(1) $$\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\left(\log\frac{n^2+1}{n^2-1} - \sin\frac{a}{n^2}\right) n}_{a_n}$$

· $\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$

$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

· $\log\frac{n^2+1}{n^2-1} = \log\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{n^6} + \varphi_1(n)$, $\quad \frac{\varphi_1(n)}{1/n^6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

· $\sin\frac{a}{n^2} = \frac{a}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{a^3}{n^6} + \varphi_2(n)$, $\quad \frac{\varphi_2(n)}{1/n^6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

· $a_n = n\left(\frac{2-a}{n^2} + \frac{1}{n^6}\left(\frac{2}{3} + \frac{a^3}{6}\right) + \varphi(n)\right)$, $\quad \frac{\varphi(n)}{1/n^6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$= \frac{2-a}{n} + \frac{1}{n^5}\left(\frac{2}{3} + \frac{a^3}{6}\right) + \psi(n)$, $\quad \frac{\psi(n)}{1/n^5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Tedy: $2-a>0 \Rightarrow \lim n a_n = \lim\left((2-a) + \frac{1}{n^4}\left(\frac{2}{3} + \frac{a^3}{6}\right) + n\psi(n)\right)$

$= 2-a > 0$, neboť $n\psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow a_n > 0$ od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$, pro $b_n = \frac{1}{n}$ pak platí

$\frac{a_n}{b_n} = n a_n \to 2-a \in (0,\infty) \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

$2-a<0 \Rightarrow \lim n a_n = 2-a < 0 \Rightarrow -a_n$ kladné od jistého $n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ srovnáme s $\frac{1}{n}$ a zjistíme divergenci $\sum -a_n \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

$a=2 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n^5}\left(\frac{2}{3} + \frac{2^3}{6}\right) + \psi(n)$

$b_n := \frac{1}{n^5} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3} + \frac{2^3}{6} + \frac{\psi(n)}{1/n^5} \to \frac{2}{3} + \frac{2^3}{6} \in (0,\infty)$

$\Rightarrow a_n > 0$ od jistého n_0, ze srovnávacího limitního kritéria plyne

$\sum a_n$ konverguje

Bodování:
· $\log\frac{1+x}{1-x}$ ... 3
· sin ... 3
· a_n ... 3

$a \neq 2$ ... 6

$a = 2$ ... 3

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\,dx = \int_1^e \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+t+1}} =$

$e^x = t$

$e^x dx = dt$

integrand spojitý na $[0,1]$

$\sqrt{t^2+t+1} = y - t$

$\cancel{t^2}+t+1 = y^2+\cancel{t^2}-2yt$

$t(1+2y) = y^2-1$

$t = \frac{y^2-1}{1+2y}$

$t=1 \to y = \sqrt{3}+1 = \alpha$

$t=e \to y = e+\sqrt{e^2+e+1} = \beta$

$dt = \frac{1}{(1+2y)^2}\left(2y(1+2y)-2(y^2-1)\right) =$

$= -\|- \left(2y+4y^2-2y^2+2\right)$

$= \frac{1}{(1+2y)^2}\left(2y^2+2y+2\right) = \frac{2(y^2+y+1)}{(1+2y)^2}$

$\sqrt{t^2+t+1} = y-t = y-\frac{y^2-1}{1+2y} = \frac{y+2y^2-y^2+1}{1+2y} =$

$= \frac{y^2+y+1}{1+2y}$

$= \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{2(y^2+y+1)}{(1+2y)^2\,y}\,dy = 2\int_\alpha^\beta \frac{y^2+y+1}{y(1+2y)^2} =$

$\frac{y^2+y+1}{y(1+2y)^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+2y} + \frac{C}{(1+2y)^2}$

$y^2+y+1 = A(2y+1)^2 + By(2y+1) + Cy$

u y^2 je koeficient vpravo $4A+2B$, tedy

$y=0 \to \underline{A=1}$

$y=-1/2 \to \frac14 - \frac12 + 1 = -\frac12 C$

$1-2+4 = -2C$

$3 = -2C$

$\underline{C = -\frac32}$

$1 = 4A+2B$

$2B = 1-4A = 1-4 = -3$

$\underline{B = -\frac32}$

$= 2\left(\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac1y - \frac32\,\frac{1}{2y+1} - \frac32\,\frac{1}{(2y+1)^2}\right) = 2\log\frac{\beta}{\alpha} - 2\cdot\frac32\cdot\frac12\log\frac{2\beta+1}{2\alpha+1}$

