ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 1, LS 2021-22

PÍSEMKA ČÍSLO 1, VERZE 24.5.2022

(1)(16 bodů) Rozviňte funkci $e^{\cos x}$ do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$

(pokud existuje) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(2)(16 bodů) Ukažte, že funkce $x - \sin x$ je kladná na $(0, \infty)$ a vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}\, dx.$$

(3)(16 bodů) Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = (4t - 8)e^{-t}\ .$$

(4)(12 bodů) Dokažte následující tvrzení: Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonečně diferencovatelná funkce splňující odhad $|f(x)| \leq e^{-1/x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak f má v 0 derivace všech řádů nulové. (Návod: Zvažte Taylorův polynom pro funkci f.)

1.
$$e^y = e + e\frac{y-1}{1!} + e\frac{(y-1)^2}{2!} + e\frac{(y-1)^3}{3!} + e\frac{(y-1)^4}{4!} + \underbrace{o\left((y-1)^4\right)}_{\varphi(y)}$$

$$e^{\cos x} = e + e(\cos x - 1) + \frac{e}{2}(\cos x - 1)^2 + \frac{e}{6}(\cos x - 1)^3 + \frac{e}{24}(\cos x - 1)^4$$

$$+ \underbrace{\varphi(\cos x)}_{o(x^4)} \qquad \left[\frac{\varphi(\cos x)}{x^4} = \frac{\varphi(\cos x)}{(\cos x - 1)^4}\cdot\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right)^4 \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right]$$

$$e^{\cos x} = e\left[1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^4\right] + o(x^4)$$

$$= e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{8}x^4\right] + o(x^4) = e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right] + o(x^4)$$

$$\frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{e}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) + o(x^4) =$$

$$= \frac{e}{2}\left(2 + x^2 + \frac{x^4}{12}\right) + o(x^4) = e\left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right] + o(x^4)$$

$$\text{čitatel} = x^2\left(-\frac{e}{2} - \frac{e}{2} + a\right) + x^4\left(\frac{e}{6} - \frac{e}{24}\right) + o(x^4)$$

$$\frac{\text{čitatel}}{x^4} = \frac{a-e}{x^2} + \frac{e}{8} + \frac{o(x^4)}{x^4}$$

Tedy:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{čitatel}}{x^4} = \begin{cases} \infty & \dots\ a > e \\ -\infty & \dots\ a < e \\ \frac{e}{8} & \dots\ a = e \end{cases}$$

<u>Bodování:</u>

e^y v 1 ---- 2 body

$e^{\cos x}$ ---- 5 bodů

$\frac{e}{2}(e^x + e^{-x})$ --- 4 body

$\frac{\text{čitatel}}{x^4}$ ... 3 body

závěr ... 2 body

② • $f(x) = x - \sin x$, $x \in [0,\infty)$, pak $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, na $[0,\infty)$ a $f'(x) > 0$ na $(0, 2\pi)$. Tedy f roste na $[0, 2\pi]$ a neklesá na $[2\pi, \infty)$. Proto $f > 0$ na $(0,\infty)$.

• $g(x) = \dfrac{(\log x)(\log(x - \sin x))}{x^{6/5} + 10 + \sin x}$ je spojitá na $(0,\infty)$. Stačí proto vyřešit chování v 0 a ∞.

∞: $g(x)$ srovnáme s $\dfrac{(\log x)^2}{x^{6/5}}$, pak

$$\frac{g(x)}{\frac{(\log x)^2}{x^{6/5}}} = \frac{x^{6/5}}{x^{6/5} + 10 + \sin x} \cdot \frac{\log(x - \sin x)}{\log x} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{10}{x^{6/5}} + \frac{\sin x}{x^{6/5}}} \cdot \frac{\log x + \log\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{\log x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

Obě funkce jsou na okolí ∞ kladné a $\dfrac{\log x}{x^{6/5}}$ je u ∞
(integr. konverguje)
integrovatelný, tedy g je u ∞ integrovatelná (integrál konv.)

[$\dfrac{\log x}{x^{6/5}} \leq \dfrac{1}{x^t}$ na okolí ∞, kde $t \in (1, 6/5)$]

0: • $\log(x - \sin x) = \log\left(\frac{x - \sin x}{x^3} x^3\right) = \log \frac{x - \sin x}{x^3} + \log x^3 =$

$= \log \frac{x - \sin x}{x^3} + 3 \log x$

• $|g(x)|$ srovnáme s $|\log x|^2$, pak

$$\frac{|g(x)|}{|\log x|^2} = \frac{\left|\log \frac{x - \sin x}{x^3} + 3 \log x\right|}{|\log x|} \cdot \frac{1}{x^{6/5} + 10 + \sin x} =$$

$$= \frac{\left|\frac{\log \frac{x - \sin x}{x^3}}{\log x} + 3\right|}{1} \cdot \frac{1}{x^{6/5} + 10 + \sin x} \xrightarrow[x \to 0_+]{} 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

• $|\log x|^2$ má konv. integrál u 0, neboť $|\log x|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ na okolí 0.

