

Matematická analýza 1

(velmi předběžná verze)

24. února 2022

L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený

Obsah

Kapitola 1. Logika, množiny a základní číselné obory	1
1.1. Logika	1
1.2. Základní metody důkazů	10
1.3. Množiny	15
1.4. Relace uspořádání a zobrazení	17
1.5. Množina reálných čísel	23
1.6. Konečné a spočetné množiny	32
1.7. Vlastnosti elementárních funkcí	41
1.8. Teoretické a početní příklady	48
Kapitola 2. Limita posloupnosti	61
2.1. Úvod	61
2.2. Vlastní limita posloupnosti	64
2.3. Nevlastní limita posloupnosti	79
2.4. Hlubší věty o limitách	89
2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti	99
2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti	108
Kapitola 3. Číselné řady	127
3.1. Základní pojmy	127
3.2. Řady s nezápornými členy	131
3.3. Řady s obecnými členy	138
3.4. Absolutní konvergence číselných řad	143
3.5. Přerovnání řad	148
3.6. Součin řad	156
3.7. Zobecněné řady	159
3.8. Teoretické příklady k číselným řadám	173
3.9. Početní příklady k číselným řadám	189
Kapitola 4. Limita a spojitost funkce	203
4.1. Definice a základní vlastnosti	203
4.2. Věty o limitách	209
4.3. Funkce spojitě na intervalu	217
4.4. Teoretické příklady k limitě funkce	221

4.5. Početní příklady k limitě funkce	232
Kapitola 5. Derivace a elementární funkce	243
5.1. Základní vlastnosti derivace	243
5.2. Věty o střední hodnotě	254
5.3. l'Hospitalovo pravidlo	259
5.4. Monotónní a konvexní funkce	266
5.5. Teoretické příklady k derivaci funkce	276
5.6. Početní příklady k derivaci funkce	293
Kapitola 6. Elementární funkce	349
6.1. Exponenciální funkce a logaritmus	349
6.2. Goniometrické funkce	354
6.3. Cyklometrické funkce	362
Kapitola 7. Taylorův polynom	367
7.1. Základní vlastnosti	367
7.2. Symbol malé o	373
7.3. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí	377
7.4. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu	384
7.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu	389
Kapitola 8. Mocninné řady	399
8.1. Základní vlastnosti	399
8.2. Derivace mocninné řady	401
8.3. Abelova věta	406
8.4. Teoretické příklady na mocninné řady	409
8.5. Početní příklady na mocninné řady	411
Kapitola 9. Integrál	419
9.1. Primitivní funkce	419
9.2. Riemannův integrál	447
9.3. Newtonův integrál	465
9.4. Konvergence Newtonova integrálu	472
9.5. Aplikace určitého integrálu	481
9.6. Teoretické příklady na integrál	486
9.7. Početní příklady na integrál	501
Kapitola 10. Metrické prostory	533
10.1. Základní pojmy	533
10.2. Konvergence v metrických prostorech	544
10.3. Topologické pojmy v metrických prostorech	546
10.4. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory	560
10.5. Součin metrických prostorů	568
10.6. Kompaktní prostory	569
10.7. Úplné prostory	578

10.8.	Separabilní prostory	597
10.9.	Souvislé prostory	601
10.10.	Teoretické příklady k metrickým prostorům	608
Kapitola 11.	Funkce více proměnných	633
11.1.	Parciální derivace a totální diferenciál	633
11.2.	Derivace vektorových funkcí	645
11.3.	Derivace vyšších řádů	653
11.4.	Věty o implicitně zadaných funkcích	665
11.5.	Lokální extrémy funkce více proměnných	672
11.6.	Regulární zobrazení	675
11.7.	Teoretické příklady	677
11.8.	Početní příklady k funkcím více proměnných	681
11.9.	Početní příklady k metrickým prostorům	720
Kapitola 12.	Stejněměrná konvergence posloupností a řad funkcí	723
12.1.	Stejněměrná konvergence posloupností funkcí	723
12.2.	Weierstrassova věta	731
12.3.	Stejněměrná konvergence řad funkcí	735
12.4.	Teoretické příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí	741
12.5.	Početní příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí	748
Kapitola 13.	Diferenciální rovnice	765
13.1.	Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými	765
13.2.	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	771
13.3.	Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty	772
13.4.	Soustavy diferenciálních rovnic	780
13.5.	Soustavy lineárních diferenciálních rovnic	792
13.6.	Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty	795
13.7.	Početní příklady na diferenciální rovnice	799
Literatura		819

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. Logika

1.1.1. Logika je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti *vyvození* závěru z předpokladů. V tomto oddílu se budeme zabývat logikou výrokovou a predikátovou.

1.1.2. Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé (platí), nebo není pravdivé (neplatí). Pokud výrok platí, říkáme, že má **pravdivostní hodnotu 1**, pokud neplatí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0. Pouze některé správně utvořené gramatické věty jsou výroky. Věty „Číslo 4 je sudé.“ a „Praha je hlavní město Kanady.“ jsou výroky, naproti tomu „Ahoj!“ nebo „Kéž by už byl konec.“ nikoli. Tvrzení „Číslo π je iracionální.“ je výrok, i když zatím není známo, zda pravdivý či nepravdivý. Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací. Se základními logickými operacemi se nyní seznámíme.

1.1.3. Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A .“ K vyjádření negace výroku A můžeme také použít obrat „Neplatí A .“, případně změnit příslušné sloveso ve výroku pomocí předpony „ne-“. Negaci výroku A značíme $\neg A$. Je-li výrok A pravdivý, pak je výrok $\neg A$ nepravdivý. Je-li výrok A nepravdivý, pak je výrok $\neg A$ pravdivý.

1.1.4. Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B .“ Dále používáme také obraty „Platí A a platí B .“, „Platí A i B .“ Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \& B$. Pokud jsou pravdivé oba výroky A a B , pak je konjunkce $A \wedge B$ pravdivá. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, pak je konjunkce $A \wedge B$ nepravdivá.

1.1.5. Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B .“ Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B pravdivý, pak je disjunkce $A \vee B$ pravdivá. Pokud jsou oba výroky A a B nepravdivé, pak je disjunkce $A \vee B$ nepravdivá. Poznamenejme, že disjunkce není vylučující, to znamená, že je pravdivá i v případě, kdy platí oba výroky A a B zároveň. Takto používáme spojku „nebo“ v matematice na rozdíl od přirozeného jazyka, kde může mít i význam vylučovací.

1.1.6. Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A , potom platí (výrok) B .“ Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Pokud A neplatí nebo oba výroky A i B platí, pak jde o pravdivý výrok. Pokud A platí a B neplatí, pak jde o výrok nepravdivý. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Pro vyjádření implikace používáme také následující obraty.

- Jestliže platí výrok A , pak platí výrok B .
- Výrok A implikuje výrok B .
- Z výroku A plyne výrok B .
- Předpokládejme, že platí výrok A , potom platí výrok B .
- Nechtě platí výrok A . Potom platí výrok B .
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B .
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A .

Je-li předpoklad A nepravdivý, pak implikace $A \Rightarrow B$ platí vždy bez ohledu na platnost závěru B . Jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoliv jiný výrok. Tato skutečnost může někdy působit potíže, které vyplývají z rozdílného používání obratu „Jestliže platí A , pak platí B .“ v logice a v přirozeném jazyce. V běžné řeči používáme tento obrat zpravidla tehdy, existuje-li nějaká věcná souvislost mezi předpokladem A a závěrem B , zatímco v logice používáme tento obrat i ke spojení výroků, kde taková souvislost nemusí existovat, například „Jestliže je medvěd ryba, pak jsou Athény v Egyptě.“ Pravdivost takového výroku v logice závisí pouze na pravdivostních hodnotách předpokladu a závěru. Ačkoliv pravdivost takových výroků může působit nezvykle, je formálně logické pojetí implikace v matematice velmi užitečné. Podrobnější vysvětlení lze nalézt například v [21, II.8].

1.1.7. Ekvivalenci výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B .“ Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Pokud A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ pravdivý výrok. Pokud nemají A a B stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ nepravdivý výrok. Ekvivalenci vyjadřujeme také pomocí následujících obrátů.

- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .
- Výrok A je ekvivalentní výroku B .
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B .

1.1.8. Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B .

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
		1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1

1.1.9. Pro zjednodušení zápisu bude mít mezi logickými operacemi negace přednost před ostatními operacemi. Například zápis $\neg A \Rightarrow B$ znamená $(\neg A) \Rightarrow B$.

1.1.10. Věta (vlastnosti negace, konjunkce a disjunkce). Necht A , B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A , B , C .

- (a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- (b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
- (c) $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
- (d) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
- (e) $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$
- (f) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
- (g) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že výrok A je nepravdivý. Potom je výrok $\neg A$ pravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je nepravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ pravdivý.

Nyní předpokládejme, že výrok A je pravdivý. Potom je výrok $\neg A$ nepravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je pravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ opět pravdivý. Tím je důkaz proveden. Předchozí úvahu lze přehledněji zapsat pomocí následující tabulky.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
0	1	0	1
1	0	1	1

(b) Každý z výroků A a B může být pravdivý nebo nepravdivý. Použijeme-li stejný postup jako v předchozím případě, je třeba projít celkem čtyři případy. Tyto případy spolu s pravdivostními hodnotami příslušných výroků jsou zachyceny v následující tabulce.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Poslední sloupec pravdivostních hodnot obsahuje pouze pravdivostní hodnotu 1, takže uvažovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

(c) Podobně jako v předchozím případě sestavíme příslušnou tabulku. Zde je již celkem osm možností pravdivostních hodnot pro trojici výroků A , B a C .

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce pravdivostních hodnot jsou shodné, takže dokazovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

Případy (d)–(g) lze odvodit zcela obdobně a příslušné tabulky zde již uvádět nebudeme. ■

1.1.11. Tvrzení (b) a (c) Věty 1.1.10 ukazují, že pokud chceme postupně spojit výroky A_1, \dots, A_n pomocí konjunkce, pak nezáleží na pořadí, v jakém uvažované výroky spojíme. Například výroky

$$A_1 \wedge ((A_2 \wedge A_3) \wedge A_4), \quad ((A_4 \wedge A_3) \wedge A_1) \wedge A_2$$

jsou ekvivalentní. V takových případech pak používáme jednodušší zápis $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$. Tvrzení (d) a (e) Věty 1.1.10 umožňují zavedení obdobného zápisu $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ pro disjunci. V případě konjunkce dokonce někdy vynecháváme symbol \wedge a výroky pouze oddělujeme čárkami. Například výrok „Platí výroky A_1, A_2, A_3 .“ znamená „Platí výrok $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$.“

1.1.12. Věta (negace konjunkce, disjunktce, implikace a ekvivalence). Necht A a B jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A a B .

- (a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- (d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Důkaz. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažme například platnost (d). Pravdivost výroků (a)–(c) lze dokázat obdobně.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow \neg B$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Poslední dva sloupce jsou shodné, a tedy výrok $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$ je vždy pravdivý. ■

1.1.13. Věta (vztah implikace a ekvivalence). Necht' A a B jsou výroky. Potom jsou výroky $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekvivalentní, tj. výrok

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \quad (1.1)$$

je vždy pravdivý bez ohledu na pravdivost výroků A a B .

Důkaz. Opět použijeme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce jsou shodné, a výrok (1.1) je tedy vždy pravdivý. ■

1.1.14. Věta. Necht' A , B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A , B , C .

- (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- (c) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$

Důkaz. Tvrzení plynou z následujících tabulek pravdivostních hodnot.

(a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(b)

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

(c)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Sloupec pravdivostních hodnot odpovídající výroku $(A \vee B) \Rightarrow C$ je shodný s posledním sloupcem, a proto je výrok v bodě (c) vždy pravdivý. ■

1.1.15. Tvrzení „Číslo x je liché.“, kde x je proměnná, je gramatickou větou, nicméně není výrokem, protože jej nelze potvrdit ani vyvrátit. Z uvedeného tvrzení se stane výrok, pokud proměnnou x nahradíme konkrétním číslem, například „Číslo 7 je liché.“ Právě uvedený příklad motivuje následující definici.

1.1.16. Definice. **Výroková forma** $V(x_1, \dots, x_n)$ je výraz, z něhož vznikne výrok, když za proměnné x_1, \dots, x_n dosadíme po řadě prvky z daných množin M_1, M_2, \dots, M_n . Takovou výrokovou formu s n proměnnými a příslušnými množinami M_1, M_2, \dots, M_n značíme

$$V(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n.$$

1.1.17. Pojem množiny v předchozí definici používáme v intuitivním smyslu. Pro naše úvahy nám zatím postačí toto (ne zcela přesné) vymezení: *Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku.* Je-li a prvkem množiny A , pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A , píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B , potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Zpřesňující výklad je uveden v Oddílu 1.3 a Dodatku ??.

1.1.18. Necht výroková forma V má tvar „ x je hlavní město České republiky“, kde za x dosazujeme prvky z množiny všech českých měst. Pak $V(\text{Praha})$ je pravdivý výrok, ale výrok $V(\text{Plzeň})$ neplatí.

1.1.19. Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. V ?? je predikátem „být hlavním městem České republiky“. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace. Pojmem kvantifikace se nyní budeme zabývat.

1.1.20. Definice. Necht $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma a $P \subset M$.

(a) Výrok „Pro každé $x \in P$ platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x \in P : V(x).$$

Symbol \forall nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje $x \in P$ takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x \in P : V(x).$$

Symbol \exists nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

(c) Výrok „Existuje právě jedno $x \in P$ takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists!x \in P : V(x).$$

1.1.21. Poznámka. Z typografického hlediska vznikly symboly \forall a \exists otočením písmen A a E. Písmeno A vychází z německého slova *allgemein*, a písmeno E patrně z francouzského slova *exister*.

1.1.22 (kvantifikace přes prázdnou množinu). Necht $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Jestliže P je prázdná množina, potom výrok

$$\forall x \in P : V(x)$$

považujeme za pravdivý. Na druhé straně výrok

$$\exists x \in P : V(x)$$

je zřejmě nepravdivý.

1.1.23. Pokud má výroková forma více proměnných, můžeme z ní pomocí kvantifikátorů vytvořit nové výrokové formy s menším počtem proměnných nebo dokonce výroky. Mějme výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$. Nyní můžeme vytvořit nové výrokové formy s jednou proměnnou například takto:

$$\begin{array}{ll} \forall x \in M_1 : V(x, y), & \exists x \in M_1 : V(x, y), \\ \forall y \in M_2 : V(x, y), & \exists y \in M_2 : V(x, y). \end{array}$$

V prvním řádku jde o výrokové formy s proměnnou y a ve druhém s proměnnou x . Z těchto forem lze vytvořit výroky použitím dalšího kvantifikátoru, například

$$\forall x \in M_1 : (\forall y \in M_2 : V(x, y)), \quad \exists y \in M_2 : (\exists x \in M_1 : V(x, y)).$$

Výroky uvedeného typu zapisujeme zpravidla jednodušeji následujícím způsobem:

$$\forall x \in M_1 \forall y \in M_2 : V(x, y), \quad \exists y \in M_2 \exists x \in M_1 : V(x, y).$$

Obdobně můžeme pomocí kvantifikátorů vytvářet výrokové formy a výroky z výrokové formy s více než dvěma proměnnými.

1.1.24 (intuitivní pojetí matematické logiky). V našem textu se přidržíme intuitivního významu kvantifikátorů, tj. využijeme toho, jak v běžné řeči rozumíme obratům „pro každé x “ a „existuje x “. Nebudeme tedy usilovat o čistě formální pojetí matematické logiky, neboť takový přístup by pro svou náročnost nebyl přiměřený našemu textu. Proto některé vlastnosti kvantifikátorů z tohoto oddílu nebudeme dokazovat, nicméně by tyto vlastnosti měly být intuitivně zřejmé. V knize [19] je možné se seznámit s precizní výstavbou matematické logiky a jejími hlubokými výsledky. Kniha však předpokládá obeznámenost s vyšší matematikou.

1.1.25 (zúžení výrokové formy). Uvedme nejprve dvě následující vlastnosti. Necht $V(x)$, $x \in M_1$, je výroková forma a $M_2 \subset M_1$. Potom platí:

- (a) $(\forall x \in M_1 : V(x)) \Rightarrow (\forall x \in M_2 : V(x))$,
- (b) $(\exists x \in M_2 : V(x)) \Rightarrow (\exists x \in M_1 : V(x))$.

Výrok (a) říká, že pokud výrok $V(x)$ platí pro každý prvek x množiny M_1 , pak platí i pro každý prvek x z množiny M_2 . Výrok (b) tvrdí, že pokud v podmnožině M_2 existuje prvek x takový, že $V(x)$ platí, pak takový prvek nalezneme i v množině M_1 .

1.1.26 (pořadí kvantifikátorů). Uvedme dále tři základní vlastnosti týkající se pořadí kvantifikátorů, které budeme často používat. Necht' $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$ je výroková forma. Potom platí:

- $(\forall x \in M_1 \forall y \in M_2: V(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in M_2 \forall x \in M_1: V(x, y))$,
- $(\exists x \in M_1 \exists y \in M_2: V(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in M_2 \exists x \in M_1: V(x, y))$,
- $(\exists x \in M_1 \forall y \in M_2: V(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in M_2 \exists x \in M_1: V(x, y))$.

První dvě vlastnosti říkají, že pořadí kvantifikátorů *stejněho typu* lze zaměňovat, aniž by se změnila pravdivostní hodnota výroku. V poslední ze tří výše uvedených formulí je však pouze implikace, nikoli ekvivalence. Pořadí obecného kvantifikátoru a existenčního kvantifikátoru totiž obecně zaměnit nelze, jak ukazuje následující příklad.

Necht' $A(m, d)$, $m \in M$, $d \in D$, značí výrokovou formu

„Muž m je otcem dítěte d .“, $m \in M$, $d \in D$,

kde M je množina všech mužů a D je množina všech dětí. Výroky

$$\forall d \in D \exists m \in M: A(m, d), \quad \exists m \in M \forall d \in D: A(m, d)$$

se liší pouze pořadím kvantifikátorů. První výrok říká, že každé dítě má svého otce. Druhý výrok tvrdí, že existuje muž, který je otcem všech dětí. Pravdivostní hodnoty těchto výroků se tedy liší.

1.1.27. Označení. Necht' $V(x, y)$ je výroková forma, kde za proměnné x a y bereme prvky množiny A . V takovém případě vzhledem k záměnnosti kvantifikátorů stejného typu používáme často místo zápisu

$$\forall x \in A \forall y \in A: V(x, y)$$

zápis

$$\forall x, y \in A: V(x, y).$$

Podobně místo

$$\exists x \in A \exists y \in A: V(x, y)$$

píšeme zkráceně

$$\exists x, y \in A: V(x, y).$$

Tuto konvenci budeme zřejmým způsobem používat i ve formulích, které obsahují více než dva kvantifikátory.

1.1.28. Označení. Necht' V a P jsou výrokové formy s proměnnou $x \in M$. Zápis

$$\forall x \in M, P(x): V(x), \tag{1.2}$$

označuje výrok

$$\forall x \in M: (P(x) \Rightarrow V(x)).$$

Výrok (1.2) čteme: „Pro každé x z M splňující P platí $V(x)$.“ Zápís

$$\exists x \in M, P(x): V(x) \quad (1.3)$$

označuje výrok

$$\exists x \in M: (P(x) \wedge V(x)).$$

Výrok (1.3) čteme: „Existuje x z M splňující P , pro které platí $V(x)$.“ Obdobný zápis používáme i v případě, že V je výroková forma o více než jedné proměnné. Výše uvedená úmluva zjednodušuje a zpřehledňuje zápis formulí.

1.1.29 (negace výroků s kvantifikátory). Nechtě V a P jsou výrokové formy proměnné $x \in M$. Negaci výroku

$$\forall x \in M: V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M: \neg V(x),$$

přičemž $\neg V$ značí výrokovou formu, která po dosazení za proměnnou x určuje výrok $\neg(V(x))$. Podobně negaci výroku

$$\exists x \in M: V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\forall x \in M: \neg V(x).$$

Negovat výrok

$$\forall x \in M, P(x): V(x),$$

znamená negovat výrok

$$\forall x \in M: (P(x) \Rightarrow V(x)).$$

Po provedení negace dostaneme

$$\exists x \in M: \neg(P(x) \Rightarrow V(x)),$$

takže podle Věty 1.1.12(c)

$$\exists x \in M: (P(x) \wedge \neg V(x)).$$

Poslední formuli lze přepsat ve tvaru

$$\exists x \in M, P(x): \neg V(x).$$

Podobně lze odvodit, že negace výroku

$$\exists x \in M, P(x): V(x)$$

má tvar

$$\forall x \in M, P(x): \neg V(x).$$

Pokud negujeme výrok, který obsahuje více kvantifikátorů, postupujeme tak, že ve formuli zaměníme obecné kvantifikátory za existenční, existenční za obecné a negujeme výrokovou formu. Správnost postupu vyplývá z předchozího výkladu.

1.1.30. Negaci výroku

$$\forall x \in M_1 \exists y \in M_2 \forall z \in M_3: V(x, y, z)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M_1 \forall y \in M_2 \exists z \in M_3: \neg V(x, y, z).$$

S výrokovými formami a kvantifikátory se budeme v tomto textu setkávat neustále. Úlohy k procvičení jsou uvedeny v Oddílu 1.8.

1.2. Základní metody důkazů

1.2.1. Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \dots$, budeme značit \mathbb{N} , množinu všech **celých** čísel \mathbb{Z} , množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit \mathbb{Q} a množinu všech **reálných** čísel \mathbb{R} . **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální. Čísla z uvedených množin můžeme porovnávat mezi sebou podle velikosti, sčítat, odečítat, násobit a dělit. Pro rovnost reálných čísel budeme používat standardní symbol $=$ a pro nerovnosti symboly $\leq, \geq, <, >$. Pro uvedené operace pak symboly $+$ (plus), $-$ (minus), \cdot (krát) a $-$ (zlomková čára). Budeme předpokládat znalost základních vlastností těchto množin na úrovni středoškolské matematiky, tj. zejména znalost vlastností početních operací. Také použijeme tvrzení, že množina přirozených čísel je rovna množině všech celých čísel, která jsou větší než 0, a číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq 1$. O množinách $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a \mathbb{R} zde hovoříme zejména proto, abychom je mohli používat v ilustračních příkladech tohoto oddílu. Více o nich řekneme v Oddílu 1.5 a jejich přesnému zavedení se budeme věnovat v Dodatku ??.

1.2.2. V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Všechna další tvrzení jsou potom v **důkazech** odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**.¹ **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomami, definicemi, větami, lemmaty a důkazy. Podrobnější výklad o axiomech i samotném jazyce matematiky je uveden v Dodatku ??.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A , pak platí závěr B . Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,

¹Slovo lemma je středního rodu.

- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,
- důkaz matematickou indukcí.

Tyto postupy nyní stručně vysvětlíme a výklad doplníme příklady. Uveďme ještě, že u složitějších důkazů je často nutné použít i několika z výše uvedených postupů a vzájemně je kombinovat.

1.2.3 (přímý důkaz). Mějme matematickou větu ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ pro jisté výroky A a B . Při přímém důkazu postupujeme takto: Předpokládáme, že výrok A platí. Odtud odvodíme platnost jistého výroku C_1 , pomocí C_1 dokážeme pravdivost jistého výroku C_2 , z něho pak dokážeme C_3 a tak dále, až z předpokladu platnosti výroku C_n dokážeme výrok B . Odvodili jsme tedy následující řetěz implikací

$$A \Rightarrow C_1, C_1 \Rightarrow C_2, C_2 \Rightarrow C_3, \dots, C_{n-1} \Rightarrow C_n, C_n \Rightarrow B,$$

ze kterého již plyne platnost implikace $A \Rightarrow B$. Chceme-li dokázat nějakou větu přímým důkazem, je na nás, abychom našli vhodné střední členy C_1, \dots, C_n , které nám umožní z předpokladu odvodit závěr. Jak je hledat v konkrétním případě, na to bohužel žádný návod či dokonce algoritmus neexistuje. Matematika je tvůrčí činnost a bez určité míry důvtipu žádnou novou větu dokázat nelze.

1.2.4 (nepřímý důkaz). Tento typ důkazu je založen na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ (vizte Větu 1.1.14(a)). Platí-li druhý výrok, pak platí i první. Stačí tedy nalézt jakýkoli důkaz druhého výroku.

1.2.5 (důkaz sporem). Tato metoda je založena na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg(A \wedge \neg B)$ (vizte Větu 1.1.12(c)). Při tomto způsobu dokazování předpokládáme platnost výroku $A \wedge \neg B$. Pokud se nám z něho podaří odvodit výrok C , který je neplatný, pak nemůže platit ani výrok $A \wedge \neg B$ (z platného výroku nelze odvodit výrok neplatný). Platí tedy $\neg(A \wedge \neg B)$, neboli $A \Rightarrow B$.

1.2.6 (důkaz rozborem případů). Má-li dokazované tvrzení tvar $(A \vee B) \Rightarrow C$, pak podle Věty 1.1.14(c) stačí dokázat tvrzení $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. V tomto důkazu tedy nejprve dokazujeme závěr C za předpokladu, že platí A . Pak dokazujeme C za předpokladu, že platí B . Při aplikaci této metody je tedy třeba zapsat předpoklad věty ve tvaru $A \vee B$ tak, abychom pak mohli snáze odvodit $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. Ani zde není k dispozici žádný algoritmus, jak taková A a B nalézt, a je třeba použít vlastního důvtipu.

1.2.7 (důkaz matematickou indukcí). Metodu důkazu matematickou indukcí lze použít k důkazu výroku tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n), \tag{1.4}$$

kde $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. V prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(1)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: (V(n) \Rightarrow V(n+1)),$$

neboli předpokládáme platnost $V(n)$ (tzv. **indukční předpoklad**) a odvodíme platnost $V(n+1)$. Z těchto dvou kroků pak vyplývá platnost výroku (1.4).

V případě, že chceme dokázat výrok tvaru

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: V(n),$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $V(n)$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$, je výroková forma, pak v prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(n_0)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: (V(n) \Rightarrow V(n+1)).$$

Korektnost této důkazové metody podstatně souvisí s konstrukcemi množiny přirozených čísel a množiny celých čísel, kterým se budeme věnovat v Dodatku ??.

1.2.8 (důkaz úplnou matematickou indukcí). Necht $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \tag{1.5}$$

je někdy možné dokázat pomocí úplné matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

- (a) platí $V(1)$,
- (b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\forall j \in \mathbb{N}, j \leq n: V(j)) \Rightarrow V(n+1).$$

Krok (b) úplné matematické indukce se liší od druhého kroku matematické indukce popsané v paragrafu 1.2.7 v tom, že místo abychom předpokládali platnost pouze $V(n)$, předpokládáme, že platí výroky $V(1), V(2), \dots, V(n)$.

Předpokládejme, že platí (a) a (b). Ukážeme, že pak platí (1.5). Definujme výrokovou formu $W(n)$, $n \in \mathbb{N}$, následujícím způsobem: Výrok $W(n)$ říká, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, platí $V(j)$. Matematickou indukcí dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}: W(n). \tag{1.6}$$

Výrok $W(1)$ platí podle (a). Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $W(n)$. Potom podle (b) platí $V(n+1)$. Platí-li $W(n)$ a $V(n+1)$, pak platí $W(n+1)$. Podle principu matematické indukce platí (1.6). Z výroku (1.6) pak okamžitě plyne (1.5).

Další varianty důkazu matematickou indukcí jsou uvedeny v příkladové části této kapitoly (Oddíl 1.8).

Použití výše uvedených důkazových metod přiblížíme v následujících příkladech.

1.2.9. Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. ♣

1.2.10. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.

Řešení. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položíme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k .

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $2(l - k) = 1$, a tedy $l - k = \frac{1}{2}$. Číslo $l - k$ je celé, na rozdíl od čísla $\frac{1}{2}$, což je spor. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. ♣

1.2.11. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$ je liché. Dokažte, že potom p^n je liché číslo.

Řešení. Necht $p \in \mathbb{N}$ je liché. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je číslo $p^1 = p$ liché podle předpokladu. Předpokládejme platnost tvrzení pro přirozené číslo n , tj. předpokládejme, že číslo p^n je liché. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $p^n = 2k - 1$. Existuje také $l \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 2l - 1$. Potom platí

$$p^{n+1} = p^n \cdot p = (2k - 1) \cdot (2l - 1) = 2(2kl - k - l + 1) - 1.$$

Dále platí $2kl - k - l + 1 = k(l - 1) + l(k - 1) + 1 \geq 1$, a tedy $2kl - k - l + 1 \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že číslo p^{n+1} je liché. ♣

1.2.12. Připomeňme, že číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme **dělitelem** čísla $n \in \mathbb{Z}$, značíme $d \mid n$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě 1 i n dělitelem n . Řekneme, že $n \in \mathbb{N}$ je **prvočíslo**, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelé jsou 1 a n . Například čísla 2, 3, 5, 7, 11 jsou prvočísla.

1.2.13. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje právě jedna dvojice $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2^{k-1}(2l - 1)$.

Řešení. Pomocí úplné matematické indukce nejprve dokážeme existenci příslušných $k, l \in \mathbb{N}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak ukážeme i jednoznačnost k a l .

Pro $n = 1$ položíme $k = 1$ a $l = 1$ a máme $n = 1 = 2^{1-1}(2 \cdot 1 - 1)$. Předpokládejme, že každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1}(2l - 1)$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i pro číslo $n + 1$ lze nalézt příslušná $k, l \in \mathbb{N}$. Pokud je $n + 1$ číslo liché, pak existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2l - 1$. Položíme $k = 1$ a tvrzení je dokázáno. Pokud je číslo $n + 1$ sudé, pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2m$. Poněvadž $m \leq n$, existují podle indukčního předpokladu čísla $k', l' \in \mathbb{N}$ taková, že $m = 2^{k'-1}(2l' - 1)$. Potom stačí položit $k = k' + 1$ a $l = l'$.

Zbývá dokázat, že čísla k, l jsou pro dané $n \in \mathbb{N}$ určena jednoznačně. Předpokládejme, že $n = 2^{k-1}(2l - 1) = 2^{k'-1}(2l' - 1)$ pro $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $k' > k$, pak platí $2l - 1 = 2^{k'-k}(2l' - 1)$. Číslo na levé straně rovnosti je liché, zatímco číslo na pravé straně je sudé, což je spor. Podobně vede ke sporu předpoklad $k < k'$. Musí tedy platit $k = k'$. Potom dostáváme $2l - 1 = 2l' - 1$. Odtud již snadno plyne $l = l'$. Tím je důkaz jednoznačnosti proveden. ♣

1.2.14. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li n^2 sudé, potom je i n sudé.

Řešení. Podle Příkladu 1.2.11 platí, že pokud je n liché, pak je i n^2 liché. Odtud plyne tvrzení metodou nepřímého důkazu. ♣

1.2.15. Příklad (Hippasus²). Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$, které je definováno jako kladné řešení rovnice $y^2 = 2$ v oboru reálných čísel, není racionální. Existenci a jednoznačnost takového řešení dokážeme později (vizte 4.3.14).

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Potom existují $p \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Navíc můžeme předpokládat, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Podle Příkladu 1.2.13 lze totiž nalézt čísla k_1, l_1, k_2, l_2 z množiny \mathbb{N} taková, že $p = 2^{k_1-1}(2l_1 - 1)$ a $q = 2^{k_2-1}(2l_2 - 1)$. Pak stačí místo dvojice p a q uvažovat dvojici $2l_1 - 1$ a $2^{k_2-k_1}(2l_2 - 1)$, pokud $k_2 \geq k_1$, nebo $2^{k_1-k_2}(2l_1 - 1)$ a $2l_2 - 1$, pokud $k_2 < k_1$.

Z rovnosti $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ plyne, že $p^2 = 2q^2$, a tedy číslo p^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 dostáváme, že i p je sudé, a tedy $p^2 = 4k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Z výchozí rovnosti $p^2 = 2q^2$ dostáváme, že q^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 je číslo q sudé. Odtud plyne, že p a q mají společného dělitele 2. To je ovšem spor s předpokladem, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Číslo $\sqrt{2}$ tedy není racionální. ♣

1.2.16. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom je číslo $n(n + 1)$ sudé.

Řešení. Provedeme důkaz rozбором případů. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že n je sudé, nebo n je liché. Pokud je n sudé, pak je i číslo $n(n + 1)$ sudé. Pokud je číslo n liché, pak je číslo $n + 1$ sudé, a proto je i číslo $n(n + 1)$ sudé. Tím je důkaz proveden. ♣

1.2.17. Při důkazu výroku

$$\forall x \in M : V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M , a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x . Tím je pak důkaz proveden.

1.2.18 (konstruktivní a nekonstruktivní důkaz). Při důkazu výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

1.2.19. Příklad. Ukažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

²Hippasus (5. stol. př. n. l.)

Řešení (konstruktivní důkaz). Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$, kde \log_2 označuje logaritmus o základu 2. Přesnou definici výrazu a^b a logaritmu uvedeme v Kapitole 6. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2} \log_2(3^2)} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální podle Příkladu 1.2.15. Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom $9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}}$, a tedy $9^q = 2^p$. Číslo 2^p je sudé a podle Příkladu 1.2.11 je číslo 9^q liché, což je spor. ♣

Řešení (nekonstruktivní důkaz). Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální, přitom ale číslo

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

je racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2} \quad \text{nebo} \quad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$$

splňuje zadání úlohy. Výše uvedený postup však neříká, zda je řešením první nebo druhá dvojice čísel.

Poznamenejme ještě, že lze ukázat, že číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální. Důkaz je však velmi obtížný ([8, 18]). ♣

1.2.20 (důkazy nerovností). Máme-li dokázat nerovnost $A \leq B$ mezi reálnými čísly A a B , často postupujeme tak, že nalezneme reálné číslo C splňující $A \leq C$ a $C \leq B$. Odtud pak již plyne nerovnost $A \leq B$. Při hledání čísla C jde o to, aby důkazy nerovností $A \leq C$ a $C \leq B$ byly snazší než důkaz nerovnosti $A \leq B$. Číslu C někdy říkáme *horní odhad* čísla A a také *dolní odhad* čísla B . Samotnou nerovnost $A \leq C$ nebo $C \leq B$ také někdy nazýváme *odhadem*.

1.3. Množiny

1.3.1. Nebudeme se zde zabývat otázkou, co je obecně množina. Tento problém, jenž se nachází na pomezí matematiky a filosofie, je totiž velmi nesnadný a překračuje rámec tohoto textu. Zopakujme zatím pouze formulaci z paragrafu ??, která říká, že množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku. Doplňující informace jsou uvedeny v Dodatku ??. Pro systematický výklad teorie množin doporučujeme knihu [2].

Nyní zopakujeme pojmy z paragrafu ?? a přidáme několik dalších.

1.3.2. Množina je určena svými prvky. Skutečnost, že prvek a patří do množiny A , značíme $a \in A$, a skutečnost, že a do A nepatří, zapíšeme jako $a \notin A$.

Množinu definujeme výčtem prvků, například píšeme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M; V(x)\}$, kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$ je výroková forma. Příkladem je zápis $\{x \in \mathbb{N}; x < 6\}$.

Prázdnou množinou nazýváme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označujeme ji symbolem \emptyset . Množinu, která není prázdná, nazýváme **neprázdnou**.

1.3.3. Řekneme, že množina A je **částí** množiny B nebo množina A je **podmnožinou** množiny B , jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tuto skutečnost značíme $A \subset B$ (někdy také píšeme $B \supset A$) a tomuto vztahu mezi množinami říkáme **inkluze**. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Množiny A a B jsou si **rovný** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky, neboli platí současně $A \subset B$ a $B \subset A$. Není těžké odvodit, že pro libovolné množiny A, B, C platí

- $A = A$,
- jestliže $A = B$, potom $B = A$,
- jestliže $A = B$ a $B = C$, potom $A = C$.

Pokud si množiny A a B nejsou rovný, píšeme $A \neq B$. Řekneme, že množina A je **vlastní částí** množiny B nebo A je **vlastní podmnožinou** množiny B , jestliže $A \subset B$ a $A \neq B$.

Nechť X je množina. Množinu všech podmnožin X značíme $\mathcal{P}(X)$ a nazýváme ji **potenční množinou** množiny X . Z jazykových důvodů budeme často používat slovní spojení „systém (pod)množin“ místo „množina (pod)množin“.

1.3.4. Označení. (a) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a A_1, \dots, A_n jsou množiny. Potom zápis $A_1 \subset \dots \subset A_n$ znamená, že platí inkluze $A_1 \subset A_2, A_2 \subset A_3, \dots, A_{n-1} \subset A_n$. Obdobné značení používáme i pro symbol \supset .

(b) Nechť X je množina a $n \in \mathbb{N}$. Místo zápisu $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$ budeme často používat stručnější zápis $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.

Nyní zavedeme operace, které ze dvou (nebo více) množin utvoří další množinu.

1.3.5. Sjednocení množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li \mathcal{A} systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

1.3.6. Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li \mathcal{A} neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$. Řekneme, že systém \mathcal{A} je **disjunktní**, jestliže pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ splňující $A \neq B$ platí $A \cap B = \emptyset$.

1.3.7. Necht $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$. Potom $\bigcup \mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ a $\bigcap \mathcal{A} = \{3\}$.

1.3.8. Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B . Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

1.3.9. Necht $m \in \mathbb{N}$ a A_1, \dots, A_m jsou množiny. **Kartézským součinem** $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ nazveme množinu všech uspořádaných m -tic $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Někdy místo symbolu $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ používáme symbol (a_1, a_2, \dots, a_m) . Přesnou definici pojmu uspořádaná n -tice lze nalézt v Dodatku ???. Je-li A množina a $n \in \mathbb{N}$, pak místo $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-krát}}$ píšeme A^n .

1.3.10. Poznámka. V operaci kartézského součinu není obecně možné zaměňovat pořadí množin. Pokud například $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, pak $A \times B = \{[0, 1]\}$, $B \times A = \{[1, 0]\}$, takže $A \times B \neq B \times A$.

1.3.11. Věta (de Morganova³ pravidla). Necht X je množina a \mathcal{A} je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X , ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Necht $x \in X \setminus A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro každou $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. ■

1.4. Relace uspořádání a zobrazení

Relace uspořádání.

³Augustus de Morgan (1806-1871)

1.4.1. Definice. Necht A a B jsou množiny. **Binární relací** R mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Pokud $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b . Píšeme $a R b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **binární relace na** A . Pokud nehrozí nedorozumění, budeme místo slovního spojení „binární relace“ používat slovo „relace“.

Existuje mnoho příkladů matematických objektů, které jsou relacemi. V tuto chvíli pro nás budou důležité dva speciální typy relací, totiž uspořádání a zobrazení. Následující definice nám pomůže zavést první z nich.

1.4.2. Definice. Necht A je množina a R je relace na A . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže platí

$$\forall x \in A: [x, x] \in R,$$

- **symetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in A: [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R,$$

- **tranzitivní**, jestliže platí

$$\forall x, y, z \in A: ([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R,$$

- **antisymetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in A: [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R,$$

- **slabě antisymetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in A: ([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R) \Rightarrow x = y.$$

1.4.3. Definice. Necht A je množina a R je relace na A . Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání takové, že pro každé prvky $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

1.4.4. Právě definovaný pojem uspořádání je velmi abstraktní a používá se pro porovnávání velmi rozmanitých objektů mezi sebou. Uspořádání reálných čísel je jenom jedním z mnoha příkladů uspořádání. Toto uspořádání je navíc lineární. Podobně ostrá nerovnost mezi reálnými čísly je ostrým uspořádáním ve smyslu naší definice.

1.4.5. Necht X je množina. Pak relace

$$R = \{[A, B] \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X); A \subset B\}$$

je uspořádání na $\mathcal{P}(X)$. Pokud má X alespoň dva prvky, pak toto uspořádání není lineární. Jestliže totiž existují $x, y \in X$, $x \neq y$, pak neplatí ani $\{x\} \subset \{y\}$ ani $\{y\} \subset \{x\}$.

1.4.6. Příklad. Na množině \mathbb{N}^2 definujeme lexikografické uspořádání \leq_{lex} následujícím způsobem

$$[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2] \Leftrightarrow (n_1 < m_1 \vee (n_1 = m_1 \wedge n_2 \leq m_2)).$$

Ověřte, že relace \leq_{lex} je opravdu uspořádání.

Řešení. Reflexivita. Pro libovolné $[n_1, n_2] \in \mathbb{N}^2$ platí $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, neboť $n_1 = n_1$ a $n_2 \leq n_2$.

Slabá antisymetrie. Pokud $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a zároveň $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, pak nemůže platit $n_1 < m_1$ ani $m_1 < n_1$. Musí tedy platit $n_1 = m_1$. Pak ovšem platí $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq n_2$, a proto $n_2 = m_2$. Dokázali jsme tedy, že $[n_1, n_2] = [m_1, m_2]$.

Tranzitivita. Necht $[n_1, n_2], [m_1, m_2], [k_1, k_2] \in \mathbb{N}^2$ splňují $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Z prvního vztahu plyne $n_1 \leq m_1$ a z druhého $m_1 \leq k_1$. Dostáváme tedy $n_1 \leq k_1$. Pokud platí dokonce $n_1 < k_1$, pak $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Pokud $n_1 = k_1$, pak platí také $n_1 = m_1$. Musí tedy platit $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq k_2$. Odtud plyne nerovnost $n_2 \leq k_2$. Tím je dokázán vztah $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. ♣

Nyní uvedeme několik základních pojmů, které souvisí s relací uspořádání.

1.4.7. Definice. Necht \leq je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A ,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

1.4.8. Definice. Necht \leq je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M , jestliže platí:

- (a) G je horní závorou množiny M ,
- (b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M , potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M , jestliže platí

- (a) g je dolní závorou množiny M ,
- (b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M , potom $g' \leq g$.

1.4.9. Poznámka. V předchozích dvou definicích jsme použili symbol \leq , který se používá zejména pro označení uspořádání na reálných číslech. Zde jej pro názornost používáme k označení libovolné relace uspořádání.

1.4.10. Necht \leq je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Podle předchozí definice je supremum A její nejmenší horní závorou a infimum je její největší dolní

závorou. Supremum a infimum množiny A nemusí existovat, pokud však existují, jsou určena jednoznačně.

Odvodíme toto pozorování například pro infimum, v případě suprema je možné postupovat obdobně. Necht' g_1 a g_2 jsou infima množiny $A \subset X$ vzhledem k uspořádání \leq na množině X . Potom g_1 i g_2 jsou dolní závory množiny A . Podle vlastnosti (b) z definice infima platí $g_1 \leq g_2$ a také $g_2 \leq g_1$. Ze slabé antisymetrie relace uspořádání pak plyne $g_1 = g_2$.

Pokud supremum množiny A (vzhledem k uspořádání \leq) existuje, značíme jej $\sup A$. Pokud existuje infimum množiny A , značíme jej $\inf A$.

Supremum a infimum budeme používat zejména při studiu podmnožin reálných čísel, pro ilustraci však uvedme následující příklad, který využívá lexikografického uspořádání dvojic přirozených čísel.

1.4.11. Příklad. Necht' \leq_{lex} je lexikografické uspořádání na množině \mathbb{N}^2 (vizte Příklad 1.4.6). Dokažte, že supremum množiny $A = \{[1, n] \in \mathbb{N}^2; n \in \mathbb{N}\}$ je rovno prvku $[2, 1]$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle definice platí $[1, n] \leq_{\text{lex}} [2, 1]$, čímž je ověřena podmínka (a) z definice suprema. Uvažujme prvek $[a, b] \in \mathbb{N}^2$, který je horní závorou množiny A . Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí buď $1 < a$, nebo $1 = a$ a $n \leq b$. Druhá možnost však nemůže platit pro každé n , neboť přirozené číslo $b + 1$ nesplňuje nerovnost $b + 1 \leq b$. Platí tedy $1 < a$, neboli $2 \leq a$. Pak ovšem opět podle definice uspořádání \leq_{lex} dostáváme $[2, 1] \leq_{\text{lex}} [a, b]$. Tím je ověřena i podmínka (b) z definice suprema. ♣

1.4.12. Věta. Necht' \leq je relace uspořádání na množině X , $M \subset X$ je neprázdna množina a necht' existuje infimum a supremum množiny M . Potom platí $\inf M \leq \sup M$.

Důkaz. Množina M je neprázdna, takže můžeme nalézt prvek $a \in M$. Potom platí $\inf M \leq a$, neboť $\inf M$ je dolní závorou M . Dále platí $a \leq \sup M$, neboť $\sup M$ je horní závorou M . Odtud díky tranzitivitě uspořádání dostáváme nerovnost $\inf M \leq \sup M$. ■

K právě zavedeným pojmům suprema a infima se vrátíme v Oddílu 1.5, kde budou uvedeny další ilustrační příklady.

Relace zobrazení.

1.4.13. Definice. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** z množiny A do množiny B , jestliže platí

$$\forall x \in A \forall y_1, y_2 \in B: \left(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2 \right).$$

1.4.14. Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B , pak podle definice pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, pak je tedy určeno jednoznačně a značíme je $F(x)$.

1.4.15. Definice. Necht' F je zobrazení z množiny A do množiny B .

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A; \exists y \in B: F(x) = y\}.$$

- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{H}(F) = \{y \in B; \exists x \in A: F(x) = y\}.$$

- **Grafem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\text{graf}(F) = \{[x, y] \in A \times B; x \in \mathcal{D}(F) \wedge y = F(x)\}.$$

1.4.16. (a) Zobrazení jsme definovali pomocí pojmu relace. Při tomto přístupu tedy ztotožňujeme pojem zobrazení a pojem grafu zobrazení. V matematické analýze však často chápeme zobrazení F z množiny A do množiny B jako *přiřazení*, tj. prvům x z jisté podmnožiny A je přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z množiny B . V takovém případě pak zobrazení a jeho graf chápeme jako dva různé objekty, které si však vzájemně jednoznačně odpovídají.

(b) Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B , pak je F také zobrazení z množiny C do množiny D , pokud $F \subset C \times D$, neboli $\mathcal{D}(F) \subset C$ a $\mathcal{H}(F) \subset D$.

Například zobrazení F , které každému kladnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje reálné číslo $\frac{1}{x}$, je zobrazením z množiny kladných reálných čísel do množiny kladných reálných čísel, ale také zobrazením z \mathbb{R} do \mathbb{R} .

1.4.17. Označení. Necht A a B jsou množiny. Pak symbol $F: A \rightarrow B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B** . Na rozdíl od zobrazení z množiny A do množiny B , kde definiční obor je pouze podmnožinou množiny A , je zobrazení množiny A do množiny B definováno právě ve všech bodech množiny A .