$+ \frac32\left(\frac{1}{2\beta+1} - \frac{1}{2\alpha+1}\right)$

<u>Bodování</u>: $e^x=t$ ... 2 rozklad ... 5

Euler ... 5 dopočet ... 4

③ $y' = 3\sqrt[3]{y^2}\, e^x$ $\quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá

$\underset{g(y)}{\uparrow} \quad \underset{h(x)}{\uparrow}$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá

1) $I = \mathbb{R}$

2) singulární řešení : $y = 0$

3) $J = (-\infty, 0), (0, \infty)$

4) Ať $I = \mathbb{R}$ a $J = (-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, pak

$$\frac{y'}{3\sqrt[3]{y^2}} = e^x$$

$$\sqrt[3]{y} = e^x + c$$

5) Fixujme $c \in \mathbb{R}$: $J = (0, \infty)$: $e^x + c \in (0, \infty)$ pro $x \in \mathbb{R}$

$e^x > -c$

tedy : $c \geq 0 \,..\, x \in \mathbb{R}$

$c < 0 \,..\, x > \log(-c)$

$J = (-\infty, 0)$: $e^x + c \in (-\infty, 0)$ pro $x \in \mathbb{R}$

tedy : $c \geq 0$ ... nemá řešení

$c < 0$ ... $x < \log(-c)$

$c \geq 0$: $y(x) = (e^x + c)^3, \; x \in \mathbb{R}$

$c < 0$: $y(x) = (e^x + c)^3, \; x \in (\log(-c), \infty)$

$y(x) = (e^x + c)^3, \; x \in (-\infty, \log(-c))$

6) max. řešení : · $y = (e^x + c)^3, \; x \in \mathbb{R}$, $\underline{c \geq 0}$

· $y = 0, \; x \in \mathbb{R}$

· $y = \begin{cases} 0 \;... & x \in (-\infty, \log(-c)] \\ (e^x + c)^3 \;... & x \in (\log(-c), \infty) \end{cases}$ $\quad y = \begin{cases} (e^x + c)^3 \;.. & x \in (-\infty, \log(-c)) \\ 0 \;... & x \in [\log(-c), \infty) \end{cases}$ $\quad \underline{c < 0}$

· $y = \begin{cases} (e^x + c_1)^3 \;.. & x \in (-\infty, \log(-c_1)) \\ 0 \;.. & x \in [\log(-c_1), \log(-c_2)] \\ (e^x + c_2)^3 \;.. & x \in (\log(-c_2), \infty) \end{cases}$ $\quad \underline{-\infty < c_2 \leq c_1 < 0}$

<u>Bodování:</u>

1) ... 1

2) ... 2

3) ... 2

4) ... 3

5) ... 4

6) ... 4

(5) Ať $f(x) = \begin{cases} 1 & \dots\ x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \dots\ \text{jinak} \end{cases}$. Pak $(R)\int_0^1 f = 0$.

<u>Dk.:</u> · Zjevně $\underline{S}(f, D) = 0$ pro každé D dělení $[0,1]$.

· Zjevně f omezená.

· Stačí: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ dělení D : $\overline{S}(f, D) < 2\varepsilon$.

Pak totiž $\overline{\int_0^1} f = 0$, tedy $0 = \underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = 0$.

· Ať $\varepsilon > 0$ dáno. Pak funkce $f|[\varepsilon, 1]$ se liší od nulové funkce na $[\varepsilon, 1]$ pouze v konečně mnoho bodech. Tedy dle věty platí $\int_\varepsilon^1 f = \int_\varepsilon^1 0 = 0$, proto existuje dělení $D' = \{x_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[\varepsilon, 1]$, že $\overline{S}(f|_{[\varepsilon,1]}, D') < \varepsilon$. Uvažujme dělení $D = \{0, \varepsilon\} \cup D'$. Pak $\overline{S}(f, D) \leq 1 \cdot \varepsilon + \overline{S}(f|[\varepsilon, 1], D') \leq 2\varepsilon$.

Tedy D je hledané dělení. ∎