Zkoušková písemka z Matematické analýzy 4, LS 2022-23

Písemka číslo 3, verze 2023

(1)(16 bodů) Uvažujte funkce

$$f_n(x) = \frac{|\sin x|}{n^2(1+nx^2)}, \quad x \in (-\pi, \pi), n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje bodově na $(-\pi, \pi)$.
(b) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $(-\pi, \pi)$.
(c) Je-li $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$, $x \in (-\pi, \pi)$, spočtěte derivaci $g'(x)$ funkce g v bodech intervalu $(-\pi, \pi)$.
(d) Je-li $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, spočtěte jednostranné derivace f v bodě 0.

(2)(16 bodů) Uvažujte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{2n-1}.$$

(a) Najděte poloměr konvergence této řady.
(b) Sečtěte řadu na intervalu konvergence.
(c) Je-li $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{2n-1}$, spočtěte $f''(0)$.

(3)(16 bodů) Nechť

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, \pi) \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [-\pi, \pi) \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

a

$$f(x) = x\Lambda(x), \quad x \in [-\pi, \pi),$$

je 2π-periodicky dodefinovaná na $\mathbb{R}$.
(a) Nalezněte Fourierovu řadu funkce f.
(b) Zjistěte součet této Fourierovy řady na $\mathbb{R}$.
(c) Spočtěte variaci funkce f na $[0, \pi]$.

(4)(12 bodů) Nechť $f_n\colon M \to [0,1]$ stejnoměrně konvergují na množině M k funkci $f\colon M \to [0,1]$. Nechť $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá. Ukažte, že posloupnost $(g \circ f_n)$ stejnoměrně konverguje k funkci $g \circ f$.

3) $\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \dots\ x \in [-\pi,\pi) \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \dots\ x \in [-\pi,\pi) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

$$f(x) = x\,\Delta(x) = \begin{cases} x & \dots\ x \in [-\pi,\pi) \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \dots\ x \in [-\pi,\pi) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

tedy $g(x) = \begin{cases} x & \dots\ x \in [-\pi,\pi) \\ -\pi & \dots\ x = \pi \end{cases}$ splňuje $f = g$ s.v.

(+5)

Tedy $s_n^f(x) = s_n^g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$.

a) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0,\ n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x(-\cos nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\right) =$

$\downarrow 1 \qquad \uparrow \frac{-\cos nx}{n}$

(+5)

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\underbrace{(\pi(-\cos n\pi) - (-\pi)(-\cos n\pi))}_{-\pi\cos(n\pi)} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) =$

$= \frac{1}{n\pi}\left(\pi\left(-(-1)^n - (-1)^n\right)\right) = -\frac{1}{n}\,2(-1)^n = -\frac{2}{n}(-1)^n$

$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$

b) $g(x) = x - 2\pi\chi_{\{\pi\}}(x),\ x \in [-\pi,\pi]$, je rozdíl monotónních, tedy BV.

Proto $s_n^f(x) = s_n^g(x) \longrightarrow \begin{cases} g(x) & \dots\ x \in (-\pi,\pi) \\ \frac{1}{2}(g(-\pi+) + g(\pi-)) = \frac{1}{2}(-\pi+\pi) = 0, & x = -\pi \end{cases}$

(+5)

A dál periodicky.

c) $V(f; [0,\pi]) = \infty$: Ať $K > 0$ libovolné. Vezměme $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{\pi}{2}n > K$ takové, že a zvolme $\frac{\pi}{2} = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = \pi$ $x_i \notin \mathbb{Q}$, i sudé, $x_i \in \mathbb{Q}$, i liché. Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{2n}$ platí

(+5)

$$\sum_{j=1}^{2n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = |0 - x_0| + |x_2 - 0| + |0 - x_2| + |x_4 - 0| + |0 - x_4| + \dots$$
$$\dots + |0 - x_{2n-2}| + |x_{2n} - 0| \geq$$
$$\geq x_0 + x_2 + x_4 + \dots + x_{2n} \geq \frac{\pi}{2}\cdot n > K.$$

4) $f, f_n : M \to [0,1]$, $f_n \rightrightarrows f$. Ať $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ AC.

Pak $g \circ f_n \rightrightarrows g \circ f$ na M.

Dk.: Dáno $\varepsilon > 0$. Pak $g \in C([0,1])$, tedy stejnoměrně spojitá na $[0,1]$. Ať $\delta > 0$, že pro $y_1, y_2 \in [0,1]$, $|y_1 - y_2| < \delta$ platí $|g(y_1) - g(y_2)| < \varepsilon$.

