Zkoušková písemka z Matematické analýzy 4, LS 2022-23

Písemka číslo 5, verze 2023

(1)(16 bodů) Uvažujte funkce

$$f_n(x) = e^{\sin(\frac{|x|}{n^2})} - 1, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Ukažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je dobře definovaná reálná funkce na $\mathbb{R}$.
(b) Ukažte, že funkce f je spojitá na $[-1, 1]$.
(c) Spočtěte $f'_+(0)$. (Můžete využít bodu (b).)

(2)(16 bodů) Uvažujte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n!} x^n.$$

(a) Najděte poloměr konvergence této řady.
(b) Sečtěte řadu na intervalu konvergence.
(c) Vyčíslete řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

(3)(16 bodů) Nechť

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi, 0), \\ x, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$

je 2π-periodicky dodefinována na $\mathbb{R}$.
(a) Nalezněte rozvoj funkce f do Fourierovy řady.
(b) Zjistěte součet této řady na $\mathbb{R}$.
(c) Zjistěte, zda konverguje tato řada stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$.

(4)(12 bodů) Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce absolutně spojitá na $[-\pi, \pi]$ a $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $\lim na_n = 0$.

5) $f \in AC([-\pi, \pi])$, 2π-periodická na $\mathbb{R}$.

Pak pro $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx$ platí:

per-partes pro AC-fce

$$n a_n = \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underset{\downarrow \atop f'(x)}{f(x)} \underset{\uparrow \atop \frac{-\sin nx}{n}}{\cos(nx)} =$$

$f' \in L^1([-\pi, \pi])$

$$= \frac{n}{\pi}\left(\left[f(x) \frac{-\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{\sin nx}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

z Riemann-Lebesgueova lemmatu.

+12

$$\underbrace{\quad n! \quad}_{a_n}$$

a)

(+4)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}|x|^{n+1}}{\frac{n^2}{n!}|x|^n} = \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)^2}{n^2}\,|x| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

Tedy $\sum a_n$ konverguje absolutní po každé $x \in \mathbb{R}$, tedy $\rho = \infty$

b)

$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n}{(n-1)!} x^n = x \underbrace{\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n\, x^{n-1}}{(n-1)!}}_{g(x)}$$

$$\Rightarrow \int g(x) = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n\, x^n}{n} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_1^\infty (-x)^n \frac{1}{(n-1)!} =$$

$$= (-x) \sum_1^\infty \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} = (-x)\, e^{-x}$$

$$\Rightarrow g(x) = (-x e^{-x})' = (-1)e^{-x} + (-x)e^{-x}(-1) = -e^{-x} + x e^{-x}$$

$$= e^{-x}(x-1)$$

(+10)

$$\Rightarrow \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n^2}{n!} x^n = x e^{-x}(x-1), \quad x \in \mathbb{R}$$

c)

$$\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n^2}{n!}(-1)^n = (-1)e^1(-1-1) = 2e$$

(+2)

3) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ 2π-periodicky definovaná na $\mathbb{R}$.

a) • $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$

• $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underset{\downarrow \, 1}{x} \, \underset{\uparrow \, \frac{\sin nx}{n}}{\cos nx} =$

(+8)

$= \frac{2}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \right) =$

$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \left[\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} \left((-1)^n - 1 \right), \ n \in \mathbb{N}$

• $b_n = 0$ ze sudosti f

$\Rightarrow f \sim \frac{\pi}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx)$

b) f je spojitá na $\mathbb{R}$, monotónní na $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$. Proto

(+4)

Tedy f má konečnou variaci na $[-\pi, \pi]$.

z Jordan-Dirichleta plyne $s_n f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

c) Ať $I \supset [-\pi, \pi]$ je otevřený interval, pak f spojitá na

(+5)

I, tedy $s_n f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na I dle Jordan-Dirichleta. Tedy

$s_n f \rightrightarrows f$ na $[-\pi, \pi]$ z kompaktnosti $[-\pi, \pi]$.

$, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

a) Víme, že $\frac{e^y - 1}{y} \to_{y \to 0} 1$, ať $\eta > 0$, že pro $|y| \in P(0,\eta)$ je

$\left|\frac{e^y - 1}{y}\right| \leq 2$. Pak pro $y \in B(0,\eta)$ je $|e^y - 1| \leq 2|y|$.

(+5) Ať $x \in \mathbb{R}$ je pevné, ať $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\frac{|x|}{n_0^2} < \eta$. Pak

pro $n \geq n_0$ platí $\left|\sin \frac{|x|}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{|x|}{n_0^2} < \eta$, tedy

$|f_n(x)| \leq 2 \left|\sin\left(\frac{|x|}{n^2}\right)\right| \leq 2 \frac{|x|}{n^2}$ pro $n \geq n_0$

Z Weierstrasse platí, že $\sum f_n(x) \in \mathbb{R}$.

b) Ať $|x| \leq 1$. Vezmeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\frac{2}{n_0^2} < \eta$. Pak

$\left|\sin\left(\frac{|x|}{n^2}\right)\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \eta$, tedy z předchozího

(+5) $|f_n(x)| \leq 2 \left|\sin\left(\frac{|x|}{n^2}\right)\right| \leq 2 \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$.

Tedy $\sum f_n \rightrightarrows$ na $[-1,1]$, proto f spojitá na $[-1,1]$.

c) $f_n'(x) = \left(e^{\sin \frac{x}{n^2}}\right)\left(\cos \frac{x}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $x \in (0,\infty)$, tedy

$|f_n'(x)| \leq e^1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2}$, $x \in (0,1)$.

Pro $(0,1)$ máme: · $\sum f_n(x)$ konverguje na $(0,1)$

(+6) · $\sum f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na $(0,1)$

Tedy $\left(\sum f_n\right)'(x) = \sum f_n'(x)$ pro $x \in (0,1)$.

Tedy $f_+'(0) \underset{f \text{ spojitá v } 0}{=} \lim_{x \to 0_+} f'(x) = \lim_{x \to 0_+} \sum f_n'(x) = \lim_{x \to 0_+} \sum_1^\infty e^{\sin \frac{x}{n^2}}\left(\cos \frac{x}{n^2}\right)\frac{1}{n^2}$

$\underset{\sum f_n \rightrightarrows \text{ na } (0,1)}{\overset{\text{Moore-Osgood}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x \to 0_+} f_n'(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$