Zkoušková písemka z Matematické analýzy 4, LS 2022-23

Písemka číslo 4, verze 2023

(1)(16 bodů) Uvažujte funkce

$$f_n(x) = e^{\sqrt[n]{\min\{x,1\}}} \cdot \log(1 + \sqrt[n]{\max\{1,x\}}), \quad x \in (0,\infty), n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje bodově na $(0,\infty)$.
(b) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje stejnoměrně na $(0,\infty)$.
(c) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$.

(2)(16 bodů) Uvažujte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} x^{2n}.$$

(a) Najděte poloměr konvergence této řady.
(b) Sečtěte řadu na intervalu konvergence.
(c) Vyčíslete řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$.

(3)(16 bodů) Nechť

$$f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, 0).$$

(a) Dodefinujte funkci f na interval $(-\pi,\pi)$ tak, aby její Fourierova řada obsahovala pouze sinové členy.
(b) Zjistěte součet této řady na $\mathbb{R}$.
(c) Zjistěte, zda konverguje tato řada stejnoměrně na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(4)(12 bodů) Množina $A \subset \mathbb{R}^2$ je hvězdicovitě souvislá, pokud existuje $s \in A$ tak, že pro každé $x \in A$ leží úsečka spojující x a s v A. Ukažte, že hvězdicovitě souvislá množina je souvislá.

1) $f_n(x) = \begin{cases} e^{\sqrt[n]{x}} \cdot \log(1+\sqrt[n]{1}) = e^{\sqrt[n]{x}} \log 2, & x \in (0,1] \\ e^{\sqrt[n]{1}} \cdot \log(1+\sqrt[n]{x}) = e \log(1+\sqrt[n]{x}), & x \in (1,\infty) \end{cases}$

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e \log 2, \quad x \in (0,\infty)$ +4

b) $\| f_n(x) - e\log 2 \|_\infty = \sup_{x\in(0,\infty)} | f_n(x) - e \log 2 | \geq$ +4

$\geq \overline{\lim_{x\to\infty}} | f_n(x) - e\log 2 | = \infty$, tedy $f_n \not\rightrightarrows$ na $(0,\infty)$

c) AŤ $0 < p < 1 < q < \infty$, $x \in [p,q]$. Pak

$\leq e^{\sqrt[n]{p \wedge 1}} \log(1+\sqrt[n]{p \vee 1}) \leq f_n(x) \leq e^{\sqrt[n]{q \wedge 1}} \log(1+\sqrt[n]{q \vee 1}) =$

$\geq e^{\sqrt[n]{p}} \log 2 \qquad\qquad = e \log(1+\sqrt[n]{q})$

Tj.: $e^{\sqrt[n]{p}} \log 2 - e \log 2 \leq f_n(x) - e\log 2 \leq e \log(1+\sqrt[n]{q}) - e \log 2$
$x \in [p,q]$

přičemž levá i pravá strana konverguje k 0.

Tedy: $\| f_n(x) - e \log 2 \|_\infty \to 0$ pro $x \in [p,q]$.

+8

Tj. $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(0,\infty)$

2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} x^{2n}$

$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)} z^n$

a) $x \neq 0 \Rightarrow \frac{n}{\cancel{(n+1)}(n+2)} |x|^{2n+2} \cdot \frac{n(n+1)}{n-1} \frac{1}{|x|^{2n}} = \frac{n^2}{(n+2)(n-1)} |x|^2 \to |x|^2$

$\Rightarrow$ poloměr konvergence je 1, střed 0. +4

b) $g(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)} z^n$, $\frac{n-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1}$

$= -\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \cancel{z}2 \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$, $|z| < 1$

$\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)' = (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$

$\sum \frac{z^n}{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{z}\left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right) = \frac{1}{z}\left(\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right) - z\right) =$

$= \frac{1}{z}\left(-\log(1-z) - z\right)$, $0 < |z| < 1$

$\Rightarrow g(z) = \log(1-z) - \frac{2}{z}(z + \log(1-z))$, $0 < |z| < 1$

$= 0$ ... $z = 0$

(+8)

$\Rightarrow f(x) = g(-x^2) = \log(1+x^2) + \frac{2}{x^2}(-x^2 + \log(1+x^2))$, $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$

0 ... $x = 0$

c) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$ konverguje, neboť $\frac{n-1}{n(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ a

(+4)

$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \le \frac{n-1}{n(n+1)}$

$n^2 \le (n-1)(n+2) = n^2 + n - 2$

$2 \le n$ ✓ $\Rightarrow \frac{n-1}{n(n+1)} \searrow 0$ pro $n \ge 2$.

Tedy $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} \overset{\text{Abel}}{=} \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \left(-2 + \log(1+x^2) + 2\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right) =$

$= -2 + \log 2 + 2\log 2 = -2 + 3\log 2$.

3) $f(x) = \begin{cases} x & , \ldots x \in (-\pi, 0) \\ -x^2, & - x \in [0, \pi) \end{cases}$ (+2)

a) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x^2) \sin nx =$

$= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx = -\frac{2}{\pi} \left(\left[x^2 \frac{(-\cos nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx \right) =$

$= -\frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi^2 (-1)^{n+1} + 0}{n} \right) + \frac{2}{n} \left(\left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \right) \right)$

$= -\frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{(-1)^{n+1} \pi^2}{n} \right) + \frac{2}{n} \left((0) + \frac{1}{n} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \right) \right)$

$= -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2 (-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3} \left((-1)^n - 1 \right) \right) = \frac{(-1)^n 2\pi}{n} - \frac{4}{\pi n^3} \left((-1)^n - 1 \right) = b_n$

$n \in \mathbb{N}$.

(+6)

$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 \ldots x \in (-\pi, 0) \\ -x^2 \ldots x \in [0, \pi) \\ \pi^2 \ldots x = \pi \end{cases}$, pak $f = g$ s.v. Pro $h = \begin{cases} x^2 \ldots x \in [-\pi, \\ -x^2 \ldots x \in [0, \end{cases}$

h monotónní na $[-\pi, \pi)$, a tedy BV,

platí $g(x) = h(x + 2k\pi) \ldots \{x\} \setminus \{\pi\}$, tedy $g \in BV([-\pi, \pi])$.

$\chi_{\{\pi\}}$ monotónní, a tedy BV, tedy

(+3)

Tedy dle Jordana-Dirichleta platí

$s_n^f(x) = s_n^g(x) \longrightarrow \begin{cases} g(x) = f(x) \ldots x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{1}{2}(g(x+) + g(x-)) = 0, \; x = -\pi \end{cases}$ a dále periodicky

c) Na $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ je g spojitá, tedy $s_n^g \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ dle J.-D.,

tedy $s_n^g \rightrightarrows g$ na $[-\pi/2, \pi/2]$, tedy i na $(-\pi/2, \pi/2)$. (+3)

4) Ať $A \subset \mathbb{R}^2$ hvězdicovitá souvislá. Pro každé $x \in A$ označme Y_x úsečku spojující s a x. Pak Y_x souvislé (neboť je to spojitý obraz $[0,1]$) a $\bigcap_{x \in A} Y_x \ni \{s\} \neq \emptyset$, pak $A = \bigcup_{x \in A} Y_x$, tedy A souvislá dle věty z přednášky.

+12