix}| \frac{|1 - e^{inx}|}{|1 - e^{ix}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2|1 - e^{-ix}|}{|(1 - e^{ix})(1 - e^{-ix})|} \\ &\leq \frac{4}{|2 - e^{ix} - e^{-ix}|} = \frac{2}{|1 - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}|} = \frac{2}{|1 - \cos(x)|}. \end{aligned}$$

Je-li $x \neq 2k\pi$, tak $|s_n| \leq \frac{2}{|1 - \cos(x)|} < \infty$. Jelikož $s_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx) + i \sum_{k=1}^n \sin(kx)$, tak $|\sum_{k=1}^n \cos(kx)| \leq |s_n|$ a $|\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq |s_n|$, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ mají pro $x \neq 2\pi l$ omezené částečné součty.

Dále už jen stačí aplikovat Dirichletovo kritérium.

Speciálně řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ pro $x \neq 2\pi$ konvergují, ale nejsou absolutně konvergentní.

1.2.1 Přerovnávání řad

Definice 1.4 Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\{k_n\}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$ ($\{k_n\}$ je prostá posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje). Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1.17 Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, která vznikla přerovnáním této řady a jejich součet je stejný (tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$).

Důkaz

Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_p| < \varepsilon$ pro každé $p > n \geq n_0$ (viz. věta 1.12). Jelikož $\{k_n\}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$, tak existuje $\hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{1, 2, \dots, n_0\} \subset \{k_1, k_2, \dots, k_{\hat{n}_0}\}$. Je-li $\hat{p} > \hat{n} > \hat{n}_0$ a označme $p = \max\{k_{\hat{n}}, k_{\hat{n}+1}, \dots, k_{\hat{p}}\}$, pak $|a_{k_{\hat{n}}}| + |a_{k_{\hat{n}+1}}| + \dots + |a_{k_{\hat{p}}}| \leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \dots + |a_p| < \varepsilon$, tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ absolutně konvergentní.

Nyní dokážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$. Necht $n > \max\{n_0, \hat{n}_0\}$ a označme $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^n a_{k_i}$, pak

$$\begin{aligned} |s_n - \hat{s}_n| &= |a_1 + a_2 + \dots + a_n - (a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n})| \\ &\leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \dots + |a_q| < \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $q = \max\{n, k_1, \dots, k_n\}$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - \hat{s}_n| = 0$ a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

□

Označme $a^+ = \max\{0, a\}$ a $a^- = \max\{0, -a\}$. Pak $a = a^+ - a^-$ a $|a| = a^+ + a^-$. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečné řada, tak můžeme uvažovat dvě nekonečné řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Lemma 1.18 *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.*

Důkaz

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ jsou řady s nezápornými koeficienty, tak každá z těchto řad buď konverguje, nebo diverguje k $+\infty$.

Kdyby obě konvergovaly, pak by konvergovala i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$ (věta 1.2) a tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala absolutně.

Pokud by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergovala a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergovala k $+\infty$, pak by $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^+ = A \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^- = +\infty$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $K \in \mathbb{R}$ by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $A - \varepsilon < s_n^+ < A + \varepsilon$ a $s_n^- > K$ $\forall n > n_0$. Tedy

$$s_n = s_n^+ - s_n^- < A - K + \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Proto by

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n^+ - s_n^-) = -\infty.$$

Tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergovala. Stejně by se ukázalo, že pro konvergentní řadu nemůže nastat aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ divergovala k $+\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergovala.

Proto obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.

□

Věta 1.19 (Riemannova) *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ a takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ osciluje.*

Důkaz

- Necht je $s \in \mathbb{R}$. Označme n_1 nejmenší $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ > s$ (jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, tak takové n_1 existuje). Označme m_1 nejmenší $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_1} a_i < s$. Dále pro $k = 2, 3, \dots$ označme n_k nejmenší $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_k^+ - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} > s$ a m_k nejmenší $m_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_k^+ - \sum_{i=1}^{m_k} < s$. Tato konstrukce nám vytvoří řadu

$$a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ - (a_{m_1+1}^- + \dots) + \dots,$$

která vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Označme $\hat{s}_n$ součet takto přerovnané řady, pak částečný součet $\hat{s}_{n_1+m_1+\dots+n_k}$ se od s liší maximálně o $a_{n_k}^+$ a částečný součet $s_{n_1+m_1+\dots+m_k}$ se od s liší maximálně o $a_{m_k}^-$. Podobně částečný součet $\hat{s}_n$, kde $n_1 + m_1 + \dots + n_k < n < n_1 + m_1 + \dots + m_k$ se od s liší maximálně o $\max\{a_{n_k}^+, a_{m_k}^-\}$ a obdobně pro $n_1 + m_1 + \dots + m_k < n < n_1 + m_1 + \dots + n_{k+1}$ je $|s_n - s| \leq \max\{a_{n_{k+1}}^+, a_{m_k}^-\}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a proto je $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n = s$.

- Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \infty$. Stačí třeba zvolit následující přerovnání. $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší n_1 takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ > 1$. $n_2 > n_1$ je nejmenší n_2 takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1+1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ > 2$, $n_3 > n_2$ je nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1+1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ - a_2^- + a_{n_2+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+ > 3$ a tak dál. Dále postupujeme jak v předchozí části důkazu.
- Pro přerovnávání do oscilující řady stačí, aby n_1 bylo nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ > 1$, m_1 nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) < -1$, $n_2 > n_1$ nejmenší takové, že $a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_2}^+ > 1$ a tak dále.

□

Kapitola 2

Diferenciální rovnice

Nejprve zavedeme některé pojmy z teorie funkcí více proměnných.

Definice 2.1 $\mathbb{R}^d$ značí množinu uspořádaných d -tic reálných čísel $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$.

Nechť $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, pak je f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}^d$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in U_\delta(a)$ ($U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - a_i)^2} < \delta\}$).

Funkci $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_d)}{h}$ nazýváme parciální derivace funkce f podle i -té proměnné v bodě a .

Definice 2.2 Nechť $F(t, x_0, x_1, \dots, x_n)$ je funkce $(n + 2)$ reálných proměnných definovaná na $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$, která není vzhledem k proměnné x_n konstantní. Potom symbol

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

nazýváme obyčejnou diferenciální rovnicí n -tého řádu pro neznámou funkci $y = y(t)$.

Řešením rovnice 2.1 na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ nazveme funkci $y(t)$, která má na intervalu I všechny derivace až do řádu n včetně a pro každé $t \in I$ platí

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Poznámka 2.1 Je-li t koncový bod intervalu I , uvažujeme v tomto bodě příslušné jednostranné derivace.

Pod pojmem řešení rozumíme dvojici: interval I a funkci $y(t)$ na něm definovanou.