1.4.18. Zobrazení $F: A \rightarrow B$ často definujeme tak, že pro každé $x \in A$ určíme prvek $F(x) \in B$. V takovém případě někdy používáme zápis $x \mapsto F(x)$, $x \in A$. Je třeba si uvědomit, že dva různé předpisy mohou definovat stejné zobrazení. Tak je tomu například u následujících dvou předpisů:

$$x \mapsto (x + 1)^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x \mapsto x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4.19. Definice. Necht $f: A \rightarrow B$ je zobrazení a necht M a P jsou množiny.

- **Obrazem množiny M** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{y \in B; \exists x \in M: x \in \mathcal{D}(f) \wedge f(x) = y\},$$

kterou značíme $f(M)$.

- **Vzorem množiny P** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{x \in A; f(x) \in P\},$$

kterou značíme $f^{-1}(P)$.

1.4.20. Necht X je množina a $A \subset X$. **Charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in A, \\ 0, & \text{pokud } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Pro právě uvedenou funkci platí $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ a $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$. Charakteristická funkce je v řadě situací užitečným nástrojem.

1.4.21. Definice. Řekneme, že zobrazení $f: A \rightarrow B$ je

- **prosté (injektivní)**, jestliže platí

$$\forall x, y \in A: (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y),$$

- „na“ (**surjektivní**), jestliže platí

$$\forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y,$$

- **bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení)**, jestliže je prosté a „na“.

1.4.22. Abychom mohli říci, že nějaké zobrazení je „na“, musí být zadána cílová množina B . Odtud vyplývá, že pojmy surjektivita a bijektivita zobrazení zavedené v Definici 1.4.21 představují vlastnosti zobrazení f a zároveň množiny B .

1.4.23. Necht $f: A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Potom přímo z definic dostáváme, že f je bijekce množiny A na množinu $f(A)$.

1.4.24. Definice. Necht $f: A \rightarrow B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g: C \rightarrow B$ definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C . Zobrazení g značíme $f|_C$.

1.4.25. Definice. Necht f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením (složením zobrazení)** f a g , přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

1.4.26. Definice. Necht $f: A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f .

1.4.27. K zobrazení, které není prosté, nelze definovat inverzní zobrazení. Příkladem je funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

1.4.28 (sjednocení a průnik indexovaného systému). Necht X a I jsou množiny a pro každé $\alpha \in I$ je definována množina $A_\alpha \subset X$. Máme tedy dáno zobrazení $\alpha \mapsto A_\alpha$ množiny I do potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Takové zobrazení nazýváme **indexovaným systémem množin** a značíme ho symbolem $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$. Uvažujme systém $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X); \exists \alpha \in I: A = A_\alpha\}$. Pak množinu $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ označujeme také symbolem $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{A}$. Pokud je navíc I neprázdná množina, pak množinu $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ označujeme $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}$.

Na závěr tohoto oddílu uvedeme definice dvou typů zobrazení, se kterými budeme často pracovat.

1.4.29. Definice. Necht A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme **k -tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel \mathbb{N} do množiny A . Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme **n -tým členem** této posloupnosti.

1.4.30. Posloupnost může být definována také **rekurentně**. Mějme neprázdnou množinu A . Při rekurentním zadání posloupnosti je obvykle explicitně předepsán člen $a_1 \in A$ nebo několik prvních členů $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a je stanoven předpis, podle kterého je možné pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j > n$, určit hodnotu $a_{j+1} \in A$ na základě znalosti hodnoty a_j , případně některých dalších již známých hodnot a_k , kde $k \leq j$. Existence a jednoznačnost takto zadané posloupnosti je ověřena ve Větě ??.

Nejčastější způsob zadání rekurentní posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vypadá následovně. Je dána neprázdná množina A a zobrazení $g: A \rightarrow A$. Prvek $x_1 \in A$ je dán a $x_n = g(x_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Příkladem takové posloupnosti je posloupnost definovaná předpisem $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n$, neboť stačí položit $A = \mathbb{R}$ a $g(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

1.5. Množina reálných čísel

Vlastnost existence suprema.

1.5.1. Číselné obory přirozených, celých, racionálních a reálných čísel mají pro další výklad zásadní význam. Jejich *přesná* konstrukce však není snadná, a proto ji provedeme až v Dodatku ??. V dalším výkladu vystačíme se středoškolskými pojmy, které doplníme o vlastnost existence suprema. V Definicích 1.4.7 a 1.4.8 jsme zavedli pojem horní závory, dolní závory, omezenosti množiny a pojmy suprema a infima pro obecné uspořádání. Nyní tyto pojmy použijeme pro množinu reálných čísel s uvedeným uspořádáním \leq . **Vlastnost existence suprema** reálných čísel lze pak formulovat následovně.

Každá neprázdná shora omezená podmnožina \mathbb{R} má supremum. (1.7)

Množina reálných čísel spolu s jejím uspořádáním a s operacemi sčítání a násobení je zkonstruována tak, že právě uvedenou vlastnost má. Vlastnost suprema je důležitá, neboť některé hlubší věty o reálných číslech bychom bez ní nemohli dokázat.

Vlastnosti početních operací a uspořádání. V tomto textu předpokládáme znalost základních pravidel pro práci s uspořádáním reálných čísel a s operacemi sčítání a násobení. V dalším si však některé výsledky připomeneme a také zavedeme značení, které budeme používat.

1.5.2. Označení. (a) Necht $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\sum_{i=m}^n a_i$ značíme součet všech reálných čísel a_m, \dots, a_n , tedy

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\sum_{i=m}^n a_i = 0.$$

(b) Necht $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\prod_{i=m}^n a_i$ značíme součin všech reálných čísel a_m, \dots, a_n , tedy

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\prod_{i=m}^n a_i = 1.$$

Připomeňme ještě, že pokud $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^n značí součin

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ krát}}.$$

Pokud $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^{-n} značí součin

$$\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} \cdot a^{-1}}_{n \text{ krát}}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme symbol a^0 jako 1. Zde nedefinujeme novou početní operaci, ale pouze užitečnou zkratku, která zjednodušuje zápis některých výrazů. Toto je třeba mít na paměti zejména v případech, kdy $a = 0$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definujeme symbol $n!$, čteme n **faktoriál**, takto: $0! = 1$ a $n! = n \cdot (n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pokud $n \in \mathbb{N}$, pak je číslo $n!$ součinem čísel $1, \dots, n$.

(d) Pro $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$, definujeme **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$, čteme n **nad** k , předpisem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

1.5.3. Přesně vzato jsou definice součtu a součinu konečně mnoha reálných čísel induktivní. Máme-li definován součet (součin) n reálných čísel, můžeme definovat součet (součin) $n + 1$ reálných čísel. Z těchto definic by měly také vycházet důkazy běžných pravidel pro počítání s konečnými součty a součiny, jako je například vzorec

$$\sum_{n=n_1}^{n_3} a_n = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} a_n,$$

kde $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ jsou přirozená čísla a a_{n_1}, \dots, a_{n_3} jsou reálná čísla. Zde však volíme výše uvedený neformální výklad, neboť jeho přesnost je pro náš text dostatečující.

Uvedme následující pozorování, které je užitečné při práci se součty reálných čísel.

1.5.4. Necht $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p},$$

neboť v obou součtech sčítáme reálná čísla a_m, \dots, a_n .

1.5.5. Věta (binomická věta). Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (1.8)$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ a libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a + b)^0 = 1, \\ \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Odtud dostáváme (1.8) pro $n = 0$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a vztah (1.8) platí. Pak díky indukčnímu předpokladu a algebraickou úpravou dostaneme

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n \cdot (a + b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a + b) \\ = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

Podle pozorování v 1.5.4 obdržíme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k,$$

a tedy

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení nyní plyne z následujícího vztahu, který platí pro každé $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n+1-k)k} = \binom{n+1}{k}.
 \end{aligned}$$

■

Následující příklad obsahuje zobecnění známých vztahů $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

1.5.6. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}.$$

Řešení. Vztah odvodíme úpravou pravé strany:

$$\begin{aligned}
 (a-b) \cdot \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} &= \sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^k \\
 &= a^n + \sum_{k=2}^n a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - b^n \\
 &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - b^n \\
 &= a^n - b^n.
 \end{aligned}$$

♣

1.5.7. Příklad. Necht $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom platí

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Řešení. Použijeme Příklad 1.5.6 pro $a = 1$, $b = q$ a na místo čísla n dosadíme $n + 1$. Pak s pomocí 1.5.4 obdržíme

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k.$$

Odtud již snadno plyne dokazovaný vztah, neboť $1 - q \neq 0$, a tedy můžeme obě strany rovnosti vydělit číslem $1 - q$. ♣

Absolutní hodnota reálného čísla.

1.5.8. Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

1.5.9. Není těžké si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

- (a) $|x| \geq 0$,
- (b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (c) $|x| = |-x|$,
- (d) $||x|| = |x|$,
- (e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}: |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$,
- (f) $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometricky můžeme absolutní hodnotu čísla x interpretovat jako vzdálenost bodu x od počátku na reálné ose. Výraz $|x - y|$ pak nazveme **vzdáleností bodu x od bodu y** .

Následující nerovnost budeme při práci s absolutní hodnotou často používat. Její název pochází z jejího zobecnění pro komplexní čísla, které vyjadřuje nerovnost mezi součtem délek dvou stran trojúhelníka a délkou zbývající strany.

1.5.10. Věta (trojúhelníková nerovnost). Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (1.9)$$

Důkaz. Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Z 1.5.9(f) okamžitě vyplývá, že platí $a \leq |a|$ a $b \leq |b|$. Odtud dostáváme $a + b \leq |a| + |b|$. Opět z 1.5.9(f) snadno vyplývá, že platí $|a| \geq -a$ a $|b| \geq -b$. Odtud dostáváme $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Podle definice absolutní hodnoty platí $|a + b| = a + b$ nebo $|a + b| = -(a + b)$. V obou případech tedy dostáváme $|a + b| \leq |a| + |b|$, čímž je nerovnost (1.9) dokázána. ■

1.5.11. Důsledek. (a) Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (1.10)$$

(b) Pro každá $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|. \quad (1.11)$$

Důkaz. (a) Necht $x, y \in \mathbb{R}$. Položme v (1.9) nejprve $a = y, b = x - y$. Obdržíme $|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|$. Platí tedy $|x| - |y| \leq |x - y|$. V (1.9) dále položme $a = x, b = y - x$. Dostaneme $|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$. Platí tedy $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. Z obdržených nerovností již plyne (1.10).

(b) V (1.9) položme $a = x - z, b = z - y$, a dostaneme požadovanou nerovnost. ■

1.5.12. Poznámka. Někdy bývá trojúhelníkovou nerovností nazývána nerovnost (1.11).

1.5.13. Lemma. Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}, K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|a - b| < K\varepsilon$, potom $a = b$.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že ačkoli jsou podmínky lemmatu pro reálná čísla a, b splněny, jsou čísla a a b různá. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(a - b)$. Číslo ε je kladné, a proto podle předpokladu platí $0 < |a - b| < K\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$. Odtud vyplývá $0 < a - b < \frac{1}{2}(a - b)$, což je spor. Pokud $a < b$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(b - a)$ a spor obdržíme obdobně jako v předchozím případě. ■

Další vlastnosti suprema a infima.

1.5.14. Uspořádání \leq na množině \mathbb{R} je lineární, a proto je číslo $G \in \mathbb{R}$ supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

- (a) G je horní závorou množiny M ,
- (b) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \exists x \in M : G' < x$.

Pokud je totiž G supremem množiny M , pak je G horní závorou M , a tedy splňuje (a). Jestliže $G' \in \mathbb{R}, G' < G$, potom G' není horní závorou M . Odtud plyne, že existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$. Tím je ověřena podmínka (b).

Nyní předpokládejme, že $G \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (a) a (b). Potom je G horní závorou množiny M . Předpokládejme, že $G' \in \mathbb{R}$ je horní závorou M . Chceme ukázat, že platí $G \leq G'$. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom díky linearitě uspořádání \leq dostáváme $G' < G$. Podle vlastnosti (b) existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$, což je ovšem spor s předpokladem, že G' je horní závorou množiny M .

Zdůrazněme, že linearitu uspořádání \leq jsme využili v okamžiku, kdy jsme z předpokladu, že neplatí $G \leq G'$ odvodili nerovnost $G' < G$. Pro obecné uspořádání takové odvození nelze provést.

Obdobně číslo $g \in \mathbb{R}$ je infimem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

- (c) g je dolní závorou M ,
- (d) $\forall g' \in \mathbb{R}, g < g' \exists x \in M : x < g'$.

1.5.15. Věta (o existenci infima). Necht $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny M a označíme-li

$$-M = \{x \in \mathbb{R}; -x \in M\},$$

pak platí $\inf M = -\sup(-M)$.

Důkaz. Množina $-M$ je zřejmě neprázdná. Necht $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou množiny M . Pro každé $x \in -M$ platí $-x \in M$, takže $K \leq -x$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou množiny $-M$. Množina $-M$ je tedy shora omezená. Z 1.7 plyne existence suprema množiny $-M$, které označíme symbolem G . Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny M tak, že ověříme podmínky (c) a (d) z charakterizace infima v 1.5.14.

Pro každé $x \in M$ platí $-x \in -M$, tedy $-x \leq G$, takže $g \leq x$. Číslo g je proto dolní závorou množiny M . Tím jsme ověřili podmínku (c). Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g < g'$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z vlastnosti (b) v 1.5.14 tedy vyplývá, že existuje $y \in -M$ takové, že $G' < y$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in M$, ověřili jsme i podmínku (d) v 1.5.14. Tím je důkaz proveden. ■

1.5.16. Definice. Necht $M \subset \mathbb{R}$.

- Řekneme, že a je **největším prvkem (maximum)** množiny M , jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M .
- Řekneme, že b je **nejmenším prvkem (minimum)** množiny M , jestliže $b \in M$ a b je dolní závorou množiny M .

1.5.17. Pokud maximum a minimum množiny M existují, pak jsou určeny jednoznačně. Má-li totiž množina M dvě maxima G_1, G_2 , pak G_1 i G_2 jsou horní závory M . Platí tedy $G_1 \leq G_2$ a $G_2 \leq G_1$, a proto $G_1 = G_2$. Obdobně se dokáže jednoznačnost minima. Minimum a maximum množiny M značíme po řadě $\min M$ a $\max M$.

1.5.18. Věta. Necht $M \subset \mathbb{R}$.

- (a) Má-li množina M maximum, pak má i supremum, které je rovno jejímu maximumu.
- (b) Má-li množina M minimum, pak má i infimum, které je rovno jejímu minimumu.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $G = \max M$. Pak je G horní závorou M , a tedy je splněna podmínka (a) z 1.5.14. Je-li nyní $G' < G$, pak G je prvek M větší než G' , a tedy je splněna i podmínka (b) z 1.5.14. Proto je číslo G supremem množiny M .

Tvrzení (b) lze dokázat obdobně. ■

1.5.19. Příklad. Necht $x, y \in \mathbb{R}$ a $A = \{x, y\}$. Pak existuje maximum i minimum množiny A .

Řešení. Budeme postupovat rozbořem případů. Z linearitě uspořádání \mathbb{R} platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V prvním případě je zřejmě

$$\max\{x, y\} = y, \quad \min\{x, y\} = x,$$

v případě druhém platí

$$\max\{x, y\} = x, \quad \min\{x, y\} = y.$$

♣

1.5.20. Označení. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Potom zápis $a_1 \leq \dots \leq a_n$ znamená, že platí nerovnosti $a_1 \leq a_2, a_2 \leq a_3, \dots, a_{n-1} \leq a_n$. Obdobné značení používáme i pro další typy nerovností.

1.5.21. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}, \\ (-\infty, \infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pak množiny $(a, b), (-\infty, b), (a, \infty)$ a $(-\infty, \infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a, b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a, b), (a, b], (-\infty, b]$ a $[a, \infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

1.5.22. Prázdná množina je také interval, neboť $(a, a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina \mathbb{R} je interval, neboť $[a, a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je interval, stačí ověřit podmínku (1.12), která říká, že množina s každými dvěma svými body x a y obsahuje i všechny body mezi x a y . Není tedy třeba hledat krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazu Věty 4.3.6.

1.5.23. Lemma. Necht $M \subset \mathbb{R}$. Množina M je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M \quad \forall z \in \mathbb{R}: (x < z < y \Rightarrow z \in M). \quad (1.12)$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly \Rightarrow a \Leftarrow , které uvedou příslušné části důkazu.

Důkaz Lemmatu 1.5.23. \Rightarrow Předpokládejme, že $M = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pro ověření podmínky (1.12) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.12) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

\Leftarrow Předpokládejme, že množina M splňuje (1.12). Pokud $M = \emptyset$, pak je M interval. Není-li M omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak k němu nalezneme $x \in M, x < z$ (neboť M není zdola omezená) a také $y \in M, z < y$ (protože M není shora omezená). Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li M omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M, z < y$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť g je dolní závora M a G je horní závora M . Množina M je tedy interval s krajními body g a G , přičemž každý z nich může (ale nemusí) patřit do M .

V ostatních případech, kdy M je omezená pouze zdola a kdy M je omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ■

1.5.24. Věta. Necht $n, m \in \mathbb{Z}, n < m$. Potom $n + 1 \leq m$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m - n$ je přirozené číslo, a proto $1 \leq m - n$. Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.5.25. Věta (celá část). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

Důkaz. Nejprve sporem dokážeme jednoznačnost čísla k s uvedenými vlastnostmi. Necht existují $k, j \in \mathbb{Z}$ taková, že $k \neq j, k \leq x < k + 1$ a $j \leq x < j + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $x - 1 < j$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $0 < k - j$, plyne z Věty 1.5.24, že $1 \leq k - j$. To je spor s tím, že $k - j < 1$. Dokázali jsme tedy, že existuje nejvýše jedno číslo s uvedenými vlastnostmi.

Nyní dokážeme, že pro dané $x \in \mathbb{R}$ příslušné číslo existuje. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$. Číslo x je horní závorou množiny M , a proto je M shora omezená. Ukážeme, že M je neprázdná. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $x < n$, a proto je množina \mathbb{Z} zdola omezená. Množina \mathbb{Z} je neprázdná, a tedy existuje infimum g množiny \mathbb{Z} . Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $g \leq n$. Je-li $n \in \mathbb{Z}$, pak i $n - 1 \in \mathbb{Z}$, a proto $g \leq n - 1$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ potom platí $g + 1 \leq n$. Prvek $g + 1$ je tedy dolní závorou množiny \mathbb{Z} , což je spor s tím, že $g = \inf \mathbb{Z}$. Množina M je tudíž neprázdná.

Existuje tedy supremum $G \in \mathbb{R}$ množiny M . K němu nalezneme $k \in M$ takové, že $G - 1 < k$. Pak platí $G < k + 1$, a tedy $k + 1 \notin M$. Odtud a z toho, že $k \in M$, plyne $k \in \mathbb{Z}$ a $k \leq x < k + 1$. ■

1.5.26. Definice. Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k + 1$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.5.25), nazýváme **celou částí** čísla x a značíme její $[x]$.

1.5.27. Věta (Archimédova⁴ vlastnost \mathbb{R}). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Důkaz. Necht $x \in \mathbb{R}$. Nyní stačí položit $n = \max\{[x] + 1, 1\}$. ■

1.5.28. Lemma. Necht $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné množiny splňující

$$\forall a \in A \forall b \in B: a \leq b.$$

Pak existuje $\sup A$ a $\inf B$ a platí $\sup A \leq \inf B$.

Důkaz. Vezměme $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ libovolné. Dle předpokladu je a_0 dolní závorou B a b_0 horní závorou A . Díky neprázdnosti obou množin tedy existuje $\sup A$ a $\inf B$. Protože

$$\forall b \in B: b \text{ je horní závorou } A,$$

⁴Archimédés (287 př. n. l. - 212 př. n. l.)

platí

$$\forall b \in B: \sup A \leq b.$$

Tedy $\sup A$ je dolní závora B , z čehož plyne $\sup A \leq \inf B$. ■

1.5.29. Věta (hustota \mathbb{Q} v \mathbb{R}). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $y \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < y < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.5.27 existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{b-a}$ číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{b-a} < n$. Je tedy $na + 1 < nb$. Položíme $y = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $y \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.5.25 platí

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na]+1}{n} \leq \frac{na+1}{n} < \frac{nb}{n} = b.$$

1.5.30. Věta. Necht $M \subset \mathbb{N}$ je neprázdná množina. Potom existuje minimum množiny M .

Důkaz. Jelikož $M \subset \mathbb{N}$, je 1 dolní závorou M . Proto existuje infimum množiny M , které označíme symbolem g . Z definice infima plyne, že existuje $a \in M$ splňující $g \leq a < g + \frac{1}{2}$. Dokážeme, že $a = \min M$. Necht tedy $b \in M$ je libovolné. Chceme ukázat, že $a \leq b$. Tuto nerovnost dokážeme sporem.

Předpokládejme tedy, že $b < a$. Platí $g \leq b$. Protože $a - b$ je kladné celé číslo, platí $a - b \in \mathbb{N}$. Tedy $1 \leq a - b$. Platí tak

$$1 \leq a - b < g + \frac{1}{2} - g = \frac{1}{2}.$$

Tedy $2 < 1$, což je spor s tím, že 1 je nejmenší přirozené číslo. Platí tedy $a \leq b$, a a je tak minimum množiny M . ■

1.5.31. Označení. V dalším výkladu budeme používat i zápisy $x > y$ a $x \geq y$, které po řadě znamenají totéž co $y < x$ a $y \leq x$.

1.6. Konečné a spočetné množiny

Pojem „počet prvků množiny“ je možné rozšířit i na případy, kdy je uvažovaná množina nekonečná. Potom místo tohoto pojmu používáme pojem „mohutnost množiny“. Jeho přesné zavedení však přesahuje rámec našeho textu a je možné jej nalézt například v knize [2]. V tomto oddílu pouze ukážeme jeden ze způsobů jak porovnávat množiny co do velikosti, který s pojmem mohutnosti pracuje implicitně. Podáme také přesnou definici konečných a nekonečných množin.

1.6.1. Definice. (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B . Značíme $A \leq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A a B nemají stejnou mohutnost. Značíme $A < B$.

1.6.2. Označení. Necht A je množina. Zobrazení $\text{Id}_A: A \rightarrow A$ definované předpisem $\text{Id}_A(a) = a, a \in A$, nazýváme **identickým zobrazením**.

1.6.3. Věta. Necht A, B, C jsou množiny. Potom platí

- (a) $A \preceq A$,
- (b) pokud $A \preceq B$ a $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je zřejmě prosté zobrazení množiny A do množiny A , a tedy $A \preceq A$.

(b) Podle předpokladu existují prostá zobrazení $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C . Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté, což dokazuje vztah $A \preceq C$. ■

1.6.4. Věta. Necht A, B, C jsou množiny. Potom platí

- (a) $A \approx A$,
- (b) pokud $A \approx B$, pak $B \approx A$,
- (c) pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je bijekce množiny A na množinu A , a proto $A \approx A$.

(b) Předpokládejme, že f je bijekce množiny A na množinu B . Zobrazení f je prosté, a proto existuje zobrazení f^{-1} . Definičním oborem zobrazení f^{-1} je množina B a jeho obor hodnot je roven A . Zobrazení $f^{-1}: B \rightarrow A$ je tedy „na“. Pokud pro $x, y \in B$ platí $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, potom $x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y$, a zobrazení f^{-1} je tedy prosté. Dostáváme tak, že zobrazení f^{-1} je bijekce, a proto má množina A stejnou mohutnost jako množina B , tj. $B \approx A$.

(c) Podle předpokladu existuje bijekce f množiny A na množinu B a bijekce g množiny B na množinu C . Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C . Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté. Pro každý prvek $c \in C$ existuje prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = c$, neboť g je „na“. Pro prvek b existuje prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$, neboť f je „na“. Potom platí $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Zobrazení $g \circ f$ je tedy „na“. Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.6.5. Věta (Cantor⁵-Bernstein⁶). Necht X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a zároveň $Y \preceq X$. Pak X a Y mají stejnou mohutnost.

⁵Georg Cantor (1845--1918)

⁶Felix Bernstein (1878--1956)

K důkazu Cantorovy--Bernsteinovy věty použijeme následující lemma. Připomeňme, že symbol $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu (vizte 1.3.3).

1.6.6. Lemma. Necht X je množina a $H: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňující podmínku

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X): A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B). \quad (1.13)$$

Potom existuje $C \subset X$ takové, že $H(C) = C$.

Důkaz. Definujme $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(X); A \subset H(A)\}$. Ukážeme, že $C = \bigcup \mathcal{C}$ je hledanou množinou. Zřejmě platí $C \subset X$. Pokud $A \in \mathcal{C}$, potom $A \subset C$ podle definice C . Díky (1.13) pak platí $H(A) \subset H(C)$. Dohromady tedy máme $A \subset H(A) \subset H(C)$. Z této úvahy a definice C dostáváme $C \subset H(C)$. Nyní znovu použijeme (1.13) pro dvojici množin C a $H(C)$ a dostaneme $H(C) \subset H(H(C))$. To znamená, že $H(C) \in \mathcal{C}$, a tedy $H(C) \subset C$. Tím je rovnost $H(C) = C$ dokázána. ■

Důkaz Věty 1.6.5. Podle předpokladu věty existují prostá zobrazení $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$. Definujme zobrazení $H: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ předpisem

$$H(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)).$$

Pokud $U \subset V \subset X$, potom $f(U) \subset f(V)$, a tedy také $Y \setminus f(V) \subset Y \setminus f(U)$. Odtud již snadno odvodíme inkluzi $H(U) \subset H(V)$. Zobrazení H tedy splňuje předpoklady Lemmatu 1.6.6, s pomocí kterého nalezneme množinu $C \subset X$ splňující $H(C) = C$. Pak platí

$$C = H(C) = X \setminus g(Y \setminus f(C)).$$

Odtud plyne $X \setminus C = g(Y \setminus f(C))$. Zobrazení $g|_{Y \setminus f(C)}$ je tedy prosté zobrazení množiny $Y \setminus f(C)$ na množinu $X \setminus C$. Potom $g^{-1}|_{X \setminus C}$ je prosté zobrazení $X \setminus C$ na $Y \setminus f(C)$. Poněvadž $f|_C$ je prosté zobrazení C na $f(C)$, je následující zobrazení $h: X \rightarrow Y$ hledanou bijekcí mezi množinami X a Y

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in C, \\ g^{-1}(a) & \text{pro } a \in X \setminus C. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Z následující věty vyplývá, že pro každou množinu existuje množina, která je „větší“ ve smyslu Definice 1.6.1.

1.6.7. Věta (Cantorova věta). Necht X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Důkaz. Zobrazení $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny X a $\mathcal{P}(X)$ nemají stejnou mohutnost. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X; x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. ■

1.6.8. Definice. Necht A je množina. Řekneme, že množina A je

- **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$,
- **nekonečná**, pokud není konečná,
- **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako \mathbb{N} ,
- **nespočetná**, pokud není spočetná.

1.6.9. Lemma. Necht $m, n \in \mathbb{N}$. Potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ právě tehdy, když $m = n$.

Důkaz. Pokud $m = n$, potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ podle Věty 1.6.4(a).

Opačnou implikaci dokážeme pomocí matematické indukce podle m . Předpokládejme, že $m = 1$ a $\{1\} \approx \{1, \dots, n\}$. Potom existuje bijekce $\varphi: \{1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Platí tedy $\varphi(1) = 1$ a také $\varphi(1) = n$. Musí tedy platit $n = 1$, a proto $m = n$.

Předpokládejme platnost tvrzení pro $m \in \mathbb{N}$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m+1\}$. Existuje tedy bijekce $\varphi: \{1, \dots, m+1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Pak existuje jednoznačně určené číslo $k_0 \in \{1, \dots, m+1\}$ takové, že $\varphi(k_0) = n$. Definujme pomocné zobrazení $\psi: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$ předpisem

$$\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{pokud } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0\}, \\ \varphi(m+1), & \text{pokud } k = k_0 \text{ a } k_0 \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Zobrazení ψ je dobře definované s hodnotami v množině $\{1, \dots, n-1\}$. Ověřme, že jde o bijekci množiny $\{1, \dots, m\}$ na množinu $\{1, \dots, n-1\}$. Zobrazení je „na“, neboť obor hodnot obsahuje všechny prvky množiny $\{1, \dots, n\} \setminus \{\varphi(k_0)\} = \{1, \dots, n-1\}$. Předpokládejme nyní, že $\psi(k) = \psi(k')$ pro $k, k' \in \{1, \dots, m\}$. Pokud $k = k_0$, pak $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ a $\psi(k) = \psi(k_0) = \varphi(m+1)$. Díky prostotě φ platí $k' = k_0 = k$. Pokud $k \neq k_0$, pak díky prostotě φ musí být $k' \neq k_0$. Potom ale platí $\psi(k) = \varphi(k) = \varphi(k') = \psi(k')$. Odtud plyne $k = k'$. Zobrazení ψ je tedy prosté.

Máme tedy $\{1, \dots, n-1\} \approx \{1, \dots, m\}$. Podle indukčního předpokladu dostáváme $n-1 = m$, a tedy $n = m+1$. ■

1.6.10. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto n určeno podle Lemmatu 1.6.9 jednoznačně. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

1.6.11. Definice. Pokud je množina X prázdná, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven n . Počet prvků konečné množiny X značíme $|X|$.

1.6.12. Pokud jsou množiny X a Y konečné a mají stejnou mohutnost, pak jsou obě prázdné nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a počet prvků X a Y je roven 0. Ve druhém případě existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $X \approx \{1, \dots, m\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4 dostáváme $\{1, \dots, m\} \approx \{1, \dots, n\}$, a tedy podle Lemmatu 1.6.9 platí $m = n$, neboli $|X| = |Y|$.

Pokud jsou X a Y konečné a mají stejný počet prvků, pak jsou opět obě prázdné nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a $X \approx Y$. Ve druhém případě

existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4 dostáváme $X \approx Y$.

Platí tedy, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků.

1.6.13. Věta. Necht $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je množina A omezená. Je-li navíc A neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A .

Necht je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Necht A je množina o $n + 1$ prvcích, tj. existuje bijekce $\varphi: \{1, \dots, n + 1\} \rightarrow A$. Položme $B = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je dle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g' . Položme

$$g = \min\{\varphi(n + 1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n + 1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná dle Příkladu 1.5.19. Dále platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n + 1\}: g \leq \varphi(i) \leq G.$$

Tedy g je dolní závora množiny A a G je horní závora množiny A . Proto je množina A omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1, \dots, n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Nalezli jsme tedy minimum i maximum množiny A . Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ■

1.6.14. Věta. Množina \mathbb{N} je nekonečná.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že množina \mathbb{N} je konečná. Podle Věty 1.6.13 je potom množina \mathbb{N} omezená, a tedy existuje její horní závora v \mathbb{R} , kterou označíme K . Potom podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > K$. Tudíž K není horní závorou množiny \mathbb{N} , což je spor. ■

Následující lemma může být poněkud překvapivé, protože ukazuje, že množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je možné prostě zobrazit do \mathbb{N} .

1.6.15. Lemma. Zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definované předpisem

$$\varphi(n, m) = (n + m)^2 + n, \quad (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

je prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ pro $(n, m), (n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Potom máme

$$\begin{aligned} (n' + m' + 1)^2 &> (n' + m')^2 + n' = \varphi(n', m') = \varphi(n, m) \\ &= (n + m)^2 + n > (n + m)^2. \end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $n' + m' + 1 > n + m$. Potom máme $n + m \leq n' + m'$. Obdobně odvodíme nerovnost $n' + m' \leq n + m$. Musí tedy platit $n' + m' = n + m$. Odtud

a z rovnosti $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ plyne $n = n'$, a tedy také $m = m'$. Zobrazení φ je tedy prosté. ■

1.6.16. Lemma. Necht A, B jsou množiny a $f: A \rightarrow B$ je zobrazení. Pak $f(A) \preceq A$.

Důkaz. Korektní důkaz se opírá o axiom výběru, což je výrok, jehož platnost při práci s množinami předpokládáme. Zde je jedna z jeho možných formulací:

Je-li $b \mapsto C_b, b \in I$, indexovaný systém neprázdných množin, potom existuje zobrazení $\varphi: I \rightarrow \bigcup_{b \in I} C_b$ takové, že pro každé $b \in I$ platí $\varphi(b) \in C_b$.

Další vysvětlení je uvedeno v Dodatku ??.

Pokud je množina A prázdná, potom tvrzení zřejmě platí. Pokud je množina A neprázdná, potom položíme $I = f(A)$ a $C_b = f^{-1}(\{b\})$ pro $b \in I$. Podle axiomu výběru existuje zobrazení $\varphi: f(A) \rightarrow A$ takové, že pro každé $b \in f(A)$ platí $\varphi(b) \in f^{-1}(\{b\})$. Zobrazení φ je prosté. Pokud totiž $\varphi(b) = \varphi(b')$, potom platí $b = f(\varphi(b)) = f(\varphi(b')) = b'$. Dostáváme tedy $f(A) \preceq A$. ■

1.6.17. Věta (vlastnosti konečných množin).

- Necht A je konečná množina a $B \subset A$. Potom B je konečná.
- Necht \mathcal{A} je konečná množina, jejímiž prvky jsou konečné množiny. Potom $\bigcup \mathcal{A}$ je konečná množina.
- Necht $n \in \mathbb{N}$ a A_1, \dots, A_n jsou konečné množiny. Potom $A_1 \times \dots \times A_n$ je konečná množina.
- Necht A je konečná množina, B je množina a $f: A \rightarrow B$ je zobrazení. Potom $f(A)$ je konečná množina.

Důkaz. (a) Nejprve matematickou indukcí podle n dokážeme, že je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \{1, \dots, n\}$, potom je množina A konečná. Je-li $n = 1$ a $A \subset \{1\}$, pak buď je A prázdná množina, nebo $A = \{1\}$. V obou případech přímo z definice plyne, že množina A je konečná.

Předpokládejme nyní, že každá podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$ je konečná. Necht A je podmnožina množiny $\{1, \dots, n+1\}$. Pokud $A \subset \{1, \dots, n\}$, pak je A konečná množina podle indukčního předpokladu. V opačném případě platí

$$A = (A \cap \{1, \dots, n\}) \cup \{n+1\}.$$

Pak je množina $B = A \cap \{1, \dots, n\}$ konečná. Je-li B prázdná, pak $A = \{n+1\}$ a existuje bijekce množiny $\{1\}$ na množinu A . Je-li B neprázdná, potom existují $k \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi: \{1, \dots, k\} \rightarrow B$. Definujme $\psi: \{1, \dots, k+1\} \rightarrow A$ předpisem

$$\psi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}, \\ n+1 & \text{pro } i = k+1. \end{cases}$$

Pak ψ je bijekce $\{1, \dots, k+1\}$ na A , a tedy A je konečná množina.

Předpokládejme nyní, že A je konečná neprázdná množina a B je její neprázdná podmnožina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\psi = \varphi|_B$ bijekcí množiny B na množinu $\varphi(B)$. Podle první části důkazu je

množina $\varphi(B)$ konečná, tj. existuje $m \in \mathbb{N}$ a bijekce $\omega: \varphi(B) \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Pak $\omega \circ \psi$ je bijekce množiny B na množinu $\{1, \dots, m\}$, takže množina B je konečná.

(b) Nejprve dokážeme, že sjednocení dvou konečných množin je konečná množina. Nechtě tedy C a D jsou konečné množiny. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že jsou obě neprázdné. Potom existují $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha: C \rightarrow \{1, \dots, n\}$, $\beta: D \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Definujme zobrazení $\gamma: D \setminus C \rightarrow \{n+1, \dots, n+m\}$ předpisem $\gamma(x) = \beta(x) + n$, $x \in D \setminus C$. Pak zobrazení $\varphi: C \cup D \rightarrow \{1, \dots, n+m\}$ definované předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x), & x \in C, \\ \gamma(x), & x \in D \setminus C, \end{cases}$$

je prosté zobrazení množiny $C \cup D$ do množiny $\{1, \dots, n+m\}$, neboť zobrazení $\alpha|_C, \gamma|_{D \setminus C}$ jsou prostá a

$$\alpha(C) \cap \gamma(D \setminus C) \subset \{1, \dots, n\} \cap \{n+1, \dots, n+m\} = \emptyset.$$

Platí $\varphi(C \cup D) \subset \{1, \dots, n+m\}$, a množina $\varphi(C \cup D)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Množina $C \cup D$ je konečná, neboť podle 1.4.23 platí $C \cup D \approx \varphi(C \cup D)$.

Pokud je množina \mathcal{A} konečná, pak je buď prázdná nebo má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$. V prvním případě je její sjednocení prázdnou množinou, a je tedy konečné. Ve druhém případě dokážeme tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechtě tedy $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$, kde $A_i, i = 1, \dots, n+1$, jsou dané konečné množiny. Potom podle indukčního předpokladu je $\bigcup_{i=1}^n A_i$ konečnou množinou. Pak je ale množina

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1}$$

konečná dle první části důkazu. Tím je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno.

(c) Podobně jako v (b) stačí dokázat, že kartézský součin dvou konečných neprázdných množin A a B je konečný. Mějme $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$, $\beta: B \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Nechtě φ je zobrazení z Lemmatu 1.6.15. Pak zobrazení ψ definované předpisem

$$\psi(a, b) = \varphi(\alpha(a), \beta(b)), \quad (a, b) \in A \times B,$$

je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do konečné množiny $\{1, \dots, (n+m)^2 + n\}$. Množina $\psi(A \times B)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Odtud plyne i konečnost množiny $A \times B$, neboť $A \times B \approx \psi(A \times B)$.

(d) Díky Lemmatu 1.6.16 víme, že $f(A) \preceq A$, tj. existuje prosté zobrazení $\psi: f(A) \rightarrow A$. Potom je množina $\psi(f(A))$ podmnožinou konečné množiny A , a je tedy podle (a) konečná. Množina $f(A)$ je tedy konečná, neboť $f(A) \approx \psi(f(A))$. ■

1.6.18. Lemma. (a) Množina A je spočetná právě tehdy, když platí $A \preceq \mathbb{N}$.

(b) Necht A je neprázdná množina. Potom je množina A spočetná právě tehdy, když existuje zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, které je „na“.

Důkaz. (a) \Rightarrow Pokud je A spočetná, pak je buď konečná, nebo $A \approx \mathbb{N}$. V prvním případě je A buď prázdná nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \approx \{1, \dots, n\}$. Zřejmě tedy platí $A \preceq \mathbb{N}$.

Pokud $A \approx \mathbb{N}$, pak také zřejmě $A \preceq \mathbb{N}$.

\Leftarrow Necht $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ je prosté zobrazení. Množina $f(A)$ je buď omezená, nebo neomezená. Předpokládejme nejprve, že nastává první možnost. Potom existuje číslo $K \in \mathbb{R}$, které je horní závorou množiny $f(A)$. Podle Věty 1.5.27 existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K < n$. Potom platí $f(A) \subset \{1, \dots, n\}$. Podle Věty 1.6.17(a) je $f(A)$ konečná množina. Vzhledem k tomu, že $A \approx f(A)$ podle 1.4.23, dostáváme, že množina A je konečná, a tedy spočetná.

Předpokládejme nyní, že množina $f(A)$ není omezená. Induktivně budeme konstruovat posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Položme $n_1 = \min f(A)$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsou již definována čísla n_1, \dots, n_k . Množina $f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ je neprázdná, neboť $f(A)$ je neomezená. Položíme $n_{k+1} = \min(f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\})$. Tím je konstrukce posloupnosti provedena podle Věty ???. Zobrazení $\varphi: k \mapsto n_k, k \in \mathbb{N}$, je podle konstrukce prosté a platí $\varphi(\mathbb{N}) = f(A)$. Podle 1.4.23 platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy $f(A) \approx \mathbb{N}$. Odtud dostáváme $A \approx \mathbb{N}$, neboť $A \approx f(A)$ podle 1.4.23. Množina A je tedy spočetná.

(b) \Rightarrow Podle již dokázaného bodu (a) existuje prosté zobrazení $g: A \rightarrow \mathbb{N}$. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ definujeme předpisem

$$f(n) = \begin{cases} g^{-1}(n), & \text{pokud } n \in \mathcal{H}(g), \\ a, & \text{pokud } n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{H}(g). \end{cases}$$

Potom zřejmě $f(\mathbb{N}) = A$.

\Leftarrow Předpokládejme, že $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ je zobrazení, které je „na“. Potom podle 1.6.16 platí $A \preceq \mathbb{N}$. Množina A je tedy spočetná podle již dokázané části (a). ■

1.6.19. Věta (vlastnosti spočetných množin).

- Necht A je spočetná množina a $B \subset A$. Potom je množina B spočetná.
- Necht \mathcal{A} je spočetná množina, jejímiž prvky jsou spočetné množiny. Potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ spočetná.
- Necht $n \in \mathbb{N}$ a A_1, \dots, A_n jsou spočetné množiny. Potom je množina $A_1 \times \dots \times A_n$ spočetná.
- Necht A je spočetná množina, B je množina a $f: A \rightarrow B$ je zobrazení. Potom je množina $f(A)$ spočetná.

Důkaz. (a) Necht $B \subset A$ a A je spočetná. Potom $\text{Id}_B: B \rightarrow A$ je prosté zobrazení, a platí tedy $B \preceq A$. Poněvadž $A \preceq \mathbb{N}$ podle Lemmatu 1.6.18(a), dostáváme $B \preceq \mathbb{N}$ podle Věty 1.6.3(b) a množina B je tedy spočetná podle Lemmatu 1.6.18(a).

(b) Označme $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A}; A \neq \emptyset\}$. Potom $\bigcup \tilde{\mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud $\tilde{\mathcal{A}} = \emptyset$, potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ prázdná, a tedy spočetná. V opačném případě existuje podle Lemmatu 1.6.18(b) zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$, které je „na“. Pro každé $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ existuje zobrazení $g_A: \mathbb{N} \rightarrow A$, které je „na“. Definujme zobrazení $\psi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ předpisem $\psi(n, m) = g_{f(n)}(m)$. Zobrazení ψ je „na“. Pro každé $x \in \bigcup \mathcal{A}$ totiž existuje $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ takové, že $x \in A$. Existují tedy $n, m \in \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = A$ a $g_A(m) = x$. Potom $\psi(n, m) = g_{f(n)}(m) = g_A(m) = x$.

Podle Lemmat 1.6.15 a 1.6.18(a) je množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spočetná, a tedy existuje zobrazení h množiny \mathbb{N} na množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Lemma 1.6.18(b)). Potom je zobrazení $\psi \circ h$ zobrazením množiny \mathbb{N} na množinu $\bigcup \mathcal{A}$, což podle Lemmatu 1.6.18(b) dokazuje spočetnost množiny $\bigcup \mathcal{A}$.

(c) Podobně jako v důkazu bodů (b) a (c) Věty 1.6.17 stačí dokázat, že kartézský součin dvou spočetných množin A a B je spočetný. Kartézský součin $A \times B$ je roven sjednocení $\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$. Zřejmě platí $\{a\} \times B \approx B$. Množina $A \times B$ je tedy spočetným sjednocením spočetných množin a podle (b) je tedy spočetná.

(d) Necht A je spočetná množina a $f: A \rightarrow B$ je zobrazení. Víme z Lemmatu 1.6.16, že platí $f(A) \leq A$. Protože $A \leq \mathbb{N}$, dostáváme podle Věty 1.6.3(b) $f(A) \leq \mathbb{N}$. Odtud plyne podle (a) spočetnost $f(A)$. ■

1.6.20. Příklad. Dokažte, že množina racionálních čísel \mathbb{Q} je spočetná.

Řešení. Množina \mathbb{Z} je spočetná, neboť je sjednocením množiny kladných čísel, množiny záporných čísel a jednoprvkové množiny obsahující číslo 0. Množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ je tedy podle Věty 1.6.19(c) spočetná. Zobrazení $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ definované předpisem $f(p, q) = pq^{-1}$ zobrazuje $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ na \mathbb{Q} . Podle Věty 1.6.19(d) je množina \mathbb{Q} spočetná. ♣

1.6.21. Příklad. Necht \mathcal{J} je disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v \mathbb{R} . Dokažte, že potom je systém \mathcal{J} spočetný.

Řešení. Pro každé $J \in \mathcal{J}$ nalezneme racionální číslo $q_J \in J$. Pak je zobrazení definované předpisem $J \mapsto q_J$, $J \in \mathcal{J}$, prostým zobrazením množiny \mathcal{J} do spočetné množiny \mathbb{Q} , tedy \mathcal{J} je také spočetná. ♣

1.6.22. Příklad. Necht A je nekonečná množina. Dokažte, že potom A obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Řešení. Definujme induktivně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ následovně. Zvolme $a_1 \in A$ libovolně. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ jsme již definovali prvky a_1, \dots, a_n . Množina $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ je neprázdná, neboť A je nekonečná. Prvek a_{n+1} zvolme libovolně z této množiny. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná dle Věty 1.6.14, a tím je důkaz proveden. ♣

1.6.23. Poznámka. Množina \mathbb{R} je nespočetná. Důkaz provedeme až v 3.8.10.

1.7. Vlastnosti elementárních funkcí

Reálná funkce f jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je zobrazení $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

V tomto oddílu uvedeme definice některých pojmů, které jsou důležité při zkoumání reálných funkcí. Dále se seznámíme s elementárními funkcemi, tj. s polynomy, exponenciálou, logaritmem, odmocninami, obecnou mocninou, goniometrickými funkcemi a cyklometrickými funkcemi. Uvedeme souhrny jejich základních vlastností, ze kterých lze odvodit všechna početní pravidla středoškolské matematiky. V Kapitole 6 pak několik takových odvození provedeme.

1.7.1. Definice. Necht $J \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je

- **rostoucí** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerostoucí** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

1.7.2. Definice. Monotónní funkcí (respektive **ryze monotónní funkcí**) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (respektive rostoucí nebo klesající) na J .

1.7.3. Definice. Necht $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ a $M \subset A$. Řekneme, že f je

- **shora omezená** na M , jestliže množina $f(M)$ je shora omezená,
- **zdola omezená** na M , jestliže množina $f(M)$ je zdola omezená,
- **omezená** na M , jestliže množina $f(M)$ je omezená,
- **konstantní** na M , jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

1.7.4. Definice. Necht $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ a $M \subset A$. Řekneme, že f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou a , kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x)$.

1.7.5 (algebraické operace s funkcemi). Necht M je množina, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak definujeme funkce $f + g$, fg , cf na množině M předpis

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in M,$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad x \in M,$$

$$(cf)(x) = cf(x), \quad x \in M.$$

Je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$, pak definujeme

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in M.$$

1.7.6. Věta. Necht M je neprázdná množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou zobrazení.

(a) Jestliže f a g jsou shora omezená, potom

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

(b) Jestliže f a g jsou zdola omezená, potom

$$\inf(f + g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$

Důkaz. (a) Množiny $f(M)$ a $g(M)$ jsou neprázdné a shora omezené, a proto existují jejich suprema, která označíme po řadě A a B . Necht $x \in M$. Potom z definice suprema plyne $f(x) \leq A$ a $g(x) \leq B$, a tedy také $f(x) + g(x) \leq A + B$. Protože $x \in M$ bylo zvoleno libovolně, je $A + B$ horní závorou množiny $(f + g)(M)$. Odtud plyne tvrzení (a).

