Zkoušková písemka z Matematické analýzy 4, LS 2022-23

Písemka číslo 2, verze 2023

(1)(16 bodů) Uvažujte funkce

$$f_n(x) = \frac{\tan(x^n - x^{n+1})}{\frac{1}{n}(x+1)}, \quad x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje bodově na $[0,1]$.
(b) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje stejnoměrně na $[0,1]$.
(c) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje lokálně stejnoměrně na $[0,1)$.

(2)(16 bodů) Uvažujte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{n!} x^n.$$

(a) Najděte poloměr konvergence této řady.
(b) Sečtěte řadu na intervalu konvergence.
(c) Je-li $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{n!} x^n$, spočtěte $f'(0)$.

(3)(16 bodů) Nechť

$$f(x) = \exp(\frac{x}{3}), \quad x \in [-\pi, \pi),$$

je 2π-periodicky dodefinovaná na $\mathbb{R}$.
(a) Ukažte, že f je konečné variace na $[-\pi, \pi]$.
(b) Nalezněte Fourierovu řadu funkce f.
(c) Zjistěte součet této Fourierovy řady na $\mathbb{R}$.
(d) Zjistěte césarovský součet této Fourierovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

(4)(12 bodů) Nechť $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá. Ukažte, že $\sin \circ f\colon x \mapsto \sin(f(x))$ je absolutně spojitá na $[0,1]$.

1) a) · $x \in \{0,1\} \Rightarrow f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$

· $x \in (0,1) \Rightarrow g_n(x) = x^n - x^{n+1}$ splňuje:

$$g_n'(x) = n x^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \iff x_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

$$g_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(+5)

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x)| = g_n(x_n) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

tedy $f_n(x) = \dfrac{\tan g_n(x)}{g_n(x)} \dfrac{n\, g_n(x)}{x+1} = \dfrac{\tan g_n(x)}{g_n(x)} \dfrac{n x^n (1-x)}{1+x}$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \left(n x^n \to 0, \ \frac{\tan g_n(x)}{g_n(x)} \to 1 \right)$$

b) $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \geq f_n(x_n) = \dfrac{\tan g_n(x_n)}{g_n(x_n)} \cdot \dfrac{\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{1 + x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot \dfrac{e^{-1}}{1+1}$

(+5) tedy $\|f_n\|_\infty \not\to 0$, tedy $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.

c) Ať $x \in [0,q]$, kde $q \in (0,1)$.

Ať $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\frac{n_0}{n_0+1} > q$. Pak pro $n \geq n_0$ a $x \in [0,q]$,

$|\tan g_n(x)| \leq |\tan g_n(q)| = \tan g_n(q)$

$x \in [0,q] \Rightarrow |f_n(x)| \leq \dfrac{\tan g_n(q)}{\frac{1}{n}(x+1)} \leq \dfrac{\tan g_n(q)}{1/n} = \dfrac{\tan g_n(q)}{g_n(q)}\, n q^n (1-q)$,

Jelikož pravá strana konverguje k nule, $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,q]$.

Tedy $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $[0,1)$.

(+6)

2) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{n!} x^n = f(x)$

a) $a_n = \frac{(-1)^n n(n+1)}{n!} x^{n-1}$

(+5) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\cancel{(n+1)}(n+2)}{(n+1)!} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \frac{n!}{n(n+1)} = |x| \frac{n+2}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

tedy poloměr konvergence je ∞.

b) $f(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{n!} x^n = \sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} (-x)^n$

Ať $g(y) = \sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} y^n$, pak g definována na $(-\infty, \infty)$ a

(+8) $\int g = \sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} \frac{y^{n+1}}{n+1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{(n-1)!} = y^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} = y^2 e^y$

$\Rightarrow g(y) = (y^2 e^y)' = 2y e^y + y^2 e^y = e^y(2y + y^2), \; y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = e^{-x}(x^2 - 2x), \; x \in \mathbb{R}$.

c) $f'(0) = \left(\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{n!} n x^{n-1} \right)_{x=0} = (-1)^1 \frac{1 \cdot (1+1)}{1!} \cdot 1 \cdot 1 =$