Definice 2.3 Je-li $I \subset J$, kde I a J jsou intervaly a nechť $y_1(t)$ je řešením rovnice 2.1 na intervalu I a $y_2(t)$ je řešením rovnice 2.1 na intervalu J . Je-li navíc $y_1(t) = y_2(t)$ na I , pak $y_1(t)$ nazýváme zúžením řešení $y_2(t)$ a $y_2(t)$ nazveme rozšířením řešení $y_1(t)$. Řešení, které na M nelze rozšířit nazveme maximálním řešením rovnice 2.1 v M .

Příklad 2.1 Rovnice $y' - y = 0$ má řešení $y(t) = e^t$ na $\mathbb{R}$ (toto řešení je maximální).

Definice 2.4 Říkáme, že řešení $y(t)$ rovnice 2.1 splňuje počáteční podmínky $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ v bodě t_0 , jestliže $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, t_0, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Úloha nalézt řešení $y(t)$ diferenciální rovnice 2.2, které splňuje počáteční podmínku $y^{(k)}(t_0) = y_k$ pro $t_0 \in I$ a $k = 0, 1, \dots, n-1$ se nazývá Cauchyova úloha.

Dále se budeme zabývat rovnicemi ve tvaru

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.2)$$

kde f je reálná funkce $n+1$ proměnných, definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Uvedeme si následující větu bez důkazu.

Věta 2.1 (Existenční) Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina a $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in M$ je libovolný bod. Pak existuje alespoň jedno řešení rovnice 2.2 procházející tímto bodem. Tj. existuje nějaké $\delta > 0$ takové, že $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ platí $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ a navíc platí: $y^{(k)}(t_0) = y_k$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Příklad 2.2 Uvažujme rovnici $y' = \sqrt{|y|}$. Tato rovnice má řešení $y \equiv 0$ i

$$y_c = \begin{cases} \frac{(x-c)^2}{4}, & x > c, \\ 0, & x \leq c. \end{cases}$$

Je-li $y \equiv 0$, nebo $x < c$, pak $0 = y' = \sqrt{|y|} = \sqrt{0}$, tedy $y \equiv 0$ je řešením dané rovnice na $\mathbb{R}$ a y_c je řešením dané rovnice na $(-\infty, c)$. Pro y_c a $x > c$ dostaneme:

$$y' = \left(\frac{(x-c)^2}{4} \right)' = \frac{x-c}{2} = \sqrt{\left| \frac{(x-c)^2}{4} \right|}.$$

tedy y je řešením rovnice $y' = \sqrt{|y|}$.

Věta 2.2 (*O jednoznačnosti řešení*) Necht $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která splňuje na M lokální Lipschitzovu podmínku podle posledních n proměnných: Ke každému bodu $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ existuje okolí U tohoto bodu a číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(t, y_1^1, \dots, y_{n-1}^1) - f(t, y_0^2, \dots, y_{n-1}^2)| \leq L \sum_{k=0}^{k-1} |y_k^1 - y_k^2|$ pro každé dva body $(t, y_1^1, \dots, y_{n-1}^1), (t, y_0^2, \dots, y_{n-1}^2) \in U$. Potom existuje řešení rovnice 2.2 splňující počáteční podmínku $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ v bodě t_0 a toho řešení je jediné v následujícím smyslu. Dvě řešení rovnice 2.2 splňující stejnou počáteční podmínku jsou si rovna na průniku svých definičních intervalů.

Poznámka 2.2 Za předpokladů předchozí věty je maximální řešení určeno jednoznačně, tj. každým bodem $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ prochází právě jedno maximální řešení.

2.1 Diferenciální rovnice prvního řádu

2.1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu nazveme rovnicí se separovanými proměnnými, pokud má tvar

$$y' = f(x)g(y), \quad (2.3)$$

kde f a g jsou spojitě funkce. Je-li $g \neq 0$, tak z rovnice 2.3 dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zintegrováním této rovnice dostaneme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Je-li $G(y)$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$, tak dostaneme rovnici

$$G(y) = F(x) + c,$$

tedy

$$y = G^{-1}(F(x) + c).$$

Poznámka 2.3 Je důležité nezapomenout na integrační konstantu c , ta nám umožňuje najít řešení, které splňuje konkrétní počáteční podmínku.

Příklad 2.3 Najděte řešení rovnice $y' = \sqrt{|y|}$.

Řešení: Pro $y \neq 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{|y|} \\ \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= 1 \\ \int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} &= \int 1 dx \\ 2 \operatorname{sgn}(y) \sqrt{|y|} &= x + c.\end{aligned}$$

Jelikož $\sqrt{|y|} > 0$, tak y a $x + c$ má stejné znaménko, tedy pro $x > -c$ dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{y} &= \frac{x + c}{2} \\ y &= \frac{(x + c)^2}{4}, \quad x > -c.\end{aligned}$$

Stejně dostaneme

$$y = -\frac{(x + c)^2}{4}, \quad x < -c.$$

Pro $y = 0$ dostaneme konstantní řešení $y(x) = 0$.

Příklad 2.4 Najděte řešení rovnice $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Řešení:

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \tag{2.4}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x} \tag{2.5}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{x} dx \tag{2.6}$$

$$\arcsin y = \ln |x| + c. \tag{2.7}$$

Zde je třeba si uvědomit, že obor hodnot funkce $\arcsin$ je $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tedy rovnost $\arcsin y = \ln |x| + c$ platí pro takové x a c , pro které je $\ln |x| + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dále tedy dostaneme $y = \sin(\ln |x| + c)$, pro $x \in (e^{-\frac{\pi}{2}-c}, e^{\frac{\pi}{2}-c})$. Zkusme třeba pro volbu $c = 0$ a $x \in (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$ zjistit, zda je funkce $y = \sin(\ln |x| + c) = \sin(\ln |x|)$ řešením naší rovnice. Pak dostaneme, že

$$y' = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

a

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{x} = \frac{\sqrt{1-\sin^2(\ln x)}}{x} = \frac{\sqrt{\cos(\ln x)}}{x} = \frac{-\cos(\ln x)}{x}.$$

Tedy pro takové c a t je $y(x)$ řešením rovnice $y' = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$.

Příklad 2.5 Řešte Cauchyho úlohu $y' = -2xy$, $y(0) = 2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} y' &= -2xy \\ \frac{dy}{y} &= -2x dx \\ \int \frac{dy}{y} &= - \int 2x dx \\ \ln |y| &= -x^2 + c \\ |y| &= e^c \cdot e^{-x^2} \\ y &= \pm e^c \cdot e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Jelikož je řešením i $y \equiv 0$, tak můžeme obecné řešení napsat ve tvaru $y = ce^{-x^2}$, kde $c \in \mathbb{R}$. Máme tedy obecný tvar řešení, dosazením počátečních podmínek do obecného řešení najdeme to řešení, které vyhovuje počáteční podmínce. $y(0) = ce^0 = c = 2$, tedy řešením této úlohy je funkce $y(x) = 2e^{-x^2}$.