(b) Důkaz tvrzení (b) je obdobný důkazu tvrzení (a). ■

1.7.7. Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = ax + b$. Takto definovaná funkce se nazývá **afinní**. Pokud je $b = 0$, říkáme, že f je **lineární**. Zde definujeme pojem lineární funkce jinak, než je obvyklé na střední škole, protože v pokročilejších matematických textech se užívá právě uvedené definice.

1.7.8. Necht $a, b, c \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Je-li $a \neq 0$, pak se takto definovaná funkce nazývá **kvadratická**.

1.7.9. Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla a_0, \dots, a_n se nazývají **koefficienty polynomu P** . **Nulovým polynomem** rozumíme konstantní nulovou funkci definovanou na \mathbb{R} .

Důkaz následujícího tvrzení a důkaz tvrzení z dalšího paragrafu jsou uvedeny v Dodatku ???. Pro každý nenulový polynom existují *jednoznačně určená* čísla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, taková, že

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak říkáme, že **stupeň polynomu P** je roven n . Stupeň nulového polynomu definujeme jako -1 . Stupeň polynomu P značíme $\text{st } P$.

1.7.10. Reálným kořenem polynomu P rozumíme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $P(x) = 0$. Necht P je polynom tvaru (1.14), kde $a_n \neq 0$. Potom existuje nejvýše n reálných kořenů polynomu P .

Pro polynomy stupně 1 a 2 je možné určit hodnoty reálných kořenů pomocí následujících vzorců. Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, má právě jeden reálný kořen $-\frac{b}{a}$. Odvození je snadné. Uvažujme rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1.15)$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Označme $D = b^2 - 4ac$. Číslo D nazýváme **diskriminantem** rovnice (1.15). Pokud $D > 0$, pak má rovnice právě dva reálné kořeny $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

a $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Pokud $D = 0$, pak má rovnice právě jeden reálný kořen $\frac{-b}{2a}$. Pokud $D < 0$, pak rovnice nemá reálné kořeny.

1.7.11 (dělení polynomů). Necht P a Q jsou dva polynomy, přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$ a $\text{st } Z < \text{st } Q$.

Polynomy R a Z hledáme pomocí následujícího algoritmu. Pokud $\text{st } Q > \text{st } P$, pak stačí položit R rovno nulovému polynomu a $Z = P$. Pokud $\text{st } Q \leq \text{st } P$, pak nalezneme takové $a_1 \in \mathbb{R}$ a $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, že $\text{st}(P - a_1x^{k_1}Q) < \text{st } P$. Tento krok potom opakujeme, přičemž místo polynomu P uvažujeme polynom $P - a_1x^{k_1}Q$, pokud nemá tento polynom stupeň menší než polynom Q . Tímto způsobem obdržíme $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ a $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že platí $\text{st}(P - a_1x^{k_1}Q - a_2x^{k_2}Q - \dots - a_lx^{k_l}Q) < \text{st } Q$. Potom položíme $R(x) = a_1x^{k_1} + \dots + a_lx^{k_l}$ a $Z = P - RQ$.

1.7.12. Příklad. Vydělte polynom $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2$ polynomem $Q(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení. Budeme postupovat podle algoritmu uvedeného v 1.7.11. Polynom Q vynásobíme výrazem $2x$ a výsledek odečteme od P . Obdržíme

$$P_1(x) = P(x) - 2xQ(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2 - 2x(x^2 + x + 2) = 2x^2 - 5x + 2.$$

Polynom Q vynásobíme výrazem 2 a výsledek odečteme od P_1 . Obdržíme

$$P_2(x) = P_1(x) - 2Q(x) = 2x^2 - 5x + 2 - 2(x^2 + x + 2) = -7x - 2.$$

Potom máme

$$P(x) = (2x + 2)Q(x) - 7x - 2.$$

♣

1.7.13. Necht $k \in \mathbb{N}$. Potom k -**tou odmocninou** nazýváme inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^k$, $x \in [0, \infty)$, je-li k sudé, a k $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, je-li k liché. Značíme $x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Definice je korektní, neboť v obou případech uvažujeme inverzní funkci k funkci, která je na svém definičním oboru rostoucí.

1.7.14. Racionální funkcí rozumíme každou funkci tvaru $\frac{P}{Q}$, kde P, Q jsou polynomy, přičemž Q není nulový polynom. Definičním oborem takové funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; Q(x) = 0\}$. Polynom Q není nulový, takže racionální funkce je definována v každém bodě \mathbb{R} vyjma nejvýše konečně mnoha bodů (vizte 1.7.10).

1.7.15. Exponenciální funkce, kterou budeme značit \exp , má definiční obor roven \mathbb{R} a obor hodnot roven $(0, \infty)$. Tato funkce splňuje následující podmínky:

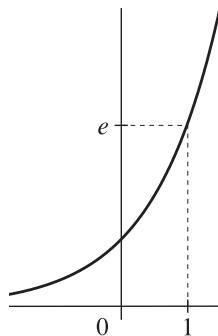
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) \geq 1 + x$.

Odtud lze odvodit následující užitečné vlastnosti exponenciální funkce:

- \exp je rostoucí funkce na \mathbb{R} ,
- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}: \exp(nx) = (\exp(x))^n$,

- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0: \exp(x) > 1$.

Hodnotu funkce \exp v bodě 1 značíme symbolem e a nazýváme ji Eulerovým číslem.⁷



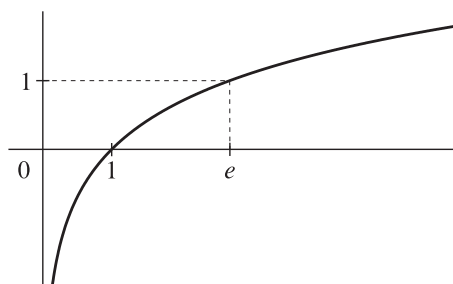
OBRÁZEK 1. Graf exponenciální funkce

1.7.16. Logaritmická funkce, kterou budeme značit \log , je funkce inverzní k funkci exponenciální. Její definiční obor je tedy roven $(0, \infty)$ a obor hodnot roven \mathbb{R} . Tato funkce splňuje následující podmínky:

- $\forall x, y \in (0, \infty): \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall x \in (0, \infty): \log(x) \leq x - 1$.

Odtud lze odvodit další užitečné vlastnosti logaritmické funkce:

- funkce \log je rostoucí na intervalu $(0, \infty)$,
- $\log(1) = 0$,
- $\forall x \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{Z}: \log(x^n) = n \log x$,
- $\forall x \in (1, \infty): \log(x) > 0$.



OBRÁZEK 2. Graf funkce logaritmus

⁷Leonhard Euler (1707-1783)

1.7.17. Necht $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninou** a^x předpisem $a^x = \exp(x \log a)$. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ jsme však symbol a^n již definovali v Označení 1.5.2(b). Pokud je $a > 0$, máme pro tento symbol dvě definice. Nová definice se však v tomto případě shoduje s předchozí definicí, neboť platí $\exp(n \log(a)) = \exp(\log(a^n)) = a^n$. Funkce a^x je rostoucí na \mathbb{R} pro $a \in (1, \infty)$ a klesající na \mathbb{R} pro $a \in (0, 1)$.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ platí

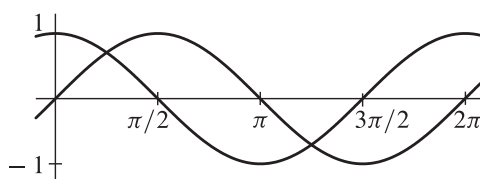
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Oba vztahy snadno ověříme použitím základních vlastností exponenciální a logaritmické funkce. Platí

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp((x+y) \log(a)) = \exp(x \log(a) + y \log(a)) \\ &= \exp(x \log(a)) \cdot \exp(y \log(a)) = a^x \cdot a^y, \\ (a^x)^y &= \exp(y \log(a^x)) = \exp(y \log(\exp(x \log(a)))) \\ &= \exp(yx \log(a)) = \exp(xy \log(a)) = a^{xy}. \end{aligned}$$

1.7.18 (vlastnosti funkcí sinus a kosinus). Funkce **sinus**, značíme \sin , a **kosinus**, značíme \cos , mají definiční obor roven \mathbb{R} a obor hodnot roven intervalu $[-1, 1]$. Tyto funkce splňují následující podmínky:

- funkce \sin a \cos jsou 2π -periodické,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
- \sin je lichá funkce a \cos je sudá funkce,
- existuje jednoznačně určené kladné číslo π takové, že \sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

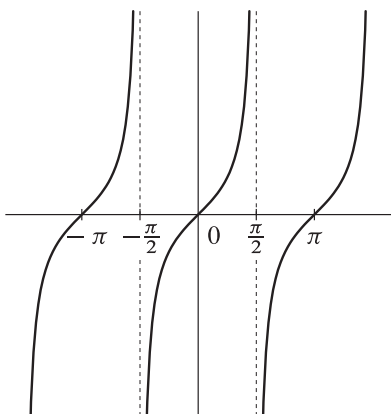


OBRAZEK 3. Grafy funkcí sinus a kosinus

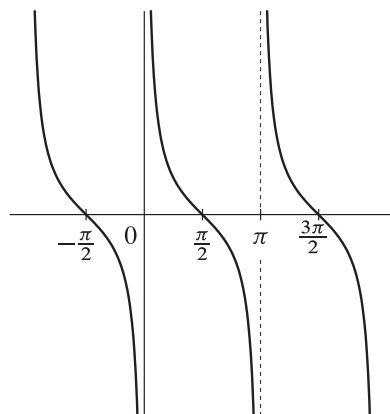
1.7.19 (vlastnosti funkcí tangens a kotangens). Funkce **tangens**, značíme ji tg , a **kotangens**, značíme ji cotg , definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

- funkce tg a cotg jsou π -periodické,
- $\forall x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg}(x) + \text{tg}(y)}{1 - \text{tg}(x)\text{tg}(y)}$.



OBRÁZEK 4. Graf funkce tangens



OBRÁZEK 5. Graf funkce kotangens

1.7.20. Následující tabulka obsahuje funkční hodnoty goniometrických funkcí v některých význačných bodech.

funkce	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
cotg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1.7.21. **Cyklometrické funkce arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg)** definujeme následujícím způsobem

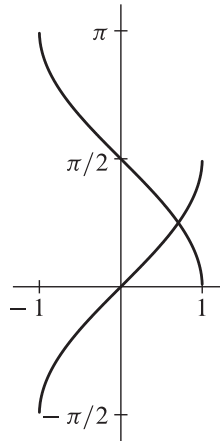
$$\begin{aligned} \arcsin &= (\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}, & \arccos &= (\cos |_{[0, \pi]})^{-1}, \\ \arctg &= (\text{tg} |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}, & \text{arccotg} &= (\text{cotg} |_{(0, \pi)})^{-1}. \end{aligned}$$

Uvedené definice cyklometrických funkcí jsou korektní, neboť uvažované restrikce goniometrických funkcí jsou prosté.

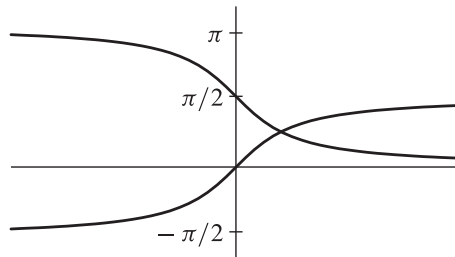
Nyní uvedeme základní vlastnosti cyklometrických funkcí:

- funkce arcsin je lichá,
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$,
- $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos(1) = 0$,
- $\forall x \in [-1, 1]$: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

- $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- arctg je rostoucí a lichá funkce na \mathbb{R} ,
- $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$,
- $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$,
- $\operatorname{arccotg}$ je klesající funkce na \mathbb{R} ,
- $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.



OBRÁZEK 6. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus



OBRÁZEK 7. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

1.8. Teoretické a početní příklady

1.8.1. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n < m. \quad (1.16)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu ???. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu ??? k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\begin{aligned} & \neg(\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n < m) \\ & \exists n \in \mathbb{N} : \neg(\exists m \in \mathbb{N} : n < m) \\ & \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : \neg(n < m) \\ & \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : n \geq m \end{aligned}$$

Poslední řádek plyne z faktu, že uspořádání \leq reálných čísel, a tedy i přirozených čísel, je lineární, vizte Definicí 1.4.3.

Zadané tvrzení je pravdivé, neboť k libovolnému danému přirozenému číslu n , můžeme číslo m zvolit jako $n + 1$. Číslo $n + 1$ je přirozené a je větší než n . Tím je pravdivost výroku (1.16) ověřena. ♣

1.8.2. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon). \quad (1.17)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu ???. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu ??? k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\begin{aligned} & \neg(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)) \\ & \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \neg(\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)) \\ & \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \neg(\forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)) \\ & \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} : \neg(0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Podle Věty 1.1.12(c) lze poslední výrok zapsat ve tvaru

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta \wedge |x - 3| \geq \varepsilon).$$

Položme $\varepsilon = 1$ a k libovolnému $\delta > 0$ definujme $x = 1 - \frac{\delta}{2}$. Platí $|x - 1| = \frac{\delta}{2}$, a tedy $0 < |x - 1| < \delta$. Navíc pro $|x - 3| = 2 + \frac{\delta}{2}$ platí $|x - 3| \geq 1 = \varepsilon$. Dokázali jsme tedy, že zadaný výrok (1.17) neplatí. ♣

1.8.3. Příklad. Necht $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Napište negaci výroku

$$\exists!x \in M : V(x) \quad (1.18)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu ??.

Řešení. Výrok (1.18) lze zapsat ve tvaru

$$\left(\exists x \in M : V(x)\right) \wedge \left(\forall y, z \in M : ((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z)\right) \quad (1.19)$$

První výrok v předchozí konjunkci říká, že existuje alespoň jeden prvek $x \in M$ takový, že platí $V(x)$. Druhý výrok v konjunkci říká, že pokud existují prvky y a z takové, že platí $V(y)$ a $V(z)$, pak jsou si rovny. Podle ?? a Věty 1.1.12 lze zapsat negaci výroku (1.19) ve tvaru

$$\left(\forall x \in M : \neg V(x)\right) \vee \left(\exists y, z \in M : (V(y) \wedge V(z) \wedge y \neq z)\right).$$

Neformálně lze poslední výrok vyjádřit takto: buď pro žádné $x \in M$ neplatí $V(x)$, nebo existují dvě různá $y, z \in M$, pro která platí $V(y)$ a $V(z)$. ♣

1.8.4. Příklad. Necht $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$. Pak A je shora omezená podmnožina v \mathbb{Q} , která v \mathbb{Q} nemá supremum, tj. neexistuje racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ s vlastnostmi z Definice 1.4.8.

Řešení. Množina A je zřejmě neprázdná, neboť $0 \in A$, a shora omezená, a to například číslem 2. Pro každé číslo $x \in \mathbb{Q}$, které je větší než 2, totiž platí nerovnosti $2 \leq 2^2 \leq x^2$, a tedy takové x není prvkem množiny A .

Postupujme nyní sporem a předpokládejme existenci čísla $q \in \mathbb{Q}$, které by bylo nejmenší horní závorou množiny A . Ukážeme, že pak platí $q^2 = 2$. Pokud by totiž bylo $q^2 < 2$, tj. $q < \sqrt{2}$, pak díky Větě 1.5.29 nalezneme racionální číslo $q' \in (q, \sqrt{2})$. Pak $0 \leq q'$ a $(q')^2 < 2$, tj. $q' \in A$. To je ovšem ve sporu s nerovností $q < q'$, tedy s faktem, že q je horní závora množiny A .

Pokud by bylo $q > \sqrt{2}$, opět díky Větě 1.5.29 existuje $q' \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, q)$. Pak pro každé $p \in A$ platí $p \leq q'$, neboť v opačném případě bychom dostali z nerovností $2 \leq (q')^2 < p^2 < 2$ spor. Racionální číslo q' je tedy horní závora množiny A , která je ostře menší než q , což je spor s faktem, že q je nejmenší horní závora množina A .

Zbývá tedy jediná možnost, totiž že $q^2 = 2$. To je ale spor s Větou 1.2.15, a proto supremum množiny A v množině racionálních čísel neexistuje. ♣

1.8.5. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz. Vzorec plyne z binomické věty (Věta 1.5.5), neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

♣

1.8.6. Příklad (součet aritmetické řady). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^n (ai + b) = \frac{1}{2}((n+1)a + 2b)n. \quad (1.20)$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna $\sum_{i=1}^1 (ai + b) = a + b$ a pravá $\frac{1}{2}(2a + 2b) = a + b$. Pro $n = 1$ tedy tvrzení platí. Předpokládejme platnost vztahu (1.20) pro pevně dané n , tj.

$$\sum_{i=1}^n (ai + b) = \frac{1}{2}((n+1)a + 2b)n.$$

Chceme dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \frac{1}{2}((n+2)a + 2b)(n+1). \quad (1.21)$$

Levou stranu (1.21) můžeme rozepsat jako

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \left(\sum_{i=1}^n (ai + b) \right) + (a(n+1) + b).$$

Sumu v závorkách na pravé straně ale umíme sečíst podle indukčního předpokladu. Provedením algebraických úprav pak dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) &= \left(\sum_{i=1}^n (ai + b) \right) + (a(n+1) + b) \\ &= \frac{1}{2}((n+1)a + 2b)n + (a(n+1) + b) \\ &= \frac{1}{2}((n+2)a + 2b)(n+1). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ♣

1.8.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n \geq n$.

Řešení. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna, neboť $2^1 = 2 \geq 1$. Předpokládejme, že nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$, tj. platí $2^n \geq n$. Potom také platí

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

Tím je nerovnost ověřena pro $n+1$ a tvrzení je podle principu matematické indukce dokázáno. ♣

1.8.8. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Řešení. Tvrzení platí pro $n = 3$, neboť

$$2 \cdot 3^2 = 18 \geq 16 = (3+1)^2.$$

Předpokládejme nyní platnost nerovnosti pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Předpokládáme tedy $2n^2 \geq (n+1)^2$. Potom

$$\begin{aligned} 2(n+1)^2 &= 2n^2 + 4n + 2 \geq (n+1)^2 + 4n + 2 \\ &= n^2 + 6n + 3 = (n^2 + 4n + 4) + (2n - 1) \\ &= (n+2)^2 + (2n - 1) \geq (n+2)^2. \end{aligned}$$

Tím je dokončen indukční krok. Z principu matematické indukce nyní vyplývá požadované tvrzení. ♣

1.8.9. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$.

Řešení. Opět použijeme princip matematické indukce popsáný v paragrafu 1.2.7, přičemž v prvním kroku dokážeme výrok pro $n = 4$. Tvrzení pro $n = 4$ platí, neboť $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Nyní učiníme indukční předpoklad, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$ a budeme se snažit dokázat $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Z indukčního předpokladu a Příkladu 1.8.8 plyne

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Podle (modifikovaného) principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $n \geq 4$. ♣

1.8.10 (varianta matematické indukce). Necht $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n) \tag{1.22}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která spočívá v ověření následujících tvrzení:

- (a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
- (b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Dokážeme, že z (a) a (b) plyne (1.22). Matematickou indukcí ověříme platnost tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(2n-1). \tag{1.23}$$

Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť platí $V(1)$. Předpokládejme, že tvrzení (1.23) platí pro n , tj. platí $V(2n-1)$. Podle (b) dostáváme, že platí i výrok $V(2n+1)$. Tím je podle principu matematické indukce, který byl popsán v paragrafu 1.2.7, dokázán výrok (1.23).

Obdobně dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(2n). \tag{1.24}$$

Nyní ověříme platnost (1.22). Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Příkladu 1.2.10 existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k - 1$ nebo $n = 2k$. V prvním případě platí (1.22) podle (1.23) a ve druhém případě platí (1.22) podle (1.24). Tím je tvrzení (1.22) dokázáno.

Použití této varianty matematické indukce ilustruje následující příklad.

1.8.11. Příklad (Bernoulliho nerovnost). Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall x \in [-2, \infty): (1+x)^n \geq 1+nx. \quad (1.25)$$

Řešení. Matematickou indukci ve variantě z 1.8.10 dokážeme platnost (1.25) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ vztah (1.25) zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne (1.25) z následujícího odhadu:

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x.$$

Tím je ověřen bod (a) v 1.8.10. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí (1.25). Použitím zřejmé nerovnosti $(1+x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2 \\ &= 1+(n+2)x+(2+x)nx^2+x^2. \end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2+x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$, platí $(2+x)nx^2+x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$. Odtud dostáváme pro každé $x \geq -2$ nerovnost $(1+x)^{n+2} \geq 1+(n+2)x$. Tím je dokázána implikace (b) podle 1.8.10, a tedy i Bernoulliho nerovnost. ♣

1.8.12. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Bernoulliho nerovnosti (Příklad 1.8.11) platí

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2,$$

odtud plyne $2(n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1}$. Použijeme-li indukční předpoklad a právě odvozenou nerovnost, obdržíme

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1) \\ &= \frac{2 \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

♣

1.8.13 (další varianta matematické indukce). Necht $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výroky

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \quad (1.26)$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

- (a) platí $V(1)$,
- (b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(2n)$,
- (c) pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí $V(n) \Rightarrow V(n-1)$.

Dokážeme, že z (a)–(c) plyne (1.26). Nejprve pomocí matematické indukce popsané v 1.2.7 odvodíme platnost výroku

$$\forall m \in \mathbb{N}: V(2^m). \quad (1.27)$$

Z (a) a (b) plyne platnost $V(2)$. Necht' nyní $V(2^m)$ platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$, a tedy $V(2^{m+1})$ platí podle (b). Tím je tvrzení (1.27) dokázáno.

Platnost tvrzení (1.26) dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $V(n_0)$ neplatí. Položme

$$B = \{j \in \mathbb{N}; j \leq 2^{n_0} \text{ a } V(j) \text{ neplatí}\}.$$

Číslo 1 je dolní závorou množiny B a číslo 2^{n_0} je horní závorou množiny B . Množina B je podmnožinou \mathbb{N} , takže z její omezenosti plyne, že je konečná. Množina B je neprázdná, neboť podle našeho předpokladu $V(n_0)$ neplatí a díky Příkladu 1.8.7 máme $n_0 \leq 2^{n_0}$, takže $n_0 \in B$. Množina B má tedy maximum podle Věty 1.6.13. Označme $G = \max B$. Platí tudíž $G + 1 \notin B$. Poněvadž podle (1.27) platí $V(2^{n_0})$, a tedy $2^{n_0} \notin B$, dostáváme $G < 2^{n_0}$. Odtud plyne, že tvrzení $V(G + 1)$ platí. Podle (c) tedy platí i $V(G)$, což je spor s $G \in B$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Použití právě uvedené varianty matematické indukce ukážeme v následujícím příkladu.

1.8.14. Příklad (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem). Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (1.28)$$

Řešení. Postupně ověříme (a)–(c) z 1.8.13, přičemž $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je tvrzení, které říká, že pro každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost (1.28).

(a) Zřejmě platí $\frac{x_1}{1} \geq \sqrt[1]{x_1} = x_1$.

(b) Nejprve ověříme platnost nerovnosti (1.28) pro $n = 2$. Pro libovolné $A, B \in [0, \infty)$ platí podle Příkladu 1.2.9

$$\frac{A + B}{2} \geq \sqrt{AB}. \quad (1.29)$$

Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(2n)$. Mějme $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in [0, \infty)$. Použijeme indukční předpoklad nejprve pro n -tici x_1, \dots, x_n a poté pro n -tici x_{n+1}, \dots, x_{2n} . Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Nerovnost (1.29) použijeme pro nezáporná čísla

$$A = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad \text{a} \quad B = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}.$$

Obdržíme nerovnost

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}} \right) \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}.$$

Tento odhad spolu s (1.30) dává

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}} \right) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení $V(2n)$, a tedy i bod (b).

(c) Předpokládejme, že platí $V(n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Budeme dokazovat tvrzení $V(n-1)$. Necht' x_1, x_2, \dots, x_{n-1} jsou libovolná nezáporná reálná čísla. Označme

$$D = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Použijeme indukční předpoklad pro n -tici čísel y_1, \dots, y_n definovanou předpisem

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \dots \quad y_{n-1} = x_{n-1}, \quad y_n = D.$$

Z indukčního předpokladu pak plyne, že

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}. \quad (1.31)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} &= \frac{(n-1)D + D}{n} = D \quad \text{a} \\ \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{D}. \end{aligned}$$

Pak můžeme přepsat (1.31) ve tvaru

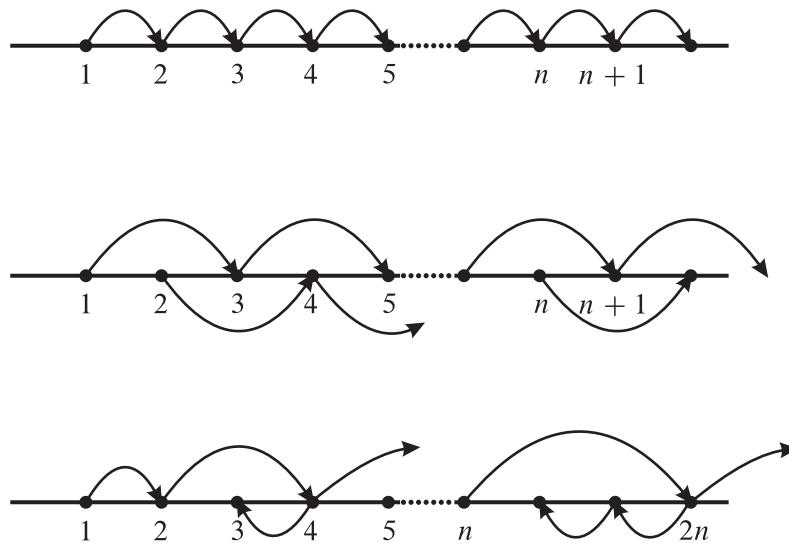
$$D \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \sqrt[n]{D}.$$

Odtud odvodíme

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} = D \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

čímž jsme dokázali tvrzení $V(n-1)$, a tedy i bod (c) varianty matematické indukce z 1.8.13. Tím je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dokázána. \clubsuit

1.8.15. Poznámka. Necht' $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Následující obrázky neformálně zachycují, jak ve variantách matematické indukce z paragrafů 1.2.7, 1.8.10 a 1.8.13 dochází k ověřování platnosti výroků $V(n)$.



OBRÁZEK 8.

1.8.16. Příklad. Ukažte, že každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, je dělitelné prvočíslem.

Řešení. Použijeme úplnou matematickou indukci (vizte 1.2.8). Číslo 2 je prvočíslo, a proto tvrzení platí. Necht $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $2 \leq k \leq n$. Necht D je množina všech $d \in \mathbb{N}, 1 < d < n + 1$, která dělí $n + 1$. Pokud je D prázdná množina, pak je $n + 1$ prvočíslo, a indukční krok je v tomto případě hotov, neboť prvočíslo $n + 1$ dělí $n + 1$. Předpokládejme tedy, že $D \neq \emptyset$. Vezměme $d \in D$. Podle indukčního předpokladu existuje prvočíslo p , které dělí d . Protože d dělí $n + 1$, dělí p také $n + 1$ a tvrzení je dokázáno. ♣

1.8.17. Příklad (Eukleidés⁸). Ukažte, že množina prvočísel je nekonečná.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel. Necht p_1, p_2, \dots, p_k jsou všechna prvočísla. Položme $p = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$. Tvrdíme, že p je prvočíslo. Pokud by tomu tak totiž nebylo, existovalo by $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že p_i dělí p (Příklad 1.8.16). Tedy $p = p_i n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$1 = p - p_1 \cdots p_k = p_i n - p_1 \cdots p_k = p_i (n - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k),$$

takže p_i dělí 1, což je spor. Tedy p je prvočíslo, které je však větší než libovolné z prvočísel p_1, \dots, p_k . To je ale spor s naším předpokladem. ♣

1.8.18. Příklad (vlastnosti průniku). Necht A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

⁸Eukleidés (asi 325 př. n. l. - asi 260 př. n. l.)

- (a) $\emptyset \cap A = \emptyset$,
- (b) $A \cap A = A$,
- (c) $A \cap B = B \cap A$,
- (d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- (e) $A \cap B \subset A$,
- (f) jestliže $C \subset A$ a $C \subset B$, pak $C \subset (A \cap B)$,
- (g) $A = A \cap B$ právě tehdy, když $A \subset B$,
- (h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cap B) \subset (C \cap D)$.

Řešení. Tvrzení snadno plynou přímo z definic průniku a inkluze. Dokažme však alespoň tvrzení (g). Je-li $A \subset B$, pak z (f) máme $A \subset A \cap B$, protože $A \subset B$ i $A \subset A$. Obrácená inkluze plyne z (e). Tedy $A = A \cap B$.

K důkazu obrácené implikace předpokládejme platnost rovnosti $A = A \cap B$. Pak z (e) plyne $A = A \cap B \subset B$. ♣

1.8.19. Příklad (vlastnosti sjednocení). Necht' A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

- (a) $\emptyset \cup A = A$,
- (b) $A \cup A = A$,
- (c) $A \cup B = B \cup A$,
- (d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- (e) $A \subset A \cup B$,
- (f) jestliže $A \subset C$ a $B \subset C$, pak $(A \cup B) \subset C$,
- (g) $A = A \cup B$ právě tehdy, když $B \subset A$,
- (h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cup B) \subset (C \cup D)$.

Řešení. Tvrzení plynou snadno z definic sjednocení a inkluze. ♣

1.8.20. Příklad (obraz množiny a množinové operace). Necht' X, Y jsou množiny, $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení a $A, B \subset X$.

- (a) Dokažte, že pokud $A \subset B$, pak platí $f(A) \subset f(B)$.
- (b) Dokažte, že platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (c) Dokažte, že platí $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dokažte, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností.

Řešení. (a) Předpokládejme, že $y \in f(A)$. Potom existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak platí také $x \in B$, a tedy $y = f(x) \in f(B)$. Tím je inkluze $f(A) \subset f(B)$ dokázána.

(b) Protože $A \subset A \cup B$, platí podle již dokázaného tvrzení (a), že $f(A) \subset f(A \cup B)$. Obdobně máme $f(B) \subset f(A \cup B)$. Tedy $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Je-li $y \in f(A \cup B)$, potom existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$, a tedy $y = f(x) \in f(A)$, nebo $x \in B$, a pak $y = f(x) \in f(B)$. V obou případech, které se nemusí vylučovat, dostáváme $y \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dohromady tedy platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) Poněvadž platí $A \cap B \subset A$ a $A \cap B \subset B$, dostáváme podle tvrzení (a), že $f(A \cap B) \subset f(A)$ a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Odtud pak plyne $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Dokážeme, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností. Uvažujme množiny $X = Y = \{0, 1\}$, zobrazení $f: X \rightarrow Y$ definované předpisem $f(0) = f(1) = 0$ a množiny $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. Pak $A \cap B = \emptyset$, a tedy $f(A \cap B) = \emptyset$, ale $f(A) = f(B) = \{0\}$, takže $f(A) \cap f(B) = \{0\}$. Tudíž $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. ♣

1.8.21. Příklad (vzor množiny a množinové operace). Necht X, Y jsou množiny, $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení a $A, B \subset Y$. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Pokud $A \subset B$, pak $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
- (b) Platí $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- (c) Platí $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- (d) Platí $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in f^{-1}(A)$, potom $f(x) \in A$. Pak také $f(x) \in B$, a tedy $x \in f^{-1}(B)$.

(b) Podle bodu (a) platí $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$ a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Odtud plyne inkluze $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Předpokládejme, že platí $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Potom $f(x) \in A \cup B$. Platí tedy $f(x) \in A$ nebo $f(x) \in B$. V prvním případě platí $x \in f^{-1}(A)$ a ve druhém $x \in f^{-1}(B)$. Platí tedy $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(c) a (d) Důkazy lze provést obdobně jako v předchozích případech. ♣

1.8.22. Příklad (další vlastnosti obrazu a vzoru). Necht X, Y jsou množiny, $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení.

- (a) Dokažte, že pro každé $A \subset X$ platí $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- (b) Necht $\mathcal{H}(f) = Y$. Dokažte, že pro každé $B \subset Y$ platí $f(f^{-1}(B)) = B$.
- (c) Dokažte, že f je prosté právě tehdy, když pro každou množinu $A \subset X$ platí $f^{-1}(f(A)) = A$.
- (d) Dokažte, že f je „na“ právě tehdy, když pro každou množinu $B \subset Y$ platí $f(f^{-1}(B)) = B$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in A$, potom $f(x) \in f(A)$. Pak dostáváme $x \in f^{-1}(f(A))$.

(b) Necht $B \subset Y$. Pokud $y \in B$, pak existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$, neboť $\mathcal{H}(f) = Y$. Potom $x \in f^{-1}(B)$, a tedy $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Předpokládejme nyní $y \in f(f^{-1}(B))$. Potom existuje $x \in f^{-1}(B)$ takové, že $f(x) = y$. Odtud plyne $y = f(x) \in B$, což dokazuje druhou inkluzi.

(c) Necht $f: X \rightarrow X$ je prosté a $A \subset X$. Z (a) víme, že $A \subset f^{-1}(f(A))$. Mějme tedy $x \in f^{-1}(f(A))$. Pak existuje $x' \in A$ takové, že $f(x) = f(x')$. Protože zobrazení f je prosté, platí $x = x'$, a tedy $x \in A$.

Není-li f prosté, existují dva různé prvky $x, x' \in X$ takové, že $f(x) = f(x')$. Položme $A = \{x\}$. Pak $x' \in f^{-1}(f(A))$, a tedy $A \neq f^{-1}(f(A))$.

(d) Důkaz je podobný jako v (c). ♣

1.8.23. Příklad (hustota $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v \mathbb{R}). Necht $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Potom existuje $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < z < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.5.29 existuje racionální číslo $y \in (a, b)$. Podle téže věty aplikované na interval (y, b) nalezneme racionální číslo $y' \in (y, b)$. Položme $z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}}$. Protože $\sqrt{2} > 1$, máme

$$a < y < z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}} < y + (y' - y) = y' < b.$$

Kdyby bylo číslo z racionální, pak by také číslo $\sqrt{2} = \frac{y'-y}{z-y}$ bylo racionální, což by bylo ve sporu s Příkladem 1.2.15. Číslo z je tedy iracionální, a tím je tvrzení dokázáno. ■

1.8.24. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Řešení. Protože zřejmě $\max M = 1$, platí podle Věty 1.5.18 také $\sup M = 1$. Dále platí, že všechny prvky v M jsou kladné, a tak je 0 dolní závorou M . Zdá se, že čísla z množiny M mohou být „libovolně malá“, a tedy žádné kladné číslo by nemělo být dolní závorou M . Proto je 0 vhodným kandidátem na infimum M . Ukážeme, že opravdu platí $\inf M = 0$. Ověříme platnost podmínek (c) a (d) z 1.5.14.

Platnost první podmínky plyne z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \geq 0$. Pro ověření druhé podmínky musíme ukázat, že

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \exists x \in M : y > x.$$

Mějme tedy $y \in \mathbb{R}, y > 0$, dáno. Z Věty 1.5.27 plyne existence přirozeného čísla n splňujícího $n > \frac{1}{y}$. Pak $\frac{1}{n} \in M$ a $\frac{1}{n} < y$. Tím jsme pro číslo 0 ověřili podmínky (c) a (d) z 1.5.14, a platí tedy $\inf M = 0$. ♣

1.8.25. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = [0, 1)$.

Řešení. Protože $\min M = 0$, platí podle Věty 1.5.18 také $\inf M = 0$. Snadno odhadneme, že supremem množiny M bude patrně 1. Tuto domněnku nyní dokážeme.

Platnost podmínky (c) z 1.5.14 plyne přímo z definice intervalu. Pro ověření podmínky (d) dokážeme

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1 \exists x \in [0, 1) : y < x.$$

Necht tedy $y \in \mathbb{R}, y < 1$. Položme $x = \max\{0, \frac{1}{2}(1 + y)\}$. Díky tomu, že platí $y < 1$, dostáváme $0 \leq x < 1$, a tedy $x \in [0, 1)$. Z nerovnosti $y < 1$ dále plyne odhad $y < \frac{1}{2}(1 + y)$, a proto $y < x$. Tím je podmínka (d) ověřena, a tedy skutečně $\sup M = 1$. ♣

1.8.26. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \{\frac{p}{p+q}; p, q \in \mathbb{N}\}$.

Řešení. Pro $p, q \in \mathbb{N}$ je hodnota zlomku $\frac{p}{p+q}$ kladné číslo menší než 1.

Provedme nyní následující neformální úvahu. Necht $p = 1$ a q je „velké“ číslo. Pak zlomek $\frac{p}{p+q}$ bude „blízko“ 0. Obdobně, je-li $q = 1$ a p je „velké“ číslo, pak je

zlomek $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+\frac{1}{p}}$ „blízko“ 1. Jako rozumná se tedy jeví domněnka, že $\inf M = 0$ a $\sup M = 1$.

Dokážeme nejprve $\inf M = 0$. Platnost podmínky (c) z 1.5.14 plyne z nerovnosti $\frac{p}{p+q} \geq 0$, která platí pro každé $p, q \in \mathbb{N}$. Pro ověření druhé podmínky máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \exists p, q \in \mathbb{N} : y > \frac{p}{p+q}.$$

Mějme $y \in \mathbb{R}, y > 0$, dáno. Položíme $p = 1$ a nalezneme pomocí Věty 1.5.27 $q \in \mathbb{N}$ splňující $q > \frac{1}{y-1}$. Pak $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+q} < y$. Tím jsem dokončili důkaz, že $\inf M = 0$.

Nyní ověříme, že $\sup M = 1$. Protože platí $\frac{p}{p+q} \leq 1$ pro každé $p, q \in \mathbb{N}$, je podmínka (a) z 1.5.14 splněna. Pro ověření podmínky (b) máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1 \exists p, q \in \mathbb{N} : y < \frac{p}{p+q}.$$

Položme $q = 1$. Z Věty 1.5.27 nalezneme $p \in \mathbb{N}$ splňující $p > \frac{y}{1-y}$. Pak platí $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{p+1} > y$. Ověřili jsme, že $\sup M = 1$. ♣

1.8.27. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

- Dokažte, že funkce f je klesající na $(0, 1]$, rostoucí na $[1, \infty)$ a v bodě 1 má minimum.
- Dokažte, že funkce $g = f|_{(0,1]}$, $h = f|_{[1,\infty)}$ jsou prosté.
- Dokažte, že platí $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Nalezněte inverzní funkci k funkcím g a h .
- Nalezněte $f \circ f$ a $\mathcal{H}(f \circ f)$.

Řešení. (a) Vezměme $0 < x < y \leq 1$. Pak je nerovnost $f(x) > f(y)$ ekvivalentní s nerovností

$$\frac{(y-x)(1-xy)}{xy} > 0,$$

která platí díky nerovnosti $xy < y^2 \leq 1$. Obdobně ověříme, že f roste na intervalu $[1, \infty)$. V bodě 1 má tedy minimum, jehož hodnota je $f(1) = 2$.

(b) Funkce g je klesající na $(0, 1]$ a funkce h rostoucí na $[1, \infty)$. Jsou tedy prosté.

(c) Protože je g klesající na $(0, 1]$ a $g(1) = f(1) = 2$, zjevně platí $\mathcal{H}(g) \subset [2, \infty)$. Mějme nyní dáno $y \in [2, \infty)$. Pak rovnice $x + \frac{1}{x} = y$ má dle 1.7.10 dva kořeny

$$x_1 = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 4}).$$

Protože hledáme x splňující $g(x) = y$ v intervalu $(0, 1]$, je tímto hledaným x číslo x_2 , neboť $x_2 \in [0, 1]$, jak lze snadno ověřit. Tedy $\mathcal{H}(g) = [2, \infty)$.

Pro $y \in [2, \infty)$ jsem našli $x = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 4})$ splňující $g(x) = y$. Protože již víme, že $g: (0, 1] \rightarrow [2, \infty)$ je bijekce, platí

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 4}), \quad y \in [2, \infty).$$

Obdobně odvodíme, že $\mathcal{H}(h) = [2, \infty)$ a $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4})$ pro $y \in [2, \infty)$. Zřejmě tedy $\mathcal{H}(f) = [2, \infty)$.

(d) Protože $\mathcal{H}(f) = [2, \infty) \subset (0, \infty)$, je $f \circ f$ dobře definované a pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Dále platí dle (c) a (a)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f \circ f) &= f(f((0, \infty))) = f([2, \infty)) \\ &\subset [f(2), \infty) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right).\end{aligned}$$

Mějme nyní dáno $z \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. Dle (b) a (c) existuje $y \in [1, \infty)$ splňující $f(y) = z$. Protože je h rostoucí, platí $y \geq 2$, jinak by totiž platilo $z = f(y) < f(2) = \frac{5}{2}$, což by byl spor. Opět podle (c) existuje $x \in [1, \infty)$ splňující $f(x) = y$. Tedy

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(y) = z$$

a $\mathcal{H}(f \circ f) \supset \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. Tedy $\mathcal{H}(f \circ f) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. ♣

Limita posloupnosti

2.1. Úvod

V běžném životě se často setkáváme s posloupnostmi reálných čísel. Může jít například o posloupnost meteorologických měření teploty vzduchu, o posloupnost makroekonomických dat jako je například inflace nebo nezaměstnanost a podobně. Takové posloupnosti sestávají z konečného počtu členů. Formální definice konečné posloupnosti reálných čísel vypadá následovně (srovnejte s Definicí 1.4.29(a)).

2.1.1. Definice. Konečnou posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny reálných čísel \mathbb{R} . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Číslo a_k nazýváme **k -tým členem** této posloupnosti.

V řadě modelů z různých vědních oborů se používají i posloupnosti, které mají nekonečný počet členů. Zde je formální definice (srovnejte s Definicí 1.4.29(b)).

2.1.2. Definice. Nekonečnou posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel \mathbb{N} do množiny reálných čísel \mathbb{R} . Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme **n -tým členem** této posloupnosti.

V dalším textu budeme posloupností rozumět vždy nekonečnou posloupnost.

2.1.3. Nyní uvedeme dva jednoduché modely z oblasti bankovníctví. Klient banky si u ní uloží částku ve výši a korun českých s ročním úrokem p procent. Po uplynutí jednoho roku bude tedy zůstatek na účtu roven $(1 + \tilde{p})a$, kde $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Na konci n -tého roku bude potom zůstatek a_n roven $(1 + \tilde{p})^n a$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy vyjadřuje vývoj stavu konta na konci jednotlivých let.

Ve druhém příkladě půjčí banka klientovi částku ve výši a korun českých s úrokem p procent na dobu jednoho roku. Po uplynutí lhůty musí tedy dlužník zaplatit částku $(1 + \tilde{p})a$, kde opět $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Pokud by banka rozdělila rok na dvě půlroční úrokovací období, byla by dlužná částka na konci prvního půlroku rovna $(1 + \frac{\tilde{p}}{2})a$ a na konci roku by musel klient zaplatit částku $(1 + \frac{\tilde{p}}{2})^2 a$. Pokud by banka rozdělila rok na n stejně dlouhých úrokovacích období, musel by klient na konci roku zaplatit částku $b_n = (1 + \frac{\tilde{p}}{n})^n a$.

Nyní se můžeme ptát, zda budou hodnoty a_n nebo b_n s rostoucím n růst. Pokud ano, mohou růst „nade všechny meze“ nebo se budou „blížit“ k nějaké hodnotě? K zodpovězení těchto otázek použijeme výsledky, které odvodíme v této kapitole.

Pomocí posloupnosti s nekonečným počtem členů můžeme také aproximovat hodnotu jistého čísla A , které je pro nás z nějakého důvodu zajímavé. Členy takové posloupnosti by měly s rostoucím n stále přesněji aproximovat hodnotu A . Takto postupoval Archimédés, když počítal délku obvodu kruhu přibližně pomocí obvodu pravidelného mnohoúhelníka. Čím měl mnohoúhelník více stran, tím byl jeho obvod lepším přiblížením skutečnému obvodu kruhu.

V uvedených příkladech, ke kterým se ještě později vrátíme, jsme neformálně užili slov „blížit se“ a „přibližovat se“ o členech posloupnosti. V této kapitole dáme těmto obrátům přesný matematický význam zavedením pojmu limita posloupnosti. Pojem limity má pro matematickou analýzu zásadní význam a v tomto textu se s ním budeme setkávat téměř neustále. Ještě před jeho zavedením se budeme krátce zabývat základními vlastnostmi posloupností.

2.1.4. Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označuje posloupnost, tedy zobrazení z \mathbb{N} do \mathbb{R} , zatímco symbol $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ značí množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jde tedy o podmnožinu \mathbb{R} . Známe-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak známe i $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou sice různé, ale mají stejné množiny členů, neboť $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \{b_n; n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

2.1.5. Definice. Necht $c \in \mathbb{R}$. Posloupnost $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, se nazývá **konstantní**.

2.1.6. Množina všech členů konstantní posloupnosti je jednoprvková.

2.1.7. Dalšími jednoduchými příklady posloupností, s nimiž se ještě setkáme, jsou $\{n\}$ a $\{\frac{1}{n}\}$. Množinu všech členů posloupnosti tvoří v prvním případě množina \mathbb{N} , ve druhém případě množina $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

V následujících třech příkladech jsou posloupnosti zadány rekurentně (viz 1.4.30).

2.1.8. Fibonacciova¹ posloupnost je dána následujícím způsobem: $a_1 = 1, a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Zde je prvních osm členů této posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Další informace o Fibonacciově posloupnosti lze nalézt například v knize [4].

2.1.9. Položme $p_1 = 2$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ již máme definován člen p_n . Podle Příkladu 1.8.17 je množina prvočísel nekonečná, a proto je množina $A_n = \{k \in \mathbb{N}; k > p_n, k \text{ je prvočíslo}\}$ neprázdná. Podle Věty 1.5.30 má tato množina nejmenší prvek. Položme $p_{n+1} = \min A_n$. Tím jsme rekurentně definovali nekonečnou posloupnost $\{p_n\}$, kde p_n je n -té prvočíslo, tedy $p_1 = 2, p_2 = 3,$

¹Leonardo Fibonacci (asi 1170-1250)

$p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, \dots$ Podotkněme, že určit n -tý člen této posloupnosti pro dané $n \in \mathbb{N}$ je obecně velice obtížné. Další informace o prvočíslech je možné nalézt například v knize [6].

Zadání posloupnosti může být někdy velice osobité, jak ukazuje následující příklad.