Tedy $|g|$ má konv. integrál u 0, tedy g má konv. integrál u 0.

Závěr: $\int_0^\infty g$ konverguje

Bodování:

- $x > \sin x$ ... 2 body
- spojitost na $(0, \infty)$ ... 1 bod
- ∞ ... 6 bodů
- 0 ... 6 bodů
- závěr -- 1 bod

(3) $y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = (4t-8)e^{-t}$

- $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 \Rightarrow F.S. = \{e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}\}$
- partikulární řešení hledáme ve tvaru $y = t^2(at+b)e^{-t} = (at^3+bt^2)e^{-t}$
- $y' = e^{-t}(3at^2+2bt) - e^{-t}(at^3+bt^2) =$

$$e^{-t}\left(-at^3+t^2(3a-b)+t(2b)\right)$$

- $y'' = -e^{-t}\left(-at^3+t^2(3a-b)+t2b\right) + e^{-t}\left(-3at^2+2t(3a-b)+2b\right)$

$$= e^{-t}\left(at^3+t^2(b-6a)+t(6a-4b)+2b\right)$$

- $y''' = -e^{-t}\left(at^3+t^2(b-6a)+t(6a-4b)+2b\right)$

$$+e^{-t}\left(3at^2+2t(b-6a)+(6a-4b)\right)$$

$$= e^{-t}\left(-at^3+t^2(9a-b)+t(-18a+6b)+(6a-6b)\right)$$

$$= e^{-t}\left(-at^3+t^2(9a-b)+t(6b-18a)+(6a-6b)\right)$$

- $y'''' = -e^{-t}\left(-at^3+t^2(9a-b)+t(6b-18a)+(6a-6b)\right)$

$$+e^{-t}\left(-3at^2+t(18a-2b)+(-18a+6b)\right)$$

$$= e^{-t}\left(at^3+t^2(-12a+b)+t(36a-8b)+(-24a+12b)\right)$$

$$y^{(4)}-2y^{(2)}+y = e^{-t}\Big(t^3(a-2a+a)+t^2(-12a+b-2b+12a+b)$$

$$+t(36a-8b-12a+8b)+(-24a+12b-4b)\Big)$$

$$= e^{-t}\left(t(24a)+(-24a+8b)\right)$$

$\Rightarrow e^{-t}\left(24at+(-24a+8b)\right) = (4t-8)e^{-t}$

$\Rightarrow 24a = 4 \Rightarrow \underline{a = 1/6}$

$\underline{-24a+8b = -8} \Rightarrow 8b = -8+24a = -8+4 = -4 \Rightarrow \underline{b = -\frac{1}{2}}$

<u>Řešení:</u> $t^2\left(\frac{1}{6}t-\frac{1}{2}\right)e^{-t} + \alpha_1 e^t + \alpha_2 te^t + \alpha_3 e^{-t} + \alpha_4 te^{-t}, \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in R$

Bodování:

- hom. rovnice ... 2 body
- forma y_p ... 2 body
- y', y'', y''', y'''' ... 2+2+2+2 body
- dosazení ... 2 body
- závěr ... 2 body

(5) Ať $|f(x)| \le e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$.

Pokud existuje $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, že $f^{(k)}(0) \neq 0$, ať k je nejmenší takové. Pak $f(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \varphi(x)$, kde $\frac{\varphi(x)}{x^k} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Tedy $\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| = \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \varphi(x) - \varphi(x)\right| \le |f(x)| + |\varphi(x)| \le$

$$\le e^{-1/x^2} + |\varphi(x)|, \quad x \neq 0$$

Tedy $\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \le \frac{|\varphi(x)|}{|x|^k} + \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^k} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, proto nemůže být

$f^{(k)}(0) \neq 0$.

[$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^k} \overset{x\neq 0,\ |x|\le 1}{\le} \frac{e^{-1/x^2}}{(x^2)^k}$, $t^k e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, tedy stačí použít větu o limitě složené fce, kde $t = \frac{1}{x^2}$]

Bodování: 12 bodů