Příklad 2.6 (Rozpad radioaktivního materiálu) Příklad je převzatý ze skript J. Kuben (1995): Obyčejné diferenciální rovnice. Rychlost rozpadu radia je přímo úměrná jeho okamžitému množství. Poloměr rozpadu radia je 1590 let¹. Za kolik let ubude z počátečního množství 25%?

Řešení: Označme $y(t)$ množství radia a $y_0 > 0$ jeho počáteční množství v čase $t = 0$. Ze zadání dostáváme rovnici $y' = Ky$, kde K je neznámá konstanta. Navíc víme, že $y(0) = y_0$ a $y(1590) = \frac{y_0}{2}$.

$$\begin{aligned} y' &= Ky \\ \frac{y'}{y} &= K \\ \ln |y| &= Kt + c, \quad (c \in \mathbb{R}) \\ |y| &= ce^{Kt}, \quad (c > 0) \\ y &= ce^{Kt}, \quad (c \in \mathbb{R})^2. \end{aligned}$$

¹Počáteční množství se za 1590 let zmenší na polovinu.

Jelikož je množství nezáporné, tak uvažujeme řešení pouze ve tvaru $y(t) = ce^{Kt}$, kde $c \geq 0$. Dosazením počáteční podmínky dostaneme $y(0) = ce^{K \cdot 0} = c = y_0$ a $y(1590) = y_0 e^{K \cdot 1590} = \frac{y_0}{2}$, tedy $K = \frac{\ln \frac{1}{2}}{1590} = -\frac{\ln 2}{1590}$. Pro hledaný čas t_1 platí

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}y_0 &= y(t_1) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{1590}t_1} \\ \ln \frac{3}{4} &= -\frac{\ln 2}{1590}t_1 \\ t_1 &= -1590 \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 660.\end{aligned}$$

Množství radia se sníží o čtvrtinu přibližně za 660 let.

2.1.2 Homogenní rovnice

Definice 2.5 Funkce $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá homogenní stupně α v $M \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $\lambda > 0$ a $\forall x \in M$ platí $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ ³. Je-li $g(x, y) = \frac{m(x, y)}{l(x, y)}$, kde m a l jsou homogenní funkce stejného stupně, pak rovnici

$$y' = g(x, y)$$

nazveme homogenní diferenciální rovnici.

Pro $g(x, y) = \frac{m(x, y)}{l(x, y)}$ platí,

$$g(\lambda x, \lambda y) = \frac{m(\lambda x, \lambda y)}{l(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^\alpha m(x, y)}{\lambda^\alpha l(x, y)} = \frac{m(x, y)}{l(x, y)} = g(x, y),$$

tedy g je homogenní funkce stupně 0.

Pro $\lambda = \frac{1}{x}$ tedy dostaneme $g(x, y) = g(\lambda x, \lambda y) = g(1, \frac{y}{x})$, tedy pro $f(z) := g(1, z)$ dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$. Zavedeme neznámou $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, pak $y(x) = u(x)x$ a tedy $y'(x) = u'(x)x + u(x)$. Dosazením a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}y' &= g(x, y) \\ u'x + u &= f(u) \\ u' &= \frac{f(u) - u}{x}.\end{aligned}$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou již řešíme dle dříve uvedeného postupu.

²Zde jsme přidali i triviální řešení $y \equiv 0$.

³Všimněme si, že zde hovoříme o funkci n proměnných, tedy $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 2.4 Všimněme si, že při úpravách potřebujeme podmínku $x \neq 0$. Tato podmínka ale vzniká při úpravách a při přechodu k původní proměnné zase zmizí, proto je třeba overřit, zda námi získané řešení není řešením i v bodě $x = 0$.

Příklad 2.7 Najděte obecné řešení rovnice $x + y + xy' = 0$.

Řešení: Nejdříve overříme, že jde o homogenní rovnici. Přepíšeme rovnici do tvaru $y' = -\frac{x+y}{x}$, tedy $g(x, y) = -\frac{x+y}{x}$, pak platí $g(x, y) = g(\lambda x, \lambda y)$ a tedy jde o homogenní rovnici. Použijeme substituci $u(x) = \frac{y}{x}$ a dosadíme do rovnice.

$$x + y + xy' = 0$$

$$x + ux + x(u'x + u) = 0$$

$$u' = -\frac{1+2u}{x}$$

$$\frac{u'}{1+2u} = -\frac{1}{x}, \quad (u \neq \frac{1}{2})$$

$$\frac{\ln|1+2u|}{2} = -\ln|x| + c$$

$$|1+2u| = \frac{c}{x^2}, \quad (c > 0)$$

$$u = \frac{\frac{c}{x^2} - 1}{2} = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{2}, \quad (c \in \mathbb{R})^4.$$

Jelikož $y(x) = u(x)x$, tak dostaneme řešení $y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Rovnice $y' = f(ax + by + c)$

Uvažujme rovnici

$$y' = f(ax + by + c), \tag{2.8}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$.

Rovnici řešíme pomocí substituce $u(x) = ax + by(x) + c$. Pak $u'(x) = a + by'(x)$, tedy $y'(x) = \frac{u'(x)-a}{b}$. Dosazením do rovnice 2.8 dostaneme

$$\frac{u'(x) - a}{b} = f(u(x))$$

$$u'(x) = bf(u) + a.$$

Tedy dostaneme rovnici se separovanými proměnnými, kterou již umíme řešit.

⁴Zde jsme přidali i konstantní řešení rovnice $u = -\frac{1}{2}$.

Příklad 2.8 Řešte rovnici $y' = \frac{1}{x+y-2}$. Řešení: Využijeme substituci $u = x + y - 2$, z toho dostaneme $y' = u' - 1$.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{x+y-2} \\u' - 1 &= \frac{1}{u} \\u' &= \frac{1+u}{u} \\ \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) u' &= 1 \\u - \ln|u| &= x + c \\x + y - 2 - \ln|x + y - 2| &= x + c \\y - \ln|x + y - 2| &= c + 2 \\e^{y+c} &= x + y - 2.\end{aligned}$$

Toto řešení je určeno implicitně. Vyloučili jsme situaci $u + 1 = 0$, tedy řešení $u = -1$, ze kterého dostaneme řešení $y = 1 - x$.

2.1.4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Rovnici

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad (2.9)$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou reálné funkce, nazveme lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na nějakém intervalu J , pak funkce $f(x, y) = b(x) - a(x)y$ splňuje lokální Lipschitzovu podmínku a tedy dle věty 2.2 každým bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno maximální řešení této rovnice. Lze ukázat, že řešení lze prodloužit na celý interval J .