2.1.10. Posloupnost, označovaná v anglicky psané literatuře výrazem **look and say sequence**, jejíž začátek má tvar

$$1, 11, 21, 1211, 111221, \dots,$$

je zadána následujícím předpisem: $a_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme hodnotu členu a_{n+1} „speciálním přečtením“ číslic v dekadickém zápisu členu a_n . Člen $a_1 = 1$ přečteme jako „jedna jednička“, což zapíšeme ve tvaru $a_2 = 11$. Člen a_2 přečteme jako „dvě jedničky“ a dostaneme $a_3 = 21$. Tímto způsobem postupujeme dále. Například člen a_6 získáme přečtením členu $a_5 = 111221$ ve formě „tři jedničky, dvě dvojky, jedna jednička“, takže $a_6 = 312211$. Posloupnost je tedy zadána rekurentně a přesná formulace její definice by vyžadovala ještě jisté úsilí. Další informace o této kuriózní posloupnosti lze nalézt například v článku [5].

Nyní zavedeme několik nových pojmů, které popisují důležité základní vlastnosti posloupností.

2.1.11. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

2.1.12. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy shora omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Podobně posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq K$. Konečně omezenost posloupnosti $\{a_n\}$ je charakterizována v následujícím lemmatu.

2.1.13. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.

Důkaz. \Rightarrow Díky omezenosti množiny $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \leq a_n \leq B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \leq a_n \leq K$, a tedy $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

\Leftarrow Necht $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. ■

2.1.14. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,

- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, jestliže je nerostoucí nebo neklesající. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

2.1.15. Poznámka. Upozorněme na to, že výrok „Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající.“ není negací výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.“ Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ není klesající, avšak není ani neklesající. Podobně je tomu s výroky „Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.“ a „Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.“

2.1.16. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\{a_n\}$ je neklesající právě tehdy, když platí

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n: a_m \leq a_n.$$

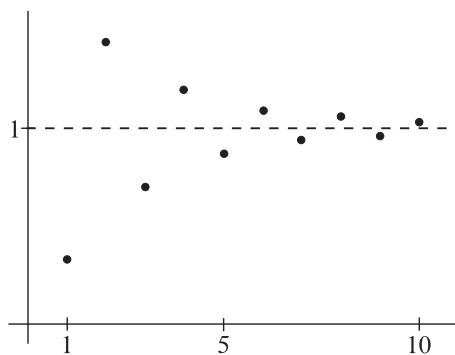
Implikaci \Rightarrow lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonic.

2.1.17. Definice. Necht $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Další výklad začneme dvěma příklady. Uvažujme nejprve posloupnost $\{a_n\}$ definovanou předpisem $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zdá se být zřejmé, že pro tuto posloupnost nelze nalézt nějaké reálné číslo, k němuž by se její členy „blížily“ (vizte Obrázek 1).

Necht nyní $a_n = 1 + (-\frac{2}{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Následující obrázek zachycuje chování prvních deseti členů této posloupnosti.



OBRÁZEK 1.

V tomto případě se naopak zdá být zřejmé, že členy posloupnosti $\{a_n\}$ se s rostoucím n „blíží“ k číslu 1. Tento intuitivní náhled nyní vyjádříme pomocí matematicky přesných pojmů.

2.2.1. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou A** , jestliže platí

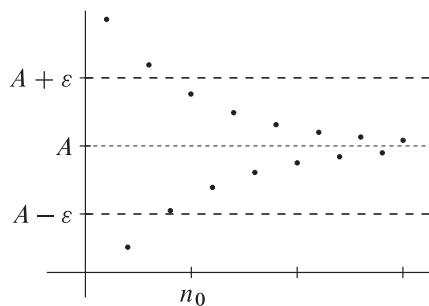
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

2.2.2. Chceme-li tvrdit, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je reálné číslo A , musíme ověřit podmínku (2.1). Pro libovolné zadané kladné číslo ε musíme nalézt přirozené číslo (index) n_0 takové, aby byla odchylka každého členu posloupnosti s indexem n větším nebo rovným tomuto n_0 od hodnoty A menší než ε , tedy $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, hledáme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, aby platil výrok

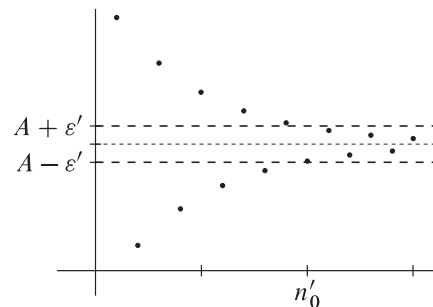
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Nalezené n_0 bude obecně záviset na volbě ε (viz následující dva obrázky).

Na Obrázku 2 vidíme jednu z možných voleb čísla n_0 pro zadané ε . Na Obrázku 3 bylo zadáno ε' menší než ε . Pro toto nové zadání ovšem index n_0 již podmínku (2.2) nesplňuje, neboť existují $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, pro která nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon'$ neplatí. Proto musíme nalézt jiný index n'_0 (větší než n_0), aby podmínka (2.2), kde ε je zaměněno za ε' a n_0 je zaměněno za n'_0 , byla splněna.



OBRÁZEK 2.



OBRÁZEK 3.

2.2.3. Na ověřování podmínky (2.1) je možné také nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči. První hráč (naš protivník) volí v prvním tahu hry kladné reálné číslo ε . Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry přirozené číslo n_0 . Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Pokud $|a_n - A| \geq \varepsilon$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát libovolnou takovou partii, je limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo A . Všimněme si, že ve druhém tahu volíme n_0 , aniž bychom věděli, které n zvolí náš protivník v tahu následujícím. Tato skutečnost odpovídá pořadí kvantifikátorů v podmínce (2.1).

2.2.4. Věta (jednoznačnost limity). Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou B . Potom platí $A = B$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom platí $n_0 \geq n_A$ i $n_0 \geq n_B$, a tedy $|a_{n_0} - A| < \varepsilon$ i $|a_{n_0} - B| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (1.9) máme

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - a_{n_0} + a_{n_0} - B| \\ &\leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je podle Lemmatu 1.5.13 $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. ■

2.2.5. Označení. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, pak tato limita je určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A , pak píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ nebo $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme někdy pouze $\lim a_n = A$ nebo $a_n \rightarrow A$.

2.2.6. K zavedení symbolu $\lim a_n$ potřebujeme tvrzení Věty 2.2.4. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu, pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl.

2.2.7. Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že **má vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

2.2.8. Příklad. Necht' $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

Řešení. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, takže podle definice limity dostáváme $\lim a_n = c$. ♣

Následující příklad ukazuje, že hodnota limity konvergentní posloupnosti nemusí být prvkem množiny jejích členů.

2.2.9. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí $\frac{1}{n} > 0$, a tedy $\frac{1}{n} > -\varepsilon$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$. To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = 0$. ♣

2.2.10. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{-2}{n+2} \right| = \frac{2}{n+2}.$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Tuto vlastnost má jakékoli $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 2$. Existence takového n_0 vyplývá z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, zřejmě platí $\frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon.$$

Podle definice limity tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1. \quad \clubsuit$$

2.2.11. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Je užitečné uvědomit si, jak vypadá negace výroku „ $\{a_n\}$ je konvergentní“. Posloupnost $\{a_n\}$ nekonzverguje, tj. nemá vlastní limitu, právě tehdy, když platí

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

2.2.12. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n^4\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Necht A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. S pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.27) nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq \max\{|A| + 1, n_0\}$. Pak platí $n^4 \geq n \geq |A| + 1$, a tedy podle Důsledku 1.5.11(a) platí

$$|n^4 - A| \geq n^4 - |A| \geq |A| + 1 - |A| = 1.$$

Podle 2.2.11 je tedy posloupnost $\{n^4\}$ divergentní. \clubsuit

Máme-li dokázat, že zadaná posloupnost nemá vlastní limitu, pak musíme pro každé číslo $A \in \mathbb{R}$ ukázat, že A není limitou této posloupnosti. Předpokládáme tedy, že A je libovolné reálné číslo a v závislosti na něm volíme vhodné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. V předchozím příkladu bylo sice možné pracovat s libovolným kladným reálným číslem ε , ale v dalších dvou úlohách bude volba vhodného ε hrát důležitou roli.

2.2.13. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Necht A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n liché. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n sudé. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ tedy nemá vlastní limitu. \clubsuit

2.2.14. Poznámka. Na rozdíl od Příkladu 2.2.12 nelze při řešení Příkladu 2.2.13 volit ε libovolně. Například volba $\varepsilon = 3$ by k řešení nevedla. Číslo ε zde musíme zvolit „dostatečně malé“.

V Příkladu 2.2.10 jsme na základě definice ověřili, že číslo 1 je opravdu limitou posloupnosti $\{\frac{n}{n+2}\}$ ve smyslu Definice 2.2.1. V Příkladech 2.2.12 a 2.6.2 jsme užili této definice k důkazu neexistence vlastní limity příslušných posloupností. Definice sama nám ale nedává návod, jak limitu vypočítat. V další části této kapitoly odvodíme věty, které objasní základní vlastnosti limit a dále budou užitečné při výpočtech limit konkrétních posloupností.

2.2.15. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Necht existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

Tedy $\lim b_n = A$. ■

2.2.16. Poznámka. Předcházející větu lze formulovat i následujícím způsobem. Změníme-li u dané konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost $\{b_n\}$ stejnou limitu jako posloupnost $\{a_n\}$. Pokud je totiž množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \neq b_n\}$ konečná, potom je omezená, a tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = b_n$.

2.2.17. Necht $c \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Necht existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = c$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, jak vyplývá z Příkladu 2.2.8 a Věty 2.2.15.

Nyní zformulujeme několik podmínek ekvivalentních podmínce (2.1) v definici limity posloupnosti. Často je totiž snazší ověřit některou z těchto podmínek namísto podmínky původní.

2.2.18. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < K\varepsilon. \quad (2.3)$$

Důkaz. \Rightarrow Necht $\lim a_n = A$. Pak z definice limity plyne, že (2.3) platí pro $K = 1$.

\Leftarrow Necht $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (2.3). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle (2.3) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. K zadanému $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy $\lim a_n = A$. ■

2.2.19. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Důkaz. \Rightarrow Položme $\varepsilon_0 = 1$. Potom (2.4) plyne z definice limity a 1.1.25, kde klademe $M_1 = (0, \infty)$, $M_2 = (0, 1)$ a $V(\varepsilon)$ je výroková forma

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

\Leftarrow Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$. Potom $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$, a tedy podle (2.4) k němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Tedy $\lim a_n = A$. ■

2.2.20. Z Lemmatu 2.2.19 plyne, že pro ověření existence limity posloupnosti stačí vyšetřit jen ε z intervalu $(0, \varepsilon_0)$, kde ε_0 je libovolně malé pevně stanovené číslo. Stačí se tedy zabývat jen „malými hodnotami“ ε , což v dalším textu usnadní některé důkazy.

2.2.21. V definici limity posloupnosti (Definice 2.2.1) může být nerovnost $n \geq n_0$ ekvivalentně nahrazena nerovností $n > n_0$. Podobně nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ může být ekvivalentně nahrazena nerovností $|a_n - A| \leq \varepsilon$. První z těchto tvrzení je snadné. Pro důkaz druhého tvrzení si nejprve uvědomíme, že z podmínky (2.1) triviálně plyne výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| \leq \varepsilon. \quad (2.5)$$

Jestliže naopak platí (2.5), potom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < 2\varepsilon.$$

Odtud pomocí Lemmatu 2.2.18 vyplývá (2.1).

Následující dvě věty ukazují vztahy mezi limitami posloupností $\{a_n\}$ a $\{|a_n|\}$.

2.2.22. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí podle Důsledku 1.5.11(a) odhad $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: ||a_n| - |A|| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

2.2.23. Poznámka. Opačná implikace ve Větě 2.2.22 obecně neplatí. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu (viz Příklad 2.2.13), ale $\lim |(-1)^n| = \lim 1 = 1$. Pokud ovšem $A = 0$, pak opačná implikace platí, jak ukazuje následující věta.

2.2.24. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí: $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: ||a_n|| < \varepsilon.$$

Protože $||a_n|| = |a_n|$, jsou oba výroky ekvivalentní. ■

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi existencí vlastní limity a omezeností posloupnosti.

2.2.25. Věta. Necht $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ omezená.

Důkaz. Necht $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Existuje tedy $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. Podle definice k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{|a_n|; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.13 omezená. Necht $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom

$$|a_n| \leq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ |A| + 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položíme $K = \max\{M, |A| + 1\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$, a tedy je posloupnost $\{a_n\}$ omezená. ■

2.2.26. Z Věty 2.2.25 vyplývá, že každá neomezená posloupnost je divergentní.

2.2.27. Poznámka. Omezenost posloupnosti není postačující podmínkou pro její konvergenci. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, avšak není konvergentní.

2.2.28. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.29. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Následující posloupnosti jsou vybranými posloupnostmi z posloupnosti $\{a_n\}$:

- posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ členů s „lichým indexem“ a posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ členů se „sudým indexem“, kde příslušnými posloupnostmi $\{n_k\}$ jsou po řadě $\{2k-1\}$ a $\{2k\}$;
- posloupnost $\{a_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k+1, k \in \mathbb{N}$;
- posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k^2, k \in \mathbb{N}$;
- posloupnost $\{a_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde p_k je k -té prvočíslo, $k \in \mathbb{N}$.

2.2.30. Poznámka. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v Definici 2.2.28 určuje výběr těch členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, které se objeví v podposloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí být podle definice rostoucí. Například posloupnosti $a_2, a_2, a_2, a_2, \dots$ nebo $a_3, a_2, a_1, a_4, a_5, a_6, \dots$ obecně neurčují podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.31. Necht posloupnost $\{a_n\}$ je zadána předpisem $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme její podposloupnosti $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1$. Také posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$. Konečně posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$ splývá s původní posloupností, a tedy je divergentní.

V 2.2.31 jsme k zadané divergentní posloupnosti našli dvě její konvergentní podposloupnosti s různými limitami a jednu její divergentní podposloupnost. Posloupnosti vybrané z divergentní posloupnosti mohou tedy konvergovat k různým limitám nebo mohou divergovat. Pro posloupnosti vybrané z konvergentní posloupnosti je situace jednodušší, jak ukazuje následující věta.

2.2.32. Věta (limita vybrané posloupnosti). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

2.2.33. Lemma. Necht $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k . Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \geq k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí. Z Věty 1.5.24 plyne, že $n_{k+1} \geq k + 1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. ■

Důkaz Věty 2.2.32. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^*: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.33 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.6) dostaneme $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. ■

2.2.34. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé vlastní limity, pak je $\{a_n\}$ divergentní. Kdyby totiž posloupnost $\{a_n\}$ měla vlastní limitu A , pak by obě podposloupnosti musely mít podle Věty 2.2.32 limitu A , což by byl spor.

2.2.35. Předchozí odstavec nám umožňuje dokázat, že $\lim\{(-1)^n\}$ neexistuje, jiným způsobem než v Příkladu 2.2.13. Označíme-li $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak podle 2.2.31 je $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1$. Nalezli jsme dvě podposloupnosti s různými limitami, a tedy $\lim\{(-1)^n\}$ neexistuje.

V další části tohoto oddílu ukážeme, jak pojem limity souvisí s aritmetickými operacemi a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.36. Věta (aritmetika limit). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|A - a_n| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|B - b_n| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti.

(a) Z trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.10) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = 2$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 je také omezená. Jinými slovy existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq L$. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.10) dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n b_n - b_n A) + (b_n A - AB)| \\ &\leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n| |a_n - A| + |A| |b_n - B|. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dále platí

$$|b_n| |a_n - A| + |A| |b_n - B| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n b_n - AB| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = L + |A|$.

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} \right| = \left| \frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_n B - AB}{b_n B} \right| + \left| \frac{AB - Ab_n}{b_n B} \right| \\ &= \frac{1}{|b_n|} |a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n| |B|} |b_n - B|. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podle definice limity existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{2} |B|$ takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$|B - b_n| < \frac{1}{2} |B|. \tag{2.8}$$

Podle Důsledku 1.5.11(a) a (2.8) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$||B| - |b_n|| \leq |B - b_n| < \frac{1}{2} |B|. \tag{2.9}$$

Vzhledem k tomu, že navíc platí $|B| - |b_n| \leq ||B| - |b_n||$, dostáváme podle (2.9) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, nerovnost $|B| - |b_n| < \frac{1}{2}|B|$, a tedy také

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \quad (2.10)$$

Položme

$$K = \max \left\{ \frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{B^2} \right\}.$$

Pak podle (2.7) a (2.10) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| &\leq \frac{2}{|B|} |a_n - A| + \frac{2|A|}{B^2} |b_n - B| \\ &\leq K(|a_n - A| + |b_n - B|). \end{aligned}$$

Položme $n_2 = \max \{n_0, n_1\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, potom máme

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| < 2K\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení pak plyne z Lemmatu 2.2.18. ■

V dalším textu se budeme někdy odkazovat na dílčí tvrzení (a), (b), (c) Věty 2.2.36 po řadě jako na větu o limitě součtu, větu o limitě součinu a větu o limitě podílu.

2.2.37. Příklad. Dokažte, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Řešení. Tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.9 a věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) pro posloupnosti $\{a_n\} = \{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. ♣

2.2.38. Podstatným předpokladem věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) je konvergence posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. V případě, kdy jedna či obě posloupnosti divergují, nelze o konvergenci posloupnosti definované jako jejich součet, součin či podíl obecně nic říci. Uvedeme několik příkladů.

- Necht $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$. Pak jsou obě posloupnosti divergentní, ale $\lim a_n b_n = 1$.
- Necht $\{a_n\} = \{n^2\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, a tedy $\{a_n b_n\} = \{n\}$. Pak $\{a_n\}$ a $\{a_n b_n\}$ divergují podle Věty 2.2.25 a $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.9.
- Necht $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$. Pak $\{a_n\}$ diverguje, $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.37 a $\{a_n b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ konverguje.

Situace vypadá obdobně i v případě ostatních aritmetických operací. Konstrukce příslušných příkladů není obtížná.

V dalším výkladu se nám bude hodit následující obecnější verze věty o limitě součtu.

2.2.39. Věta. Necht' $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$, a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^j = A_j$, $j = 1, \dots, l$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l a_n^j = \sum_{j=1}^l A_j.$$

Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $l = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme nyní jeho platnost pro $l \in \mathbb{N}$. Máme-li $l + 1$ posloupností $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^{l+1}\}$ s limitami $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l + 1$, pak platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{l+1} a_n^j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{j=1}^l a_n^j \right) + a_n^{l+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l a_n^j + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{l+1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^l A_j \right) + A_{l+1} = \sum_{j=1}^{l+1} A_j, \end{aligned}$$

přičemž druhá rovnost plyne z Věty 2.2.36(a) a třetí z indukčního předpokladu.

Tvrzení týkající se součinu konečně mnoha posloupností lze dokázat obdobně. ■

2.2.40. Příklad. Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+7}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{n^2+n}{2n^2+7} = \frac{n^2+n}{2n^2+7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}}.$$

Podle Příkladu 2.2.9 je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ a podle Příkladu 2.2.8 je $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Podobně odvodíme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{7}{n^2}\right) = 2$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Při počítání limit posloupností obvykle zapisujeme výpočet stručněji. V našem příkladu by zkrácený zápis vypadal následovně:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{7}{n^2}\right)} \quad (2.11)$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \quad (2.12)$$

$$= \frac{1 + 0}{2 + 7 \cdot 0} = \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

Napíšeme-li v průběhu výpočtu nejprve rovnost (2.11), musíme si být vědomi toho, že zatím nevíme, zda tato rovnost platí. Rovnost bude platit, pokud ukážeme, že obě limity ve zlomku na pravé straně existují a limita ve jmenovateli je nenulová. Podobně rovnost (2.12) bude platit, pokud ukážeme, že všechny limity jsou vlastní a výsledný výraz ve jmenovateli je nenulový. Hodnoty limit ve výrazu v (2.12) však již známe a výpočet (2.13) ukazuje, že výraz ve jmenovateli je nenulový. Dostáváme tak platnost první rovnosti ve (2.13), a díky tomu i platnost rovnosti (2.12). Odtud potom dostáváme platnost rovnosti (2.11), a tím korektnost celého řešení.

Při počítání limit musíme každý krok výpočtu zdůvodnit. Někdy jde jen o algebraickou úpravu počítaného výrazu, často pak používáme větu o aritmetice limit, případně již vypočítané limity. Bez zdůvodnění jako například v předchozím odstavci *není řešení úplné*. Později v pokročilejších částech skript již nebudeme podrobná zdůvodnění uvádět, což ale neznamená, že jsme je neprovedli. ♣

Následující výsledek obsahuje jednoduché ale užitečné tvrzení o limitě posloupnosti definované jako součin omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou.

2.2.41. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, existuje číslo $K > 0$ splňující $|b_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| |b_n| < K\varepsilon.$$

Tedy podle Lemmatu 2.2.18 platí $\lim a_n b_n = 0$. ■

2.2.42. Poznámka. Tvrzení Věty 2.2.41 neplyne z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)), protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

2.2.43. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.2.41, neboť posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a $\lim \frac{1}{n} = 0$. ♣

V předchozích větách jsme uvedli několik důležitých souvislostí mezi pojmem limity a operacemi na množině reálných čísel. Nyní se zaměříme na vztah mezi pojmem limity a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.44. Věta (limita a uspořádání). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Necht $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Necht existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(B-A)$. Pak podle definice limity existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n < A + \varepsilon$ a $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n > B - \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < b_n.$$

(b) Předpokládejme pro spor, že platí $A < B$. Potom podle tvrzení (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n^*\}$. Pak dostáváme $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. ■

2.2.45. Poznámky. (a) Věta 2.2.44 nám poskytuje možnost odhadnout shora nebo zdola hodnotu limity dané posloupnosti, o níž víme, že konverguje, ale jejíž limitu neznáme, pomocí jiné posloupnosti, jejíž limitu známe.

(b) V tvrzení Věty 2.2.44(b) nelze nerovnosti $a_n \geq b_n$ a $A \geq B$ nahradit nerovnostmi $a_n > b_n$ a $A > B$. Položme například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom zřejmě platí $a_n > b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí však $A = B = 0$.

2.2.46. Věta (o dvou strážnících). Necht $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,
- (b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu podle předpokladu (b) existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

a tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. ■

2.2.47. Věta (existence k -té odmocniny). Necht $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Potom existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^k = x$.

Důkaz. Je-li $x = 0$, potom zřejmě platí $0^k = 0$.

Předpokládejme, že $x > 0$. Definujme množiny

$$M_1 = \{y \in [0, \infty); y^k \leq x\},$$

$$M_2 = \{y \in [0, \infty); y^k \geq x\}.$$

Ukážeme, že množina M_1 je shora omezená. Rozlišíme dva případy. Předpokládejme nejprve, že platí $x \leq 1$. Potom pro každé $y \in M_1$ platí $y^k \leq x \leq 1$. Pokud by platilo $y > 1$, pak podle Věty ??(a) dostáváme $y^k > 1^k = 1$, což by byl spor.

Musí tedy být $y \leq 1$ a číslo 1 je tak horní závorou množiny M_1 . Ve druhém případě budeme předpokládat, že $x > 1$. Potom pro každé $y \in M_1$ platí $y^k \leq x \leq x^k$. Odtud plyne $x \geq y$. Číslo x je tedy horní závorou množiny M_1 . Množina M_1 je navíc neprázdná, neboť $0 \in M_1$. Z ?? vyplývá, že M_1 má supremum, které označíme y_1 .

Množina M_2 je zřejmě zdola omezená, neboť například 0 je její dolní závorou. Navíc je neprázdná, neboť $\max\{1, x\} \in M_2$. Tedy M_2 má infimum, které označíme y_2 .

Protože pro každé $y \in M_1$, $y' \in M_2$ platí $y \leq y'$, dostáváme dle Lemmatu 1.5.28 nerovnost $y_1 \leq y_2$. Dále plyne z vlastností mocniny (vizte Větu ??) a Lemma 1.5.23, že M_1 i M_2 jsou intervaly. Necht $y \in [0, \infty)$. Potom z linearitu uspořádání reálných čísel plyne, že buď $y^k \leq x$ nebo $y^k \geq x$, a tedy $[0, \infty) = M_1 \cup M_2$.

Dokážeme, že $y_2 > 0$. Předpokládejme, že $y_2 = 0$. Pak pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ platí $\varepsilon \in M_2$. Tedy $x \leq \varepsilon^k \leq \varepsilon$. To podle Lemmatu 1.5.13 znamená, že $x = 0$, což je spor. Tedy $y_2 > 0$.

Nyní dokážeme, že $y_1 = y_2$. Již víme, že $y_1 \leq y_2$. Předpokládejme, že $y_1 < y_2$. Potom platí

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \notin M_1 \cup M_2 = [0, \infty),$$

což je spor. Tedy $y_1 = y_2$. Označme tuto společnou hodnotu jako y . Položme

$$C = \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} y^{k-l}.$$

Pak $C > 0$.

Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{C}{\varepsilon} < n$ zároveň $y - \frac{1}{n} \geq 0$ (obě lze zařídit pomocí Věty 1.5.27). Pak $y - \frac{1}{n} \in M_1$, $y + \frac{1}{n} \in M_2$, a tedy

$$x \geq \left(y - \frac{1}{n}\right)^k = y^k + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} y^{k-l} \left(-\frac{1}{n}\right)^l \geq y^k - \frac{1}{n}C > y^k - \varepsilon,$$

$$x \leq \left(y + \frac{1}{n}\right)^k = y^k + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} y^{k-l} \left(\frac{1}{n}\right)^l \leq y^k + \frac{1}{n}C < y^k + \varepsilon.$$

Tedy

$$|x - y^k| < \varepsilon.$$

Podle Lemmatu 1.5.13 tak dostáváme $x = y^k$.

Jednoznačnost pak plyne z Věty ??.

2.2.48. Definice. Necht $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Potom číslo $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^k = x$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 2.2.47), nazýváme **k -tou odmocninou** z čísla x a značíme jej $\sqrt[k]{x}$.

2.2.49. Věta (vlastnosti k -té odmocniny). Necht $k \in \mathbb{N}$.

(a) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < y$, platí $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

- (b) Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, platí $\sqrt[k]{x} \leq x$.
 (c) Pro každé $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$, platí $\sqrt[k]{x} \geq x$.

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z odpovídajících tvrzení pro k -tou mocninu reálného čísla, která jsou uvedena ve Větě ??.

2.2.50. Příklad. Spočítejte $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Řešení. Zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti $1 < 1 + \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n})^2$. Podle Věty 2.2.49 tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$. Vzhledem k tomu, že $\lim 1 = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$, dostáváme podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), že $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

2.2.51. Příklad. Necht $k \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že $A \geq 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Řešení. Nezápornost čísla A plyne z Věty 2.2.44(b). Předpokládejme nejprve, že $A = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < \varepsilon^k$. Pro taková $n \in \mathbb{N}$ ale díky monotonii odmocniny (Věta 2.2.49(a)) máme $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Dostáváme tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = 0 = \sqrt[k]{A}$.

Nyní předpokládejme, že $A > 0$. Pak podle Příkladu 1.5.6 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A} \right| \\ &= \left| \frac{a_n - A}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2} \sqrt[k]{A} + \dots + \sqrt[k]{a_n} (\sqrt[k]{A})^{k-2} + (\sqrt[k]{A})^{k-1}} \right| \\ &\leq \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}} |a_n - A|. \end{aligned}$$

Odtud a použitím rovnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}} |a_n - A| = 0$ obdržíme podle Věty 2.2.46 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A} \right| = 0$. Podle Věty 2.2.24 platí $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}) = 0$. Odtud díky větě o limitě součtu (Věta 2.2.36(a)) dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

2.2.52. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, můžeme psát $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, kde $\theta_n \geq 0$. Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.5.5)

$$n = (1 + \theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2} \theta_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} \theta_n^2.$$

Protože pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí $n-1 \geq \frac{n}{2}$, dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} \theta_n^2 \geq \frac{n^2}{4} \theta_n^2.$$

Odtud a z monotonie odmocniny (Věta 2.2.49(a)) pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, plyne $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq \theta_n$. Podle Příkladu 2.2.9, Příkladu 2.2.51 pro $k = 2$ a z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) dostaneme $\lim \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, takže podle Věty 2.2.46 máme $\lim \theta_n = 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

2.2.53. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}, c > 0$. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Necht nejprve $c \geq 1$. Pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.27) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > c$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) a Příkladu 2.2.52 plyne $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Necht nyní $c \in (0, 1)$. Potom podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) a podle již dokázaného tvrzení platí

$$\lim \sqrt[n]{c} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

♣

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem $a_n = n, n \in \mathbb{N}$, je sice divergentní, má však následující vlastnost. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n > K$. Vskutku, stačí pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.27) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > K$. Obdobnou vlastnost má například posloupnost $\{b_n\}$ definovaná předpisem $b_n = -n^2, n \in \mathbb{N}$, přičemž nerovnost $a_n > K$ je nahrazena nerovností $b_n < K$. Obě vlastnosti můžeme chápat jako jisté typy limitního chování posloupnosti, i když jiné, než je konvergence k reálnému číslu, kterou jsme studovali v předcházejícím oddílu. Tyto typy limitního chování formálně zavedeme v následující definici.

2.3.1. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečno, říkáme, že **má nevlastní limitu**.

2.3.2. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞ , pak říkáme, že **diverguje** k ∞ . Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

2.3.3. Příklad. Dokažte, že $\lim n = \infty$.

Řešení. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) vyplývá existence $n_0 \in \mathbb{N}$ splňujícího $n_0 > K$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $n \geq n_0 > K$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

Naším cílem nyní bude rozšířit některé poznatky z předcházejícího oddílu i pro nevlastní limity. K tomuto účelu nejprve rozšíříme reálnou osu o prvky ∞ a $-\infty$ a odpovídajícím způsobem rozšíříme také operace sčítání a násobení a relaci uspořádání.

2.3.4. Definice. Rozšířenou reálnou osou budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit \mathbb{R}^* . Na množinu \mathbb{R}^* rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na \mathbb{R} následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}: -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty,$
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}: \infty + a = a + \infty = \infty,$
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty.$

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}: a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty,$
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}: a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty,$
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0): a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty,$
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0): a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty,$
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0.$

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R}: -\infty < a, a < \infty,$
- $-\infty < \infty.$

2.3.5. Operace sčítání a násobení nejsou definovány pro všechny dvojice z \mathbb{R}^* . Přesněji, následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

2.3.6. Věta. Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ platí následující rovnosti, pokud je vždy alespoň jedna strana rovnosti definována:

- (a) $x + y = y + x,$
- (b) $(x + y) + z = x + (y + z),$
- (c) $xy = yx,$
- (d) $(xy)z = x(yz),$
- (e) $x(y + z) = xy + xz.$

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z Definice 2.3.4 a z vlastností sčítání a násobení reálných čísel pomocí rozboru jednotlivých případů, kdy postupně rozlišujeme, zda prvky x, y a z jsou reálné, nebo se rovnají ∞ , nebo se rovnají $-\infty$. ■

Právě provedené rozšíření množiny reálných čísel nám umožňuje definovat pojmy suprema a infima pro libovolné podmnožiny \mathbb{R} .

2.3.7. Definice. Necht $A \subset \mathbb{R}$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

- (a) $\forall a \in A: a \leq G$,
 (b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G \exists a \in A: G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A . Podobně definujeme **infimum** množiny A .

2.3.8. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema zavedený v Definicí 1.4.8 shoduje s pojmem zavedeným v Definicí 2.3.7. Supremum shora neomezené množiny je rovno ∞ a supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Podobně infimum zdola neomezené množiny je $-\infty$ a infimum prázdné množiny je ∞ .

V následujícím textu budeme již vždy používat právě uvedenou rozšířenou definici suprema a infima. Budeme je však i nadále značit symboly \sup a \inf .

2.3.9. Absolutní hodnota je na množině \mathbb{R}^* definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|\infty| = \infty$.

2.3.10. Definicí 2.3.1 je doplněním Definicí 2.2.1 o případy, kdy limitou je buď ∞ nebo $-\infty$. Víme tedy, co znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A , kde buď $A \in \mathbb{R}$, nebo $A = \infty$, nebo $A = -\infty$. Následující věta ukazuje, že věta o jednoznačnosti limity (Věta 2.2.4) zůstává v platnosti i pro takto rozšířenou definici.

2.3.11. Věta (jednoznačnost limity). Nechtě $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou B . Potom platí $A = B$.

Důkaz. Mějme posloupnost $\{a_n\}$. Dokázali jsme již, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$ (Věta 2.2.4). Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞ ,
- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
- posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞ . Podle Věty 2.2.25 je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, a tím spíše je omezená shora. Tudíž existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞ , existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Ve zbývajících dvou případech je důkaz obdobný. ■

2.3.12. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$. Ke korektnímu zavedení tohoto značení potřebujeme Větu 2.3.11. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu (vlastní či nevlastní), pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl (pro srovnání viz 2.2.6).

2.3.13. Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

2.3.14. Definice. Necht $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.3.15. Lemma. Necht $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{|A - \tilde{A}|}{2}$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Nyní předpokládejme, že $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Odtud opět plyne, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$ je obdobný případu $\tilde{A} = \infty$. ■

Zavedení pojmu okolí (Definice 2.3.14) nám umožňuje ekvivalentně formulovat pojem limity posloupnosti (vlastní i nevlastní) jedinou formulí. To je náplní následující věty.

2.3.16. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \in B(A, \varepsilon). \quad (2.14)$$

Důkaz. Necht $A \in \mathbb{R}$. Potom je výrok $a_n \in B(A, \varepsilon)$ ekvivalentní výroku $|a_n - A| < \varepsilon$. Takže v tomto případě je formule (2.14) shodná a formulí (2.1).

Necht $A = \infty$. Předpokládejme nejprve, že $\lim a_n = A$. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Víme, že pro $K = \frac{1}{\varepsilon}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí bodu ∞ znamená, že $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$, a tedy formule (2.14) platí.

Nyní naopak předpokládejme, že platí (2.14). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, následujícím způsobem. Je-li $K \leq 0$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Je-li $K > 0$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{K}$. V obou případech pak platí $\frac{1}{\varepsilon} \geq K$. K tomuto ε pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom platí $a_n > \frac{1}{\varepsilon} \geq K$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

V případě $A = -\infty$ je důkaz obdobný. ■

Ve zbývajících částech tohoto oddílu uvedeme obecnější varianty některých vět, které již známe z předcházejícího textu. Zatímco se však dříve uvedená tvrzení týkala

pouze vlastních limit, zde budou věty formulovány i pro nevlastní limity. Nejprve uvedeme obdobu Věty 2.2.15.

2.3.17. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Necht existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n = a_n$, a tedy $b_n \in B(A, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $\lim b_n = A$. ■

2.3.18. Poznámka. Z předchozí věty plyne následující zobecnění Poznámky 2.2.16. Změníme-li u posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ splňující $\lim a_n = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost opět limitu A .

Následující tvrzení je obdobou Věty 2.2.22.

2.3.19. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení plyne z Věty 2.2.22. Necht $A = \infty$. Pak z předpokladu $\lim a_n = A$ plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 0$, a tedy $|a_n| = a_n$. Tudíž podle Věty 2.3.17 platí $\lim |a_n| = \lim a_n$. Protože $\lim a_n = \infty$ a $|\infty| = \infty$, plyne odtud, že $\lim |a_n| = |A|$.

Konečně necht $A = -\infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(-\infty, \varepsilon)$, a tedy také $-a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-a_n > 0$, a tedy $|a_n| = -a_n$. To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| \in B(\infty, \varepsilon)$. Protože $|A| = \infty$, dokázali jsme, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

Následující věta je jistou jednostrannou obdobou Věty 2.2.25.

2.3.20. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\lim a_n = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená.

Důkaz. Položme $K = 1$. Podle Definice 2.3.1 k tomuto K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > 1$. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.13 omezená. Necht $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq \min\{M, 1\}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. ■

2.3.21. Obdobně jako ve Větě 2.3.20 lze dokázat, že je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a $\lim a_n = -\infty$, potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená.

Následující věta je obdobou Věty 2.2.32 pro nevlastní limity.

2.3.22. Věta (limita vybrané posloupnosti). Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Necht' $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$. Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, pak také $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Necht' $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, která určuje naši vybranou posloupnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^* : a_n \in B(A, \varepsilon). \quad (2.15)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.33 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.15) dostaneme $a_{n_k} \in B(A, \varepsilon)$. Tím je věta dokázána. ■

Tvrzení věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.32 a 2.3.22) nelze obrátit. Jako příklad může opět posloužit posloupnost $\{(-1)^n\}$ a její podposloupnost $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Nicméně platí následující tvrzení, které v dalším textu ještě využijeme (například v Kapitole 3).

2.3.23. Věta. Necht' $l \in \mathbb{N}$ a $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, ..., $\{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$ jsou rostoucí posloupnosti přirozených čísel takové, že

$$\left\{ n_k^j : j \in \{1, \dots, l\}, k \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Necht' $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k^j} = A$. Potom $\lim a_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_1 : a_{n_k^1} &\in B(A, \varepsilon), \\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_2 : a_{n_k^2} &\in B(A, \varepsilon), \\ &\vdots \\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_l : a_{n_k^l} &\in B(A, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Položme $n_0 = \max\{n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, \dots, n_{k_l}^l\}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Díky podmínce (2.16) existují $j \in \{1, \dots, l\}$ a $k \in \mathbb{N}$ taková, že $n = n_k^j$. Potom platí

$$n_k^j = n \geq n_0 \geq n_{k_j}^j.$$

Posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto $k \geq k_j$. Podle j -té podmínky v (2.17) dostaneme $a_n = a_{n_k^j} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

2.3.24. Poznámka. Speciálním případem předchozí věty je následující tvrzení. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Necht' $A \in \mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = A.$$

Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

2.3.25. Ve Větě 2.3.23 je důležité, aby počet posloupností $\{n_k^1\}_{k=1}^\infty, \{n_k^2\}_{k=1}^\infty, \dots, \{n_k^l\}_{k=1}^\infty$ byl konečný. Pro nekonečný počet těchto posloupností tvrzení neplatí, jak ukazuje následující příklad.

2.3.26. Příklad. Definujme posloupnost $\{a_n\}$ předpisem

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále definujme pro každé $j \in \mathbb{N}$ posloupnost přirozených čísel $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ předpisem

$$n_k^j = \begin{cases} k, & k \leq j, \\ 2k, & k > j. \end{cases}$$

Dokažte, že $\{n_k^j; j, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, pro každé $j \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ rostoucí a platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k^j} = 1$, přesto ale $\lim a_n$ neexistuje.

Řešení. Necht $j \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ zřejmě rostoucí a navíc platí $\{n_k^j; j, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Dále pro každé $k \in \mathbb{N}, k > j$, je n_k^j sudé, a tedy $a_{n_k^j} = 1$. Tudíž $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k^j} = 1$. ♣

Následující věta je zobecněním věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36).

2.3.27. Věta (aritmetika limit). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Tuto větu lze dokázat obdobně jako Větu 2.2.36. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b), a to v případě, kdy $A \in \mathbb{R}, A \neq 0$, a $B = -\infty$.

Chceme tedy dokázat, že

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } A < 0, \\ -\infty, & \text{pokud } A > 0. \end{cases}$$

Necht nejprve $A < 0$ a $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{A}{2}$. Z předpokladu $\lim a_n = A$ a z definice limity vyplývá existence takového $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (\frac{3A}{2}, \frac{A}{2})$. Podobně z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne existence takového $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{Ab_n}{2} > K,$$

takže $\lim (a_n \cdot b_n) = \infty$. V případě $A > 0$ lze tvrzení dokázat obdobně. ■

2.3.28. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) vynechat. Položme například $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim(-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní.

2.3.29. Víme-li pouze, že $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$, pak odtud nemůžeme vyvodit žádnou informaci o existenci nebo hodnotě $\lim(a_n + b_n)$. Necht' například $A \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + A\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = A.$$

Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby pro takové posloupnosti platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

2.3.30. Necht' $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A_j \in \mathbb{R}^*$, $j = 1, \dots, l$, a dále $\lim a_n^j = A_j$, $j = 1, \dots, l$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l a_n^j = \sum_{j=1}^l A_j,$$

pokud je výraz na pravé straně definován. Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností. Důkaz lze provést obdobně jako ve Větě 2.2.39.

Z odstavce 2.3.28 vyplývá, že pro výpočet $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim b_n = 0$, nemůžeme bezprostředně použít větu o limitě podílu (Věta 2.3.27(c)), nicméně platí následující věta.

2.3.31. Věta. Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$. Necht' $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K němu existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1: a_n > A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: b_n < \frac{A}{2L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{2L}} = L \geq K,$$

a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Nechť nyní $A = \infty$. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$. Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1: a_n > 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: b_n < \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{\frac{1}{L}} = L \geq K.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

Následující větu je možno dokázat obdobně jako Větu 2.2.44.

2.3.32. Věta (limita a uspořádání). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Necht $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Necht existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Pro nevlastní limity platí následující dvě varianty věty o dvou strážnících.

2.3.33. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,
 (b) $\lim a_n = \infty$.

Potom platí $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $L \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n \geq L$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1\}$, pak platí $c_n \geq a_n$, a tedy $c_n \geq L$. Tím je dokázáno, že $\lim c_n = \infty$. ■

Podle předchozí věty stačí nalézt pouze jednoho „strážníka“ k důkazu tvrzení $\lim c_n = \infty$. Následující věta je její zřejmou obdobou pro posloupnosti s limitou $-\infty$.

2.3.34. Věta. Necht $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,
 (b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom platí $\lim c_n = -\infty$.

2.3.35. Příklad. Dokažte, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } q \in (1, \infty), \\ 1, & \text{pokud } q = 1, \\ 0, & \text{pokud } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje,} & \text{pokud } q \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $q > 1$. Pak můžeme psát $q = 1 + h$, kde $h > 0$. Odtud a z Bernoulliho nerovnosti (Příklad 1.8.11) plyne $q^n = (1 + h)^n \geq 1 + hn$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\lim(1 + hn) = \infty$, a podle Věty 2.3.33 máme $\lim q^n = \infty$.

Pokud $q \in (0, 1)$, pak podle předchozího odstavce platí $\lim(q^{-1})^n = \infty$. Aplikací Věty 2.3.27 dostaneme

$$\lim q^n = \lim \frac{1}{(q^{-1})^n} = 0.$$

Pro $q = 0$ a $q = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro $q = -1$ plyne tvrzení z Příkladu 2.2.13. Pokud $q \in (-1, 0)$, pak $\lim |q^n| = \lim |q|^n = 0$, a tedy podle Věty 2.2.24 také $\lim q^n = 0$.

Je-li konečně $q < -1$, pak $q^2 > 1$, a tedy máme $\lim q^{2n} = \lim(q^2)^n = \infty$. Potom platí podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.27(b)) $\lim q^{2n+1} = \lim q(q^2)^n = -\infty$. Nalezli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, a tedy limita původní posloupnosti neexistuje. ♣

Následující tvrzení dává do souvislosti pojmy limity a suprema množiny.

2.3.36. Věta. Necht $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $G \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Platí $G = \sup M$.
- (ii) Číslo G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M splňující $\lim x_n = G$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Je-li $G = \sup M$, pak G je zřejmě horní závorou M .

Pokud $G = \infty$, pak M není shora omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > n$. Podle Věty 2.3.33 je pak $\lim x_n = \infty = G$.

V případě, že $G \in \mathbb{R}$, pak podle definice suprema ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > G - \frac{1}{n}$. Protože G je horní závorou M , je automaticky $x_n \leq G$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy máme $\lim x_n = G$.

(ii) \Rightarrow (i) Zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < G$. Pak z definice limity plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ pro které $x_{n_0} > G'$. (V případě $G = \infty$ to plyne přímo z definice, v případě $G \in \mathbb{R}$ stačí v definici vzít $\varepsilon = G - G'$.) Našli jsme tedy prvek z množiny M , který je větší než G' , čímž jsme ověřili podmínku (b) z definice suprema. ■

2.3.37. Poznámka. Obdobné tvrzení platí i pro infimum.

2.3.38. Příklad. Necht $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že potom $A \geq 0$ a platí

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & \text{pokud } A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{pokud } A = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.51.

Nechť $A = \infty$ a $K \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > |K|^k$. Potom podle monotonic odmocniny (Věta 2.2.49) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $\sqrt[k]{a_n} > |K| \geq K$, tedy $\lim \sqrt[k]{a_n} = \infty$. ♣

V následujících příkladech ukážeme použití výše vyložených vět.

2.3.39. Příklad. Vypočtěte $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Řešení. Podle Příkladu 2.3.3 a Příkladu 2.3.38 dostaneme $\lim \sqrt{n} = \infty$. Odtud a z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.32) dále plyne, že $\lim \sqrt{n+1} = \infty$. To znamená, že pro výpočet zadané limity nemůžeme užít větu o aritmetice limit přímočarým způsobem. Upravíme proto nejprve zadaný výraz tak, aby bylo možné bezprostředně použít větu o aritmetice limit. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pak podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.27(c)) můžeme počítat

$$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

♣

2.3.40. Poznámka. Na závěr tohoto oddílu ještě uvedeme následující možné rozšíření pojmu posloupnost. Posloupností reálných čísel budeme rozumět každé zobrazování množiny $A \subset \mathbb{Z}$ do \mathbb{R} , přičemž A je zdola omezená a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\} \subset A$. Obecnější definicí chceme postihnout zejména následující dva případy: jednak posloupnosti tvaru $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (značíme $\{a_n\}_{n=0}^\infty$) a jednak posloupnosti, jejichž členy jsou definovány pro každé přirozené n vyjma konečné množiny, například posloupnost $\{\frac{1}{n-7}\}$, jejíž definiční obor je $\mathbb{N} \setminus \{7\}$. V těchto případech zůstávají v platnosti všechny poznatky o posloupnostech, které jsme dosud odvodili. V případech, které budou vyžadovat jisté modifikace, na ně vždy explicitně upozorníme.

2.4. Hlubší věty o limitách

Uvedeme nejprve důležitou vlastnost monotónních posloupností.

2.4.1. Věta (limita monotónní posloupnosti). Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li navíc $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající. Nechť navíc $\{a_n\}$ není shora omezená. Potom $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolíme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $a_{n_0} \geq K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí díky 2.1.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_n \geq a_{n_0} \geq K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je shora omezená, tedy $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a označíme $A = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Z definice suprema plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Pak lze tvrzení dokázat obdobně, můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.5.15 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.27(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

■

2.4.2. Důsledek. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Podobně každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Necht $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel. Z Věty 2.4.1 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená, pak lze důkaz provést obdobně. ■

Věta 2.4.1 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

2.4.3. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. Spočítejte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána následujícím způsobem:

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. První člen je definován explicitně a je nezáporný. Předpokládáme-li, že a_n je definováno a je nezáporné, pak je definováno i a_{n+1} a je nezáporné. Podle principu matematické indukce je pak posloupnost $\{a_n\}$ definovaná a její členy jsou nezáporné.

Je-li $c = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 0$, a tedy $\lim a_n = 0$.