(+3) $= (-1) \cdot 2 = -2$

3) $f(x) = e^{x/3},\ x \in (-\pi, \pi)$

a) $g(x) = e^{x/3},\ x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow g$ rastoča $\Rightarrow g \in BV([-\pi,\pi])$

(+4) $\Rightarrow f(x) = g(x) - \left(\chi_{\{\pi\}}(x)\right)\cdot\left(e^{\pi/3} - e^{-\pi/3}\right)$ je BV, ker

$\chi_{\{\pi\}}$, je ~~odsekoma~~ monotona, je BV.

b) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx$

$$\left[\ \int e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx =\right.$$

$$\frac{1}{a}e^{ax} \qquad b(-\sin bx) \qquad\qquad \frac{1}{a}e^{ax} \qquad b\cos bx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\right]$$

$$= e^{ax}\left(\frac{a}{a^2}\cos bx + \frac{b}{a^2}\sin bx\right) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx$$

$$\rightarrow \left(\int e^{ax}\cos bx\right)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = e^{ax}\left(\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2}\right)$$

$$\rightarrow \quad I = e^{ax}\left(\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\right)\Big]$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\left[3e^{x/3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{\pi}\left(e^{\pi/3} - e^{-\pi/3}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[e^{x/3}\frac{1}{\frac{1}{9}+n^2}\left(\frac{1}{3}\cos nx + n\sin nx\right)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \cancel{\frac{9}{\pi}}\cancel{\frac{1}{9n^2+1}}\ \frac{3}{\pi}\frac{1}{1+9n^2}\left[e^{x/3}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{\pi(1+9n^2)}\left(e^{\pi/3}(-1)^n - e^{-\pi/3}(-1)^n\right) = \frac{3(-1)^n}{\pi(1+9n^2)}\left(e^{\pi/3} - e^{-\pi/3}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx$$

$$\Big[\int e^{ax} \sin bx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx =$$

$$\uparrow \frac{1}{a} e^{ax} \quad \downarrow b \cos bx \qquad\qquad \uparrow \frac{1}{a} e^{ax} \quad \downarrow -b \sin bx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \Big[\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \Big]$$

$$\Rightarrow I = e^{ax} \left(\frac{a \sin bx}{a^2} - \frac{b}{a^2} \cos bx \right) - \frac{b^2}{a^2} I$$

$$I \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = \text{ — // — }$$

$$I = \frac{a^2}{a^2+b^2} e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2} = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} \Big]$$

(+8)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{1}{9}+n^2} \Big[e^{x/3} \left(\frac{1}{3} \sin nx - n \cos nx \right) \Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{9}{\pi(1+9n^2)} (+n) \Big[-e^{\pi/3} \cos(n\pi) + e^{-\pi/3} \cos n\pi \Big]$$

$$= \frac{9n}{\pi(1+9n^2)} (-1)^n \left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

c) $f \in BV([-\pi,\pi]) \Rightarrow$ Fourierova řada z Jordan-Dirichleta

(+2) konverguje takto: $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{\pi/3}+e^{-\pi/3}\right), & x=-\pi \\ f(x), & x \in (-\pi,\pi) \\ \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/3}+e^{-\pi/3}\right), & x=\pi \end{cases}$

a dále 2π-periodicky.

d) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n^f(x)$ dle standardní věty, když existují

(+2) součet vyjde stejný jako normální.

5) sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 1-lipschitzovská: pro $x<y$ máme

$$|\sin x - \sin y| \overset{\text{Lagrange}}{=} |(\cos \xi)(x-y)| \le 1\,|y-x| .$$
$$\xi \in (x,y)$$

Tedy pro libovolné body $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le a_3 < b_3 \le \ldots \le a_n < b_n \le 1$

máme $\sum_{i=1}^{n} |\sin(f(b_i)) - \sin(f(a_i))| \le \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)|$

Pokud $\varepsilon > 0$ dáno, ať $\delta > 0$ svědčí o absolutní spojitosti f. Pak pro body jako výše splňující $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ platí $\sum_{i=1}^{n} |(\sin\circ f)(b_i) - (\sin\circ f)(a_i)| \le \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

+12