Pak ať $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\|f_n - f\|_\infty < \delta$ pro $n \geq n_0$.

Pak pro $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí:

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \delta$$

$\boxed{}$

+12

2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^{2n-1}$

a) $x \neq 0$: $\dfrac{\cancel{(n+1)}(n+2)|x^{2(n+1)-1}|}{n\,\cancel{(n+1)}|x^{2n-1}|} = \dfrac{n+2}{n}|x|^{2n+1-2n+1} = \dfrac{n+2}{n}|x|^2 \to |x|^2$

(+5)

$\Rightarrow$ polomjer konvergencije je 1.

b) $f(x) = \sum_1^{\infty} n(n+1) x^{2(n-1)+1} = x \sum_1^{\infty} n(n+1)(x^2)^{n-1}$

$g(y) = \sum_1^{\infty} n(n+1) y^{n-1}$, $|y|<1$.

$\Rightarrow \int g = \sum_1^{\infty} (n+1) y^n = h(y) \Rightarrow \int h(y) = \sum_1^{\infty} y^{n+1} = (y^2+y^3+\dots)$

$= \dfrac{y^2}{1-y}$

(+9)

$\Rightarrow h = \dfrac{1}{(1-y)^2}(2y(1-y)+y^2) = \dfrac{1}{(1-y)^2}(2y-y^2)$

$\Rightarrow g = h' = \dfrac{1}{(1-y)^4}((2-2y)(1-y)^2 + (2y-y^2)2(1-y)) =$

$= \dfrac{1}{(1-y)^3}(2(1-y)^2 + 2y(2-y)) = \dfrac{2}{(1-y)^3}(1+y^2-2y+2y-y^2)$

$= \dfrac{2}{(1-y)^3}$

$\Rightarrow f(x) = x\,g(x^2) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^3}$, $x \in (-1,1)$

c) $f(x) = \sum_1^{\infty} n(n+1) x^{2n-1} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n-1) x^{2n-2}$

(+3) $\Rightarrow f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)(2n-1)(2n-2) x^{2n-3}$

$\Rightarrow f''(0) = 0$

1) $f_n(x) = \frac{|\sin x|}{n^2(1+nx^2)}$, $g_n(x) = \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

a) + b) $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in (-\pi,\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, tedy z Weierstrasse

+4 $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na $(-\pi, \pi)$.

c) $g_n'(x) = \frac{1}{n^2} \frac{-2nx}{(1+nx^2)^2} = -\frac{2}{n} \frac{x}{(1+nx^2)^2}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

$$g_n''(x) = -\frac{2}{n} \frac{1}{(1+nx^2)^4} \left((1+nx^2)^2 - x\, 2(1+nx^2)2nx\right) =$$

$$= -\frac{2}{n} \frac{1}{(1+nx^2)^3} \left(1+nx^2 - 4nx^2\right) = \frac{-2}{n(1+nx^2)^3} (1-3nx^2).$$

$\Rightarrow \left(g_n''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \Rightarrow \Big[\max_{x \in [0,\pi]} |g_n'(x)| \leq |g_n'(\frac{1}{\sqrt{3n}})| =$

$= \frac{2}{n} \frac{\frac{1}{\sqrt{3n}}}{(1+n\frac{1}{3n})^2} =$

+8

$|g_n'(0)| = 0$, $|g_n'(\pi)| = \frac{2\pi}{n(1+n\pi^2)^2}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{(4/3)^2} \Big]$

$\Rightarrow \cdot \sum \|g_n'\|_{(-\pi,\pi)} < \infty \Rightarrow \sum g_n' \rightrightarrows$ na $(-\pi,\pi)$

$\cdot$ $\sum g_n(0)$ konverguje

$\Rightarrow (g(x))' = \left(\sum g_n(x)\right)' = \sum g_n'(x) = \sum_1^\infty -\frac{2}{n} \frac{x}{(1+nx^2)^2}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

d) g, f, g' spojité díky stejnoměrné konvergenci, tedy:

$\cdot$ $f_+'(0) = \lim_{x \to 0_+} f'(x) = \lim_{x \to 0_+} (\sin x\, g(x))' = \lim_{x \to 0_+} (\cos x\, g(x) + \sin x\, g'(x)) =$

+4

$= \cos 0\, g(0) + \sin 0\, g'(0) = g(0) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\cdot$ $f_-'(0) = -\frac{\pi^2}{6}$ ze symetrie.