Předpokládejme tedy, že $c > 0$. Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n-1} < a_n$, pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}.$$

Podle principu matematické indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Zřejmě platí $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Potom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1. \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c} + 1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Podle této věty má tedy posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu. Označme ji symbolem A .

Posledním krokem řešení bude výpočet hodnoty A . Z (2.18) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Získali jsme kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$ pro neznámou hodnotu A , o které zatím víme jen, že existuje. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$ nebo $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$. Hodnota $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$ však nemůže být limitou posloupnosti $\{a_n\}$, protože je to záporné číslo a všechny prvky posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. To by bylo ve sporu s Větou 2.2.44(b) (do níž bychom dosadili $B = 0$ a $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$). Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$. ♣

2.4.4. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{b_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$b_1 = -1, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim b_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.4.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{b_n\}$ ale není rovna 0, neboť $b_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

2.4.5. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a shora omezená a posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a zdola omezená, a tedy jsou obě posloupnosti konvergentní, a že navíc platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Řešení. Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.11) plyne odhad

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Algebraickými úpravami odtud odvodíme nerovnost

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+2},$$

jinými slovy

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.11) plyne, že

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n \geq 1 + n \frac{-1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^n < \frac{n+2}{n+1}.$$

Dokázali jsme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Z monotonicity posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44) platí $A, B \in [2, 4]$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.27(c)) tedy dále platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Podle definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dále platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.4.6. Definice. Označíme

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Z Příkladu 2.4.5 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo e nazýváme **Eulerovým číslem**.²

2.4.7. Věta (Bolzano³-Weierstrass⁴). Necht $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

Důkaz. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto existují $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že $m \leq a_n \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $\alpha_1 = m, \beta_1 = M$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a β_1, \dots, β_k . Je-li množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}]\}$ nekonečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ a $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$. Je-li množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}]\}$ konečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$ a $\beta_{k+1} = \beta_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k$ a $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \subset [\alpha_k, \beta_k]$. Navíc $\beta_k - \alpha_k = \frac{M-m}{2^{k-1}}$.

Posloupnost $\{\alpha_k\}$ je neklesající a posloupnost $\{\beta_k\}$ je nerostoucí. Navíc pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_1$, takže posloupnost $\{\alpha_k\}$ je shora omezená. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\beta_k\}$ je zdola omezená. Tudíž existují vlastní limity posloupností $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$. Označme $A = \lim \alpha_k$ a $B = \lim \beta_k$. Protože $A, B \in \mathbb{R}$, je $B - A$ definovaný výraz. Z věty o aritmetice limit plyne, že $\lim(\beta_k - \alpha_k) = B - A$. Jest

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M - m}{2^{k-1}} = 0,$$

takže $A = B$.

Položme $n_1 = 1$ a předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ taková, že pro všechna $j \in \mathbb{N}, j \leq k$, platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Podle výše uvedené konstrukce je množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ nekonečná. Tudíž také množina $\{n \in \mathbb{N}; n > n_k, a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná. Tedy existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Dle věty o dvou strážnících tedy platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Protože $A \in \mathbb{R}$, našli jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. ■

2.4.8. Necht $\{a_n\}$ je shora omezená posloupnost reálných čísel. Položíme-li $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existuje $\lim b_n$. Necht je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme-li $c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost reálných čísel, a tedy $\lim c_n$ opět existuje. Tyto úvahy ukazují, že následující definice je korektní, neboť v ní uvedené limity existují.

2.4.9. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

²Leonhard Euler (1707--1783)

³Bernard Bolzano (1781--1848)

⁴Karl Weierstrass (1815--1897)

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

2.4.10. Poznámka. V literatuře se často vyskytují symboly $\overline{\lim} a_n$ a $\underline{\lim} a_n$ označující $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, v našem textu je ale nebudeme používat.

2.4.11. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí existovat, hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice limes inferior a limes superior plyne, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat, jak ukazuje následující příklad.

2.4.12. Příklad. Dokažte, že $\limsup(-1)^n = 1$ a $\liminf(-1)^n = -1$.

Řešení. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|(-1)^n| = 1$. Odtud vyplývá, že

$$\limsup(-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{(-1)^k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje sudé číslo $k \geq n$. To znamená, že

$$\sup\{(-1)^k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} = 1,$$

a tedy

$$\limsup(-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Obdobně lze dokázat, že $\liminf(-1)^n = -1$. ♣

2.4.13. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme nejprve, že platí $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 omezená. Můžeme tedy definovat posloupnosti reálných čísel $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a posloupnost $\{c_n\}$ neklesající. Navíc zřejmě platí $c_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > A - \varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0} \geq A - \varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0} \leq A + \varepsilon$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)) dostáváme

$$A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle Lemmatu 1.5.13 $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Je-li $A = \infty$, pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola (Věta 2.3.20). Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Necht $K \in \mathbb{R}$. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Je-li $A = -\infty$, postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

\Leftarrow Nejprve opět předpokládejme, že platí $A \in \mathbb{R}$. Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Necht posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako v předchozí části důkazu. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Necht $A = \infty$. Potom je podle Věty 2.3.20 posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, takže je možné definovat posloupnost $\{c_n\}$ jako výše. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$. Z definice limes inferior navíc víme, že $\liminf a_n = \lim c_n$, a tedy podle předpokladu platí $\lim c_n = \infty$. Podle Věty 2.3.33 tedy platí $\lim a_n = \infty$.

Jestliže $A = -\infty$, pak lze tvrzení dokázat obdobně jako v případě, kdy $A = \infty$, přičemž místo Věty 2.3.33 je třeba použít Větu 2.3.34. ■

2.4.14. Věta. Necht $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Potom

- (a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$, pokud je výraz na levé straně definován,
- (b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (b). Nejprve předpokládejme, že $\limsup x_n + \limsup y_n = \infty$. Potom je dokazovaná nerovnost triviální. Necht nyní $\limsup x_n + \limsup y_n < \infty$. Potom jsou nyní obě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ shora omezené, a tedy také posloupnost $\{x_n + y_n\}$ je shora omezená. Takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$\limsup(x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k + y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}. \quad (2.19)$$

Označme

$$z_n = \sup\{x_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} + \sup\{y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Potom je posloupnost $\{z_n\}$ nerostoucí, a tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) má limitu. Navíc z Věty 1.7.6(a) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{x_k + y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq z_n.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.32(b)) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k + y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n. \quad (2.20)$$

Z definice limes superior a věty o limitě součtu (Věta 2.3.27(a)) pak dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \limsup x_n + \limsup y_n. \quad (2.21)$$

Konečně z (2.19), (2.20) a (2.21) plyne dokazované tvrzení.

Tvrzení (a) je možné dokázat obdobně. ■

2.4.15. Věta. Necht $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Předpokládejme, že platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Odvodíme pouze první nerovnost, druhou lze dokázat obdobně. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora neomezená, pak $\limsup y_n = \infty$ a nerovnost zřejmě platí. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora omezená, pak je shora omezená i posloupnost $\{x_n\}$. Dokazovaná nerovnost potom plyne z nerovnosti $\sup\{x_k; k \geq n\} \leq \sup\{y_k; k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.32(b)). ■

2.4.16. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

2.4.17. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je její podposloupnost. Potom platí $H(\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\})$, neboť vybraná posloupnost z podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ je také vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$. Jsou-li totiž $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnosti přirozených čísel, pak také $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

2.4.18. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $m \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) = H(\{a_n\}).$$

Řešení. Posloupnost $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$ je podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$, takže inkluze $H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\})$ plyne z 2.4.17. Dokážeme opačnou inkluzi. Necht $A \in H(\{a_n\})$. Pak existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Posloupnost $\{n_{k+m}\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Poněvadž podle Lemmatu 2.2.33 pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_{k+m} \geq k+m > m$, je $\{a_{n_{k+m}}\}_{k=1}^{\infty}$ vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.32 potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_{k+m}} = A$, a proto $A \in H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty})$. ♣

2.4.19. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující $a \leq a_n \leq b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$. Necht A je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$. Dokažte, že potom $A \in [a, b]$.

Řešení. Necht $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost indexů taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Položme $b_k = a$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \geq b_k$. Podle Věty 2.2.44(b) platí $A \geq a$. Obdobně lze dokázat, že $A \leq b$. Tvrzení je dokázáno. ♣

2.4.20. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Důkaz. Označme $\limsup a_n = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{m_1} < A + 1$. Z definice b_{m_1} vyplývá, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$, splňující $b_{m_1} \geq a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Pak platí $|b_{m_1} - a_{m_1}| < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme určena přirozená čísla m_1, \dots, m_k a n_1, \dots, n_k . Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $m_{k+1} > m_k$ a $b_{m_{k+1}} < A + \frac{1}{k+1}$. Z definice $b_{m_{k+1}}$ vyplývá, že existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, takové, že $n_{k+1} \geq m_{k+1}$ a $b_{m_{k+1}} \geq a_{n_{k+1}} > b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1}$. Takto postupně definujeme všechny členy posloupností $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ pak platí

$$|a_{n_k} - A| \leq |a_{n_k} - b_{m_k}| + |b_{m_k} - A| < \frac{2}{k} + \frac{2}{k} = \frac{2}{k},$$

a tedy $\lim a_{n_k} = A$. Odtud vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená. Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozená čísla n_1, \dots, n_k . Množina $\{a_j; j > n_k\}$ je shora neomezená. Můžeme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že $a_{n_{k+1}} > k + 1$. Podle Věty 2.3.33 platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Konečně předpokládejme, že $A = -\infty$. Podle 2.4.11 platí $\liminf a_n \leq -\infty$, tedy $\liminf a_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.13 znamená, že $\lim a_n = -\infty$. Odtud bezprostředně vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$, neboť posloupnost $\{a_n\}$ je svou vlastní podposloupností,

Dokázali jsme, že $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$. Obdobně lze dokázat, že $\liminf a_n \in H(\{a_n\})$. Zbývá dokázat, že pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Předpokládejme, že $y \in H(\{a_n\})$. Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak zřejmě platí $y \leq \limsup a_n$. Je-li $\limsup a_n < \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Necht $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = y$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \leq b_{n_k}$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.32(b)) platí $y \leq \limsup a_n$. Obdobně lze dokázat, že $y \geq \liminf a_n$. Tím je důkaz věty proveden. ■

2.4.21. Důsledek. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom je množina $H(\{a_n\})$ neprázdňá.

Důkaz. Podle Věty 2.4.20 obsahuje množina $H(\{a_n\})$ prvek $\limsup a_n$, je tedy neprázdňá. ■

2.4.22. Důsledek. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$.

Důkaz. Tvrzení plyne bezprostředně z Věty 2.4.20. ■

2.4.23. Důsledek. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim a_n = A$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Důkaz. Podle Věty 2.4.13 platí $\limsup a_n = \liminf a_n = A$, takže tvrzení plyne z Věty 2.4.20. ■

2.4.24. Příklad. Necht $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $H(\{a_n\}) = \{-1, 1\}$.

Řešení. Protože podposloupnosti $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ splňují $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1$, dostáváme inkluzi $H(\{a_n\}) \supset \{-1, 1\}$.

Opačnou inkluzi dokážeme sporem. Necht existuje $A \in \mathbb{R}^*$ takové, že $A \in H(\{a_n\}) \setminus \{-1, 1\}$. Potom existuje podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Podle Lemmatu 2.3.15 existuje $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 > 0$, takové, že $-1 \notin B(A, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 > 0$, takové, že $1 \notin B(A, \varepsilon_2)$. Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Potom $B(A, \varepsilon) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí buď $a_{n_k} = 1$ nebo $a_{n_k} = -1$, a tedy $a_{n_k} \notin B(A, \varepsilon)$, což je ve sporu s tím, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Odtud plyne $H(\{a_n\}) \subset \{-1, 1\}$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Na závěr tohoto oddílu uvedme ještě Bolzanovu-Cauchyovu⁵ podmínku. Její význam ukazují pak následující věta.

2.4.25. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu-Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.4.26. Věta. Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu a označme tuto limitu A . Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

\Leftarrow Nyní naopak předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako v textu před Definicí 2.4.9. Z definice těchto posloupností vyplývají pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

⁵Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}$, $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně,

$$\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}.$$

Označíme-li $A = \liminf a_n$, pak podle Věty 2.4.13 platí $\lim a_n = A$. Jak víme, $A \in \mathbb{R}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu. ■

2.4.27. Věta (Borelova věta⁶). Necht I je uzavřený interval a \mathcal{S} je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.

Důkaz. Necht $I = [a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Označme symbolem M množinu všech $x \in [a, b]$, pro které existuje konečná množina $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}$ taková, že $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_x$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_a \in \mathcal{S}$ splňující $a \in I_a$. Položme $\mathcal{S}_a = \{I_a\}$. Potom je zřejmě \mathcal{S}_a konečná množina a platí $[a, a] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$. Tedy $a \in M$, takže množina M je neprázdná. Navíc je zřejmě b horní závorou množiny M , a tedy M je shora omezená. Označme $y = \sup M$. Z výše uvedených faktů vyplývá, že $y \in [a, b]$. Protože I_a je otevřený interval, existuje $x \in [a, b]$, $x > a$, takové, že $x \in I_a$. Pak zřejmě platí $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$, a tedy $x \in M$. To znamená, že $y > a$.

Dokážeme, že $y \in M$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in I_y$. Tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $y - \delta > a$ a $(y - \delta, y) \subset I_y$. Položme $z = y - \frac{\delta}{2}$. Potom $z < y$, a tedy dle definice suprema existuje konečná množina $\mathcal{S}_z \subset \mathcal{S}$ splňující $[a, z] \subset \bigcup \mathcal{S}_z$. Položme $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z \cup \{I_y\}$. Potom je \mathcal{S}_y konečná množina otevřených intervalů. Předpokládejme, že $x \in [a, y]$. Je-li $x \in [a, z]$, potom $x \in \bigcup \mathcal{S}_z$. Je-li $x \in (z, y)$, potom $x \in I_y$. V každém případě platí $x \in \bigcup \mathcal{S}_y$, takže $[a, y] \subset \bigcup \mathcal{S}_y$. Odtud vyplývá, že $y \in M$.

Zbývá dokázat, že $y = b$. Předpokládejme, že $y < b$. Potom existuje otevřený interval $J_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in J_y$. Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $y + \varepsilon < b$ a $[y, y + \varepsilon) \subset J_y$. Potom pomocí obdobné úvahy jako výše lze dokázat, že $y + \varepsilon \in M$. To je spor s definicí suprema. Dokázali jsme tedy, že $b = \sup M$ a $b \in M$. Odtud vyplývá tvrzení věty. ■

2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti

2.5.1. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim a_n = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je množina

$$\{n \in \mathbb{N}; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$$

konečná.

⁶Émile Borel (1871-1956)

Řešení. \Leftarrow Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\} + 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme, že $\lim a_n = A$.

\Rightarrow Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ je tudíž podmnožinou konečné množiny $\{n \in \mathbb{N}; n < n_0\}$, a tedy je sama konečná. ♣

2.5.2. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, a tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Zároveň zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \varepsilon$. Podle definice limity odtud vyplývá, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. ♣

2.5.3. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $a > 1$. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Řešení. Nejprve dokážeme tvrzení pro $k = 1$. Označme $\varepsilon = a - 1$. Potom $\varepsilon > 0$, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.5.5)

$$a^n = (1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n+1)\varepsilon^2}{2}.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$0 < \frac{n}{a^n} \leq n \frac{2}{n(n+1)\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)}.$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)} = 0$, plyne z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46), že $\lim \frac{n}{a^n} = 0$.

Necht nyní $k \in \mathbb{N}$. Označme $b = a^{\frac{1}{k}}$. Pak $b > 1$, a tedy dle již dokázané části tvrzení platí $\lim \frac{n}{b^n} = 0$. Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36(b)) platí

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = \lim \left(\frac{n}{b^n} \right)^k = 0^k = 0.$$

Tvrzení je dokázáno. ♣

2.5.4. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Řešení. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) vyplývá existence čísla $m \in \mathbb{N}$ splňujícího $m \geq a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, potom platí

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$

Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq m - 1$ platí

$$\frac{a}{j} \leq a$$

a pro každé $j \in \mathbb{N}$, $m \leq j \leq n - 1$ platí

$$\frac{a}{j} \leq 1.$$

Celkem tedy dostáváme odhad

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \leq \frac{a^m}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{a^m}{n} \quad \text{a} \quad c_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

♣

2.5.5. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Řešení. Nejprve pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme n -tý člen posloupnosti ve tvaru

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}.$$

Postupně odhadneme každý činitel v tomto součinu a dostaneme

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad c_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

♣

2.5.6. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom zřejmě platí

$$n! \geq n(n-1)(n-2) \cdots \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{\frac{n}{2}},$$

a tedy

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

Dále zřejmě platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \infty.$$

Z Věty 2.3.33 tudíž vyplývá, že také $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. ♣

2.5.7. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log n = \infty.$$

Řešení. Necht $K \in \mathbb{R}$. Musíme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $\log n > K$. Tato nerovnost je podle vlastností logaritmu a exponenciální funkce (Věta 1.7.16(h)) ekvivalentní nerovnosti

$$n > e^K. \quad (2.22)$$

Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.27) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > e^K$ (například můžeme volit $n_0 = [e^K] + 1$). Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí (2.22). Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.8. Příklad. Necht $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokažte, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní právě tehdy, když $q \geq 0$ nebo $\alpha = 0$.

Řešení. Je-li $\alpha = 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ konstantní, a tedy monotónní. Předpokládejme, že $\alpha > 0$. Je-li $q \in [0, 1]$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \leq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \leq \alpha q^n$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě nerostoucí. Je-li $q \in [1, \infty)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \geq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \geq \alpha q^n$ a posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě neklesající. Obdobně lze dokázat, že je-li $\alpha < 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající pro každé $q \in [0, 1]$ a nerostoucí pro každé $q \in [1, \infty)$.

Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a $q < 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n \geq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n \leq 0$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n \leq \alpha q^{n+1}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n \geq \alpha q^{n+1}$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy není monotónní. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ není monotónní, je-li $\alpha < 0$ a $q < 0$. Tvrzení je dokázáno. ♣

2.5.9. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Dokažte, že pro množinu hromadných hodnot této posloupnosti platí

$$H(\{a_n\}) = \{c \in \mathbb{R}^*; \liminf a_n \leq c \leq \limsup a_n\}.$$

Řešení. Označme $a = \liminf a_n$ a $b = \limsup a_n$. Z Věty 2.4.20 plyne inkluze „ \subset “ a fakt, že $a, b \in H(\{a_n\})$. Stačí proto dokázat, že každý prvek intervalu (a, b) leží v množině $H(\{a_n\})$. Necht' tedy $c \in (a, b)$ je dáno. Zvolme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující $a < c - \delta < c + \delta < b$. Hlavní myšlenka důkazu spočívá v ověření následujícího pozorování:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \delta) \forall k \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : n > k \ \& \ a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Abychom tento fakt dokázali, uvažujme dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $j_0 > k$ a pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $|a_{j+1} - a_j| < \varepsilon$. Protože $a < c - \frac{\varepsilon}{2}$, z definice limes inferior existuje $j_1 \in \mathbb{N}$, $j_1 > j_0$, splňující $a_{j_1} < c - \frac{\varepsilon}{2}$ a protože $c + \frac{\varepsilon}{2} < b$, z definice limes superior existuje $j_2 \in \mathbb{N}$, $j_2 > j_1$, splňující $a_{j_2} > c + \frac{\varepsilon}{2}$. Položme

$$N = \left\{ \mathbb{N} \cap [j_1, j_2] : a_j < c - \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Protože $j_1 \in N$, je N neprázdná konečná množina, a existuje tak $m = \max N$. Protože $j_2 \notin N$, platí $m < j_2$. Přirozené číslo $k = m + 1$ pak splňuje $j_1 < k \leq j_2$ a $k \notin N$. Proto $a_k \geq c - \frac{\varepsilon}{2}$. Dostáváme tak

$$c - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_k = a_{m+1} = a_{m+1} - a_m + a_m < \varepsilon + c - \frac{\varepsilon}{2} = c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Číslo k je tedy požadovaný index, neboť $k > m \geq j_1 > j_0 > k$ a

$$c - \varepsilon < c - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_k \leq c + \frac{\varepsilon}{2} < c + \varepsilon.$$

Tím je důkaz pozorování dokončen.

Pomocí právě ověřeného pozorování již důkaz tvrzení snadno dokončíme. Položme $\varepsilon_k = \frac{\delta}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, a induktivně nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ splňující $a_{n_k} \in (c - \varepsilon_k, c + \varepsilon_k)$. V prvním kroku indukce nalezneme pomocí pozorování použitého pro $k = 1$ index $n_1 > 1$ takový, že $a_{n_1} \in (c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1)$. Máme-li nyní již nalezena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in (c - \varepsilon_j, c + \varepsilon_j)$ pro $j \in \{1, \dots, k\}$, použijeme pozorování pro přirozené číslo n_k k nalezení indexu $n_{k+1} > n_k$ takového, že $a_{n_{k+1}} \in (c - \varepsilon_{k+1}, c + \varepsilon_{k+1})$.

Tím jsme našli posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}$, která konverguje k c , jelikož

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - c| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 2\varepsilon_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2^{k-1}} = 0.$$

Tedy $c \in H(\{a_n\})$ a důkaz tvrzení je dokončen. \clubsuit

2.5.10. Příklad. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Dokažte, že platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Řešení. Nejprve dokážeme první nerovnost. Označme $B = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pokud $B = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme nyní $B > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $B > K > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} > K.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \right)^{\frac{1}{n}} \geq (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.53 spočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} K (K^{-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = K.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = K,$$

takže celkem dostáváme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq K.$$

Díky volbě K odtud plyne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq B.$$

Tím je dokázána první nerovnost. Druhá nerovnost platí podle 2.4.11. Zbývá provést důkaz třetí nerovnosti. Označme $A = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom $A \in \mathbb{R}^*$, $A \geq 0$. Pokud $A = \infty$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \right)^{\frac{1}{n}} \leq ((A + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}. \quad (2.23)$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup ((A + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.53 spočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((A + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (A + \varepsilon) ((A + \varepsilon)^{-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = A + \varepsilon.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} ((A + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = A + \varepsilon,$$

a tedy celkem dostáváme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon.$$

Díky volbě ε odtud plyne, že $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A$. Tím je dokázána třetí nerovnost. ♣

2.5.11. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $b_k \in H(\{a_n\})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Necht dále $b \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$. Dokažte, že potom $b \in H(\{a_n\})$.

Řešení. Položme $\varepsilon = 1$. Nalezneme $k_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_1} \in B(b, 1)$. Z definice hromadného bodu plyne, že pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(b, 1)$.

Necht $j \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme určena přirozená čísla n_1, n_2, \dots, n_j . Potom existuje $k_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$. Nalezneme $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{j+1} > n_j$ a $a_{n_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$.

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = b$. Tedy b je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. ♣

2.5.12. Příklad. Necht $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokažte, že pro hromadné body posloupnosti $\{a_n\} = \{n\alpha - [n\alpha]\}$ platí $H(\{a_n\}) = [0, 1]$.

Řešení. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, a $x \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Nyní dokažeme, že platí výrok

$$\exists p \in \mathbb{Z} \exists q \in \mathbb{N} : |\alpha q - p| < \frac{1}{m} < \varepsilon. \quad (2.24)$$

Pro $k \in \{0, \dots, m\}$ položme $x_k = \alpha k - [\alpha k]$. Pak pro každé takové k platí $x_k \in [0, 1)$. Interval $[0, 1)$ je sjednocením m intervalů tvaru

$$[0, \frac{1}{m}), [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}), \dots, [\frac{m-1}{m}, 1).$$

Existuje tedy alespoň jeden z uvedených intervalů, který obsahuje dva členy posloupnosti $\{x_k\}_{k=0}^m$. Předpokládejme, že jde o prvky x_i a x_j , kde $i < j$. Pak platí $|x_j - x_i| < \frac{1}{m}$. Položme $p = [\alpha j] - [\alpha i]$ a $q = j - i$. Potom $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a platí

$$|q\alpha - p| = |(j - i)\alpha - ([\alpha j] - [\alpha i])| = |x_j - x_i| < \frac{1}{m}.$$

Tím je dokázána platnost výroku (2.24).

Dokažeme, že $q\alpha - p \neq 0$. Kdyby $q\alpha - p = 0$, pak by $\alpha = \frac{p}{q}$, což není možné, protože α je iracionální.

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{Z}$ splňující

$$n_0(q\alpha - p) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \quad (2.25)$$

Odtud plyne, že $n_0 \neq 0$, neboť $0 \notin (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Dále platí $[n_0(q\alpha - p)] = 0$, a tedy $n_0 p = [n_0 \alpha q]$.

Je-li $n_0 > 0$, položíme $n = n_0 q$. Potom $n \in \mathbb{N}$ a z (2.25) vyplývá, že

$$a_n = n_0 \alpha q - [n_0 \alpha q] \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

tedy $|a_n - x| < \varepsilon$. Podobně jako v řešení Příkladu 2.5.9 odtud vyplývá, že $x \in H(\{a_n\})$. Protože ε i $x \in (0, 1)$ byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $(0, 1) \subset H(\{a_n\})$. Podle Příkladu 2.5.11 dostáváme $[0, 1] \subset H(\{a_n\})$. Inkluze $H(\{a_n\}) \subset [0, 1]$ plyne z Věty 2.2.44. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.13. Příklad (Stolzova věta). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim b_n = \infty$. Necht $A \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A.$$

Dokažte, že potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

Řešení. Položme $a_0 = b_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $A > -\infty$. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < A$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ platí

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > \alpha.$$

Necht $n \in \mathbb{N}$, $n > k_0$. Potom

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} + \sum_{k=k_0+1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n}.$$

Pro druhý sčítanec na pravé straně poslední rovnosti platí odhad

$$\sum_{k=k_0+1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = \sum_{k=k_0+1}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} \geq \alpha \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n}.$$

Protože podle věty o aritmetice limit a z předpokladu $\lim b_n = \infty$ plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = 0,$$

a navíc zřejmě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} = 1,$$

dostáváme celkem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \alpha.$$

Protože $\alpha < A$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq A.$$

Tato nerovnost platí tedy pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, neboť pro $A > -\infty$ jsme ji právě dokázali a pro $A = -\infty$ je triviální. Obdobným způsobem odvodíme nerovnost

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A.$$

Odtud plyne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

Tvrzení věty je dokázáno. \clubsuit

2.5.14. Příklad. Dokažte, že každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.

Řešení. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Předpokládejme nejprve, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ má množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq m\}$ největší prvek. Označme $n_0 = 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_{n_1} = \max\{a_n; n \geq 1\}.$$

Předpokládejme nyní, že máme nalezena přirozená čísla n_1, n_2, \dots, n_k . Zvolíme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} = \max\{a_n; n \geq n_k + 1\}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_j} = \max\{a_n; n \geq n_{j-1} + 1\}, \quad j = 2, \dots, k.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je nerostoucí.

Nyní předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq m\}$ nemá největší prvek. Potom pro každé $m' \in \mathbb{N}$, $m' \geq m$ nemá množina $\{a_n; n \geq m'\}$ největší prvek. Položme $n_1 = m$. Předpokládejme nyní, že máme zvolena přirozená čísla n_1, n_2, \dots, n_k . Množina $\{a_n; n \geq n_k\}$ nemá podle předpokladu největší prvek. Protože je a_{n_k} jejím prvkem, existuje $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} > a_{n_k}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \dots < a_{n_k}.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je rostoucí. Tím je tvrzení dokázáno. \clubsuit

2.5.15. Poznámka. Příklad 2.5.14 lze následujícím způsobem využít k alternativnímu důkazu Bolzanovy-Weierstrassovy věty. Je-li $\{a_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel, lze z ní vybrat podle Příkladu 2.5.14 vybrat monotónní podposloupnost, která bude opět omezená. Taková posloupnost je konvergentní podle Důsledku 2.4.2.

2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti

2.6.1. Příklad. Necht $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována předpisem

$$a_n = \left(\frac{x^3}{3x-2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vyšetřete, pro která reálná čísla x je posloupnost $\{a_n\}$ monotónní a určete typ její monotonic v závislosti na parametru x .

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, je $\{a_n\}$ geometrická posloupnost. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ označíme $q_x = \frac{x^3}{3x-2}$. Podle Příkladu 2.5.8 je tato posloupnost monotónní právě tehdy, když platí $q_x \geq 0$. Navíc je konstantní právě pro $q_x \in \{0, 1\}$. Bude užitečné si uvědomit, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, platí

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Je-li $x \in (\frac{2}{3}, \infty)$, je $q_x \geq 0$. Pro tato x dále platí, že $x^3 - 3x + 2 \geq 0$, tj. $q_x \geq 1$. Navíc $q_x > 1$ pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a $q_x = 1$ pro $x = 1$. Tedy posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a konstantní pro $x = 1$.

V případě $x \in (-\infty, \frac{2}{3})$ platí $q_x \geq 0$ právě tehdy, když $x \leq 0$. Dále je $q_x > 1$ právě tehdy, když $x^3 - 3x + 2 < 0$, což nastává právě pro $x \in (-\infty, -2)$. Nakonec si povšimneme, že $q_x \in \{0, 1\}$ právě tehdy, když $x \in \{-2, 0\}$. Zadaná posloupnost je proto rostoucí pro $x \in (-\infty, -2)$, klesající pro $x \in (-2, 0)$ a konstantní pro $x \in \{-2, 0\}$.

Shrneme-li přecházející úvahy, dostáváme, že

$$\{a_n\} \begin{cases} \text{je rostoucí pro} & x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, \infty), \\ \text{je klesající pro} & x \in (-2, 0), \\ \text{je konstantní pro} & x \in \{-2, 0, 1\}, \\ \text{není monotónní pro} & x \in (0, \frac{2}{3}). \end{cases}$$

♣

2.6.2. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n (\frac{1}{4} - \frac{2}{n})\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Necht A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = \frac{1}{36}$. Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné.

Předpokládejme nejprve, že $A \geq 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ liché a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom $\frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} > 0$, a tedy

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} \right) - A \right| &= \left| (-1) \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A \right) \right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon, \end{aligned}$$

jinými slovy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Nyní předpokládejme, že $A < 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ sudé a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} \right) - A \right| &= \left| \frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A \right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy opět $|a_n - A| \geq \varepsilon$. Podle 2.2.11 tedy posloupnost $\{a_n\}$ nemá vlastní limitu. ♣

2.6.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}.$$

Řešení. Výraz $\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ je podílem hodnot dvou polynomů v bodech n , přičemž polynom v čitateli má stupeň 2 a polynom ve jmenovateli má stupeň 3. Vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem n^3 , tedy mocninou čísla n odpovídající vyššímu z obou stupňů. Podle Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2\frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{0 + 0 - 0}{1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

♣

2.6.4. Příklad. Necht $a, b \in (0, 1)$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 1.5.7 plyne, že

$$\frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n} = \frac{(1-b)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-b^{n+1})}.$$

Z Příkladu 2.3.35 a Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - a^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$$

a obdobně také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - b^{n+1} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit pak vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1-a^{n+1})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1-b^{n+1})} = \frac{1-b}{1-a}.$$

♣

2.6.5. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}.$$

Řešení. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Potom z binomické věty dostaneme

$$(n+4)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1}4n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}4^i n^{100-i}$$

a podobně

$$(n+3)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1}3n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}3^i n^{100-i}.$$

Tedy

$$(n+4)^{100} - (n+3)^{100} = 100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}(4^i - 3^i)n^{100-i}.$$

Obdobným postupem lze dokázat, že

$$(n+2)^{100} - n^{100} = 200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}2^i n^{100-i}.$$

Odtud a z Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}(4^i - 3^i)n^{100-i}}{200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}2^i n^{100-i}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}(4^i - 3^i)\frac{1}{n^{i-1}}}{200 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}2^i \frac{1}{n^{i-1}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♣

2.6.6. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

Řešení. Bude užitečné si uvědomit, že větu o aritmetice limit (Věta 2.3.27) nemůžeme použít přímo, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1}$$

není definován. Zapišeme výraz $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{n^2 + n - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Nyní rozšíříme výsledný zlomek výrazem $\frac{1}{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Podle Příkladu 2.2.50 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}},$$

plyne odtud a z věty o dvou strážnicích (Věta 2.2.46), že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Celkem tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1 - 0}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♣

2.6.7. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$$

Řešení. Podobně jako v předcházejícím příkladu, ani zde nelze ihned využít věty o aritmetice limit. Protože

$$(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}) = 1,$$

platí

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Dostaneme

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + 1}}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí

$$1 \leq \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} \leq 1 + \frac{1}{n},$$

a tedy z Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} = 1.$$

Z Příkladů 2.2.37 a 2.2.51 vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0.$$

Kombinací odhadů pak pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \\ &= \frac{0}{1 + 1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

♣

2.6.8. Příklad. Vypočtěte $\lim(\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$.

Řešení. Uvědomíme si, že nelze užít větu o limitě součtu, protože $\lim \sqrt{4n^2 - n} = \infty$ a $\lim \sqrt{n(4n - 1)} = \infty$ (Věta 2.3.27(b) a Příklad 2.3.38) a $\lim(-2n) = -\infty$. Nejprve rozšíříme n -tý člen naší posloupnosti výrazem

$$\frac{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}$$

a použijeme vzorec $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, kde položíme $a = \sqrt{4n^2 - n}$, $b = 2n$. Dostaneme tak

$$\sqrt{4n^2 - n} - 2n = (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n} = \frac{-n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}.$$

Tento zlomek ještě rozšíříme výrazem $\frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\sqrt{4n^2 - n} - 2n = \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2}.$$

Protože poslední rovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, obdržíme podle Věty 2.3.27 a Příkladu 2.2.51

$$\lim(\sqrt{4n^2 - n} - 2n) = \lim \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2} = -\frac{1}{4}.$$

♣

2.6.9. Příklad. Vypočtete $\lim \frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}}$.

Řešení. Nejprve provedeme následující *neformální* úvahu. Čísla 5 a 8, která vystupují pod druhými odmocninami, jsou malá ve srovnání s n , které neomezeně roste. Jestliže tato čísla zanedbáme, budou ve zlomku figurovat následující mocniny proměnné n : $n^{\frac{3}{2}}$, $n^{\frac{1}{3}}$, $n^{\frac{3}{2}}$ a $n^{\frac{4}{3}}$. Nejvyšší exponent je $\frac{3}{2}$. Na základě této předběžné úvahy rozšíříme zlomek výrazem $n^{-\frac{3}{2}}$. Dostaneme tak

$$\frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}} = \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}}.$$

Limitu posledního výrazu snadno spočteme na základě Věty 2.3.27 o aritmetice limit a Příkladu 2.3.38:

$$\lim \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim \sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3 \lim \sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\lim \sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \lim \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}.$$

♣

2.6.10. Příklad. Spočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} - \sqrt[6]{(n^2+1)^3}.$$

Dále pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a^6 - b^6) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

Tuto identitu aplikujeme na čísla

$$a = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \quad a \quad b = \sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

a dostaneme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n^3+1)^2 - (n^2+1)^3}{\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}} + \sqrt[6]{(n^3+1)^8(n^2+1)^3} + \dots + \sqrt[6]{(n^2+1)^{15}}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{n^5}$ a obdržíme

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{-3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2} - 3\frac{1}{n^3}}{\sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^8(1 + \frac{1}{n^2})^3} + \dots + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^2})^{15}}},$$

a tedy

$$n(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{-3 + 2\frac{1}{n} - 3\frac{1}{n^2}}{\sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^8(1 + \frac{1}{n^2})^3} + \dots + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^2})^{15}}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.9, 2.2.37, 2.2.51 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) konečně dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

♣

2.6.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}).$$

Řešení. Pokud bychom ihned použili větu o limitě součinu, tak dostaneme neurčitý výraz $\infty \cdot 0$. Zkusíme si tedy zadaný výraz nejprve upravit za použití vzorce

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

Snadno dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) &= \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) \frac{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2^{n-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{n}(3 - 2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Nyní si stačí uvědomit, že ve jmenovateli posledního zlomku je n členů z nichž každý je větší než 1, a odhadneme tedy

$$0 \leq \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Z $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících.

♣

2.6.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!}.$$

Řešení. Výraz $\frac{3^n+n^2}{n^3+n!}$ obsahuje kromě mocnin čísla n navíc exponenciální výraz 3^n a výraz $n!$. Z předcházejících příkladů vyplývá, že bude výhodné rozšířit čitatele i jmenovatele výrazem $\frac{1}{n!}$. Dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 pro $a = 3$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Podle Příkladů 2.5.3 a 2.5.4 a podle Věty o limitě součinu (Věta 2.3.27(b)) je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} \frac{2^n}{n!} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Obdobně lze dokázat, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0.$$

♣

2.6.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}.$$

Řešení. Z Věty 1.7.18(a) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$-1 \leq \sin(n!) \leq 1.$$

Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Kombinací odhadů dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Podle Příkladu 2.2.51 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

a tedy také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{a} \quad c_n = \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} = 0.$$

♣

2.6.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Řešení. Podle Příkladu 1.8.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí

$$n^2 \leq 2^n \leq 3^n.$$

Pro každé takové $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3 \sqrt[n]{3}.$$

Podle Příkladu 2.2.53 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt[n]{3} = 3.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 3, \quad b_n = \sqrt[n]{3}, \quad c_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ platí

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3.$$

Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) tedy plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♣

2.6.15. Příklad. Necht $a_n = [\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}]$, $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. Označme $b_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{6n^2}{(n^3 + 8n^2)^{\frac{2}{3}} + ((n^3 + 8n^2)(n^3 + 2n^2))^{\frac{1}{3}} + (n^3 + 2n^2)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{6}{(1 + \frac{8}{n})^{\frac{2}{3}} + ((1 + \frac{8}{n})(1 + \frac{2}{n}))^{\frac{1}{3}} + (1 + \frac{2}{n})^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Limita posloupnosti $\{b_n\}$ je tedy rovna 2. Protože

$$3 < \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\left(1 + \frac{8}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $b_n < 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_n > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro tato n pak platí $1 < b_n < 2$, a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [b_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

♣

2.6.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right] 100}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Na většinu jednoduchých příkladů s celými částmi stačí použít elementární odhad

$$x - 1 \leq [x] \leq x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Díky tohoto odhadu dostaneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100} 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right] 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left(\frac{n^3}{100} - 1\right) 100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}.$$

Vzhledem k $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících.

♣

2.6.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Řešení. Necht $A \in \mathbb{R}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$, pak položíme $n = 4n_0 + 3$. Potom zřejmě platí $n \geq n_0$ a

$$\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - A\right| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$, pak položíme $n = 4n_0 + 1$. Potom opět $n \geq n_0$ a navíc platí

$$\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - A\right| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Z kombinace obou případů vyplývá výrok

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - A\right| \geq \varepsilon.$$

Z 2.2.11 vyplývá, že posloupnost $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ nemá vlastní limitu. Z vlastností funkce \sin (Věta 1.7.18(a)) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$. Posloupnost je tedy omezená, a proto nemůže mít ani nevlastní limitu.

♣

2.6.18. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

a tedy

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a dostaneme

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) a Příkladu 2.2.50 tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

Odtud a opět z věty o aritmetice limit dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \frac{1}{2},$$

zatímco

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -\frac{1}{2}.$$

Odtud a z 2.2.34 plyne, že $\lim a_n$ neexistuje. ♣

2.6.19. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n \right).$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} = \frac{2n}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 a Věty 2.2.36 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Tedy opět podle Věty 2.3.27 dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = \infty$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(-\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = -\infty.$$

Protože

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \in \{2k; k \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \in \{4k+1; k \in \mathbb{N}\}, \\ -1, & n \in \{4k-1; k \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

dostáváme celkem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k+1} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k-1} = -\infty,$$

a tedy podle Věty 2.3.22 $\lim a_n$ neexistuje. ♣

2.6.20. Příklad. Zjistěte, zda posloupnost $\left\{ \frac{(-1)^n + 2}{2^n(3 - (-1)^n)} \right\}$ má limitu. Pokud ano, vypočtěte ji.

Řešení. Zadaná posloupnost je součinem posloupností $\left\{ \frac{(-1)^n + 2}{3 - (-1)^n} \right\}$ a $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$. První z nich je omezená, neboť každý její člen je roven buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. Druhá posloupnost má limitu rovnou 0. Podle Věty 2.2.41 má tedy posloupnost $\left\{ \frac{(-1)^n + 2}{2^n(3 - (-1)^n)} \right\}$ limitu rovnou 0. ♣

2.6.21. Příklad. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$a_1 = 10 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že posloupnost má vlastní limitu, kterou označíme A . Kombinací 2.2.29(b) a věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) pak dostaneme

$$\lim a_{n+1} = A.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) obdržíme

$$\lim \left(6 - \frac{5}{a_n} \right) = 6 - \frac{5}{A},$$

a tedy

$$A = \lim a_{n+1} = \lim \left(6 - \frac{5}{a_n} \right) = 6 - \frac{5}{A}.$$

Tento vztah chápeme jako rovnici pro neznámou A . Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$.

Zatím jsme dokázali pouze následující implikaci: je-li posloupnost konvergentní, pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Zatím však nevíme, zda posloupnost nějakou limitu má. To se nyní budeme snažit dokázat, a to pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Vzhledem k tomu, že $a_1 = 10$ a navíc, jak snadno ověříme dosazením, platí $a_2 < a_1$, je pravděpodobné, že limitou posloupnosti, pokud nějaká existuje, je spíše číslo 5 než číslo 1 a že posloupnost je klesající.

Dokážeme matematickou indukci, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Potom

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5,$$

a tvrzení tedy vyplývá z principu matematické indukce.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z toho, že $a_n > 5$.

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, takže $\{a_n\}$ je zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. Označme její limitu symbolem A . Podle úvahy v první části řešení musí platit buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, vyplývá podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)), že $A \geq 5$, takže možnost $A = 1$ je vyloučena. Můžeme tudíž učinit závěr, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5.$$

♣

2.6.22. Příklad. Necht $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je hodnota a_n zadána předpisem

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$ a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}. \quad (2.26)$$

Ze zadané nerovnosti $a_1 < a_2$ vyplývá, že

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

a

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1.$$

Odtud dále plyne, že

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

a podobně

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} > \frac{a_3 + a_3}{2} = a_3.$$

Kombinací odhadů dostaneme

$$a_1 < a_3 < a_4 < a_2,$$

což je (2.26) pro $k = 1$. Předpokládejme, že (2.26) platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme

$$a_{2k+1} < \frac{a_{2k+1} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+3}.$$

Z této nerovnosti dále plyne

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < \frac{a_{2k+2} + a_{2k+3}}{2} = a_{2k+4}.$$

Konečně z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ dostaneme

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < a_{2k+2}.$$

a tedy

$$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} < a_{2k+2}.$$

Ověřili jsme tedy platnost nerovností (2.26) pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Z (2.26) plyne, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \leq a_n \leq a_2$, takže posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = B.$$

Ze vztahu

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$

vyplývá, že

$$B = \frac{A + B}{2},$$

a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru

$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \dots, n$ postupně dostaneme

$$a_3 - a_2 = a_1 - a_3,$$

$$a_4 - a_3 = a_2 - a_4,$$

...

$$a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-3} - a_{n-1},$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_n,$$

$$a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}.$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}.$$

Odtud plyne, že

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A,$$

a tedy

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

♣

2.6.23. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ nechť je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že tato posloupnost má limitu a spočítejte ji.

Řešení. Definujme funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0, 1].$$

Nechť c značí kořen kvadratické funkce $x^2 + x - 1$ nacházející se v intervalu $[0, 1]$, tj. $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Protože $g(x) = 1 - \frac{2}{1+x}$, je g na intervalu $[0, 1]$ rostoucí a pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0, 1]$ právě jeden kořen, a to c ,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0, c)$ a $c < x < g(x)$ pro $x \in (c, 1]$.

Jelikož pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k+2} = g(a_{2k})$ a $a_{2k+1} = g(a_{2k-1})$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \dots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \dots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená podle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) rovnost $a = g(a)$. Proto $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (vizte Větu 2.3.23). ♣

2.6.24. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32), Příkladu 2.4.5, a Definice 2.4.6 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Tudíž podle Příkladu 2.2.51 dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

♣

2.6.25. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

Tedy jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Díky Příkladu 2.4.5, Definici 2.4.6 a větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) víme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e.$$

Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.36(c)) je tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

♣

2.6.26. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

2.6.27. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, platí

$$1 - \frac{1}{j^2} = \frac{j^2 - 1}{j^2} = \frac{(j-1)(j+1)}{j^2},$$

a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2.6.28. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Navíc pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $\frac{2j-1}{2j} \leq \frac{2j}{2j+1}$ a součinem těchto n nerovností dostaneme $a_n \leq b_n$. Tedy

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Odtud dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} = 0.$$

♣

Číselné řady

Nejen v matematice, ale i ve fyzice, chemii, ekonomii a dalších vědách, se často setkáváme s posloupnostmi, které vznikají následujícím způsobem. Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nová posloupnost má následující členy: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$, tj. m -tý člen nové posloupnosti je součtem prvních m členů posloupnosti $\{a_n\}$. Tato situace nastává tak často, že stojí za to těmto speciálním posloupnostem věnovat zvláštní kapitolu.

Při vyšetřování konvergence posloupností vzniklých uvedeným způsobem se snažíme sečíst nekonečně mnoho reálných čísel. Tato operace ovšem vyžaduje přesnou definici a pravidla pro korektní zacházení s nekonečnými součty.

3.1. Základní pojmy

3.1.1. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**, případně zkráceně **řadou**, přičemž číslo a_n je **n -tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Položíme-li pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m,$$

nazýváme číslo s_m **m -tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1.2. Definice. **Součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní.

Pro jemnější rozlišení mezi dvěma různými typy divergentních řad budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k ∞** , respektive **diverguje k $-\infty$** , jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \infty$, respektive $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = -\infty$, a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)**, jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje.

3.1.3. Poznámka. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny \mathbb{R}^* až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

3.1.4. Poznámka. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} & \begin{cases} \infty, \text{ pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje (osciluje).} \end{cases}$$

3.1.5. Poznámka. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti v Poznámce 2.3.40. Necht $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice uvedené v Poznámce 2.3.40). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje **řadu**, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde

$$s_m = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m,$$

pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky v této kapitole omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jejich případné zobecnění pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je většinou zcela přímočaré.

3.1.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ 0, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ tedy diverguje (osciluje). ♣

3.1.7. Definice. Necht $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

3.1.8. Příklad. Necht $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$. Jestliže $q \neq 1$, pak podle Příkladu 1.5.7 platí $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Předpokládejme, že $|q| < 1$. Potom platí $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje.