Věta 2.3 Jsou-li funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité na intervalu J , tak pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ existuje právě jedno maximální řešení, které tuto podmínku splňuje.

Důkaz

Použijeme-li větu 2.2, stačí ukázat, že je funkce $f(x, y) = b(x) - a(x)y$ lokálně Lipschitzovská v proměnné y . Tedy, že pro každý bod (x_0, y_0) existují okolí U a konstanta K takové, že $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_i) \in U, i = 1, 2$. Jelikož

jsou funkce $a(x)$ a $b(x)$ spojité, tak jsou na uzavřeném intervalu omezené, tedy pro každé $x_0 \in J$ existuje nějaké okolí $U(x_0)$ a konstanta K taková, že $|a(x)| < K$ na $U(x_0)$. Pak pro $x \in U(x_0)$ dostaneme $|b(x) - a(x)y_1 - (b(x) - a(x)y_2)| < K|y_1 - y_2|$, tedy je splněna lokální Lipschitzova podmínka a rovnice má jednoznačné maximální řešení. $\square$

Definice 2.6 *Rovnice $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ se nazývá homogenní. Je-li $b(x)$ nenulová funkce, tak jde o rovnici nehomogenní.*

Poznámka 2.5 *Nezaměňujeme homogenní lineární rovnici s homogenní rovnicí z předchozí kapitoly. Jde o zcela odlišné pojmy.*

Uvažujme nyní homogenní rovnici

$$y' = -a(x)y, \quad (2.10)$$

kde $a(x)$ je spojitá funkce.

Věta 2.4 *Je-li $y_h(x)$ netriviální řešení rovnice 2.10 na intervalu J , pak obecné řešení této rovnice (na tomto intervalu) je ve tvaru $y(x) = cy_h(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$.*

Důkaz

Je-li $y_h(x)$ řešením rovnice 2.10, pak

$$(cy_h(x))' = c(y_h(x))' = c(-a(x)y_h(x)) = -a(x)(cy_h(x))$$

a tedy je i $cy_h(x)$ řešením této rovnice. Necht existuje řešení $y_1(x)$ (na intervalu J) rovnice 2.10, které není ve tvaru $cy_h(x)$. Je-li $y_0 = y_1(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in J$, pak pro $c = \frac{y_0}{y_h(x_0)}$ splňuje i řešení $cy_h(x)$ počáteční podmínku (x_0, y_0) , což je ale v rozporu s jednoznačností (věta 2.3). Tedy každé řešení musí být ve tvaru $cy_h(x)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Označme $A(x)$ primitivní funkci k funkci $a(x)$. Jelikož je homogenní rovnice rovnicí se separovanými proměnnými, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} y' &= -a(x)y \\ \frac{y'}{y} &= -a(x) \\ \ln |y| &= -A(x) + c \\ y &= ce^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Vraťme se nyní k nehomogenní rovnici 2.9

$$y' = -a(x)y + b(x),$$

kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce.

Věta 2.5 *Nechť $y_p(x)$ je řešením rovnice 2.9 a $y_h(x)$ je řešením homogenní rovnice 2.10, pak $y(x) = cy_h(x) + y_p(x)$ pro $c \in \mathbb{R}$ je obecným řešením rovnice 2.9.*

Důkaz

Prostým dosazením overíme, že je $cy_h(x) + y_p(x)$ řešením rovnice 2.9. Je-li $\hat{y}(x)$ řešením rovnice 2.9, pak $\hat{y}(x) - y_p(x)$ musí být řešením rovnice 2.10 (opět overíme prostým dosazením) a tedy ve tvaru $cy_h(x)$ dle věty 2.4.

Z uvedené věty vyplývá, že k nalezení obecného tvaru řešení nehomogenní rovnice 2.9 stačí najít obecný tvar řešení homogenní rovnice 2.10 a jedno řešení (partikulární řešení) nehomogenní rovnice 2.9. Obecné řešení homogenní rovnice hledat již umíme, nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice si ukážeme nyní pomocí metody variace konstant.

Variace konstant

Nechť $y_h(x)$ je řešení homogenní rovnice 2.10, pak hledejme řešení nehomogenní rovnice 2.9 ve tvaru $y(x) = c(x)y_h(x)$, tj. ve tvaru funkce, kde konstantu c , která nám dává obecný tvar řešení homogenní rovnice 2.10 nahradíme funkcí $c(x)$. Dosadíme $y(x)$ do nehomogenní rovnice a využijeme toho, že $c(x)y_h'(x) = -c(x)a(x)y_h(x)$ ⁵.

$$\begin{aligned} (c(x)y_h(x))' &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\ c(x)y_h'(x) + c'(x)y_h(x) &= -a(x)c(x)y_h(x) + b(x) \\ c'(x)y_h(x) &= b(x) \\ c'(x) &= \frac{b(x)}{y_h(x)} \\ c(x) &= \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx. \end{aligned}$$

Tímto postupem získáme jedno (partikulární) řešení nehomogenní rovnice $y_p(x) = c(x)y_h(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x)$. Tedy obecné řešení nehomogenní rovnice je ve tvaru

$$y(x) = cy_h(x) + y_p(x) = cy_h(x) + \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

⁵Jelikož, y_h je řešením příslušné homogenní rovnice.

Příklad 2.9 Najděte obecný tvar řešení rovnice $y' = 2y + x$.

Řešení:

I. Nejprve budeme hledat řešení homogenní rovnice $y' = 2y$.

$$\begin{aligned}y' &= 2y \\ \frac{y'}{y} &= 2, \quad (y \neq 0) \\ \ln |y| &= 2x + c \\ y &= ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

II. Nyní použijeme metodu variace konstant k nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Uvažujme řešení ve tvaru $y(x) = c(x)e^{2x}$.

$$\begin{aligned}y' &= 2y + x \\ c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} &= 2c(x)e^{2x} + x \\ c'(x) &= xe^{-2x} \\ c(x) &= \frac{xe^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -e^{-2x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).\end{aligned}$$

Tedy

$$y_p(x) = c(x)y_h(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

III. Obecný tvar řešení je tedy

$$y(x) = y_p(x) + cy_h(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}.$$

Ukažme si nyní jiný způsob, jak najít nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice 2.9. Použijeme opět označení $A(x)$ pro primitivní funkci k funkci $a(x)$ a budeme upravovat rovnici 2.9.

$$\begin{aligned}y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) \\ y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} &= b(x)e^{A(x)} \\ (y(x)e^{A(x)})' &= b(x)e^{A(x)} \\ y(x)e^{A(x)} &= \int b(x)e^{A(x)} dx \\ y(x) &= e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx.\end{aligned}$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice 2.9 lze napsat ve tvaru $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx$. Porovnejme tento výsledek s řešením získaným pomocí variace konstant. Užitím metody variace konstant jsme dostali partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_p(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x).$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce dříve získaný tvar řešení homogenní rovnice $y_h(x) = e^{-A(x)}$, tak dostaneme stejný tvar řešení, tj. $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx$.

