(A) a) Ať $f = 1 \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$, pak

$$T_1(\alpha f) = \int_0^1 (\alpha 1)^2 = \alpha^2 \int_0^1 f^2 = \alpha^2 T_1(f)$$

tedy pro $f = 1$ a $\alpha \neq \{0,1\}$ neplatí $T_1(\alpha f) = \alpha T_1(f)$.

Tedy T_1 není lineární forma na X

b) $$T_2(f) = \int_0^1 f(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{s^{-1/2}}_{g} f(s)\,ds$$

$t^2 = s$, $t = \sqrt{s}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds$

$p = 4 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{4}{3}$

$g \in L_q[0,1]$, neboť $\int_0^1 |g|^{4/3} = \int_0^1 s^{-1/2 \cdot 4/3} = \int_0^1 s^{-\frac{2}{3}} < \infty$.

Z popisu duality $(L_p)^* = L_q$ máme $T_2(f) = \frac{1}{2}\varphi_g(f)$, tj.

$T_2 \in X^*$

c) Zobrazení $g \in L_q \mapsto \varphi_g \in (L_p)^*$ je izometrie, tedy

$$\|T_2\| = \frac{1}{2}\|\varphi_g\| = \frac{1}{2}\|g\|_{L_q} = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |g|^{4/3}\right)^{3/4} = \frac{1}{2}\left(3\left[s^{1/3}\right]_0^1\right)^{3/4}$$

$$= \frac{1}{2}(3)^{3/4}$$

d) $f \in Z^* \Rightarrow \exists F \in Z^{**}$, že $F(f) = \|f\|$ $\Rightarrow$ z reflexivity existuje
$\|F\| = 1$

$x \in Z$, že $F = \varepsilon_x$. Pak $x \in S_Z$ a $\|f\| = F(f) = \varepsilon_x(f) = f(x)$

(B) a) Pro $f_n = \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}$ platí, že $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ je LN díky

disjunktnosti nosičů. Tedy $\dim X = \infty$.

b) · $f \in X \Rightarrow f$ měřitelná $\Rightarrow gf$ měřitelná
g spojitá

· $\|Tf\|_X = \left(\int_0^{25} |\underbrace{g}_{\leq 1} f|^{10}\right)^{1/10} \leq \|f\|_X$, tedy $\|T\| \leq 1$

· T zjevně lineární

c) $\sigma_p(T)$: $\lambda = 0 \Rightarrow f = \chi_{(\pi, 2\pi)} \in X$ splňuje $Tf = 0 = 0 \cdot f$, tj.

$0 \in \sigma_p(T)$

$\lambda \neq 0$ a $f \in X$ splňuje $Tf = \lambda f$

$$(\sin x - \lambda) f(x) = 0 \quad , x \in (0, \pi) \quad \text{s.v.}$$
$$-\lambda f(x) = 0 \quad , x \in (\pi, 2\pi)$$

$\Rightarrow f \equiv 0$ s.v. $\Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(T)$

$\Rightarrow \sigma_p(T) = \{0\}$

d) $\sigma(T)$: $\lambda \notin [0,1]$, $h \in X \Rightarrow (Tf - \lambda f) = h$ má řešení

$f = \frac{h}{g - \lambda}$. To je prvek X, neboť

$\left| \frac{1}{g-\lambda} \right|$ je omezená na $[0, 2\pi]$. Tedy $\sigma(T) \subset [0,1]$

Ať $\lambda \in (0,1)$ a $x_0 \in (0, \pi)$, že $\sin x_0 = \lambda$. Ať $h \equiv 1$. Pak

řešení rovnice $gf - \lambda f = 1$ je $f = \frac{1}{g-\lambda}$ s.v. Ale platí

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{g-\lambda} \right|^{10} = \int_0^{\pi} \frac{1}{|\sin x - \sin x_0|^{10}} = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{1}{\left|\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}\right|^{10}}}_{\omega(x)} \cdot \frac{1}{|x - x_0|^{10}} = \infty$$

neboť $\omega(x) \underset{x \to x_0}{\asymp} \frac{1}{|x - x_0|^{10}}$

Tedy $(0,1) \subset \sigma(T)$, tedy $[0,1] \subset \sigma(T)$. Proto $[0,1] = \sigma(T)$

e) Z tvaru spektra vidíme, že T není kompaktní