Nyní předpokládejme, že $|q| \geq 1$. Jestliže $q > 1$, pak z výše uvedeného vyplývá, že $\lim s_n = \infty$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje. Jestliže $q = 1$, pak $s_n = n + 1$, a tedy $\lim s_n = \infty$, takže řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ diverguje. Jestliže $q = -1$, pak řada diverguje podle Příkladu 3.1.6. Předpokládejme konečně, že $q < -1$. Položme $a = |q|$. Potom

$$s_n = \begin{cases} \frac{1+a^{n+1}}{1+a}, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ \frac{1-a^{n+1}}{1+a}, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $\limsup s_n = \infty$ a $\liminf s_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.13 znamená, že neexistuje $\lim s_n$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje. ♣

3.1.9. Příklad. Necht $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom platí

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}.$$

Řešení. Pro $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, platí

$$\sum_{n=k}^m q^n = q^k \sum_{n=0}^{m-k} q^n = q^k \frac{1-q^{m-k+1}}{1-q}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^m q^n = \lim_{m \rightarrow \infty} q^k \frac{1-q^{m-k+1}}{1-q} = \frac{q^k}{1-q}.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.1.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní a její součet je roven 1.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. Podle Příkladu 2.6.26 dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

♣

3.1.11. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a její součet je ∞ .

Řešení. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ uvedené řady je zřejmě rostoucí. Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) vyplývá, že existuje $\lim s_n$, kterou označíme symbolem A . Navíc platí $A = \sup\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $A \geq s_1 > 0$. Dokažeme, že $\{s_n\}$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Defnici 2.4.25). K tomu stačí nalézt $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňující

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0: |s_n - s_m| \geq \varepsilon.$$

Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Necht $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $n = n_0$ a $m = 2n_0$. Pak $m, n \geq n_0$ a platí

$$|s_n - s_m| = s_{2n_0} - s_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k}.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n_0$, platí $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$. Tudíž

$$|s_n - s_m| > n_0 \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{s_n\}$ tedy nespĺňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Odtud a z Věty 2.4.26 vyplývá, že posloupnost $\{s_n\}$ nemá vlastní limitu, takže $A \notin \mathbb{R}$. Protože $A > 0$, platí $A = \infty$. ♣

3.1.12. Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**.

3.1.13. Poznámka. Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. V takovém případě je pro nás otázka konvergence řady velice důležitá.

3.1.14. Pro nekonečné řady platí tvrzení obdobné Větě 2.3.17, tedy že změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet). Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

3.1.15. Věta (nutná podmínka konvergence řady). Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Podle 3.1.14 existuje také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. Podle Věty 2.2.36 tedy platí $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. ■

3.1.16. Opačná implikace v tvrzení Věty 3.1.15 neplatí. Platí například $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak podle Příkladu 3.1.11 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní.

3.1.17. V některých případech lze použít Větu 3.1.15 k odvození divergence řady. Jestliže $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a neplatí $\lim a_n = 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje. Věta 3.1.15 nám tak poskytuje jiné řešení Příkladu 3.1.6.

3.1.18. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence řady). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,
- (ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí $\sum_{k=n}^m a_k = s_m - s_n$. Výrok (3.1) tedy platí právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

To podle Věty 2.4.26 nastává právě tehdy, když posloupnost $\{s_n\}$ splňuje Bolzano-vu-Cauchyovu podmínku, tedy právě tehdy, když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Odtud plyne tvrzení. ■

3.1.19. Není těžké si rozmyslet, že výrok (3.1) je ekvivalentní výroku

$$\exists C \in \mathbb{R}, C > 0 \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < C\varepsilon.$$

3.1.20. Věta. Necht řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Necht $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Necht je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) pak dostaneme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \alpha a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha s_m = \alpha \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (a_n + b_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_m + t_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} s_m + \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \end{aligned}$$

■

3.1.21. Důsledek (linearita konvergentních řad). Necht jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.1.22. Věta. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergentní.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, je podle Důsledku 3.1.21 také řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. To je spor. ■

3.2. Řady s nezápornými členy

Důležité speciální případy nekonečných číselných řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro které je $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto řady se

vyznačují určitými specifickými vlastnostmi, které můžeme při práci s nimi (například při vyšetřování jejich konvergence či divergence) využít.

3.2.1. Věta. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když je posloupnost jejích částečných součtů shora omezená.

Důkaz. Označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ pro $m \in \mathbb{N}$.

\Leftarrow Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy. Zároveň je podle předpokladu shora omezená, a tedy je podle Důsledku 2.4.2 konvergentní. Podle Definice 3.1.2 je tedy konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

\Rightarrow Posloupnost $\{s_m\}$ je podle Definice 3.1.2 konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 omezená. ■

3.2.2. Věta (srovnávací kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a necht existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající, protože členy posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. Dokážeme, že posloupnost $\{s_n\}$ je shora omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí $s_n \leq s_{n_0} + t_n$. Posloupnost $\{t_n\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_{n_0} + t_n\}$ shora omezená. Proto je i posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená. Protože posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající a shora omezená, je podle Důsledku 2.4.2 konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvrzení bezprostředně plyne z již dokázaného tvrzení (a). ■

3.2.3. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Z Příkladu 3.1.10 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.4. Poznámka. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je roven číslu $\frac{\pi^2}{6}$, k důkazu tohoto tvrzení jsou však potřeba pokročilejší pasáže matematické analýzy.

3.2.5. Věta (limitní srovnávací kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $A \in (0, \infty)$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) Pokud $A = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Pokud $A = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K tomuto ε nalezneme podle definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}. \quad (3.2)$$

\Rightarrow Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Z první nerovnosti v (3.2) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A}a_n$. Podle Důsledku 3.1.21 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A}a_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

\Leftarrow Nyní předpokládejme, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Potom z druhé nerovnosti v (3.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3A}{2}b_n$. Obdobným způsobem jako v důkazu opačné implikace lze nyní dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

(b) Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$. Pak $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Položme $K = 1$. Podle definice nevlastní limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq b_n$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. ■

3.2.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle Příkladu 3.2.3 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.5(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+100}}$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+100}} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Z Příkladu 3.1.11 plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní. Podle Věty 3.2.5(c) je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. ♣

Základním nástrojem pro zkoumání konvergence řad s nezápornými členy je srovnávací kritérium, případně limitní srovnávací kritérium (Věty 3.2.2 a 3.2.5). Pro jejich používání však potřebujeme dostatečně rozsáhlou škálu řad, o nichž již víme, zda jsou konvergentní či divergentní. Takovou informaci zatím máme k dispozici pouze pro geometrickou řadu (Příklad 3.1.8). Využijeme ji nyní k odvození dvou velmi užitečných kritérií, totiž Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria.

3.2.8. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0, 1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Zvolme $q \in (A, 1)$. Pak podle definice limes superior nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{\sqrt[n]{a_n}; n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Tvrzení tedy plyne z již dokázaného tvrzení (a).

(c) Podle Věty 2.4.13 platí $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, a tedy tvrzení bezprostředně plyne z (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Podle Věty 2.4.20 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Protože $A > 1$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Povýšením této nerovnosti na n_k dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0$. Podle Věty 2.2.32 tedy neplatí ani $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Není tudíž splněna nutná podmínka konvergence řady, a tedy podle Věty 3.1.15 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení bezprostředně plyne z (d) a Věty 2.4.13. ■

3.2.9. Poznámka. Jestliže je $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není možné rozhodnout na základě Věty 3.2.8. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{b_n} = 1$, řada $\sum a_n$ je divergentní a řada $\sum b_n$ je konvergentní.

3.2.10. Příklad. Necht $k \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Podle Příkladu 2.2.52 platí $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Odtud a z věty o aritmetice limit pro posloupnosti (Věta 2.2.36) plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^k}{a^n}} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podle Věty 3.2.8(c) tedy řada konverguje. ♣

3.2.11. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Jestliže platí výrok

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Matematickou indukcí dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \quad (3.3)$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3.3) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.3).

Podle Příkladu 3.1.8 a Důsledku 3.1.21 je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle 3.1.14 je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak podle definice limes superior existují $q \in (0, 1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Tvrzení nyní plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak podle definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1. \quad (3.4)$$

Dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \geq a_{n_0}. \quad (3.5)$$

Pro $n = n_0$ je toto tvrzení zřejmé. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \geq a_{n_0}$, pak podle (3.4) platí

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \geq a_n \geq a_{n_0}.$$

Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.5). Řada má podle předpokladu kladné členy, a tedy $a_{n_0} > 0$. To znamená, že neplatí $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.15 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

3.2.12. Příklad. Necht $k \in \mathbb{N}$. Označme $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Řešení. Řada zřejmě diverguje pro $k = 1$. Předpokládejme, že $k \geq 2$. Platí $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a navíc pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\dots(kn+k)} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+\frac{1}{n})\dots(k+\frac{k}{n})}. \quad (3.6)$$

Z věty o limitě součinu (Věta 2.2.36(b)) dostáváme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = k^{-k} < 1$. Podle Věty 3.2.11 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ♣

3.2.13. Poznámka. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůžeme rozhodnout na základě Věty 3.2.11. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$, řada $\sum a_n$ je divergentní a řada $\sum b_n$ je konvergentní.

3.2.14. Poznámka. V souvislosti s tvrzením (d) ve Větě 3.2.11 upozorníme na to, že předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definovaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n-1}, & n \text{ je-li } n \text{ liché,} \\ 2^{-n+1}, & n \text{ je-li } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \dots$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq 2^{-n+1}$, a tedy je uvedená řada konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). Přesto však platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, neboť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ \frac{1}{8}, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

takže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

3.2.15. Příklad. Necht $a > 0$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konverguje.

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Řada tedy konverguje podle Věty 3.2.11(c). ♣

3.2.16. Poznámka. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Z Příkladu 2.5.10 plyne, že pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, pak existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a limity se rovnají. To znamená, že je-li splněna premisa tvrzení (c), nebo (d) Věty 3.2.11, pak je též splněna

premisa tvrzení po řadě (c), nabo (e) Věty 3.2.8. Výpočet $\lim \sqrt[n]{a_n}$ však může být v některých případech podstatně obtížnější než výpočet $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3.2.17. Věta (kondenzační kritérium). Necht $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$s_k = \sum_{j=1}^k a_j \quad \text{a} \quad t_k = \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j}.$$

\Leftarrow Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m < 2^k$. Potom $t_k \leq A$, a tedy platí

$$\begin{aligned} s_m &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq A. \end{aligned}$$

To znamená, že posloupnost $\{s_m\}$ je shora omezená, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Věty 3.2.1.

\Rightarrow Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $B \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \leq m$. Potom $s_m \leq B$ a navíc platí

$$\begin{aligned} s_m &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_i \geq a_1 + \sum_{j=1}^k 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j} = \frac{t_k}{2}, \end{aligned}$$

takže $t_k \leq 2B$. To znamená, že posloupnost $\{t_k\}$ je shora omezená, a tedy podle Věty 3.2.1 řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. ■

Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (Příklad 3.1.11), zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (Příklad 3.2.3). V následující větě uvedeme charakterizaci konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Věta je důležitou aplikací kondenzačního kritéria.

3.2.18. Věta. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Důkaz. Je-li $\alpha \leq 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$, takže není splněna podmínka $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.15 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje.

Předpokládejme nyní, že $\alpha \in (0, \infty)$. Z definice výrazu n^α (odstavec 1.7.17) a vlastností funkcí exp a log (odstavce 1.7.15 a 1.7.16) plyne, že $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ je nerostoucí

posloupnost kladných reálných čísel. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$ je geometrickou řadou s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy je podle Příkladu 3.1.8 konvergentní právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$. To nastává právě tehdy, když $\alpha > 1$. ■

3.2.19. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ konverguje.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ a $b_n = n^{-\frac{7}{6}}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$ a $b_n > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{7}{6} > 1$. Navíc platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{7}{6}} + n^{\frac{3}{2}}}{1+n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n^{-\frac{1}{3}}}{1+n^{-\frac{3}{2}}} = 1.$$

Podle Věty 3.2.5 tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♣

3.3. Řady s obecnými členy

V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

3.3.1. Věta (Leibniz). Necht $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost splňující $\lim a_n = 0$. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentní.

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Odtud, z předpokladu věty a Věty 2.4.1 plyne, že $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$. Potom tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme pro $k \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{n=1}^m (-1)^n a_n.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \quad \text{a} \quad s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0,$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2k}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2k+1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.22) také $\lim a_{2k+1} = 0$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27) tedy dostáváme

$$\lim s_{2k+1} = \lim(s_{2k} - a_{2k+1}) = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = \lim s_{2k},$$

takže posloupnosti $\{s_{2k}\}$ a $\{s_{2k+1}\}$ mají společnou limitu $s \in \mathbb{R}^*$. Protože ale pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$. Odtud díky Věť 2.3.23 (viz též Poznámku 2.3.24) plyne, že $\lim s_n = s$, a naše řada je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, potom je posloupnost $\{-a_n\}$ nerostoucí a $\lim(-a_n) = 0$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-a_n)$ podle již dokázaného konverguje. Podle Důsledku 3.1.21 konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. ■

3.3.2. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí a navíc platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. Z Věty 3.3.1 tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní. ♣

3.3.3. Předpoklad monotonie ve Věť 3.3.1 nelze vynechat. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché.} \end{cases}$$

Posloupnost $\{a_n\}$ sestává z nezáporných čísel a konverguje k 0, není však monotónní. Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

Podle Příkladu 3.1.11 je $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \infty$, a tedy uvedená řada diverguje.

V následujícím lemmatu využíváme úmluvu uvedenou v Označení 1.5.2.

3.3.4. Lemma (Abelova¹ parciální sumace). Necht $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.

(a) Necht $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^k a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí

$$\sum_{j=n}^m a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \quad (3.7)$$

(b) Označme $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí

$$\sum_{j=n}^m a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \quad (3.8)$$

¹Niels Henrik Abel (1802--1829)

Důkaz. (a) Pomocí elementárních úprav dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^m a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\ &= \sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \cdots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m \\ &= \sigma_n (b_n - b_{n+1}) + \cdots + \sigma_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + \sigma_m b_m \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (a).

(b) Podobně jako v důkazu tvrzení (a) platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^m a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\ &= (s_n - s_{n-1}) b_n + (s_{n+1} - s_n) b_{n+1} + \cdots + (s_m - s_{m-1}) b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + s_n (b_n - b_{n+1}) + \cdots + s_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + s_m b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (b). ■

3.3.5. Věta (Abelovo a Dirichletovo² kritérium). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Necht je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

- (A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí. Předpokládejme, že je splněna podmínka (A). potom existuje $K \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq K$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, takže můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n$, platí $|\sum_{j=n}^m a_j| < \varepsilon$. Zvolme $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$ a $m \geq n$ a označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^k a_j$, $k = n, \dots, m$. Potom pro každé $k \in \{n, \dots, m\}$ platí $|\sigma_k| < \varepsilon$. Podle Lemmatu 3.3.4(a) máme

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j b_j \right| = \left| \left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) \right) + \sigma_m b_m \right|.$$

²Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805--1859)

Posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí, takže $b_j - b_{j+1} \geq 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (1.11) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) \right) + \sigma_m b_m \right| &\leq \left(\sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j| (b_j - b_{j+1}) \right) + |\sigma_m| |b_m| \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{j=n}^{m-1} (b_j - b_{j+1}) \right) + \varepsilon |b_m| = \varepsilon (b_n - b_m) + |b_m| \\ &\leq \varepsilon (|b_n| + 2|b_m|) \leq 3K\varepsilon. \end{aligned}$$

Kombinací odhadů dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje Bolzanovu--Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.18 konvergentní.

Nyní předpokládejme, že platí podmínka (D). Potom jsou členy posloupnosti $\{b_n\}$ nezáporné. Označme $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $M \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|b_n| < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Necht $n, m \in \mathbb{N}$ splňují $n \geq n_0$ a $m \geq n$. Z Lemmatu 3.3.4(b) plyne

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=n}^m a_j b_j \right| &= \left| -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m \right| \\ &\leq M b_n + \sum_{j=n}^m M (b_j - b_{j+1}) + M b_m \\ &= M b_n + M (b_n - b_m) + M b_m \\ &= 2M b_n < 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje Bolzanovu--Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.18 konvergentní.

Je-li posloupnost $\{b_n\}$ neklesající, lze důkaz provést obdobně, nebo lze již dokázané tvrzení použít pro posloupnost $\{-b_n\}$. ■

3.3.6. Poznámka. Leibnizova věta (Věta 3.3.1) je speciálním případem Věty 3.3.5(D), protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů (vizte Příklad 3.1.6).

3.3.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sin(kx) = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sum_{k=1}^n \sin(kx) &= \sum_{k=1}^n (\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x) \\ &= \cos(1 - \frac{1}{2})x - \cos(n + \frac{1}{2})x \\ &= \cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x, \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.10)

Jestliže $x \in \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak sestává řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ z nulových členů, a má tedy omezenou posloupnost částečných součtů. Jestliže $x \notin \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak ze vzorce (3.9) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{|\cos(\frac{1}{2}x) - \cos(n + \frac{1}{2})x|}{|2 \sin(\frac{1}{2}x)|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{1}{2}x)|},$$

a tedy opět má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.8. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos(kx) = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x.$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sum_{k=1}^n \cos(kx) &= \sum_{k=1}^n (\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x) \\ &= -\sin\left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ &= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\frac{1}{2}\right)x. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Jestliže $x \in \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ zřejmě nemá omezenou posloupnost částečných součtů. Jestliže $x \notin \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak ze vztahu (3.11) plyne, že

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right| \leq \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(\frac{1}{2}x)|}{|2 \sin(\frac{1}{2}x)|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{1}{2}x)|},$$

a tedy opět má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sin nx$, $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezená. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a splňuje $\lim b_n = 0$. Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje. ♣

3.3.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Jestliže $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, pak lze konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 3.3.9. Jestliže $x = 2l\pi$, kde $l \in \mathbb{Z}$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos nx = 1$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.11. ♣

3.4. Absolutní konvergence číselných řad

3.4.1. Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

3.4.2. Poznámka. Řada, jejíž členy nemění znaménko, konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně.

3.4.3. Věta. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Důkaz. Podle Věty 3.1.18 splňuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Bolzanovu--Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n$, platí $\sum_{j=n}^m |a_j| < \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n$, platí

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n}^m |a_j| < \varepsilon,$$

a tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu--Cauchyovu podmínku. Podle Věty 3.1.18 je tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ a $\sigma_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$. Potom zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_n \leq \sigma_n$. Odtud, z definice součtu řady a Věty 2.2.44 plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ■

3.4.4. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (vizte Příklad 3.2.3), je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutně konvergentní. ♣

3.4.5. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\{b_n\}$ monotónní posloupnost splňující $\lim b_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní podle Věty 3.3.1.

Naproti tomu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentní podle Věty 3.2.18. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní. ♣

Následující dvě věty jsou variantami Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad.

3.4.6. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Podle již dokázaného Cauchyova kritéria pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.8(a)) dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Tvrzení (b) a (c) lze odvodit obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.8(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tvrzení (e) lze dokázat obdobně. ■

3.4.7. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) D'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.11(a)) ukazuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Při důkazu tvrzení (b) a (c) lze postupovat obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.11(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

3.4.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$.

Řešení. Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, tj. zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$. Protože

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 1$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ diverguje. Proto řada ze zadání nekonverguje absolutně.

Pro vyšetření neabsolutní konvergence použijeme Leibnizovo kritérium (Věta 3.3.1). Řada zřejmě pravidelně střídá znaménka. Dále platí

$$\lim \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Nakonec potřebujeme rozhodnout o platnosti nerovnosti

$$a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \geq \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} = a_{n+1}. \quad (3.12)$$

Tuto nerovnost však snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost

$$(n+1)(n+2) \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right) + 1 \geq 0,$$

jež platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí i (3.12). Ověřili jsme, že naše řada splňuje předpoklady Věty 3.3.1, a proto řada konverguje.

Řada ze zadání je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.4.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Zadaná řada je konvergentní podle Příkladu 3.3.9. K ověření neabsolutní konvergence je třeba ukázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n} \right|$. Protože však

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left| \frac{\sin n}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n},$$

stačí podle Věty 3.2.2(b) dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$. Pomocí vzorce pro dvojnásobný argument dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n}.$$

Tedy, kdyby konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n}{2n}$. Podle Příkladu 3.3.10 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{n} + \frac{\cos 2n}{n}.$$

Kdyby tedy konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by podle Věty 3.1.22 i harmonická řada. To by však byl spor s Příkladem 3.1.11. ♣

3.4.10. Věta (Toeplitz). Necht' $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla splňující

- (a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = 0$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,
- (c) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| < \infty$.

Necht' $\{a_k\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$, dobře definovaná a platí $\lim b_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|$. Posloupnost $\{a_k\}$ je omezená, neboť je konvergentní. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom podle (c) platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \leq C \cdot \sup\{|a_k|; k \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$ konverguje absolutně, takže b_n je reálné číslo.

Nyní navíc předpokládejme, že $\lim a_k = 0$. Zvolme libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0: |a_k| < \varepsilon. \quad (3.13)$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right| \end{aligned}$$

Díky (a) platí rovnost

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = 0,$$

neboť uvažovaná suma má pevný konečný počet sčítanců a lze užít větu o aritmetice limit. Dále odhadneme s pomocí (c) a (3.13)

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k}| \varepsilon \leq C \varepsilon. \end{aligned}$$

Dohromady tedy díky Větě 2.4.14 máme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k \right| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right| \leq C \varepsilon$$

pro libovolné kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, a tedy $\lim b_n = 0$.

Předpokládejme nyní, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Potom můžeme psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} (a_k - A) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

První limita je rovna 0 podle předchozí části, neboť $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - A) = 0$. Druhá limita je rovna A díky (b). Dohromady tedy dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

V následující větě ukážeme důležitý speciální případ Toeplitzovy věty.

3.4.11. Věta. Necht' $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Důkaz. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ položme

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{pokud } k \leq n, \\ 0, & \text{pokud } k > n. \end{cases}$$

Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). Necht' $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

a tedy předpoklad (a) je splněn. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

je splněn i předpoklad (b). Konečně protože $c_{n,k} \geq 0$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Platí tedy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = 1 < \infty$, takže i předpoklad (c) je ověřen. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k,$$

plyne tvrzení z Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). ■

Z následujícího příkladu vyplývá, že tvrzení Věty 3.4.11 nelze obrátit.

3.4.12. Příklad. Necht' $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(-1)^n}{n}$. Odtud plyne tvrzení. ♣

3.5. Přerovnání řad

Sčítáme-li konečně mnoho reálných čísel a_1, \dots, a_n , pak výsledný součet nezávisí na pořadí sčítanců a_1, \dots, a_n . Jinými slovy, je-li π libovolná bijekce množiny $\{1, \dots, n\}$ na sebe, pak platí $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{\pi(i)}$. V tomto oddílu ukážeme, za jakých podmínek platí analogie uvedeného pozorování i pro nekonečné řady.

3.5.1. Definice. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerováním** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.5.2. Uvažujme například bijekci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definovanou předpisem

$$\pi(n) = \begin{cases} n+1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n-1, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Máme-li řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

pak pomocí bijekce π obdržíme přerovnanou řadu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} &= a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + a_{\pi(4)} + \dots \\ &= a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \dots \end{aligned}$$

Následující jednoduché lemma v dalším výkladu několikrát použijeme.

3.5.3. Lemma. Necht $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je zobrazení a $A \subset f(\mathbb{N})$ je konečná množina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \subset \{f(1), \dots, f(n)\}$.

Důkaz. Pokud je A prázdná, pak stačí položit například $n = 1$. Předpokládejme, že A je neprázdná. Pro každé $a \in A$ nalezneme $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že platí $f(n_a) = a$. Množina $B = \{n_a; a \in A\}$ je neprázdná a konečná, neboť A je neprázdná a konečná. Položme $n = \max B$. Potom platí

$$A = f(B) \subset f(\{1, \dots, n\}) = \{f(1), \dots, f(n)\},$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.5.4. Lemma. Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n| < \varepsilon$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a s její součet. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s - s_{n_0-1}| < \varepsilon$. Označme $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ částečné součty řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tj.

$$t_n = a_{n_0} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_n = s_{n_0-1} + t_n$, a tedy také

$$\lim t_n = \lim(s_n - s_{n_0-1}) = s - s_{n_0-1}.$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tedy konverguje. Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je tudíž konvergentní a její součet je roven $s - s_{n_0-1}$. Tedy platí

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| = |s - s_{n_0-1}| < \varepsilon.$$

■

3.5.5. Věta. Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Potom přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Důkaz. Absolutní konvergence. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a množinu $A = \{1, \dots, m\}$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Máme tedy $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^m |a_{\pi(j)}| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Odtud podle Věty 3.2.1 plyne, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně.

Rovnost součtů. Označme

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{l=1}^n a_l, & t_n &= \sum_{l=1}^n a_{\pi(l)}, & n &\in \mathbb{N}, \\ s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, & t &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n. \end{aligned}$$

Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pomocí Lemma 3.5.4 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{l=m+1}^{\infty} |a_l| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{l=m+1}^{\infty} |a_{\pi(l)}| < \varepsilon. \quad (3.14)$$

Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a π a nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položíme-li $k = \max\{j, n\}$, máme $k \geq n$, a dostaneme

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \quad (3.15)$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \quad (3.16)$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$. Označme

$$A = \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\},$$

$$B = \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}.$$

Pak podle (3.16) máme $A \subset \{l \in \mathbb{N}; l > m\}$ a podle (3.15) je $B \subset \{\pi(l); l \in \mathbb{N}, l > m\}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} |s_p - t_p| &= \left| \sum_{l=1}^p a_l - \sum_{l=1}^p a_{\pi(l)} \right| = \left| \sum_{i \in A} a_i - \sum_{j \in B} a_j \right| \leq \sum_{i \in A} |a_i| + \sum_{j \in B} |a_j| \\ &\leq \sum_{l=m+1}^{\infty} |a_l| + \sum_{l=m+1}^{\infty} |a_{\pi(l)}| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p \rightarrow \infty} (s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. Tím je důkaz dokončen. ■

Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

3.5.6. Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \dots$$

Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $s_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Odtud podle Věty 2.3.23 plyne, že $\lim s_n = 0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Položme

$$\pi(n) = \begin{cases} 4k-3, & \text{pokud } n = 3k-2, k \in \mathbb{N}, \\ 4k-1, & \text{pokud } n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 2k, & \text{pokud } n = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\pi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\pi(3k)} = -\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots,$$

Označme n -tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n . Potom platí

$$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^n (a_{\pi(3k-2)} + a_{\pi(3k-1)} + a_{\pi(3k)}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2k}, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \quad (3.18)$$

$$\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \quad (3.19)$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k} \leq \frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)) a Věty 3.2.18. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (3.17) tedy platí vztah $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n} = s \in (0, \infty)$. Nyní snadno podle (3.18) a (3.19) dostáváme, že platí také $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n+2} = s$. Podle Věty 2.3.23 obdržíme $\lim \sigma_n = s$. Součet přerovnané řady je s , takže se liší od součtu původní řady. ♣

Následující věta ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu je pro neabsolutně konvergentní řady typické.

3.5.7. Věta (Riemann). Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a necht $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s .

Zbytek tohoto oddílu bude věnován důkazu Riemannovy věty.

3.5.8. Označení. Pro $x \in \mathbb{R}$ označme $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:

$$x^+ \geq 0, \quad x^- \geq 0, \quad x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad (-x)^+ = x^-, \quad (-x)^- = x^+.$$

3.5.9. Lemma. Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

Důkaz. Jelikož obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sestávají z nezáporných čísel, jejich součty existují, a jsou buď konečné nebo rovné ∞ . Označme tyto součty po řadě s_+ a s_- . Jestliže jsou s_+ i s_- vlastní, potom podle Důsledku 3.1.21 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$$

konverguje, což je spor s předpokladem.

Předpokládáme-li $s_+ = \infty$ a $s_- \in \mathbb{R}$, pak dostaneme snadno z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.27)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \infty,$$

což je opět spor s předpokladem. Analogicky bychom pak přivedli ke sporu předpoklad $s_+ \in \mathbb{R}$ a $s_- = \infty$. Zbývá tedy pouze možnost $s_+ = s_- = \infty$. ■

3.5.10. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\pi(n)} = A$.

Důkaz. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_k \in B(A, \varepsilon)$. Podle Lemmatu 3.5.3 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, k_0\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, pak máme $\pi(n) > k_0$, a tedy $a_{\pi(n)} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.5.11. Lemma. Necht $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Necht $\{\alpha_j\}$, $\{\beta_j\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Potom platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha.$$

Důkaz. Uvažujme nejprve případ, kdy $\alpha < \beta$. Podle Věty 2.3.32(a) existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha_j < \beta_j$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$. Tedy pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $\min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha_j$, z čehož okamžitě plyne, že $\lim \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$.

Je-li $\alpha = \beta$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, máme dáno, pak podle definice limity existují $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_1$, platí $\alpha_j \in B(\alpha, \varepsilon)$ a pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_2$, platí $\beta_j \in B(\beta, \varepsilon)$. Pro přirozená čísla $j \geq \max\{j_1, j_2\}$ pak dostáváme $\min\{\alpha_j, \beta_j\} \in B(\alpha, \varepsilon) = B(\beta, \varepsilon)$. ■

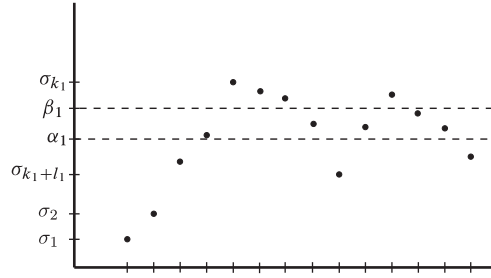
Riemannova věta (Věta 3.5.7) bude snadným důsledkem následující obecnější věty.

3.5.12. Věta. Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Pak existuje bijekce $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro částečné součty $\{\sigma_n\}$ přerovnané řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ platí $\lim \inf \sigma_n = \alpha$ a $\lim \sup \sigma_n = \beta$.

Důkaz. Nalezneme posloupnosti reálných čísel $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$ splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Označíme

$$P = \{n \in \mathbb{N}; a_n \geq 0\} \quad \text{a} \quad M = \{n \in \mathbb{N}; a_n < 0\}.$$

Technické provedení důkazu Věty 3.5.12 je poměrně obtížné, ale základní myšlenka je jednoduchá. Množiny P a M rozdělí množinu \mathbb{N} na dvě disjunktní podmnožiny. Zkonstruovat hledanou bijekci π znamená určit hodnoty $\pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto hodnoty budeme konstruovat induktivně. Nejprve nalezneme prvky $\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(k_1)$ z množiny P , kde $k_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1} a_{\pi(j)} > \beta_1$. Potom nalezneme prvky $\pi(k_1 + 1) < \pi(k_1 + 2) < \dots < \pi(k_1 + l_1)$ z množiny M , kde $l_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1+l_1} a_{\pi(j)} < \alpha_1$. Tento postup potom opakujeme s čísly $\beta_2, \alpha_2, \beta_3, \dots$ tak, že střídavě vybíráme prvky z množin P a M , přičemž každý vybereme právě jednou. Následující obrázek nám pomůže lépe pochopit celý postup, který nyní provedeme podrobně.



OBRÁZEK 1.

Zřejmě $\mathbb{N} = P \cup M$ a $P \cap M = \emptyset$. Dokážeme, že množiny P a M jsou nekonečné. Předpokládejme pro spor nejprve, že P je konečná. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n > \max P$, platí $a_n < 0$, a tedy $a_n^+ = 0$. Z tohoto pozorování plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje. To je ovšem ve sporu s Lemmatem 3.5.9. Obdobně bychom přivedli ke sporu předpoklad, že množina M je konečná.

Podle Věty 1.6.19 nalezneme bijekci ρ množiny \mathbb{N} na P a bijekci τ množiny \mathbb{N} na M . Pro každé $m \in \mathbb{N}$ nalezneme podle Lemmatu 3.5.3 $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, m\} \cap P \subset \{\rho(1), \dots, \rho(n)\}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^n a_{\rho(k)} \geq \sum_{k=1}^m a_k^+.$$

Odtud, z Věty 2.2.44(b) a z Lemmatu 3.5.9 plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\rho(k)} = \infty. \quad (3.20)$$

Obdobně lze odvodit rovnost

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)} = -\infty. \quad (3.21)$$

Položme $k_0 = l_0 = 0$. Konstrukce hledaného přerovnání se bude opírat o následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení. Existují rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

(a) k_j je nejmenší přirozené číslo splňující $k_j > k_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{\tau(k)} \geq \beta_j, \quad (3.22)$$

(b) l_j je nejmenší přirozené číslo splňující $l_j > l_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \leq \alpha_j. \quad (3.23)$$

Důkaz pomocného tvrzení. Budeme postupovat pomocí matematické indukce. Nejprve nalezneme nejmenší $k_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} \geq \beta_1.$$

Takové k_1 existuje díky (3.20). Nyní s pomocí (3.21) nalezneme nejmenší $l_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_1} a_{\tau(k)} \leq \alpha_1.$$

Tím je první krok konstrukce proveden.

Nyní předpokládejme, že přirozená čísla k_j a l_j jsou již zkonstruována. S pomocí (3.20) nalezneme nejmenší přirozené číslo k_{j+1} splňující $k_{j+1} > k_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \geq \beta_{j+1}.$$

Dále s pomocí (3.21) nalezneme nejmenší přirozené číslo l_{j+1} splňující $l_{j+1} > l_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j+1}} a_{\tau(k)} \leq \alpha_{j+1}.$$

Tím je konstrukce provedena a pomocné tvrzení dokázáno.

Konstrukce bijekce π . Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$k_{j-1} + l_{j-1} < k_j + l_{j-1} < k_j + l_j. \quad (3.24)$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ označme

$$A_j = (k_{j-1} + l_{j-1}, k_j + l_{j-1}] \cap \mathbb{N} \quad \text{a} \quad B_j = (k_j + l_{j-1}, k_j + l_j] \cap \mathbb{N}.$$

Protože $k_0 = l_0 = 0$, dostáváme z (3.24) rovnost $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cup B_j)$. Navíc jsou množiny $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ po dvou disjunktní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\pi(n) = \begin{cases} \rho(n - l_{j-1}), & \text{pokud } n \in A_j, \\ \tau(n - k_j), & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases}$$

Surjektivita π . Přímou z definice plyne, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\pi(A_j) = \rho((k_{j-1}, k_j] \cap \mathbb{N}) \quad \text{a} \quad \pi(B_j) = \tau((l_{j-1}, l_j] \cap \mathbb{N}). \quad (3.25)$$

Zobrazení π je tedy na, neboť podle předchozího platí

$$\pi(\mathbb{N}) = \rho(\mathbb{N}) \cup \tau(\mathbb{N}) = P \cup M = \mathbb{N}.$$

Injektivita π . Pro každé $j \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení $\pi|_{A_j}, \pi|_{B_j}$ prostá, neboť τ a ρ jsou prostá zobrazení. Dále máme $\pi(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap \pi(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P \cap M = \emptyset$ a navíc podle (3.25) pro každé $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, platí $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ a $\pi(B_i) \cap \pi(B_j) = \emptyset$. Z právě uvedených faktů již plyne, že π je prosté.

Rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. Pro hodnotu n -tého částečného součtu σ_n přerovnané řady platí podle definice π následující vztah

$$\sigma_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-l_j-1} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j-1} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ \sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{n-k_j} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases} \quad (3.26)$$

Je-li $j \in \mathbb{N}$, pak platí buď $l_j > l_{j-1} + 1$ nebo $l_j = l_{j-1} + 1$. Předpokládejme, že nastává první případ. Potom $l_j - 1 > l_{j-1}$, a tedy, díky podmínce minimality v (b), platí $\sigma_{k_j+l_{j-1}} > \alpha_j$. Pokud nastává druhý případ, potom $\sigma_{k_j+l_{j-1}} = \sigma_{k_j+l_{j-1}} \geq \beta_j$ podle (3.22). Odtud plyne $\sigma_{k_j+l_{j-1}} \geq \min\{\alpha_j, \beta_j\}$, a tedy

$$\begin{aligned} \alpha_j &\geq \sigma_{k_j+l_j} = \sigma_{k_j+l_{j-1}} + a_{\pi(k_j+l_j)} \\ &\geq \min\{\alpha_j, \beta_j\} + a_{\pi(k_j+l_j)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podle Lemmatu 3.5.11 platí $\lim_{j \rightarrow \infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, a tedy platí $\lim a_n = 0$ (Věta 3.1.15). Užitím Lemmatu 3.5.10 obdržíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\pi(n)} = 0$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) plyne $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{\pi(k_j+l_j)} = 0$. Odtud, z (3.27) a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) snadno dostaneme

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{k_j+l_j} = \alpha. \quad (3.28)$$

Podle věty o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.4.20) dostaneme nerovnost $\liminf \sigma_n \leq \alpha$. Nyní dokážeme opačnou nerovnost.

Pro $n \in A_j$ platí

$$\sigma_n = \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}} + \sum_{i=k_{j-1}+l_{j-1}+1}^n a_{\rho(i-l_{j-1})} \geq \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}},$$

neboť členy $a_{\rho(i-l_{j-1})}$ v předchozí sumě jsou nezáporné. Pro $n \in B_j$ platí

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^n a_{\tau(i-k_j)} \\ &\geq \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{k_j+l_j} a_{\tau(i-k_j)} = \sigma_{k_j+l_j}, \end{aligned}$$

neboť $n \leq k_j + l_j$ a členy $a_{\tau(i-k_j)}$ v předchozí sumě jsou záporné. Pro $n \in A_j \cup B_j$ tedy dohromady máme

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\}. \quad (3.29)$$

Pokud $\alpha = -\infty$, je nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$ zřejmá. Předpokládejme, že $\alpha > -\infty$. Zvolme $\alpha' \in \mathbb{R}$, $\alpha' < \alpha$. K němu s pomocí (3.28) nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 : \sigma_{k_j+l_j} > \alpha'. \quad (3.30)$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ splňuje $n > k_{j_0} + l_{j_0}$. K němu existuje $j \in \mathbb{N}$, $j > j_0$, takové, že $n \in A_j \cup B_j$. Potom podle (3.29) a (3.30) platí

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\} > \alpha'.$$

Tím je dokázána nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$. Spolu s již dokázanou opačnou nerovností $\liminf \sigma_n \leq \alpha$ dostáváme rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$.

Rovnost $\limsup \sigma_n = \beta$. Tento vztah lze dokázat obdobně jako rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. ■

Riemannovu větu (Věta 3.5.7) lze nyní snadno dokázat pomocí Věty 3.5.12.

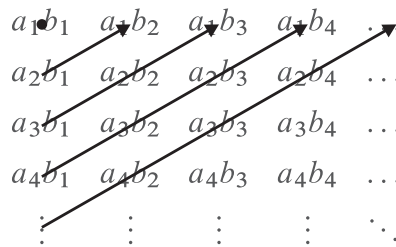
Důkaz Věty 3.5.7. Položme $\alpha = \beta = s$. Podle Věty 3.5.12 existuje bijekce $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro posloupnost částečných součtů přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí $\liminf \sigma_n = \limsup \sigma_n = s$. Díky Větě 2.4.13 tedy máme $\lim \sigma_n = s$, čímž je důkaz dokončen. ■

3.6. Součin řad

Nechť a_1, \dots, a_n a b_1, \dots, b_m jsou konečné posloupnosti reálných čísel. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}} a_i b_j. \quad (3.31)$$

V tomto oddílu ukážeme analogii vztahu (3.31) pro nekonečné řady. Je zřejmé, že bychom měli určitým způsobem sčítat všechna čísla $a_n b_m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$. Otázkou však je, v jakém pořadí je sčítat. Jedna možnost je patrná z následujícího obrázku.



OBRÁZEK 2.

Zde nejprve sčítáme prvky na „diagonálách“ a dostáváme tak novou řadu, jejíž součet (pokud existuje) můžeme chápat jako součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$.

Právě uvedená možnost násobení řad není jediná, patří však mezi důležitější. Její formální definice následuje.

3.6.1. Definice. Mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Jejich **Cauchyovým součinem** rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.6.2. Věta (Mertens). Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{m=1}^{\infty} b_m)$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{j=1}^k a_j, & A &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j, & \tilde{A} &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|, \\ B_k &= \sum_{j=1}^k b_j, & B &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j, & \beta_k &= B_k - B, \\ c_k &= \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i, & C_k &= \sum_{j=1}^k c_j. \end{aligned}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\ &= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\ &= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\ &= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\ &= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_j. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme dále $\gamma_k = \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_j$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$, neboť $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ je konvergentní. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$,

máme

$$\begin{aligned}
|\gamma_k| &= \left| \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \left| \sum_{j=k_0+1}^k a_{k+1-j} \beta_j \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \sum_{j=k_0+1}^k |a_{k+1-j}| |\beta_j| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^k |a_{k+1-j}| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \varepsilon \tilde{A}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Podle Věty 3.1.15 platí $\lim a_k = 0$, a tedy podle Věty 2.2.32 také pro každé $j \in \{1, \dots, k_0\}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1-j} = 0$. Díky 2.3.30 dostáváme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j = 0. \tag{3.34}$$

Díky Větě 2.4.14, (3.33) a (3.34) pak platí $\limsup |\gamma_k| \leq \varepsilon \tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim |\gamma_k| = 0$. Tedy podle Věty 2.2.24 dostáváme $\lim \gamma_k = 0$.

Limitním přechodem v (3.32) pak dostáváme z Věty 2.2.36 rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

3.6.3. Důsledek. Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.

Důkaz. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k |a_{k+1-i}| |b_i| \right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. ■

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 3.6.2 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

3.6.4. Příklad. Necht $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti (Příklad 1.8.14) dostaneme odhad

$$\sqrt{(k+1-i)i} \leq \frac{(k+1-i) + i}{2} = \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, k\}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^k \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$. Odtud plyne, že Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekoneverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady (Věta 3.1.15). ♣

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta, jejíž důkaz provedeme až v Kapitole 8 (vizte 8.3.5).

3.6.5. Věta (Abel). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

3.7. Zobecněné řady

Necht' I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α . Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ žádné uspořádání k dispozici nemáme. Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

3.7.1. Označení. Necht' I je množina. Potom symbolem $\mathcal{F}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I .

3.7.2. Definice. Necht' I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je x_α reálné číslo. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ nazýváme **zobecněnou řadou**. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem zobecněné řady** $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(I) \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in B(x, \varepsilon).$$

V takovémto případě pak píšeme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, je zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Pokud je konvergentní zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, nazveme zobecněnou řadu $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ **absolutně konvergentní**.

3.7.3. Poznámka. V tomto oddílu se budeme zabývat téměř výlučně zobecněnými řadami. Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme místo termínu „zobecněná řada“ často psát jen „řada“.

3.7.4. Věta (jednoznačnost součtu zobecněné řady). Řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má nejvýše jeden součet.

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_1: \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \in B(x, \varepsilon),$$

$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_2: \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \in B(y, \varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha \in F_1 \cup F_2} x_\alpha \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset,$$

což je zřejmý spor. ■

3.7.5. Poznámka. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ značí jednak zobecněnou řadu, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ můžeme tedy používat k označení prvku z \mathbb{R}^* až po ověření, že příslušná řada konverguje. S podobnou dvojznačností jsme se již setkali u nekonečných řad.

3.7.6. Poznámka. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \in B(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \varepsilon)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Následující věta je obdobou Věty 3.1.20 pro zobecněné řady.

3.7.7. Věta (linearita zobecněného součtu). Necht řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ mají součet.

- (a) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha$ součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha = c \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

- (b) Pokud je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$.

(a) Pokud je $c = 0$, potom musí být $x \in \mathbb{R}$ a tvrzení je téměř zřejmé. Předpokládejme v dalším, že platí $c \neq 0$. Rozlišíme následující případy

Případ $x \in \mathbb{R}$. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} cx_\alpha - cx \right| = |c| \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha = cx$.

Případ $x = -\infty, c < 0$. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha < -\frac{1}{|c|\varepsilon}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\sum_{\alpha \in F'} cx_\alpha > -c \frac{1}{|c|\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha = \infty$.

Ostatní případy lze dokázat obdobně jako v předchozím případě.

(b) Rozlišíme několik případů.

Případ $x, y \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ takové, že platí

$$\forall F'_1 \in \mathcal{F}(I), F'_1 \supset F_1: \left| \sum_{\alpha \in F'_1} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall F'_2 \in \mathcal{F}(I), F'_2 \supset F_2: \left| \sum_{\alpha \in F'_2} y_\alpha - y \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} (x_\alpha + y_\alpha) - (x + y) \right| \leq \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| + \left| \sum_{\alpha \in F'} y_\alpha - y \right| < \varepsilon.$$

Tímto je požadovaná rovnost dokázána.

Případ $x = \infty, y \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že platí $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \infty$. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nalezneme konečnou množinu $F_1 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F'_1 \in \mathcal{F}(I), F'_1 \supset F_1: \sum_{\alpha \in F'_1} x_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1. \quad (3.35)$$

Dále nalezneme konečnou množinu $F_2 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F'_2 \in \mathcal{F}(I), F'_2 \supset F_2: \left| \sum_{\alpha \in F'_2} y_\alpha - y \right| < 1.$$

Pak máme

$$\forall F'_2 \in \mathcal{F}(I), F'_2 \supset F_2: \sum_{\alpha \in F'_2} y_\alpha > y - 1. \quad (3.36)$$

Položíme $F = F_1 \cup F_2$. Pak pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme díky (3.35) a (3.36) nerovnost

$$\sum_{\alpha \in F'} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F'} y_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1 + y - 1 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je požadovaná rovnost pro případ $x = \infty, y \in \mathbb{R}$ dokázána. Ve zbývajících případech lze postupovat obdobně. Příslušné důkazy již uvádět nebudeme. ■

3.7.8. Věta (vlastnosti zobecněného součtu). Pro zobecněnou řadu $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ platí následující tvrzení.