Příklad 2.10 (Bernoulliho rovnice) Řešte rovnici $y' - y = xy^5$. Tato rovnice není lineární⁶ (je zde člen y^5), ale k jejímu řešení využijeme toho, že umíme řešit lineární rovnici. Rovnici převedeme do tvaru

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} = x, \quad y \neq 0.$$

Zde jsme vynechali případ, kdy $y \equiv 0$, který je také řešením této rovnice. Nyní použijeme substituci $u = \frac{1}{y^4}$, tedy dostaneme $u' = -4\frac{y'}{y^5}$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^5} - \frac{1}{y^4} &= x \\ -\frac{1}{4}u' - u &= x \\ u' &= -4u - 4x. \end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme rovnici

$$u' = -4u.$$

Tedy máme řešení $u_h(x) = ce^{-4x}$ a použijeme variaci konstant. Hledáme tedy řešení ve tvaru $u(x) = c(x)e^{-4x}$.

$$\begin{aligned} u' &= -4u + 4x \\ c'(x)e^{-4x} - 4xc(x)e^{-4x} &= -4c(x)e^{-4x} + 4x \\ c'(x) &= 4xe^{4x} \\ c(x) &= \int 4xe^{4x} dx = xe^{4x} - \int e^{4x} dx = e^{4x} \left(x - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Tedy $u(x) = x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}$ a řešení původní rovnice dostaneme ve tvaru

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x - \frac{1}{4} + ce^{-4x}}}.$$

⁶Rovnice tohoto typu se nazývají Bernoulliho rovnice.

2.2 Diferenciální rovnice vyšších řádů

2.2.1 Lineární diferenciální rovnice

Rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (2.11)$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice n -tého řádu. Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu, v opačném případě jde o rovnici nehomogenní.

Platí následující věta ohledně existence a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy.

Věta 2.6 *Nechť jsou funkce $b(x)$ a $a_i(x)$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$ spojité na intervalu J . Nechť $x_0 \in J$ a $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, pak existuje na J právě jedno řešení $y(x)$ rovnice 2.11 splňující podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Definice 2.7 *Reálné (komplexní) funkce $f_1(x), \dots, f_n(x)$ jsou lineárně závislé na množině M , jestliže existují taková reálná (komplexní) čísla $c_1, \dots, c_n$, že platí*

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0$$

na M a alespoň jedno z čísel c_i je nenulové. Pokud nejsou funkce $f_1(x), \dots, f_n(x)$ lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé.

Homogenní diferenciální rovnice n -tého řádu

Uvažujme homogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (2.12)$$

Pak pro tuto rovnici platí následující věta, která je obdobou věty 2.4 pro rovnici prvního řádu.

Věta 2.7 *Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení rovnice 2.12 (na J), pak je řešením této rovnice (na J) i $y_1 + y_2$ a cy_1 pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Tedy řešení homogenní rovnice 2.12 tvoří vektorový prostor. Dimenze tohoto prostoru je n .*

Důkaz

Nechť je y_1 a y_2 řešením homogenní rovnice 2.12. Dosadíme do této rovnice $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ a dostaneme

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \\ & (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + a_0(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \\ & c_1 \left(y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_1' \right) + c_2 \left(y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_2' \right) = 0, \end{aligned}$$

tedy $c_1 y_1 + c_2 y_2$ je také řešením homogenní rovnice 2.12.

Nechť $x_0 \in J$ a označme y_i pro $i = 1, \dots, n$ řešení rovnice 2.12 splňující počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y_i^{(k)}(x_0) &= 0, & i &\neq k+1 \\ &= 1, & i &= k+1, \end{aligned}$$

pro $k = 0, 1, \dots, n-1$. Existence takových řešení na J zaručuje věta 2.6. Zároveň jde o nezávislá řešení, jelikož

$$\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i y_i^{(k-1)}(x_0) = 0 \neq 1 = y_k^{(k-1)}(x_0),$$

pro libovolná čísla $c_1, \dots, c_n$.

Ukažme, že tato řešení tvoří bázi prostoru řešení homogenní diferenciální rovnice 2.12, tedy že pro libovolná řešení rovnice y existují konstanty c_i , $i = 1, \dots, n$ takové, že $y = \sum_{i=1}^n y_i$. Nechť y je libovolné řešení této rovnice, pak pro $c_i = y^{(i-1)}(x_0)$ platí, že

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i y_i(t_0) \right)^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)}(x_0) = c_{k+1} y_{k+1}^{(k)}(x_0) = c_{k+1} = y^{(k)}(x_0).$$

Tedy řešení rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^n c_i y_i$ splňuje stejné počáteční podmínky jako řešení y a tedy se tyto dvě řešení musí rovnat dle věty 2.6.

Definice 2.8 *Množinu n nezávislých řešení homogenní rovnice 2.12 na J nazýváme fundamentální systém řešení této rovnice na J .*

Definice 2.9 *Nechť $f_1, \dots, f_n$ mají v bodě x_0 derivace až do řádu $n-1$ včetně. Pak determinant*

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \dots & f_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n)}(x_0) & f_2^{(n)}(x_0) & \dots & f_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

nazveme Wronského determinant (nebo Wronskiánem) funkcí $f_1, \dots, f_n$ v bodě x_0 a označíme jej $W(f_1, \dots, f_n)(x_0)$.

Věta 2.8 *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou řešení homogenní rovnice 2.12 na intervalu J . Je-li*

$$W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0,$$

pro nějaké $x_0 \in J$, tak jsou $y_1, \dots, y_n$ lineárně nezávislé na J a $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$.

Důkaz

Je-li $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$, tak jsou sloupce v determinantu $W(y_1, \dots, y_n)(x_0)$ lineárně závislé, tedy existují konstanty $c_1, \dots, c_n$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Označme $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$, pak y je také řešením rovnice 2.12 (věta 2.7) a navíc platí, že $y^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$. Jelikož $y \equiv 0$ splňuje tuto podmínku, tak z jednoznačnosti řešení lineární rovnice (věta 2.6) plyne $y \equiv 0$, tedy $\sum_{i=1}^n c_i y_i = 0$ na J a proto jsou řešení y_i lineárně závislá. Z lineární závislosti řešení $y_1, \dots, y_n$ na J plyne lineární závislost sloupců v determinantu $W(y_1, \dots, y_n)(x)$ na J a tedy $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$ na J .