(a) Jsou-li čísla $x_\alpha, \alpha \in I$, nezáporná, pak $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I) \right\}. \quad (3.37)$$

(b) Zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ mají vždy součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \quad (3.38)$$

(c) Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. V tomto případě pak platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \quad (3.39)$$

Důkaz. (a) Necht x_α , $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I) \right\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{F}(I): \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \leq s. \quad (3.40)$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' \in \mathbb{R}$, $s' < s$. Z definice suprema nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že $\sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F platí

$$\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \geq \sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (3.40) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (3.38) plyne z Věty 3.7.7(b), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I; x_\alpha \geq 0\}$, $M = \{\alpha \in I; x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha \in P} x_\alpha \quad \text{a} \quad m = - \sum_{\alpha \in M} x_\alpha. \quad (3.41)$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha^+; F \in \mathcal{F}(I) \right\} = \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(P) \right\}, \quad (3.42)$$

$$\left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha^-; F \in \mathcal{F}(I) \right\} = \left\{ - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(M) \right\}, \quad (3.43)$$

a tedy máme

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}^{+} &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha}^{+}; F \in \mathcal{F}(I) \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha}; F \in \mathcal{F}(P) \right\} \quad (\text{podle (3.42)}) \\ &= \sum_{\alpha \in P} x_{\alpha} = p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}^{-} &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha}^{-}; F \in \mathcal{F}(I) \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} -x_{\alpha}; F \in \mathcal{F}(M) \right\} \quad (\text{podle (3.43)}) \\ &= \sum_{\alpha \in M} -x_{\alpha} \quad (\text{podle již dokázané části (a)}) \\ &= - \sum_{\alpha \in M} x_{\alpha} = m. \quad (\text{podle Věty 3.7.7(a)})\end{aligned}$$

\Rightarrow Nejprve dokážeme, že rozdíl $p - m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p = m = \infty$. Necht' $F \subset I$ je konečná. Z (3.41) plyne

$$\sup \left\{ \sum_{\alpha \in G} x_{\alpha}; G \in \mathcal{F}(P \setminus F) \right\} = \infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1 \subset P \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha \in G_1} x_{\alpha} > - \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha} + 1.$$

Z (3.41) dále plyne

$$\inf \left\{ \sum_{\alpha \in G} x_{\alpha}; G \in \mathcal{F}(M \setminus F) \right\} = -\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2 \subset M \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha \in G_2} x_{\alpha} < - \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha} - 1.$$

Položíme $F_1 = F \cup G_1$ a $F_2 = F \cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F \subset I$ jsme tedy našli $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha \in F_1} x_{\alpha} > 1$ a $\sum_{\alpha \in F_2} x_{\alpha} < -1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$. Rozdíl $p - m$ je tedy dobře definován.

\Leftarrow Řada $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ konverguje podle Věty 3.7.7.

Rovnost (3.39) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 3.7.7, neboť $x_{\alpha} = x_{\alpha}^{+} + (-1) \cdot x_{\alpha}^{-}$, $\alpha \in I$. ■

Z Věty 3.7.8(a) snadno plyne následující analogie srovnávacího kritéria z Věty 3.2.2.

3.7.9. Věta (srovnávací kritérium pro zobecněné řady). Necht' $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady s nezápornými členy a necht' platí $y_\alpha \leq x_\alpha$ pro každé $\alpha \in I$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$.

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 3.7.8(a). Z nerovností $0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$, $\alpha \in I$, dostáváme

$$0 \leq \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} y_\alpha; F \in \mathcal{F}(I) \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I) \right\}.$$

Odtud pomocí Věty 3.7.8(a) ihned plyne dokazovaná nerovnost. Z ní pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. ■

3.7.10. Věta (absolutní konvergence zobecněné řady). Řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní.

Důkaz. \Rightarrow Podle Věty 3.7.8(c) řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ konvergují, a proto konverguje podle Věty 3.7.8(b) i řada $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$.

\Leftarrow Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \leq x_\alpha^+ \leq |x_\alpha|$ a $0 \leq x_\alpha^- \leq |x_\alpha|$, a proto podle Věty 3.7.9 řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 3.7.8(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. ■

3.7.11. Věta (přerovnání zobecněné řady). Necht' má zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ součet a $\pi: I \rightarrow I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha \in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_{\pi(\alpha)}$.

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in B(s, \varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou konečnou množinu $G' \subset I$ obsahující G . Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha \in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in B(s, \varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha \in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. ■

3.7.12. Věta. Necht' zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje. Potom je množina $\{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ spočetná.

Důkaz. Řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 3.7.10. Označme $s = \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$I_n = \left\{ \alpha \in I; |x_\alpha| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_n$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$|F| = \sum_{\alpha \in F} 1 = n \sum_{\alpha \in F} \frac{1}{n} \leq n \sum_{\alpha \in F} |x_\alpha| \leq ns.$$

Tedy i sama množina I_n má nejvýše ns prvků, a je tedy konečná. Proto je podle Věty 1.6.19(b) množina $\{\alpha \in I; |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ spočetná. ■

3.7.13. Poznámka. Necht' $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je konvergentní zobecněná řada. Z důkazu tvrzení Věty 3.7.12 plyne, že pro každé $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, je množina $\{\alpha \in I; |x_\alpha| > c\}$ konečná. Tuto vlastnost můžeme chápat jako analogii Věty 3.1.15 pro konvergentní zobecněné řady.

Pro množinu reálných čísel $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ máme nyní dva různé pojmy součtu jejích prvků. Totiž součet definovaný jako limita částečných součtů a součet zobecněné řady z Definice 3.7.2. Symboly $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ pro příslušné součty rozlišují použité metody. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

3.7.14. Věta (zobecněný součet na \mathbb{N}). Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost.

- Zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.
- Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a tyto součty se rovnají.

Důkaz. (a) \Rightarrow Podle Věty 3.7.10 konverguje řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ absolutně. Podle Věty 3.7.8(a) to znamená, že

$$\sup \left\{ \sum_{n \in F} |x_n|; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \right\} < \infty,$$

tedy, dle definice suprema,

$$\sup \left\{ \sum_{n=1}^m |x_n|; m \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ je konvergentní, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

\Leftarrow Platí

$$\sup \left\{ \sum_{n=1}^m |x_n|; m \in \mathbb{N} \right\} < \infty,$$

a tedy

$$\sup \left\{ \sum_{n \in F} |x_n|; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \right\} < \infty.$$

Podle Věty 3.7.8(a) je řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ absolutně konvergentní, a tedy konvergentní podle Věty 3.7.10.

(b) Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je konvergentní. Potom podle již dokázaného tvrzení (a) je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně konvergentní, a tedy konvergentní. Označme $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dokážeme rovnost $s = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku konvergence řady (Věta 3.1.18). Můžeme tedy nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\left| s - \sum_{i=1}^n x_i \right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{i=n_0}^n |x_i| < \varepsilon.$$

Položme nyní $F = \{1, \dots, n_0\}$ a necht' $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná množina obsahující F . Označme $F'' = \{i \in F'; i > n_0\}$. Pak pro F' máme odhad

$$\begin{aligned} \left| s - \sum_{i \in F'} x_i \right| &= \left| s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i - \sum_{i \in F''} x_i \right| \leq \left| s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i \right| + \left| \sum_{i \in F''} x_i \right| \\ &\leq \left| s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i \right| + \sum_{i \in F''} |x_i| \\ &\leq \left| s - \sum_{i=1}^{n_0} x_i \right| + \sum_{i=n_0+1}^{\max F'} |x_i| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = s$.

Nyní předpokládejme, že $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F: \sum_{n \in F'} x_n > K.$$

Položíme $n_0 = \max F$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dostáváme $F \subset \{1, \dots, n\}$, a tedy $\sum_{i=1}^n x_i > K$. Tím jsme ukázali, že částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergují k ∞ .

Konečně je-li $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = -\infty$, pak díky Větě 3.7.7(a) platí $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-x_n) = \infty$, a tedy víme z předešlého, že $\sum_{n=1}^{\infty} (-x_n) = \infty$. Z Věty 3.1.20(a) plyne $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$. ■

3.7.15. Obrácená implikace v tvrzení Věty 3.7.14(b) neplatí. Přesněji, konvergentní řada nemusí mít zobecněný součet. Stačí uvažovat libovolnou neabsolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ta nemůže mít zobecněný součet. Kdyby totiž $s = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$, pak i $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ podle Věty 3.7.14(b). Pomocí Riemannovy věty (Věta 3.5.7) bychom našli bijekci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \neq s$. Podle Věty 3.7.11 ale platí $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\pi(n)} = s$. Opět z Věty 3.7.14(b) máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$, což je spor.

3.7.16. Věta (součin zobecněných řad). Necht' zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\beta \in J} y_\beta$ konvergují. Potom konverguje i zobecněná řada $\sum_{(\alpha, \beta) \in I \times J} x_\alpha y_\beta$ a platí

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in I \times J} x_\alpha y_\beta = \left(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in J} y_\beta \right).$$

Důkaz. Označme

$$x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \quad y = \sum_{\beta \in J} y_\beta$$

a

$$A = \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|, \quad B = \sum_{\beta \in J} |y_\beta|.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1 \subset I$ a $F_2 \subset J$ takové, že platí

$$\forall F'_1 \in \mathcal{F}(I), F'_1 \supset F_1: \left| \sum_{\alpha \in F'_1} |x_\alpha| - A \right| < \varepsilon \wedge \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha - x \right| < \varepsilon, \quad (3.44)$$

$$\forall F'_2 \in \mathcal{F}(J), F'_2 \supset F_2: \left| \sum_{\beta \in F'_2} |y_\beta| - B \right| < \varepsilon \wedge \left| \sum_{\alpha \in F_2} y_\beta - y \right| < \varepsilon. \quad (3.45)$$

Položme $F = F_1 \times F_2$. Zvolme konečnou množinu $F' \subset I \times J$ takovou, že $F \subset F'$. Nalezneme konečné množiny $F'_1 \subset I$ a $F'_2 \subset J$, takové, že $F' \subset F'_1 \times F'_2$. Platí

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2} y_\beta,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - xy \right| &= \left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta + \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2} y_\beta - xy \right| \\ &\leq \left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2} y_\beta - xy \right|. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Odhadněme nejprve první člen. Máme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta \right| &\leq \sum_{(\alpha, \beta) \in F' \setminus (F_1 \times F_2)} |x_\alpha y_\beta| \\ &\leq \sum_{\alpha \in F'_1 \setminus F_1, \beta \in F'_2} |x_\alpha y_\beta| + \sum_{\alpha \in F'_1, \beta \in F'_2 \setminus F_2} |x_\alpha y_\beta| \\ &= \sum_{\alpha \in F'_1 \setminus F_1} |x_\alpha| \sum_{\beta \in F'_2} |y_\beta| + \sum_{\alpha \in F'_1} |x_\alpha| \sum_{\beta \in F'_2 \setminus F_2} |y_\beta| \\ &\leq \varepsilon B + A\varepsilon. \end{aligned}$$

Nyní odhadneme druhý člen na pravé straně (3.46). Platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2} y_\beta - xy \right| &\leq \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \cdot \left(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta - y \right) + \left(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha - x \right) \cdot y \right| \\ &\leq \sum_{\alpha \in F_1} |x_\alpha| \cdot \left| \sum_{\beta \in F_2} y_\beta - y \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha - x \right| \cdot |y| \\ &\leq A\varepsilon + \varepsilon |y|. \end{aligned}$$

Tedy celkem

$$\left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - xy \right| \leq \varepsilon B + A\varepsilon + A\varepsilon + \varepsilon |y| = \varepsilon(2A + B + |y|).$$

Odtud plyne tvrzení. ■

3.7.17. Věta (asociativita zobecněného součtu). Necht' J je množina a $\{I_\beta; \beta \in J\}$ je systém množin splňující $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ pro různé indexy $\beta, \beta' \in J$. Necht' $I = \bigcup_{\beta \in J} I_\beta$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $\beta \in J$ řada $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_\beta = \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$ pro $\beta \in J$, pak řada $\sum_{\beta \in J} y_\beta$ konverguje a platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\beta \in J} y_\beta$.

Důkaz. Zvolme $\beta \in J$. Podle Věty 3.7.10 je řada $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$ konvergentní. Pomocí (3.37) odhadneme

$$0 \leq \sum_{\alpha \in I_\beta} |x_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| < \infty.$$

Odtud plyne, že i řada $\sum_{\alpha \in I_\beta} |x_\alpha|$ konverguje. Tedy dle Věty 3.7.10 řada $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Čísla $y_\beta, \beta \in J$, jsou tedy dobře definována.

Označme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Nyní dokážeme rovnost $\sum_{\beta \in J} y_\beta = x$. Je-li $I = \emptyset$, pak pro každé $\beta \in J$ platí $I_\beta = \emptyset$, takže $y_\beta = 0$. Potom máme

$$\sum_{\beta \in J} y_\beta = \sum_{\beta \in J} 0 = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha = 0.$$

Necht' $I \neq \emptyset$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou neprázdnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.47)$$

Označme $G = \{\beta \in J; F \cap I_\beta \neq \emptyset\}$. Množina G je konečná, neboť systém $\{I_\beta; \beta \in J\}$ je disjunktí a množina F je konečná. Necht' $G' \in \mathcal{F}(J), G' \supset G$. Počet prvků G' označme n . Pro každé $\beta \in G'$ nalezneme konečnou množinu $F_\beta \subset I_\beta$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I_\beta), F' \supset F_\beta: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - y_\beta \right| < \frac{\varepsilon}{2n}. \quad (3.48)$$

Položme $F^* = F \cup \bigcup_{\beta \in G'} F_\beta$. Množina F^* je konečná. Dále platí $F^* \subset \bigcup_{\beta \in G'} I_\beta$, neboť $F \subset \bigcup_{\beta \in G} I_\beta \subset \bigcup_{\beta \in G'} I_\beta$. Potom platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - x \right| &\leq \left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\ &\leq \left| \sum_{\beta \in G'} \left(y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \right) \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\ &\leq \sum_{\beta \in G'} \left| y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right|. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Dále zřejmě platí $F \subset F^*$, a tedy podle (3.47)

$$\left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro $\beta \in G'$ platí $F_\beta \subset F^* \cap I_\beta$, a proto podle (3.48) platí

$$\left| y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Z těchto dvou odhadů a z (3.49) pak plyne

$$\left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - x \right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.7.18. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněné řady). Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(I) \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F = \emptyset: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right| < \varepsilon. \quad (3.50)$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje a její součet je roven $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že pro každou konečnou množinu $F'' \subset I$ obsahující F platí $\left| \sum_{\alpha \in F''} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro konečnou množinu $F' \subset I$ disjunktní s F pak platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right| &= \left| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right| = \left| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - x + x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right| \\ &\leq \left| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - x \right| + \left| x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tedy podmínka (3.50) je splněna.

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ splňuje podmínku (3.50). Necht' $n \in \mathbb{N}$. Pak pomocí podmínky (3.50) pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ nalezneme konečnou množinu $F_n \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F_n = \emptyset: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right| < \frac{1}{n}. \quad (3.51)$$

Označme $y_n = \sum_{\alpha \in F_n} x_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$|y_m - y_n| = \left| \sum_{\alpha \in F_m} x_\alpha - \sum_{\alpha \in F_n} x_\alpha \right| \leq \left| \sum_{\alpha \in F_m \setminus F_n} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_n \setminus F_m} x_\alpha \right|.$$

Protože $F_m \setminus F_n$ je konečná množina disjunkt ní s F_n , dostáváme podle (3.51) odhad $\left| \sum_{\alpha \in F_m \setminus F_n} x_\alpha \right| < \frac{1}{n}$. Obdobně dostaneme odhad $\left| \sum_{\alpha \in F_n \setminus F_m} x_\alpha \right| < \frac{1}{m}$. Tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme $|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská.

Díky Větě 2.4.26 tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim y_n = x$. Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|y_{n_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Necht' $F' \subset I$ je konečná množina obsahující F_{n_0} . Potom platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| &= \left| \sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha - x \right| \\ &\leq \left| \sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha - x \right| + \left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right| \\ &= |y_{n_0} - x| + \left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right|. \end{aligned}$$

Podle (3.51) platí

$$\left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right| < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy celkem dostaneme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle Definice 3.7.2 tedy $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. ■

3.7.19. Příklad. Dokažte, že $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + m^2} = \infty$.

Řešení. Protože řada sestává z nezáporných čísel, má součet. Pro přirozené číslo $j \in \mathbb{N}$ odhadneme částečný součet přes indexovou množinu

$$I_j = \{j + 1, \dots, 2j\} \times \{j + 1, \dots, 2j\},$$

tedy

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in I_j} \frac{1}{n^2 + m^2} &= \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{n^2 + m^2} \geq \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{8j^2} \\ &= j^2 \cdot \frac{1}{8j^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Potom množiny I_{2^j} , $j \in \mathbb{N}$, jsou disjunktí, a proto můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + m^2} &\geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(n,m) \in \bigcup_{j=1}^k I_{2^j}} \frac{1}{n^2 + m^2} \quad (\text{vizte definici zobecněné řady}) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^k \sum_{(n,m) \in I_{2^j}} \frac{1}{n^2 + m^2} \quad (\text{disjunktnost } I_{2^j}, j \in \mathbb{N}) \\ &\geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{8} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{8} = \infty. \quad (\text{vizte (3.52)}) \end{aligned}$$

♣

3.7.20. Příklad. Dokažte, že zobecněná řada $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^3 + m^3}$ je konvergentní.

Řešení. Položme

$$N_k = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \max\{m, n\} = k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Potom je počet prvků množiny N_k pro každé $k \in \mathbb{N}$ roven $2k - 1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ tedy odhadneme

$$\sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{n^3 + m^3} \leq \sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{\max\{m, n\}^3} = \sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{k^3} = \frac{2k - 1}{k^3}.$$

Nechť $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je libovolná konečná množina. Nalezneme $p \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \bigcup_{k=1}^p N_k$, a dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in F} \frac{1}{n^3 + m^3} &\leq \sum_{(n,m) \in \bigcup_{k=1}^p N_k} \frac{1}{n^3 + m^3} = \sum_{k=1}^p \sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{n^3 + m^3} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{2k - 1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k - 1}{k^3}. \end{aligned}$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Z (3.37) tedy máme

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^3 + m^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3} < \infty.$$

♣

3.7.21. Příklad. Necht Q značí množinu všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$. Dokažte, že $\sum_{q \in Q} q = \infty$.

Řešení. Protože racionálních čísel větších jak $\frac{1}{2}$ je nekonečně mnoho, je množina $\{q \in Q; q > \frac{1}{2}\}$ nekonečná, a tedy daná řada diverguje podle Poznámky 3.7.13. Protože je tvořena kladnými čísly, platí $\sum_{q \in Q} q = \infty$ dle Věty 3.7.8(a). ♣

3.8. Teoretické příklady k číselným řadám

3.8.1. Řady s nezápornými členy.

3.8.1. Příklad (Raabeovo kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Jestliže $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.
 (b) Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.
 (c) Jestliže $\limsup n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Řešení. (a) Nalezneme $q \in (1, \infty)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q,$$

a tedy

$$na_n - (n+1)a_{n+1} \geq (q-1)a_{n+1}.$$

Proto pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí

$$n_0 a_{n_0} > n_0 a_{n_0} - na_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} (ka_k - (k+1)a_{k+1}) \geq (q-1) \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\sum_{k=n_0+1}^n a_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}.$$

To ale znamená, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je shora omezená, a tedy je tato řada konvergentní.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq \frac{n}{n+1} a_n \geq \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \geq \cdots \geq \frac{n_0}{n+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$

Protože je řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{n_0}{k+1} a_{n_0}$ divergentní, ze srovnávacího kritéria (vizte Větu 3.2.2) plyne, že řada $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{k+1}$ je divergentní, a tedy je divergentní i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(c) Tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (b). ♣

3.8.2. Příklad. Necht $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy. Necht existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Předpokládejme, že řada $\sum b_n$ je konvergentní. Dokažte, že pak je konvergentní i řada $\sum a_n$.

Dokažte pomocí tohoto tvrzení d'Alambertovo kritérium 3.2.11(c), (d).

Řešení. Necht $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak dle předpokladu platí

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n_0}} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \\ &\leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} = \frac{b_n}{b_{n_0}}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$. Konverguje-li tedy řada $\sum b_n$, konverguje i řada $\sum \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, a tedy podle Věty 3.2.2 i řada $\sum a_n$.

Předpokládejme nyní, že řada $\sum a_n$ má kladné členy a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q \in [0, 1)$. Díky Větě 2.2.44 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak máme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, přičemž řada $\sum q^n$ konverguje (vizte Příklad 3.1.8). Podle výše dokázaného tvrzení řada $\sum a_n$ konverguje.

Případ, kdy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q > 1$, lze dokázat analogicky. ♣

3.8.3. Příklad. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy a $\{s_n\}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ konverguje. Pak splňuje Bolzanovu--Cauchyovu podmínku podle Věty 3.1.18. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m: \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{s_k} < \frac{1}{2}. \quad (3.53)$$

Posloupnost $\{s_k\}$ je rostoucí a platí $\lim s_k = \infty$. Snadno tedy dostaneme $\lim \frac{s_k - s_{n_0}}{s_k} = \lim \left(1 - \frac{s_{n_0}}{s_k}\right) = 1$. Existuje tedy $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, takové, že $\frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{k=n_0+1}^{m_0} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_{m_0}} \sum_{k=n_0+1}^{m_0} a_k = \frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2},$$

což je ale spor s (3.53). ♣

3.8.4. Příklad. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy. Dokažte, že existuje posloupnost $\{b_n\}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $b_n = \frac{a_n}{s_n}$, kde s_n je n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje podle Příkladu 3.8.3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a má kladné členy, proto platí $\lim s_n = \infty$. Odtud dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} = 0.$$

♣

3.8.5. Příklad. Necht $\{c_n\}$ je posloupnost splňující $\lim c_n = \infty$. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ diverguje.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$ jsou větší než 1. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k: c_n \geq k + 1.$$

Položme $n_0 = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme jednoznačně určené $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k-1} < n \leq n_k$ a definujeme

$$b_n = \frac{1}{c_n} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Necht $\{s_n\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$. Pak platí $b_n \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}$. Pak pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{n_l} &= \sum_{n=1}^{n_l} b_n = \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} b_n \leq \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ je omezená a posloupnost $\{s_n\}$ je rostoucí, a tedy je i posloupnost $\{s_n\}$ omezená. Odtud plyne, že řada $\sum b_n$ je konvergentní. Dále platí pro každé $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_l} c_n b_n &= \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n b_n = \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Tím je tvrzení dokázáno. \clubsuit

Následující příklad ukazuje, že limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad (Věta 3.2.5) neplatí bez předpokladu nezápornosti zadaných řad.

3.8.6. Příklad. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ splňující $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Řešení. Položme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, neboť je součtem konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dále platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

\clubsuit

3.8.7. Příklad. Dokažte, že platí

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ a $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Podle Definice 2.4.6 potom platí $e = \lim a_n$. Dokážeme nejprve, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n$. Pro $n = 1$ zřejmě platí $a_1 = s_1 = 2$. Necht' $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom z binomické věty (Věta 1.5.5) plyne, že

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq 1,$$

a tedy

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = s_n.$$

Nyní dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq \lim a_k$. Posloupnost $\{s_n\}$ je zřejmě rostoucí, a proto stačí toto tvrzení dokázat pouze pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) = 1.$$

Tedy z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = s_n.$$

Odtud a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44), že $s_n \leq \lim a_k$. Celkem jsme tedy dokázali, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n \leq \lim a_k$. Protože $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = e$, dostaneme z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) rovnost $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.8. Příklad. Dokažte, že e je iracionální číslo.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.7

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < e = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Zřejmě dále platí

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \cdots (k+i)} < \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i}.$$

Podle Příkladu 3.1.9 máme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i} = \frac{1}{k},$$

a tedy celkem dostáváme

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Z Definice 2.4.6 plyne, že číslo e je kladné. Předpokládejme, že e je racionální, tedy $e = \frac{p}{q}$ pro nějaká $p, q \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Vynásobíme obě nerovnosti kladným výrazem $q \cdot k!$ a dostaneme

$$q \cdot k! \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < p \cdot k! < q \cdot k! \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \frac{q}{k}.$$

Označme

$$m = q \cdot k! \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!}.$$

Pak zřejmě platí $m \in \mathbb{N}$ a navíc

$$m < p \cdot k! < m + \frac{q}{k}.$$

Pro speciální volbu $k = q$ odtud dostáváme $p \cdot k! \in (m, m + 1)$. To je ale spor, protože $m \in \mathbb{N}$ a $p \cdot k! \in \mathbb{N}$. ♣

3.8.2. Číselné rozvoje.

3.8.9. Příklad. Necht $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, a $P = \{0, \dots, p-1\}$. Necht \mathcal{P} je množina všech posloupností $\{a_n\}$, které splňují

- (a) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \in P$ a
- (b) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n: a_m \neq p-1$.

Definujme zobrazení $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Dokažte, že zobrazení φ je dobře definované a jde o bijekci \mathcal{P} na $[0, 1)$.

Řešení. Povšimněme si nejprve, že zobrazení φ je dobře definované zobrazení do $[0, 1]$ díky odhadu

$$\varphi(\{a_n\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Nyní si uvědomme, že pro posloupnosti a, b výše popsaného tvaru platí

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \frac{1}{p^k} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\ &= \varphi(b).\end{aligned}$$

Obráceně, necht' $\varphi(a) = \varphi(b)$ pro dvě různé posloupnosti $a, b \in P^{\mathbb{N}}$. Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$ je první souřadnice, kde $b_k < a_k$. Necht' dále existuje $l > k$ takové, že $b_l < p-1$. Pak máme

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} \\ &< \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k} \\ &\leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\ &\leq \varphi(a),\end{aligned}$$

což je spor s předpokladem $\varphi(a) = \varphi(b)$. Tedy $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = p-1$ a

$$\varphi(b) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k}.$$

Protože

$$\begin{aligned}\varphi(b) = \varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \\ &\geq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \geq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_{k+1}}{p^k} \\ &= \varphi(b),\end{aligned}$$

máme

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 0 \quad \text{a} \quad a_k = b_k + 1.$$

K důkazu toho, že φ je bijekce, stačí ověřit, že φ je surjekce \mathcal{P} na $(0, 1]$. Necht $x \in (0, 1]$ je dáno. Induktivně definujeme posloupnost $\{a_n\}$ takto: Položme

$$a_1 = \max\{i \in P; \frac{i}{p} < x\}.$$

Máme-li čísla a_1, \dots, a_n již nalezena, definujeme

$$a_{n+1} = \max\{i \in P; \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} + \frac{i}{p^{n+1}} < x\}.$$

Povšimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1} + 1}{p^{n+1}}. \quad (3.54)$$

Z definice posloupnosti $\{a_n\}$ totiž platí první nerovnost v (3.54). Abychom ověřili nerovnost druhou, předpokládejme, že

$$x > \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1} + 1}{p^{n+1}}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pokud $a_{n+1} < p - 1$, vede tato nerovnost okamžitě ke sporu s definicí a_{n+1} . Pokud $a_{n+1} = p - 1$, pak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1} + 1}{p^{n+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} + \frac{1}{p^n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_n + 1}{p^n}. \end{aligned}$$

Z definice čísla a_n dostaneme $a_n = p - 1$. Induktivně pak obdržíme

$$a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = p - 1.$$

Proto

$$x > \sum_{k=1}^n \frac{p-1}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}} = \frac{p-1}{p} \frac{\frac{1}{p^n} - 1}{\frac{1}{p} - 1} + \frac{1}{p^n} = 1,$$

což je spor. Tedy (3.54) platí.

Z těchto nerovností vidíme,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy pomocí Věty 2.2.44 máme

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} = x.$$

Tedy φ je zobrazení na. ♣

3.8.10. Z Příkladu plyne nespočetnost intervalu $[0, 1)$, a tedy také množiny \mathbb{R} a každého netriviálního intervalu.

3.8.11. Definice. Zápis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = 0.a_1a_2a_3\dots$ se nazývá **p -adickým rozvojem čísla** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$.

3.8.12. Příklad. Necht $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $x \in [0, 1]$ má p -adický rozvoj $0.a_1a_2a_3\dots$. Ten nazveme **periodickým**, pokud existují přirozená čísla $k \geq 0, r > 0$ taková, že pro $n > k$ platí $a_{n+r} = a_n$. Ukažte, že x má periodický rozvoj právě tehdy, když je racionální.

Řešení. Necht nejprve rozvoj $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ je periodický, tj. existují $k, r \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+r} = a_n$ pro $n > k$. Potom ale díky absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ lze použít Větu 3.7.17 a dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{p^1} + \dots + \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \dots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}} \right) \left(1 + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{2r}} + \frac{1}{p^{3r}} \dots \right) \\ &= \frac{a_1}{p^1} + \dots + \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \dots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{p^r}}, \end{aligned}$$

což je racionální číslo.

Necht je nyní číslo $x \in [0, 1]$ racionální. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \in (0, 1)$, tj. $x = \frac{u}{v}$, kde $u, v \in \mathbb{N}$ a $u < v$. Necht $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ je p -adický rozvoj x . Jsou-li všechna a_n od jistého místa rovna 0 nebo jsou od jistého místa rovna $p-1$, je zřejmě rozvoj x periodický. Předpokládejme tedy, že tomu tak není, tj. $\{a_n\} \in \mathcal{P}$ (viz Příklad 3.8.9) a $\{a_n\}$ nekončí opakováním cifry $p-1$. Označme $s_k = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{p^n}$. Necht $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$0 \leq x - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{1}{p^k}.$$

Tedy

$$0 \leq p^k(x - s_k) < 1.$$

Dále máme

$$p^k(x - s_k) = p^k \frac{u}{v} - p^k s_k = \frac{c_k}{v}, \quad (3.55)$$

kde c_k je celé číslo. Protože $0 \leq p^k(x - s_k) < 1$, je $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$. Tedy pro každé $k \in \{1, \dots, v+1\}$ platí $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$.

Proto existují indexy $k, l \in \{1, \dots, v+1\}$, $k < l$, takové, že $c_k = c_l$. Položme $r = l - k$, pak $c_k = c_{k+r}$. Z (3.55) máme

$$\begin{aligned} \frac{c_k}{v} &= p^k(x - s_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k}}{p^j}, \\ \frac{c_{k+r}}{v} &= p^{k+r}(x - s_{k+r}) = \sum_{n=k+r+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k-r}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k+r}}{p^j}. \end{aligned}$$

Máme tedy dva rozvoje čísla $\frac{c_k}{v}$ nekončící cifrou $p-1$, a tedy se dle Příkladu 3.8.9 musí rovnat. Proto pro $n > k$ platí $a_n = a_{n+r}$ a x je periodické. ♣

3.8.3. Řady s obecnými členy.

3.8.13. Příklad. Necht $\{a_j\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$0 \leq \sum_{i=0}^k (-1)^i a_{n+i} \leq a_n.$$

Řešení. Necht $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Indukcí podle k dokážeme, že pro každou nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_j\}$ platí uvedená nerovnost. Pro $k = 0$ zřejmě platí $\sum_{i=0}^0 (-1)^i a_{n+i} = a_n$, a tedy

$$0 \leq \sum_{i=0}^0 (-1)^i a_{n+i} \leq a_n.$$

Předpokládejme nyní, že uvedené tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naším cílem je dokázat nerovnost pro $k+1$, tj. chceme ověřit nerovnosti

$$0 \leq \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n. \quad (3.56)$$

Posloupnost $\{a_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ má nezáporné členy a je nerostoucí. Proto podle indukčního předpokladu platí

$$0 \leq \sum_{i=0}^k (-1)^i a_{n+1+i} \leq a_{n+1}. \quad (3.57)$$

Potom díky (3.57) dostáváme

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{n+i} = a_n - \sum_{i=0}^k (-1)^i a_{n+1+i} \begin{cases} \geq a_n - a_{n+1} \geq 0 \\ \leq a_n \end{cases}, \quad (3.58)$$

čímž je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno. ♣

3.8.14 (alternativní důkaz Věty 3.3.1). Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řady, tedy ověříme platnost podmínky (3.1). Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Členy této posloupnosti jsou pak nutně nezáporné. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n < \varepsilon. \quad (3.59)$$

Vezměme nyní libovolná čísla $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \leq n \leq m$. Pak z Příkladu 3.8.13 a (3.59) plyne

$$\left| \sum_{i=n}^m (-1)^i a_i \right| = \left| \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i a_{n+i} \right| = \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n < \varepsilon.$$

Tím je ověřena platnost Bolzanovy--Cauchyovy podmínky pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.
Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, pak lze důkaz dokončit stejně jako v původním důkazu Věty 3.3.1.

3.8.15. Příklad. Necht řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ mají omezené posloupnosti částečných součtů. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ má řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ omezenou posloupnost částečných součtů.
(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Řešení. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$. Podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$ a $|t_n| \leq M$.

- (a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^n ca_k \right| = |cs_n| \leq |c|M.$$

Tím je omezenost posloupnosti částečných součtů dokázána.

- (b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \right| \leq |s_n| + |t_n| \leq 2M,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.16. Příklad. Necht $\sum a_n$ je konvergentní řada a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\sum b_k = \sum a_n$.

Řešení. Necht $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_k$. Platí

$$t_m = \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^m \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j = \sum_{j=1}^{n_{m+1}-1} a_j = s_{n_{m+1}-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.60)$$

Je-li řada $\sum a_n$ konvergentní, existuje vlastní limita $a = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m$. Z Věty 2.2.32 a (3.60) pak dostáváme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{n_{m+1}-1} = a.$$

Řada $\sum b_k$ tedy konverguje. ♣

3.8.17. Příklad. Necht $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy. Necht $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum b_k$ konverguje.

Řešení. Necht' $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_k$. Podle Příkladu 3.8.16 stačí dokázat, že řada $\sum a_n$ konverguje, konverguje-li řada $\sum b_k$. Označme $b = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m$. Jelikož má řada $\sum a_n$ nezáporné členy, existuje $a = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m$. Z rovnosti (3.60) pak plyne

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{n_{m+1}-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = b,$$

tj. posloupnost $\{s_m\}$ má konvergentní podposloupnost $\{s_{n_{m+1}-1}\}$. Proto je sama konvergentní dle Věty 2.3.22) a řada $\sum a_n$ konverguje. ♣

3.8.18. Příklad. Nalezněte divergentní řadu $\sum a_n$ a rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ takovou, že $n_1 = 1$ a řada $\sum b_k$ konverguje, kde $b_k = \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Položme $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $n_k = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $b_k = a_{2k-1} + a_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Řada $\sum b_k$ tedy konverguje, zatímco řada $\sum a_n$ diverguje (například díky Větě 3.1.15). ♣

3.8.4. Nekonečné součiny.

3.8.19. Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečným součinem**. Pokud existuje limita $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m a_n$, pak symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ označuje také její hodnotu. Je-li tato hodnota reálné číslo, pak říkáme, že uvedený nekonečný součin **konverguje**.

3.8.20. Příklad. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ konverguje.

Řešení. \Leftarrow Posloupnost $\{\prod_{n=1}^k (1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \geq \prod_{n=1}^k (1 + a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^k a_n \geq \sum_{n=1}^k a_n.$$

Odtud již plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

\Rightarrow Posloupnost $\{\prod_{n=1}^k (1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto má limitu. Díky nerovnosti $\log(1 + x) \leq x$ (vizte 1.7.16) platné pro každé $x \in (0, \infty)$ dostaneme

$$\log\left(\prod_{n=1}^k (1 + a_n)\right) = \sum_{n=1}^k \log(1 + a_n) \leq \sum_{n=1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Odtud plyne

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \leq \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

a nekonečný součin tedy konverguje. ♣

3.8.21. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, kde p_n značí n -té prvočíslo, diverguje.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že naše řada je konvergentní. Potom je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n \geq 2$, a proto díky součtu geometrické řady dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k = \frac{1}{p_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \leq \frac{2}{p_n}.$$

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right)$$

je tedy konvergentní. Podle předchozího příkladu pak konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right).$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že prvočíselný rozklad každého $l \in \mathbb{N}$, $l \leq m$, obsahuje pouze prvočísla z množiny $\{p_j; j \in \mathbb{N}, j \leq n_0\}$ v mocnině nejvýše n_0 . Pak platí

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right) \geq \prod_{n=1}^{n_0} \left(\sum_{k=0}^{n_0} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right) \geq \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}.$$

Harmonická řada však diverguje, a proto musí nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k$ též divergovat, což je spor. ♣

3.8.5. Miscelanea.

3.8.22. Příklad. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\frac{1}{k+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}. \quad (3.61)$$

Řešení. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Podle 1.7.16 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, nerovnost $\log(1+x) \leq x$. Dosadíme-li $x = \frac{1}{k}$, dostaneme ihned druhou nerovnost v (3.61). Dosadíme-li $x = -\frac{1}{k+1}$, pak je předpoklad $x > -1$ splněn, a tedy platí

$$\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \leq -\frac{1}{k+1},$$

to jest

$$-\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1}.$$

Odtud a z vlastností logaritmu (1.7.16) dostáváme

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}}\right) = -\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1},$$

což je první nerovnost v (3.61). ♣

3.8.23. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \log n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Sečtením nerovností v (3.61) pro hodnoty $k \in \{1, \dots, n-1\}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Z vlastností logaritmické funkce (1.7.16) ale vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) = \log \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} \right) = \log n.$$

Odtud vyplývají obě dokazované nerovnosti. ♣

3.8.24. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je konvergentní.

Řešení. Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

podle první nerovnosti v (3.61). Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy nerostoucí. Dále platí podle Příkladu 3.8.23

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n \geq 0,$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. Z Důsledku 2.4.2 tedy plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní. ♣

3.8.25. Poznámka. Označíme

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

Z Příkladu 3.8.24 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo γ nazýváme **Eulerovou-Mascheroniho konstantou**.³ Tato konstanta je přibližně rovna 0,577 a není známo, zda je racionální.

3.8.26. Příklad. Spočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

³Lorenzo Mascheroni (1750-1800)

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Potom platí

$$b_n = a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n,$$

a tedy podle věty o limitě součtu (Věta 2.2.36(a)) platí

$$\begin{aligned} \lim b_n &= \lim (a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n) \\ &= \lim \left(a_{2n} - a_n + \log \left(\frac{2n}{n} \right) \right) = \gamma - \gamma + \log 2 \\ &= \log 2. \end{aligned}$$

♣

3.8.27. Příklad. Ukažte, že platí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$. (Definice relace \approx je uvedena v Definici 1.6.1(a).)

Řešení. Označme \mathcal{Z} množinu všech posloupností, jejichž členy jsou prvky $\{0, 1\}$. Pak platí $\mathcal{Z} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (vizte Příklad ??). Pro $z \in \mathcal{Z}$ definujme $\varphi: \mathcal{Z} \rightarrow [0, 1]$ předpisem

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{3^n}, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Dokážeme, že φ je prosté. Necht' $z, z' \in \mathcal{Z}, z \neq z'$. Nalezneme nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které platí $z(n) \neq z'(n)$. Můžeme předpokládat, že $z(n) = 1$ a $z'(n) = 0$. Pak

$$\begin{aligned} \varphi(z') &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + 0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z'(k)}{3^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z(k)}{3^k} \\ &= \varphi(z). \end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{Z} \leq [0, 1] \leq \mathbb{R}$.

Nyní dokážeme, že platí $\mathbb{R} \leq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Podle Příkladu 1.6.20 platí $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$, a tedy podle Příkladu ?? stačí ověřit, že platí $\mathbb{R} \leq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Definujme zobrazení $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ předpisem

$$\psi(x) = \{q \in \mathbb{Q}; q < x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dokážeme, že zobrazení ψ je prosté. Předpokládejme, že $x, y \in \mathbb{R}$, přičemž $x \neq y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x < y$. Podle Věty 1.5.29

existuje racionální číslo r splňující $x < r < y$. To znamená, že $r \in \psi(y) \setminus \psi(x)$, a tedy $\psi(x) \neq \psi(y)$. Odtud plyne, že ψ je prosté, a tudíž $\mathbb{R} \leq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Dokazované tvrzení vyplývá z Cantorovy-Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5). ♣

3.8.28. Příklad. Dokažte, že platí $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$.

Řešení. Definujme zobrazení $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem $\varphi(x) = [x, 0]$. Potom φ je zřejmě prosté. Odtud plyne, že $\mathbb{R} \leq \mathbb{R}^2$. Nyní definujme zobrazení $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ předpisem

$$\psi(x, y) = \{[p, q] \in \mathbb{Q}^2; (p < x) \wedge (q < y)\}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Nechť $[x, y], [x', y'] \in \mathbb{R}^2$, $[x, y] \neq [x', y']$. Pak platí buď $x \neq x'$ nebo $y \neq y'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \neq x'$, a dále že $x < x'$. Podle Věty 1.5.29 nalezneme racionální číslo r splňující $x < r < x'$. Potom pro každé $q \in \mathbb{Q}$, $q < \min\{y, y'\}$, platí $[r, q] \in \psi(x', y) \setminus \psi(x, y)$, takže ψ je prosté. Podle Věty 1.6.19(c) a Příkladu 1.6.20 platí $\mathbb{Q}^2 \approx \mathbb{N}$, a tedy

$$\mathbb{R}^2 \leq \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Protože $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ dle Příkladu 3.8.27, plyne tvrzení z Cantorovy-Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5). ♣

3.8.29. Příklad. Ukažte, že Cauchyův součin divergentních řad $2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ a $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$ je konvergentní.

Řešení. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost členů řady $2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ a $\{b_n\}$ je posloupnost členů řady $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$. Označme dále $\{c_n\}$ posloupnost členů Cauchyova součinu obou řad. Potom platí $c_1 = -2$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, platí

$$\begin{aligned} c_k &= (a_1 b_k + \dots + a_k b_1) = a_1 + \dots + a_{k-1} - a_k \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} - 2^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení. ♣

3.8.30. Příklad. Nechť Q značí množinu racionálních čísel v intervalu $(0, 1)$. Dokažte, že existují bijekce π a σ množiny \mathbb{N} na Q takové, že $\sum_{n \in \mathbb{N}} \pi(n)^n$ konverguje a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)^n$ diverguje.

Řešení. Konstrukce π . Nalezneme rostoucí posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ reálných čísel z intervalu $[0, 1)$ splňující $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ a $\lim a_k = 1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n_k}^{n_k}}{1 - a_{n_k+1}} < 2^{-(k+1)}$. Položíme $n_0 = 0$. Dále nalezneme posloupnost nekonečných množin $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, které splňují

- $P_k \subset \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_k\}$,
- $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l: P_k \cap P_l = \emptyset$,
- $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k = \mathbb{N}$.

Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nalezneme bijekci π_k množiny P_k na množinu $A_k = (a_k, a_{k+1}] \cap Q$. Hledanou bijekci pak definujeme jako $\pi(n) = \pi_k(n)$ pro $n \in P_k$. Odhadneme

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \pi(n)^n &= \sum_{q \in Q} q^{\pi^{-1}(q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q \in A_k} q^{\pi^{-1}(q)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1}^{n_k+l} \leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}^{n_k}}{1 - a_{k+1}} \leq 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 3. \end{aligned}$$

Konstrukce σ . Nalezneme rostoucí posloupnost $\{q_k\}$ prvků Q splňující $q_k^{2k} > \frac{1}{2}$. Označme $T = \{q_k; k \in \mathbb{N}\}$. Množina T je nekonečná a spočetná. Nalezneme bijekci τ množiny lichých přirozených čísel na množinu $Q \setminus T$. Potom definujeme bijekci $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow Q$ předpisem $\sigma(2k) = q_k$ a $\sigma(2k-1) = \tau(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)^n > \sum_{k=1}^m q_k^{2k} > \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Odtud plyne $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)^n = \infty$. ♣

3.9. Početní příklady k číselným řadám

3.9.1. Řady s nezápornými členy.

3.9.1. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Spočteme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$2(\sqrt[n]{n})^2 \leq \sqrt[n]{n^2 2^n + 3} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n n^2} = 2 \sqrt[n]{2} (\sqrt[n]{n})^2$$

a

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^{24}} \leq \sqrt[n]{(n^4 + 1)^6} \leq \sqrt[n]{2^6 n^{24}} = \sqrt[n]{2^6} (\sqrt[n]{n})^{24}.$$

Odtud vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$\frac{2}{\sqrt[n]{2^6} (\sqrt[n]{n})^{22}} = \frac{2(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{2^6} (\sqrt[n]{n})^{24}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}} \leq \frac{2 \sqrt[n]{2} (\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{n}} = 2 \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Podle věty o dvou strážnících, Příkladů 2.2.52 a 2.2.53 a věty o aritmetice limit tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}} = 2.$$

Protože $2 > 1$, zadaná řada diverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria. ♣

3.9.2. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro velké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ je ve výrazu $n^3 + 1$ člen 1 zanedbatelný, a proto můžeme očekávat, že se zadaná řada bude chovat podobně jako řada s členy $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tato řada diverguje podle Příkladu 3.1.11, a tedy diverguje i zadaná řada. ♣

3.9.3. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Řešení. Pomocí Příkladu 2.2.53 dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\frac{1}{2} < 1$, Zadaná řada konverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria. ♣

3.9.4. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Řada má kladné členy pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^\alpha (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}{\frac{n^\alpha}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Ta podle Věty 3.2.18 konverguje právě tehdy, když $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, neboli právě tehdy, když $\alpha < -\frac{1}{2}$. ♣

3.9.5. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

Řešení. Posloupnost $\left\{ \frac{1}{n \log^2 n} \right\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající a má kladné členy. Podle kondenzačního kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log^2(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log^2 2}.$$

Tato řada konverguje podle Příkladu 3.2.3 a linearit konvergentních řad (Důsledek 3.1.21). Zadaná řada je tedy konvergentní. ♣

3.9.6. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$.

Řešení. Výraz $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$ je dobře definován a je kladný pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2}) \log^2 n}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, položme $b_n = \frac{1}{n \log^2 n}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Podle Příkladu 3.9.5 řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ konverguje. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.7. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right)^2 = 0.$$

Protože $0 < 1$, zadaná řada konverguje podle d'Alembertova podílového kritéria. ♣

3.9.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n$.

Řešení. Obor hodnot funkce kosinus je interval $[-1, 1]$ a pro všechna $t \in [-1, 1]$ platí

$$0 \leq \frac{1+t}{2+t} = 1 - \frac{1}{2+t} \leq 1 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Zadaná řada má tedy nezáporné členy. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$0 \leq \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Podle Příkladu 3.1.8 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ konverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.9. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1})$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$. Podle Příkladu 1.5.6 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} \\ &= (\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}) \frac{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2} \\ &= \frac{(n^2+5) - (n^2+1)}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2} \\ &= \frac{4}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5}\sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2}. \end{aligned}$$

Řada má tedy kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $b_n = n^{-\frac{4}{3}}$. Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[3]{(1+\frac{5}{n^2})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}} = \frac{4}{3}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ konverguje podle Věty 3.2.18, a proto konverguje i zadaná řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.10. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^6}{e^k} = 0$. Existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\frac{k^6}{e^k} \leq 1$. Položme $n_0 = k_0^3$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}} = \frac{(\sqrt[3]{n})^6}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{([\sqrt[3]{n}] + 1)^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq \frac{(2[\sqrt[3]{n}])^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq 2^6,$$

a tedy

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leq \frac{2^6}{n^2}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^6}{n^2}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.11. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1})$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Položme $a = \sqrt{n^2+3}$ a $b = \sqrt[3]{n^3+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1} &= \frac{(n^2+3)^3 - (n^3+1)^2}{a^5 + a^4b + \dots + ab^4 + b^5} \\ &= \frac{9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26}{a^5 + a^4b + \dots + ab^4 + b^5}. \end{aligned}$$

Protože $\lim(9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26) = \infty$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je a_n nezáporné. Navíc platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Protože $\frac{3}{2} \in (0, \infty)$ a řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.11, zadaná řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.12. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \cdots (2 + \sqrt{n})} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Podle Raabeova kritéria (Příklad 3.8.1) tedy daná řada konverguje. ♣

3.9.13. Příklad. Necht $a, b, d \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{a(a+d) \cdots (a+nd)}{b(b+d) \cdots (b+nd)} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy řady jsou kladné a platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b + (n+1)d}{a + (n+1)d} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{b-a}{a+(n+1)d} = \frac{b-a}{d}.$$

Jestliže $b-a > d$, pak zadaná řada konverguje podle Raabeova kritéria. Jestliže $b-a < d$, pak zadaná řada dle stejného kritéria diverguje. Jestliže $b = a+d$, pak platí

$$a_n = \frac{a(a+d) \cdots (a+nd)}{(a+d)(a+2d) \cdots (a+nd)(a+(n+1)d)} = \frac{a}{a+(n+1)d} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{a}{d}.$$

Protože $\frac{a}{d} \in (0, \infty)$, zadaná řada v tomto případě diverguje podle Věty 3.2.5. ♣

3.9.2. Řady s obecnými členy.