Důsledek 2.9 *Buď je $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$ na J , nebo $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ na J . Množina řešení rovnice 2.7 je nezávislá na J právě tehdy, když $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ na J .*

Poznámka 2.6 *Předchozí kritérium nezávislosti neplatí obecně pro n -tici funkcí $f_1, \dots, f_n$ která není řešením nějaké homogenní lineární diferenciální rovnice. Obecně platí, že z podmínky $W(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ na J plyne nezávislost funkcí $f_1, \dots, f_n$ na J . Opak obecně neplatí.*

Příklad 2.11 *Nechť $J = (-1, 1)$ a*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, & x < 0 \\ &= x^3, & x \geq 0 \\ f_2(x) &= x^2, & x < 0 \\ &= 0, & x \geq 0. \end{aligned}$$

Pak $W(f_1, f_2)(x) = 0$ na J , ale je-li $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, tak $c_1 = c_2 = 0$, tedy f_1 a f_2 jsou lineárně nezávislé.

Věta 2.10 *Nechť jsou $y_1, \dots, y_n$ řešením rovnice 2.12 na intervalu J , pak pro $x, x_0 \in J$ platí*

$$\frac{d}{dx}(W(y_1, \dots, y_n)(x)) = -a_{n-1}(x)W(y_1, \dots, y_n)(x),$$

tedy

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t)dt}. \quad (2.13)$$

Důkaz

Podívejme se nejdříve na případ pro $n = 2$, pak $W(y_1, y_2)(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(W(y_1, y_2)(x)) &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= (y_1' y_2' - y_1' y_2') + (y_1 y_2'' - y_1'' y_2) \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Označme $dW_n = \frac{d}{dx}(W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x))$. Obdobně jako v dvoudimenzionálním případě lze ukázat, že

$$\begin{aligned} dW_n &= \det \begin{pmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z faktu, že v prvních $n - 1$ determinantech jsou vždy dva řádky stejné, a tak jsou tyto determinanty nulové. Jelikož y_i pro $i = 1, \dots, n$ je řešením

rovnice 2.12, tak dosadíme-li $y_i^{(n)} = -a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)} - a_{n-2}(x)y_i^{(n-2)} - \dots - a_0(x)y_i$ do předchozího výrazu, dostaneme

$$dW_n = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1}y_1^{(n-1)} - \dots - a_0y_1 & \dots & -a_{n-1}y_n^{(n-1)} - \dots - a_0y_n \end{pmatrix}.$$

Použijem to, že vynásobíme-li nějaký řádek matice konstantou a , tak je determinant nové matice a krát větší, než determinant matice původní a také toho, že determinant matice, jejíž řádek je tvořen součtem vektorů lze rozložit na součet determinantů. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} dW_n &= -a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} - \dots \\ &\quad - a_{n-2}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{pmatrix} - \dots \\ &\quad - a_0(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} - \dots \\ &= -a_{n-1}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_{n-1}(x)W(y_1, \dots, y_n)(x). \end{aligned}$$

Jelikož právě dokázaná rovnost je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými (jde o diferenciální rovnici, kde neznámá funkce je funkce wronskiánu, tedy pro každé x vrací hodnotu wronskiánu v tomto bodě), tak druhý vztah je jejím přímým důsledkem. □

Metoda nalezení druhého řešení za pomoci Wronskiánu

Uvažujme rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.14}$$

a necht y_1 je jedno netriviální známé řešení této rovnice. Pak pro libovolné řešení y této rovnice platí

$$W(y_1, y)(x) = y_1 y' - y_1' y = W(y_1, y)(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

Zvolíme nyní $W(y_1, y)(x_0) = 1$.⁶ Dostaneme tedy rovnici

$$y_1 y' - y_1' y = e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}. \quad (2.15)$$

Je-li y řešením rovnice 2.14, pak musí jít o řešení, které je nezávislé s řešením y_1 , jelikož wronskián $W(y_1, y)(x) \neq 0$.

Je-li naopak y řešením rovnice 2.15, pak

$$\begin{aligned} y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \\ (y_1 y' - y_1' y)' &= p(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} = -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1' y' + y_1 y'' - y_1'' y - y_1' y' &= -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1 y'' - y_1'' y &= -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1 y'' - (-p(x) y_1' - q(x) y_1) y &= -p(x) (y_1 y' - y_1' y) \\ y_1 y'' + q(x) y_1 y &= -p(x) y_1 y' \\ y_1 (y'' + p(x) y' + q(x) y) &= 0. \end{aligned}$$

Tedy y je řešením rovnice 2.14. Dále upravama rovnice 2.15 dostanem

$$\begin{aligned} y_1 y' - y_1' y &= e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \\ \frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} &= \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2} \\ \left(\frac{y}{y_1} \right)' &= \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2} \\ \frac{y}{y_1} &= \int \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2(x)} dx \\ y &= y_1 \int \frac{e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}}{y_1^2(x)} dx. \end{aligned}$$

Tedy jsme našli vzorec pro určení druhého řešení rovnice 2.14, které je lineárně nezávislé s řešením y_1 .

⁶Jelikož je y řešením lineární homogenní diferenciální rovnice, tak i cy je řešením této rovnice, takže volbou Wronskiánu v bodě x_0 měníme y maximálně o multiplikativní konstantu.

Příklad 2.12 Najděme obecné řešení rovnice $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$, $x > 0$, víme-li, že má tato rovnice jedno řešení $y_1(x) = x^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{y_1}\right)' &= \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} = \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^4} = \frac{e^{-\ln x}}{x^4} = \frac{1}{x^5} \\ \frac{y}{x^2} &= \int \frac{1}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} \\ y &= -\frac{1}{4x^2}.\end{aligned}$$

Druhé řešení této rovnice je tedy $y_2 = \frac{1}{x^2}$ a obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Metoda snížení řádu

Předpokládejme, že známe jedno nenulové řešení y_1 homogenní rovnice 2.12. Hledejme další řešení ve tvaru $y(x) = u(x)y_1(x)$, pak

$$\begin{aligned}y' &= u'y_1 + uy_1' \\ y'' &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \\ &\dots \\ y^{(n)} &= u^{(n)}y_1 + \binom{n}{1}u^{(n-1)}y_1' + \dots + uy_1^{(n)}.\end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme rovnici

$$\begin{aligned}&u^{(n)}y_1 + b_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + b_1(x)u' + \\ &+ u(y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y) = 0,\end{aligned}$$

kde funkce $b_i(x)$ jdou vyjádřit pomocí funkcí $a_j(x)$ a řešení $y_1(x)$. Vydělením předešlé rovnice řešením y_1 dostaneme rovnici

$$u^{(n)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}u^{(n-1)} + \dots + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}u' = 0.$$

Použitím substituce $v(x) = u'(x)$ dostaneme lineární homogenní rovnici $(n-1)$ -ního řádu

$$v^{(n-1)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_1(x)}v^{(n-2)} + \dots + \frac{b_1(x)}{y_1(x)}v = 0.$$

Příklad 2.13 Vraťme se k předchozímu příkladu. Mějme rovnici $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} = 0$, $x > 0$ a jedno její řešení $y_1(x) = x^2$.

Řešení: Užijeme substituci $y = uy_1$, dosadíme do rovnice, pak použijeme substituci $v = u'$ a vyřešíme rovnici.

$$\begin{aligned} y'' + \frac{y'}{x} + \frac{-4y}{x^2} &= 0 \\ u''y_1 + 2u'y'_1 + uy''_1 + \frac{u'y_1 + uy'_1}{x} + \frac{-4uy_1}{x^2} &= 0 \\ u''x^2 + 4u'x + 2u + \frac{u'x^2 + 2ux}{x} + \frac{-4ux^2}{x^2} &= 0 \\ u''x^2 + 4u'x + u'x &= 0 \\ v'x^2 + 5vx &= 0 \\ v' &= \frac{-5v}{x} \\ \frac{v'}{v} &= \frac{-5}{x} \\ \ln|v| &= \ln|x^{-5}| \\ v &= x^{-5}. \end{aligned}$$

Tedy $u = \int v dx = \frac{-1}{4x^4}$ a proto $y = uy_1 = \frac{-1}{4x^4}x^2 = \frac{-1}{4x^2}$. Tedy fundamentální systém této rovnice je $y_1 = x^2$ a $y_2 = \frac{1}{x^2}$.

Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujeme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (2.16)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pokusíme se najít řešení této rovnice ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, kde λ je nějaké číslo. Pak $y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$ a tedy po dosazení do rovnice 2.16 dostaneme

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= 0 \\ \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Označme $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, pak poslední rovnici lze napsat ve tvaru $P(\lambda) = 0$. Tedy najdeme-li kořen λ polynomu $P(\lambda)$, pak $y(x) = e^{\lambda x}$ bude

řešením rovnice 2.16. Polynom $P(\lambda)$ se nazývá charakteristický polynom a rovnici $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ se říká charakteristická rovnice. Rovnice $P(\lambda) = 0$ má v komplexním oboru n kořenů⁷ (některé ale mohou být stejné, pak hovoříme o vícenásobných kořenech). Pokud je ale kořen $\lambda = \alpha + \beta i$ komplexní, pak je řešení $y(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$ také komplexní. Lze snadno ověřit, že reálná část tohoto řešení $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ i imaginární část $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)i$ jsou také řešením této rovnice.

Při určování řešení rovnice 2.16 pokračujeme následujícím způsobem.

- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ jednonásobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, pak nám tento kořen dá jedno řešení ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ n -násobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ ($n > 1$), pak nám tento kořen dá n nezávislých řešení ve tvaru $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = x e^{\lambda x}, \dots, y_n(x) = x^{n-1} e^{\lambda x}$.
- Je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ jednonásobný komplexní kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak nám tento kořen dá dvě nezávislá řešení ve tvaru $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x), y_2(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$.⁸
- Je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ n -násobný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ ($n > 1$), kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak nám tento kořen dá $2n$ nezávislých řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x} \sin(\beta x), & y_3(x) &= x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, & y_{2n-1}(x) &= x^{n-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x), \\ y_2(x) &= e^{\alpha x} \cos(\beta x), & y_4(x) &= x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, & y_{2n}(x) &= x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x). \end{aligned}$$

Tímto způsobem získáme pro rovnici 2.16 n nezávislých řešení, které dohromady tvoří fundamentální systém rovnice 2.16.

Příklad 2.14 Najděme obecné řešení rovnice $y'' + y' - 6y = 0$.

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0,$$

⁷Jde o přímý důsledek základní věty algebry, viz. přednáška v druhém semestru.

⁸Je třeba si uvědomit, že je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ komplexním kořenech charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$, pak i $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ je kořenem této rovnice, jelikož $P(\lambda)$ je polynom s reálnými koeficienty (viz. přednáška v druhém semestru). Tento druhý kořen nám ale dá stejnou dvojici řešení, jako kořen λ .

tedy kořeny jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -3$. Z toho dostaneme dvě nezávislá řešení $y_1(x) = e^{2x}$ a $y_2(x) = e^{-3x}$, která tvoří fundamentální systém naší rovnice. Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Příklad 2.15 Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

tedy kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Dostaneme tedy dvě nezávislá řešení $y_1(x) = e^{2x} \sin(3x)$ a $y_2(x) = e^{2x} \cos(3x)$, která tvoří fundamentální systém naší rovnice. Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x} \sin(3x) + c_2 e^{2x} \cos(3x).$$

Příklad 2.16 Najděme obecné řešení rovnice $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$.

Řešení:

Pro tuto rovnice dostáváme charakteristickou rovnice ve tvaru

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda + 1)^2 = 0,$$

tedy dostaneme jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = -1$ a jeden trojnásobný kořen $\lambda_2 = 0$. Z toho dostáváme pět nezávislých řešení

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = x e^{-x}, y_3(x) = 1, y_4(x) = x, y_5(x) = x^2.$$

Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2.$$

Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty, variace konstant

Uvažujem rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (2.17)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Tak jako u lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu platí, že je-li $y_p(x)$ nějaké (partikulární) řešení nehomogenní rovnice 2.17 a $y_h(x)$ je řešením příslušné

homogenní rovnice 2.16, pak i $y(x) = y_p(x) + cy_h(x)$, $c \in \mathbb{R}$ je řešením nehomogenní rovnice 2.17. Stejně jako u rovnic prvního řádu bude tedy k nalezení obecného tvaru řešení nehomogenní rovnice stačit nalézt jedno (partikulární) řešení této rovnice a pak k němu přičíst obecné řešení příslušné homogenní rovnice 2.16. K nalezení partikulárního řešení použijeme variaci konstant. Nechť je $y_1, \dots, y_n$ fundamentální systém příslušné homogenní rovnice, pak budeme partikuární řešení hledat ve tvaru

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x).$$

Odvození si ukážeme na rovnici druhého řádu. Uvažujme rovnici

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

a y_1, y_2 jsou dvě nazávislá řešení rovnice $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Hledáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$. Tedy $y' = c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + c_1 y'_1 + c_2 y'_2$. Abychom při výpočtu druhé derivace nedostali i druhé derivace funkcí c_1 a c_2 , přidáme podmínku

$$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0,$$

tedy

$$\begin{aligned} y' &= c_1 y'_1 + c_2 y'_2 \\ y'' &= c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2. \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice a dostáváme

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= f(x) \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2 + a_1(c_1 y'_1 + c_2 y'_2) + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= f(x) \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c_1(y''_1 + a_1 y'_1 + a_0 y_1) + c_2(y''_2 + a_1 y'_2 + a_0 y_2) &= f(x) \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 &= f(x). \end{aligned}$$

Pro funkce c'_1 a c'_2 dostaneme tedy soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 &= 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 &= f(x). \end{aligned}$$

Uvědomme si, že determinant matice této soustavy je nenulový, jelikož je to wronskián $W(y_1, y_2)(x)$ a y_1 a y_2 jsou nezávislá řešení homogenní rovnice. Tedy tato soustava má jedno řešení. Z této soustavy určíme funkce c'_1 a c'_2 a pak integrací i funkce c_1 a c_2 .

Příklad 2.17 Najděme obecné řešení rovnice $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$.

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na příslušnou homogenní rovnici $y'' + 4y' + 3y = 0$. Dostaneme charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$, tedy řešení homogenní rovnice v obecném tvaru je

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

Dále hledáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = c_1(x)e^{-3x} + c_2(x)e^{-x}$. Dostaneme

$$y' = c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} - 3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x}.$$

Přidáme podmínku $c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} = 0$ a dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= -3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x} \\ y'' &= -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} + 9c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}. \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 3y &= e^{-3x} \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} + 9c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + 4(-3c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-x}) + 3(c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}) &= e^{-3x} \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Máme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1' e^{-3x} + c_2' e^{-x} &= 0 \\ -3c_1' e^{-3x} - c_2' e^{-x} &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Tedy $c_1' = -\frac{1}{2}$, $c_2' = \frac{1}{2}e^{-2x}$ a $c_1 = -\frac{x}{2}$ a $c_2 = -\frac{1}{4}e^{-2x}$, proto má partikulární řešení tvar $y_p(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} = e^{-3x}(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4})$ a obecné řešení

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -\frac{x}{2}e^{-3x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

Rovnice se speciální pravou stranou

Předpokládejme rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (2.18)$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a funkce f je ve tvaru $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))$, kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n a m . Probereme nejdříve jednodušší varianty pravé strany.

1. Necht $f(x) = P_m(x)$ je polynom stupně m a 0 je k -násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 2.18 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = \hat{P}_m(x)x^k$, kde $\hat{P}_m(x)$ je vhodný polynom stupně m .

Příklad 2.18 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y = x$.

Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 4y = 0$.

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= 0 \\ \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2 \\ y_h(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' - 4y = x$. Hledáme ho ve tvaru $y(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y'' &= 0 \\ y'' - 4y &= x \\ -4(ax + b) &= x \\ y_p(x) &= -\frac{1}{4}x. \end{aligned}$$

III. Obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{4}x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Příklad 2.19 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = 4x$.

Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 2y' = 0$.

$$\begin{aligned} y'' - 2y' &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda &= (\lambda - 2)\lambda = 0 \\ \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = 2 \\ y_h(x) &= C_1 + C_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' - 2y = 4x$. Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$.

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx \\y' &= 2ax + b \\y'' &= 2a \\y'' - 2y' &= 4x \\2a - 2(2ax + b) &= 4x \\a = -1, \quad b &= -1 \\y_p(x) &= -x^2 - x.\end{aligned}$$

III. Obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -x^2 - x + C_1 + C_2 e^{2x}.$$

2. Necht $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, kde $P_m(x)$ je polynom stupně m , a $\alpha \in \mathbb{R}$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 2.18 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = \hat{P}_m(x)x^k e^{\alpha x}$, kde $\hat{P}_m(x)$ je vhodný polynom stupně m .

Příklad 2.20 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = e^{2x}$.

Řešení:

- I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 2y' = 0$, což je $y_h(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$. (viz. předchozí příklad)
- II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' - 2y' = e^{2x}$. Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = axe^{2x}$.

$$\begin{aligned}y &= axe^{2x} \\y' &= ae^{2x}(1 + 2x) \\y'' &= 4ae^{2x}(1 + x) \\y'' - 2y' &= e^{2x} \\4ae^{2x}(1 + x) - 2ae^{2x}(1 + 2x) &= e^{2x} \\2a &= 1 \\y_h(x) &= \frac{1}{2}xe^{2x}.\end{aligned}$$

III.

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x}{2}e^{2x} + C_1 + C_2e^{2x}.$$

3. Necht $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x))$, kde $P_m(x)$ a $Q_l(x)$ je polynom stupně m resp. l , a $\alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice $\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Pak má rovnice 2.18 partikulární řešení ve tvaru $y(x) = x^k e^{\alpha x}(\hat{P}_s(x)\cos(\beta x) + \hat{Q}_s(x)\sin(\beta x))$, kde $\hat{P}_s(x)$ a $\hat{Q}_s(x)$ jsou vhodné polynomy stupně $s = \max\{m, l\}$.

Poznámka 2.7 *I když je na pravé straně jen kosinus (nebo jen sinus), tak je třeba hledat řešení ve tvaru jak se sinem tak i kosinem. Všimněme si, že tento poslední případ v sobě obsahuje oba předešlé případy. Pro $\alpha = \beta = 0$ dostaneme první případ, pro nenulové α a $\beta = 0$ dostáváme druhý případ.*

Příklad 2.21 Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 4y = e^x \sin(2x)$.

Řešení:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 4y = 0$.

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \\ \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm 2i \\ y_h(x) &= C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x). \end{aligned}$$

II. Nalezněme jedno partikulární řešení rovnice $y'' + 4y = e^x \sin(2x)$. Jelikož $1 + 2i$ není kořenem charakteristického polynomu, hledáme řešení ve tvaru $y(x) = e^x(a \sin(2x) + b \cos(2x))$

$$\begin{aligned} y &= e^x(a \sin(2x) + b \cos(2x)) \\ y' &= e^x(a \sin(2x) + 2a \cos(2x) + b \cos(2x) - 2b \sin(2x)) \\ &= e^x((a - 2b) \sin(2x) + (2a + b) \cos(2x)) \\ y'' &= e^x((a - 2b - 4a - 2b) \sin(2x) + (2a + b + 2a - 4b) \cos(2x)) \\ &= e^x((-3a - 4b) \sin(2x) + (4a - 3b) \cos(2x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= e^x \sin(2x) \\
e^x((-3a - 4b + 4a) \sin(2x) + (4a - 3b + 4b) \cos(2x)) &= e^x \sin(2x) \\
a - 4b &= 1 \\
4a + b &= 0 \\
a &= \frac{1}{17} \\
b &= \frac{-4}{17}
\end{aligned}$$

$$y_p(x) = e^x \left(\frac{1}{17} \sin(2x) - \frac{4}{17} \cos(2x) \right)$$

III.

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = e^x \left(\frac{1}{17} \sin(2x) - \frac{4}{17} \cos(2x) \right) + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$