3.9.14. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\} = \{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Navíc podle Věty 3.2.18 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, a tedy zadaná řada nekonverguje absolutně. ♣

3.9.15. Příklad. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx + \alpha)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx + \alpha)$ mají omezené posloupnosti částečných součtů.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ mají omezené posloupnosti částečných součtů podle Příkladů 3.3.7 a 3.3.8. Dále podle 1.7.18 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\sin(nx + \alpha) &= \sin nx \cos \alpha + \cos nx \sin \alpha, \\ \cos(nx + \alpha) &= \cos nx \cos \alpha - \sin nx \sin \alpha.\end{aligned}$$

Odtud pak dokazovaná tvrzení plynou pomocí Příkladu 3.8.15. ♣

3.9.16. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| (-1)^{[\sqrt{n}]} \right| \leq 1 \quad \text{a} \quad 0 \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+1)} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}. \quad (3.62)$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentní podle Věty 3.2.18. Z nerovnosti (3.62) a srovnávacího kritéria tedy vyplývá, že zadaná řada je absolutně konvergentní. ♣

3.9.17. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Podle 1.7.18 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \sin nx = \sin n(x + \pi) \quad \text{a} \quad (-1)^n \cos nx = \cos n(x + \pi).$$

Tvrzení tedy plyne z Příkladu 3.9.15. ♣

3.9.18. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konvergentní.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a konverguje k 0. Zadaná řada tedy konverguje podle Dirichletova kritéria. ♣

3.9.19. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \frac{n^2}{n^2+1}$ konvergentní.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Příkladu 3.9.18. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1$$

a

$$\frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}.$$

Posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ je tedy omezená a rostoucí. Podle Abelova kritéria je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

3.9.20. Příklad. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right) \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n\right) \frac{n^2 + n}{n^2 + 2}$$

konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Položme

$$a_n = \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right), \quad b_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n, \quad c_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Potom

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + n},$$

a tedy $\lim b_n = 0$.

Necht $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost $b_{n+1} \leq b_n$ platí právě tehdy, když

$$\sqrt{(n+1)^2 + \sqrt{n+1}} - (n+1) \leq \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$\sqrt{(n+1)^2 + \sqrt{n+1}} - (n+1) \leq \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n,$$

$$(n+1)^2 + \sqrt{n+1} \leq n^2 + \sqrt{n} + 1 + 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}},$$

$$2n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}},$$

$$4n^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 + \frac{4n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 4n^2 + 4\sqrt{n},$$

a konečně

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 4. \quad (3.63)$$

Protože

$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2,$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí (3.63), a tedy $b_{n+1} \leq b_n$.

Podle Příkladu 3.9.15 má $\sum a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů.

Podle Dirichletova kritéria je tedy řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \cos(nx + \frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n)$ konvergentní. Proto je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx + \frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n)$.

Protože $\lim c_n = 1$, je posloupnost $\{c_n\}$ omezená. Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $c_n \geq c_{n+1}$ právě tehdy, když

$$\frac{n^2 + n}{n^2 + 2} \geq \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{(n+1)^2 + 2}.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$(n^2 + 2n + 3)(n^2 + n) \geq (n^2 + 2)(n^2 + 3n + 2),$$

$$n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 3n \geq n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 6n + 4,$$

$$n^2 \geq 3n + 4,$$

a konečně

$$1 \geq \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

Protože pravá strana poslední nerovnosti zřejmě konverguje k 0, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tato nerovnost platí. Pro tato n tedy máme $c_n \geq c_{n+1}$, tj. $\{c_n\}$ je od indexu n_0 nerostoucí. Proto podle Abelova kritéria konverguje řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n c_n$, a tedy i zadaná řada.

Necht nyní $x \in \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pak $a_n = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Posloupnost $\{b_n\}$ má nezáporné členy a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + n} = \frac{1}{2}.$$

Řada $\sum b_n$ proto diverguje podle limitního srovnávacího kritéria a Věty 3.2.18.

Protože $\lim c_n = 1$ a $\{c_n\}$ je od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ neklesající, je i posloupnost $\{\frac{1}{c_n}\}$ omezená a monotónní. Pokud by konvergovala řada $\sum b_n c_n$, pak by podle Abelova kritéria konvergovala i řada $\sum b_n = \sum b_n c_n \frac{1}{c_n}$, která však diverguje. Proto řada $\sum b_n c_n$ diverguje. ♣

3.9.21. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{\log n}\}_{n=2}^{\infty}$ je zřejmě klesající a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Podle 1.7.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n-1}$. Protože řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ diverguje, plyne ze srovnávacího kritéria, že diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.22. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$.

Řešení. Označme $\{a_n\} = \{(\sqrt[n]{3} - 1)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a platí $\lim a_n = 0$ podle Příkladu 2.2.53. Řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Ukážeme, že řada nekonverguje absolutně. Podle Věty 1.5.6 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[n]{3} - 1 = (\sqrt[n]{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}} + \dots + 1}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}} + \dots + 1} \\ &= \frac{3 - 1}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}} + \dots + 1} = \frac{2}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}} + \dots + 1} \geq \frac{2}{3n}. \end{aligned}$$

Pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}.$$

Poslední řada je divergentní, takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1) \right|$ diverguje podle srovnávacího kritéria. ♣

3.9.23. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.24. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ první řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy první řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Obdobně lze ukázat, že i druhá řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.25. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Zbývá vyšetřit případy $x = 1$ a $x = -1$. Položme $x = -1$. Pak obdržíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje. Položme $x = 1$. Potom dostaneme dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, která konverguje podle Leibnizovy věty. Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když $x \in [-1, 1)$, a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in (-1, 1)$. ♣

3.9.26. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Označme $a_n = \binom{2n}{n} x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} |x|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!n!} |x|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |x| = 4|x|. \end{aligned}$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$. Zbývá vyřešit případy $x = \frac{1}{4}$ a $x = -\frac{1}{4}$.

Položme $b_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $b_1 = \frac{1}{2}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} b_n. \quad (3.64)$$

Matematickou indukcí dokážeme, že

$$\frac{1}{2n} \leq b_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \quad (3.65)$$

Je zřejmé, že pro $n = 1$ obě nerovnosti v (3.65) platí. Předpokládejme, že nerovnosti jsou splněny pro $n \in \mathbb{N}$. Potom dostáváme

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} b_n \begin{cases} \geq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n+2} \\ \leq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \end{cases}.$$

Z (3.64) vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Z (3.65) a věty o dvou strážnících plyne, že $\lim b_n = 0$. Podle Leibnizovy věty tedy dostáváme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$.

Z (3.65) a srovnávacího kritéria dále plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$ je divergentní.

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když platí $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. ♣

3.9.27. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin(2n)$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tedy konverguje podle Dirichletova kritéria.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\sin 2n| \geq \sin^2 2n = \frac{1}{2}(1 - \cos(4n)) \geq 0,$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2n)}{n} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}. \quad (3.66)$$

Podle Dirichletova kritéria a Příkladu 3.3.8 konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{n}$. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}$ konverguje. Potom díky linearitě konvergentních řad (Důsledek 3.1.21) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, což je spor. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}$ tedy diverguje. Tato řada má nezáporné členy. Podle srovnávacího kritéria a (3.66) tedy diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2n)}{n} \right|$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.28. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, označme $a_n = \cos(n\frac{\pi}{4})$ a $b_n = \frac{1}{\log(\log n)}$. Z Příkladu 3.3.8 plyne, že řada $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}_{n=3}^{\infty}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy zadaná řada konverguje.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right) \right| \geq \cos^2\left(n \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(n \frac{\pi}{2})).$$

S využitím této nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{\cos(n \frac{\pi}{4})}{\log(\log n)} \right| &\geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 + \cos(n \frac{\pi}{2})}{2 \log(\log n)} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \log(\log n)} - \frac{\cos(n \frac{\pi}{2})}{2n} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Podle 1.7.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\log n \leq n - 1$. Protože funkce \log je rostoucí, plyne odtud, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $\log(\log n) \leq \log(n - 1)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2 \log(\log n)} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty,$$

takže řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2 \log(\log n)}$ diverguje. Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n \frac{\pi}{2})}{2n}$ konverguje podle Dirichletova kritéria. Z linearity konvergentních řad tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \log(\log n)} - \frac{\cos(n \frac{\pi}{2})}{2n} \right)$$

diverguje. Podle (3.67) a srovnávacího kritéria tedy zadaná řada konverguje neabsolutně. ♣

3.9.29. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \operatorname{arctg} n$. Posloupnost $\{b_n\}$ je rostoucí a omezená. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a má limitu rovnou nule. Zadaná řada tedy konverguje podle Abelova kritéria.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje. Zadaná řada tedy není absolutně konvergentní. ♣

3.9.30. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{\sin n}{n+10 \sin n}$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$, a $b_n = \frac{\sin n}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme řadu $\sum_{n=11}^{\infty} b_n$. Ta je podle Příkladu 3.3.9 konvergentní a přitom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$, platí

$$|a_n - b_n| = \left| \frac{-10(\sin n)^2}{n(n+10 \sin n)} \right| \leq \frac{10}{n(n-10)}.$$

Označme $c_n = \frac{10}{n(n-10)}$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$. Potom má řada $\sum c_n$ nezáporné členy, platí $\lim c_n n^2 = 10$ a řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje podle Příkladu 3.2.3. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum c_n$. Podle srovnávacího kritéria je tudíž i řada $\sum |a_n - b_n|$ konvergentní. Podle Věty 3.4.3 odtud plyne, že je řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} a_n = \sum_{n=11}^{\infty} (a_n - b_n) + \sum_{n=11}^{\infty} b_n$$

konvergentní.

Vyšetříme absolutní konvergenci. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$, platí

$$\left| \frac{\sin n}{n+10 \sin n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n+10 \sin n}.$$

Řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2(n+10 \sin n)}$ konverguje. To lze ověřit podobně, jako jsme dokázali konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$, platí $\frac{1}{n+10 \sin n} \geq \frac{1}{n+10}$, takže podle srovnávacího kritéria řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2(n+10 \sin n)}$ diverguje. Z linearit konvergentních řad tedy vyplývá, že $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n+10 \sin n}$ diverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž diverguje i řada $\sum_{n=11}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n+10 \sin n} \right|$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.31. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} \operatorname{arctg}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Z Příkladu 3.9.15 víme, že řada $\sum \sin(2n+1)$ má omezené částečné součty. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(-1)^n \sin(2n+1) = (-1)^n \sin(2n) \cos(1) + (-1)^n \cos(2n) \sin(1).$$

Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum (-1)^n \sin(2n+1)$ omezenou posloupnost částečných součtů. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2n+(-1)^n n} = \frac{2n-(-1)^n n}{3n^2}.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(2n+1)}{3n} - \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3n} \right).$$

Posloupnost $\{\frac{2}{3^n}\}$ je klesající a platí $\lim \frac{2}{3^n} = 0$. Řada $\sum \frac{2 \sin(2n+1)}{3^n}$ tudíž konverguje podle Dirichletova kritéria. Podobně lze ověřit konvergenci řady $\sum \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3^n}$. Odtud vyplývá, že řada $\sum \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n}$ konverguje. Protože posloupnost $\{\operatorname{arctg}(n^2)\}$ je rostoucí a omezená, zadaná řada konverguje podle Abelova kritéria. ♣

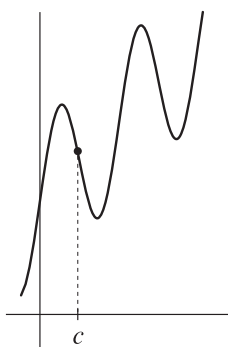
Limita a spojitost funkce

4.1. Definice a základní vlastnosti

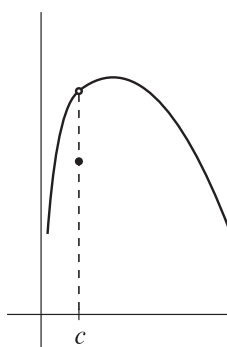
4.1.1. Definice. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R} , tj. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

V této kapitole budeme psát stručněji jen **funkce**. Podobně tomu bude i dále, nebude-li hrozit nedorozumění.

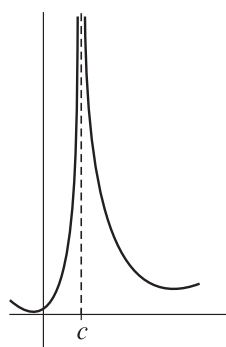
Na následujících obrázcích máme grafy několika různých funkcí. Podívejme se na chování těchto funkcí blízko bodu c . Na prvním obrázku se zdá, že přibližují-li se hodnoty x k bodu c , blíží se $f(x)$ k funkční hodnotě f v bodě c . Na druhém obrázku se děje něco podobného, ale $f(c)$ je různé od hodnoty, k níž se blíží $f(x)$, když se proměnná x přibližuje k c . Konečně na třetím obrázku rostou hodnoty $f(x)$ nade všechny meze. Analogicky můžeme rozumět dalším dvěma obrázkům pro $c = \infty$. Na posledním obrázku se však pro x blížící se k c funkční hodnoty $f(x)$ k žádné hodnotě nepřibližují.



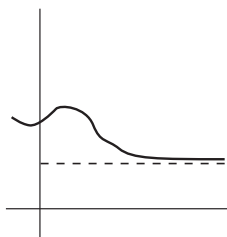
OBRÁZEK 1.



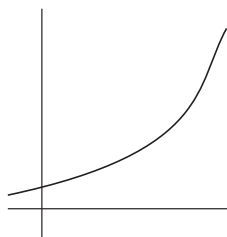
OBRÁZEK 2.



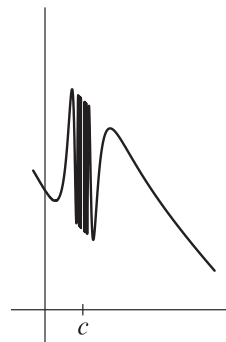
OBRÁZEK 3.



OBRÁZEK 4.



OBRÁZEK 5.



OBRÁZEK 6.

Nyní budeme chtít matematicky postihnout, co to znamená, že se funkční hodnoty $f(x)$ k něčemu blíží, pokud se x blíží k c . Přitom si ale nebudeme všimnout funkční hodnoty v bodě c , ale pouze samotného faktu „blížení se“. Následující definice nám pomůže při přesné formulaci tohoto pojmu.

4.1.2. Definice. Připomeňme, že v Definici 2.3.14 jsem definovali pojem okolí pro body z \mathbb{R}^* . Necht $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Prstencové okolí bodu c** definujeme jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Prstencové okolí bodu ∞ (respektive $-\infty$) definujeme takto

$$P(\infty, \varepsilon) = B(\infty, \varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right),$$

$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

4.1.3. (a) Ať už je $c \in \mathbb{R}$ nebo $c \in \{\infty, -\infty\}$, vždy pro $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, platí $B(c, \varepsilon_1) \subset B(c, \varepsilon_2)$. Podobně je tomu, nahradíme-li okolí prstencovým okolím. Všimněte si, že v případě bodu ∞ je okolí a prstencové okolí též množina. Stejně je tomu s okolím a prstencovým okolím bodu $-\infty$.

(b) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 \neq c_2$, pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že

$$B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset.$$

V případě, že $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pak můžeme volit například $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$. Pokud je $c_1 = \infty$ a $c_2 \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{(|c_2|+2)}\}$. Potom totiž platí

$$c_2 + \varepsilon \leq c_2 + 1 < |c_2| + 2 = \frac{1}{1/(|c_2|+2)} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

takže $B(\infty, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$. Ve zbývajících případech postupujeme obdobně.

(c) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňují $B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x \in B(c_1, \varepsilon)$, $y \in B(c_2, \varepsilon)$ platí $x < y$.

Následující definice je jednou z nejdůležitějších v tomto textu.

4.1.4. Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$** , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon). \quad (4.1)$$

4.1.5.

4.1.6. Věta (jednoznačnost limity). Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, $A_1 \neq A_2$, jsou limity funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset$. Podle definice limity pak existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) \in B(A_1, \varepsilon).$$

Podobně existuje $\delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2): f(x) \in B(A_2, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vezměme $x \in P(c, \delta_3)$. Potom máme

$$f(x) \in B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset,$$

což je spor. ■

Podobně jako u limity posloupnosti nám předchozí věta umožňuje zavést následující označení.

4.1.7. Označení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

4.1.8. Poznámky. (a) Jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existuje, pak je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c . V bodě c funkce nemusí být vůbec definována.

(b) Necht $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, kde $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak můžeme rozlišit tyto případy:

$$\text{počítáme limitu} \begin{cases} \text{ve vlastním bodě, tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a} \\ \text{v nevlastním bodě, tj. } c = \pm\infty \text{ a} \end{cases} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \mathbf{vlastní}), \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \mathbf{plus\ nekonečnu}), \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \mathbf{mínus\ nekonečnu}), \\ A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \mathbf{vlastní}), \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \mathbf{plus\ nekonečnu}), \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \mathbf{mínus\ nekonečnu}). \end{cases}$$

Uvědomme si, že pro $c \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Obdobně platí $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists L \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: x > L \Rightarrow f(x) > K.$$

Zde je vidět užitečnost pojmů okolí a prstencové okolí, které nám dovolují formulovat definici vlastní i nevlastní limity funkce ve vlastním i nevlastním bodě pomocí jedné formule.

4.1.9. Příklad. Necht $A \in \mathbb{R}$ a f je funkce, jejíž funkční hodnoty jsou na jistém prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ rovny $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_0)$ platí $f(x) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Nyní položíme $\delta = \delta_0$. Pro $x \in P(c, \delta)$ platí $x \in P(c, \delta_0)$, a tedy $f(x) = A \in B(A, \varepsilon)$. ■

4.1.10. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} x = c$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(c, \varepsilon)$ platí $x \in P(c, \delta) = P(c, \varepsilon) \subset B(c, \varepsilon)$. ■

4.1.11. Příklad. Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu volme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(\infty, \delta)$ platí $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$, a tedy $\frac{1}{x} \in B(0, \varepsilon)$. ■

4.1.12. Příklad. Platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Důkaz. Ukážeme, že formule (4.1) je splněna pro funkci $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $c = 0$ a $A = \infty$. Zvolme tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K tomuto ε hledáme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

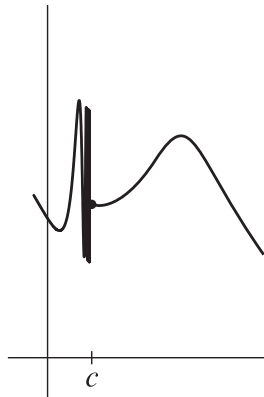
$$\forall x \in P(0, \delta): \frac{1}{x^2} \in B(\infty, \varepsilon),$$

neboli

$$\forall x \in P(0, \delta): \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Položíme-li $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak je výše uvedená formule splněna a důkaz proveden. ■

Na následujícím obrázku vidíme, že limita funkce f v bodě c zjevně neexistuje, přesto blíží-li se x k bodu c zprava, potom se i funkční hodnoty blíží k jisté hodnotě.



I tento pojem, kdy se proměnná blíží k c z jedné strany, lze formalizovat a to pomocí pojmu limity v bodě zprava (respektive zleva). K tomu budeme potřebovat pravé (respektive levé) okolí bodu, jež jsou definovány následovně.

4.1.13. Definice. Necht' $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu c** jako $B_+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu c** jako $B_-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu c** jako $P_+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu c** jako $P_-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Dále definujeme

- **levé okolí bodu ∞** jako $B_-(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$,
- **pravé okolí bodu $-\infty$** jako $B_+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$,
- **levé prstencové okolí bodu ∞** jako $P_-(\infty, \varepsilon) = B_-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu $-\infty$** jako $P_+(-\infty, \varepsilon) = B_+(-\infty, \varepsilon)$.

4.1.14. Definice. Necht' $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P_+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limitu zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.1.15. Poznámka. Obdobně jako ve Větě 4.1.6 lze dokázat, že funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ a pro limitu zprava symbol $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$.

4.1.16. Věta. Funkce f má limitu v bodě $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když má v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají. Potom navíc platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x).$$

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Potom ale máme také

$$\forall x \in P_+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

neboť $P_+(c, \delta) \subset P(c, \delta)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = A$. Rovnost $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A$ dokážeme obdobně.

\Leftarrow Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c, \delta_1): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c, \delta_2): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom $P(c, \delta) \subset P(c, \delta_1) \cup P(c, \delta_2)$, takže pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $f(x) \in B(A, \varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. ■

Nyní dokážeme jednoduchý, ale užitečný princip, který je obdobou Věty 2.2.24 pro funkce. Nejprve zformulujeme pomocné tvrzení.

4.1.17. Lemma. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí ekvivalence

$$y \in B(0, \varepsilon) \Leftrightarrow |y| \in B(0, \varepsilon).$$

Důkaz. Necht $y \in \mathbb{R}$. Potom $y \in B(0, \varepsilon)$ právě tehdy, když $-\varepsilon < y < \varepsilon$, což zřejmě platí právě tehdy, když $-\varepsilon < -y < \varepsilon$. Odtud a z definice absolutní hodnoty reálného čísla plyne tvrzení. ■

4.1.18. Věta. Necht $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu c . Potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$$

právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0.$$

Důkaz. Z definice limity plyne, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ právě tehdy, když platí (4.1) pro speciální volbu $A = 0$. Dle Lemmatu 4.1.17 ovšem $f(x) \in B(0, \varepsilon)$ platí právě tehdy, když $|f(x)| \in B(0, \varepsilon)$. Tedy $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): |f(x)| \in B(0, \varepsilon),$$

což podle Definice 4.1.4 znamená, že $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$. ■

4.1.19. Definice. Necht $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá**, jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (respektive **zleva**), jestliže $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$ (respektive $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$).

4.1.20. Poznámka. Z vlastností okolí lze snadno odvodit ekvivalenci následujících výroků.

- (i) Funkce f je spojitá v bodě c .
- (ii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in B(c, \delta): f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

- (iii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Porovnejte poslední dvě formule s formulemi (4.1) a (4.2).

4.1.21. Příklady. (a) Definujme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Tuto funkci nazýváme **signum** a značíme ji sign . Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign } x = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign } x = -1.$$

Funkce sign je tedy v bodě 0 nespojitá.

(b) Afinní funkce $f: x \mapsto ax + b$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$. Tvrzení dokážeme přímým ověřením definice. Udělejme to podrobně v případě, že $a > 0$. Mějme $c \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a každé $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí

$$f(c) - a\delta < f(x) = f(c) + a(x - c) < f(c) + a\delta.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$, plyne z předchozí nerovnosti, že pro každé $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

4.2. Věty o limitách

Definice limity neobsahuje návod, jak tuto limitu vypočítat, případně jak ukázat, že funkce v daném bodě limitu nemá. Věty z tohoto oddílu nám umožní jednak limity v některých případech vypočítat a dále ukáží nové vlastnosti právě definovaných pojmů.

4.2.1. Věta (vlastní limita a omezenost). Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje $P(c, \delta)$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, 1),$$

neboli $f(P(c, \delta)) \subset (A - 1, A + 1)$. Tato inkluze dokazuje omezenost funkce f na $P(c, \delta)$. ■

4.2.2. Věta (aritmetika limit funkcí). Necht $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

$$(a) \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = AB,$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B},$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (c). Technika důkazů zbývajících tvrzení je obdobná a zde je nebudeme provádět. Výraz $\frac{A}{B}$ je podle předpokladu definován, takže musí nastat některý z následujících případů:

$$(1) A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$(2) A \in \mathbb{R}, B \in \{-\infty, \infty\},$$

$$(3) A = \infty, B \in \mathbb{R}, B > 0,$$

- (4) $A = \infty, B \in \mathbb{R}, B < 0,$
 (5) $A = -\infty, B \in \mathbb{R}, B > 0,$
 (6) $A = -\infty, B \in \mathbb{R}, B < 0.$

(1) Naším cílem je dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0,$ existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Z definice limity plyne, že ke kladnému číslu $\frac{|B|}{2}$ existuje $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0,$ takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \in (B - \frac{|B|}{2}, B + \frac{|B|}{2}),$ a tedy $|g(x)| > \frac{|B|}{2} > 0,$ takže výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ má smysl pro každé $x \in P(c, \eta).$ Pro $x \in P(c, \eta)$ odhadujeme

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \frac{1}{|g(x)||B|} |f(x)B - g(x)A| \\ &= \frac{1}{|g(x)||B|} |f(x)B - AB + AB - g(x)A| \\ &\leq \frac{1}{|g(x)||B|} (|B||f(x) - A| + |A||B - g(x)|) \\ &\leq M(|f(x) - A| + |g(x) - B|), \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde $M = \max \left\{ \frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{|B|^2} \right\}.$ Zvolme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0.$ Z předpokladů věty plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{2M}$ existují kladná čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta_1): |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (4.5)$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2): |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (4.6)$$

Potom pro $\delta = \min\{\eta, \delta_1, \delta_2\}$ plyne platnost (4.3) z (4.4), (4.5) a (4.6).

(2) Podle Věty 4.2.1 existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0,$ a kladné $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x \in P(c, \delta_1): |f(x)| < K. \quad (4.7)$$

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0.$ Ať už předpokládáme $B = \infty$ nebo $B = -\infty,$ můžeme v obou případech nalézt $\delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 > 0,$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2): |g(x)| > \frac{K}{\varepsilon}. \quad (4.8)$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$ Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ díky (4.7) a (4.8) dostáváme

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \frac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že pro $A \in \mathbb{R}$ a B nevlastní je limita rovna 0.

(3) Podobně jako v bodě (1) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0,$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta): g(x) < 2B. \quad (4.9)$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) > \frac{2B}{\varepsilon}. \quad (4.10)$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2B}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2B} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Zbývající případy (4)–(6) lze dokázat stejným způsobem jako případ (3), pouze je třeba na příslušných místech změnit nerovnosti a znaménka. ■

4.2.3. Příklad. Následující příklady demonstrují, že bez předpokladu existence pravých stran ve vzorcích Věty 4.2.2 nelze o hodnotě limit na levých stranách nic říci.

Uvažujme například $f(x) = x$ a $g(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = 0$.

Poněkud odlišný příklad je následující. Vezměme $f(x) = x \sin x$ a $g(x) = (x+1) \sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, i když $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Potíž tkívá v tom, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ není definován na žádném okolí ∞ .

4.2.4. Poznámka. Věta 4.2.2 má i své zřejmé jednostranné varianty.

4.2.5. Věta (spojitost a aritmetické operace). Necht f, g jsou spojité funkce v bodě $c \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c . Je-li navíc $g(c) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě c .

Důkaz. Tvrzení plynou okamžitě z Věty 4.2.2. ■

4.2.6. Příklad. Víme již, že funkce $f(x) = x$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$ (Příklad 4.1.21(b)). Podle předcházející věty jsou tedy funkce x^2, x^3, x^4, \dots spojité v každém bodě \mathbb{R} . Odtud podle téže věty plyne, že polynomy a racionální funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Výraz „ $\frac{A}{0}$ “ není definován, nicméně platí tato věta.

4.2.7. Věta. Necht $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c, \eta)$, pak $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \infty$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) \in (A - \frac{A}{2}, A + \frac{A}{2})$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{A}{2(|L|+1)}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{A}{2(|L|+1)}$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A/2}{A/(2(|L|+1))} = |L| + 1 > L.$$

Tím je tvrzení pro $A \in \mathbb{R}$ dokázáno.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme opět $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{1}{|L|+1}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{1}{|L|+1}$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{1/(|L|+1)} = |L| + 1 > L.$$

■

4.2.8. Poznámka. Předchozí věta má i svou variantu pro jednostranné limity. Předpokládáme-li, že $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow c+} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$ a existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P_+(c, \eta)$, pak $\lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Podobně lze zformulovat i variantu s limitou zleva.

4.2.9. Věta (o srovnání). Nechť $c \in \mathbb{R}^*$.

(a) Nechť

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \leq g(x).$$

Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

(c) (o dvou strážnících) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \eta): f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Dále předpokládejme, že

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$

Potom existuje rovněž $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a rovná se A .

Důkaz. (a) Označme $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a $B = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Podle Poznámky 4.1.3(b) nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. K tomuto ε nalezneme kladná $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2): g(x) \in B(B, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Díky volbě ε a nerovnosti $A > B$ platí podle Poznámky 4.1.3(c) pro každé $x \in P(c, \delta)$ nerovnost $f(x) > g(x)$.

(b) Tuto část tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Potom podle již dokázané části (a) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta): f(x) > g(x).$$

Zvolme $y \in P(c, \delta) \cap P(c, \eta)$. Pak ovšem platí $f(y) > g(y) \geq f(y)$, což je spor.

(c) Necht' nejprve $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in P(c, \delta_1)$ platí

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \quad A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$

Necht' nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, potom máme

$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon,$$

a tedy $h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

čili $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = A$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)$. Necht' nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, pak platí

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

a tedy $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$. Dokázali jsme tedy $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \infty$.

Případ $A = -\infty$ lze dokázat obdobně. ■

4.2.10. Příklad. Necht' $h(x) = x \cos x \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Řešení. Položme $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in P(0, 1),$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Z Věty 4.2.9(c) tedy plyne $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. ♣

4.2.11. Poznámka. Pokud je funkce f v bodě c spojitá a $f(c) \neq 0$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je různá od nuly na $B(c, \delta)$. Toto tvrzení plyne z části (a) předchozí věty, kde za funkci g volíme nulovou funkci.

4.2.12. Poznámka. V kapitole o posloupnostech jsme ukázali varianty věty o dvou strážnících pro nevlastní limity (Věta 2.3.33 a 2.3.34). Podobně je tomu i v případě nevlastních limit funkcí. Uvedme formulaci věty pro limitu rovnou ∞ .

4.2.13. Věta. Necht' existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $f(x) \leq h(x)$. Dále předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a rovná se ∞ .

4.2.14. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \infty$.

Řešení. Jelikož

$$\frac{x^2 + \sin x}{x} \geq \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty),$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{1}{x} = \infty,$$

platí též z Věty 4.2.13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \infty.$$

♣

Při výpočtech limit je často užitečná následující věta, jejíž důkaz lze snadno provést pomocí tvrzení (c) z Věty 4.2.9.

4.2.15. Věta. Necht' $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ a necht' existuje $\eta > 0$ takové, že g je omezená na $P(c, \eta)$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = 0$.

Další věta dává do souvislosti limitu funkce s limitou posloupnosti.

4.2.16. Věta (Heine). Necht' $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c . Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \in P(c, \delta).$$

Potom máme také

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \in P(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: f(x_n) \in B(A, \varepsilon).$$

(ii) \Rightarrow (i) Dokážeme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in P(c, \delta): \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in P(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A, \frac{1}{n}))$. Pak máme $x_n \neq c$, $\neg(f(x_n) \in B(A, \frac{1}{n}))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Neplatí tak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii), tj. (ii) neplatí, což jsme měli dokázat. ■

Není těžké zformulovat Heineovu větu pro limitu zleva (respektive zprava). Podobně lze dát do souvislosti spojitost a limitu posloupnosti. Z několika různých variant uvedme následující dvě, přičemž dokážeme pouze druhou.

4.2.17. Věta. Necht' $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c . Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = A$.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

4.2.18. Věta. Necht $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na okolí bodu c . Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Funkce f je spojitá v bodě c .
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in B(c, \delta): f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \in B(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon).$$

(ii) \Rightarrow (i) Dokážeme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in B(c, \delta): \neg(f(x) \in B(f(c), \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in B(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon))$. Pak máme $\neg(f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Neplatí tak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii). ■

4.2.19. Věta. Necht

Větu 4.2.16 lze často použít k důkazu neexistence limity.

4.2.20. Příklad. Ukážeme, že neexistuje $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^{[x]}$, kde $[x]$ značí celou část čísla x .

Řešení. Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^{[x]} = A \in \mathbb{R}^*$. Vezměme posloupnost $\{x_n\} = \{2n\}$. Potom $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[2n]} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[x_n]} = 1$. Přitom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ a $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vezměme dále posloupnost $\{y_n\} = \{2n+1\}$. Potom $(-1)^{[y_n]} = (-1)^{[2n+1]} = -1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[y_n]} = -1$. Přitom $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Heineovy věty musí být $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[x_n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[y_n]} = A$. Na druhé straně ovšem $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[x_n]} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[y_n]}$, a to je spor. Proto limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^{[x]}$ neexistuje. ♣

Věta 4.2.2 říká, jak se limita funkce chová vzhledem k algebraickým operacím sčítání, násobení a dělení. Následující věta ozřejmuje vztah limity ke skládání funkcí.

4.2.21. Věta (limita složené funkce). Necht $c, D, A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{y \rightarrow D} f(y) = A$. Předpokládejme dále, že je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- (P) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq D$,

(S) funkce f je spojitá v bodě D .

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} (f \circ g)(x) = A.$$

Důkaz. Předpokládejme, že je splněna podmínka (P). Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K tomuto ε existuje $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(D, \psi): f(y) \in B(A, \varepsilon),$$

neboť $\lim_{y \rightarrow D} f(y) = A$. K nalezenému ψ je možné najít $\delta' > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta'): g(x) \in B(D, \psi),$$

neboť $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$. Položme $\delta = \min\{\delta', \eta\}$. Pro $x \in P(c, \delta)$ platí $g(x) \in B(D, \psi) \setminus \{D\}$, neboli $g(x) \in P(D, \psi)$. Odtud dostáváme $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$. Tím je důkaz věty ve verzi s podmínkou (P) proveden.

Nyní předpokládejme, že je splněna podmínka (S). Vezměme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\psi > 0$ takové, že pro každé $y \in P(D, \psi)$ platí $f(y) \in B(A, \varepsilon)$. Protože je f spojitá v bodě D , máme $f(D) = A$. Proto pro každé $y \in B(D, \psi)$ platí $f(y) \in B(A, \varepsilon)$. K číslu ψ existuje nyní $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $g(x) \in B(D, \psi)$. Dohromady tedy máme, že pro $x \in P(c, \delta)$ platí $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$. Tím je důkaz proveden. ■

4.2.22. Příklad. Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Zvolíme-li $f = |\text{sign}|$, $g = 0$, $c = 0$, $D = 0$ a $A = 1$, pak $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = 0 \neq 1$.

4.2.23. Věta. Pokud je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c .

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Věty 4.2.21. ■

4.2.24. Příklad. Necht funkce f je spojitá v bodě 0. Potom je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$.

Řešení. Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ (Příklad 4.1.11) a $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(0)$. Podle Věty 4.2.21 ve verzi s podmínkou (S) pak platí $\lim_{x \rightarrow \infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$. ♣

Věta o limitě složené funkce má také své varianty pro jednostranné limity. Bez důkazu uvedme jednu z nich.

4.2.25. Věta. Necht $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $D \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x \rightarrow c-} g(x) = D$ a $\lim_{y \rightarrow D+} f(y) = A$. Dále necht existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P_-(c, \eta)$ platí $g(x) > D$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c-} (f \circ g)(x) = A.$$

4.2.26. Věta (limita monotónní funkce). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Necht funkce f je monotónní na intervalu (a, b) . Potom existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, přičemž platí:

- Je-li f na (a, b) neklesající, pak

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b_-} f(x) = \sup f((a, b)).$$

- Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b_-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. Dokážeme, že $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \inf f((a, b))$ platí pro neklesající zdola omezenou funkci f a pro $a \in \mathbb{R}$. Důkazy ostatních případů lze provést obdobně. Označme $m = \inf f((a, b)) \in \mathbb{R}$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima plyne, že existuje $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Z definice množiny $f((a, b))$ plyne, že $y = f(x')$ pro nějaké $x' \in (a, b)$. Protože však funkce f je neklesající, je

$$\forall x \in (a, x'): f(x) \leq f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f((a, b))$, je

$$\forall x \in (a, b): m - \varepsilon < m \leq f(x).$$

Na intervalu (a, x') tedy platí:

$$\forall x \in (a, x'): m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ (v našem případě to bylo $\delta = x' - a$) takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta): f(x) \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon),$$

tj. $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = m$. ■

4.3. Funkce spojité na intervalu

4.3.1. Definice. Necht $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu J** , jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J ,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J ,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J .

Spojitosť funkce na intervalu lze charakterizovat pomocí konvergence posloupností, jak ukazuje následující varianta Heineovy věty.

4.3.2. Věta. Necht $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

- funkce f je spojitá na J ,
- pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$ a $\lim x_n = c \in J$, platí $\lim f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim x_n = c \in J$. Pokud je bod c vnitřním bodem intervalu J , potom podle Heineovy věty (Věta 4.2.18) platí $\lim f(x_n) = f(c)$. Pokud je bod c krajním bodem intervalu J , pak $\lim f(x_n) = f(c)$ platí podle příslušné jednostranné varianty Heineovy věty.

(ii) \Rightarrow (i) Spojitost ve vnitřních bodech J plyne opět z Heineovy věty. Spojitost v krajních bodech, pokud jsou tyto prvky J , plyne z jednostranných variant Heineovy věty. ■

4.3.3. Věta. Necht I, J jsou intervaly v \mathbb{R} a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Necht $f(I) \subset J$. Pak $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Důkaz. Použijme Větu 4.3.2. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v I konvergující k bodu $x \in I$. Dle Věty 4.3.2(ii) použité pro funkci f platí $\lim f(x_n) = f(x)$. Opětovným použitím tohoto tvrzení, tentokrát pro funkci g , dostaneme, že $\lim g(f(x_n)) = g(f(x))$. Proto $\lim (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x)$, a tedy $g \circ f$ je spojitá na I opět dle Věty 4.3.2. ■

4.3.4. Věta (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot). Necht funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak ke každému $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Důkaz. Zvolme $C \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b]; f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná (neboť $a \in M$) a shora omezená (číslo b je horní závora M), je tedy $\xi = \sup M \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\xi \in [a, b]$. Ukážeme, že $f(\xi) = C$ vyloučením možností $f(\xi) > C$ a $f(\xi) < C$.

Kdyby $f(\xi) > C$, pak $\xi > a$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > C$. To znamená, že $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor s definicí ξ .

Kdyby $f(\xi) < C$, pak $\xi < b$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < C$. To znamená, že $(\xi, \xi + \delta) \subset M \subset [a, \xi]$, což je opět spor. ■

4.3.5. Poznámka. Věta analogicky platí v případě, kdy $f(a) > f(b)$. Povšimněme si, že z předpokladů věty neplyne nic o tom, kolik je takových bodů $\xi \in (a, b)$, v nichž je $f(\xi) = C$. Bolzanova věta o nabývání mezihodnot ale tvrdí, že takový bod existuje alespoň jeden.

4.3.6. Věta (zobrazení intervalu spojitou funkcí). Necht J je interval. Necht funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na J . Potom je $f(J)$ interval.

Důkaz. Ověříme, že množina $f(J)$ splňuje předpoklad Lemmatu 1.5.23. Zvolme $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$, $y_1 < z < y_2$. Pak existují $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Podle Věty 4.3.4 a za ní následující poznámky musí f v jistém bodě nabývat hodnoty z , takže $z \in f(J)$. Podle Lemmatu 1.5.23 je tedy množina $f(J)$ intervalem. ■

4.3.7. Definice. Necht $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$).

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (respektive **minima**) **na** M , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{respektive } \forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (respektive **minima**) funkce f na množině M .

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) **vzhledem k** M , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{respektive } \forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) funkce f na množině M .

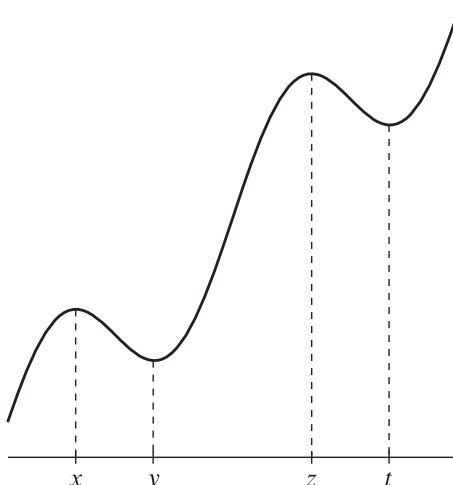
• Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) < f(x) \quad (\text{respektive } \forall y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) > f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M .

• Symbol $\max_M f$ (respektive $\min_M f$) označuje největší (respektive nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

• Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.



OBRÁZEK 7.

Na obrázku jsou x a z body lokálního maxima funkce f a v bodech y a t má funkce f lokální minimum.

4.3.8. Budeme-li hovořit o lokálním extrému reálné funkce (bez udání množiny), budeme mít na mysli lokální extrém vzhledem k nějakému okolí.

4.3.9. Věta (existence extrémů). Necht $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty a své nejmenší hodnoty.

Důkaz. Označme $G = \sup f([a, b])$. Podle Věty 2.3.36 existuje posloupnost $\{y_n\}$ prvků množiny $f([a, b])$ taková, že $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Podle Věty 2.4.7 vybereme z posloupnosti $\{x_n\}$ konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s limitou x^* . Podle Věty 2.2.44 leží bod x^* v intervalu $[a, b]$. Podle Věty 4.2.18 platí $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.32 platí

$$f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = G.$$

Je tedy $f(x^*) = G$ a x^* je bodem maxima funkce f na intervalu $[a, b]$.

Pro důkaz existence bodu minima definujme funkci $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = -f(x)$. Funkce g je na $[a, b]$ spojitá, musí tedy na $[a, b]$ nabývat svého maxima podle již dokázané části věty. Necht tomu tak je v bodě $x_* \in [a, b]$. Pak platí $g(x) \leq g(x_*)$ kdykoliv $x \in [a, b]$. To znamená, že $f(x) \geq f(x_*)$ pro každé $x \in [a, b]$, a f nabývá svého minima na $[a, b]$ v bodě x_* . Tím je věta dokázána. ■

4.3.10. Příklad. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ nenabývá na intervalu $(0, 1)$ extrému. Stejně tak funkce $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \{0, 1\}, \\ x & \text{pro } x \in (0, 1) \end{cases}$$

nemá na $[0, 1]$ extrém. Tyto dva příklady ukazují, že ani předpoklad uzavřenosti intervalu ani spojitosti funkce nelze ve Větě 4.3.9 vynechat.

4.3.11. Důsledek. Necht f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

Důkaz. Podle předchozí věty nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ maxima v bodě x^* a minima v bodě x_* . Platí tedy $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ pro každé $x \in [a, b]$, takže množina $f([a, b])$ je omezená. ■

4.3.12. Hledání extrémů funkce na nějaké množině patří k důležitým úlohám. Věta 4.3.9 sice nedává návod jak bod extrému hledat, ale dává nám velmi cennou informaci o tom, že alespoň jeden bod maxima (respektive minima) existuje (za předpokladů věty). V dalším se naučíme, jak vytipovat body, které jsou podezřelé z toho, že by v nich funkce mohla nabývat extrému. Pokud víme (např. podle Věty 4.3.9), že naše funkce nabývá maxima (respektive minima) na uvažované množině, pak bodem maxima (respektive minima) bude ten z vytipovaných podezřelých bodů, v němž funkce nabývá největší (respektive nejmenší) hodnoty.

Na závěr tohoto oddílu se budeme zabývat vztahem spojitosti k inverznímu zobrazení. Spojitá funkce na intervalu J zobrazuje tento interval na interval $f(J)$ (Věta 4.3.6). Pokud je f na J rostoucí (nebo klesající), je f prosté zobrazení J na $f(J)$ a existuje inverzní zobrazení $f^{-1}: f(J) \rightarrow J$. Toto zobrazení je funkce, budeme proto o f^{-1} hovořit jako o **funkci inverzní**. Následující věta tvrdí, že jak druh monotonie tak i spojitost zdědí inverzní funkce od funkce výchozí.

4.3.13. Věta (spojitost inverzní funkce). Necht f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J . Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je spojitá a rostoucí, jinak bychom uvažovali $-f$. Potom podle Věty 4.3.6 je funkce f^{-1} definována na intervalu $f(J)$ a je rostoucí, což je snadné si uvědomit. Dokážeme spojitost f^{-1} na $f(J)$. Necht $y_0 \in f(J)$ není pravý koncový bod intervalu $f(J)$. Dokážeme spojitost f^{-1} v bodě y_0 zprava. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Bod x_0 není pravým koncovým bodem J , neboť f je rostoucí na J . Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zvolme $x_1 \in J \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ a položíme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud potom $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}(B_+(y_0, \delta)) = f^{-1}([y_0, y_0 + \delta]) = [x_0, x_1] \subset B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Analogicky bychom dokázali spojitost zleva funkce f^{-1} v bodech $f(J)$, které nejsou levým koncovým bodem $f(J)$. Odtud plyne spojitost f^{-1} na $f(J)$. ■

4.3.14. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na \mathbb{R} , a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na \mathbb{R} . Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $[0, \infty)$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na $[0, \infty)$.

4.4. Teoretické příklady k limitě funkce

4.4.1. Příklad. Necht $x \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém $P(x, \delta)$. Definujeme pak **limes superior** a **limes inferior** funkce f v bodě x jako

$$\limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \inf_{\delta > 0} \sup f(P(x, \delta)),$$

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = \sup_{\delta > 0} \inf f(P(x, \delta)).$$

Obdobně definujeme limes superior a inferior v bodě x zleva či zprava. Platí následující tvrzení.

- (a) Máme $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \leq \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$.
 (b) Limita $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existuje právě tehdy, když $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$.
 V tomto případě pak platí

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) (= \liminf_{y \rightarrow x} f(y)). \quad (4.11)$$

(c) Platí $\limsup_{y \rightarrow x} (-f(y)) = -\liminf_{y \rightarrow x} f(y)$.

Řešení. K důkazu tvrzení (a) si stačí uvědomit, že pro každá $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná platí

$$\inf f(P(x, \delta_1)) \leq \sup f(P(x, \delta_2)).$$

Tato nerovnost snadno plyne z nerovností (kde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$)

$$\inf f(P(x, \delta_1)) \leq \inf f(P(x, \delta)) \leq \sup f(P(x, \delta)) \leq \sup f(P(x, \delta_2)).$$

Dokažme nyní druhé tvrzení. Předpokládejme existenci limity $A = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ a označme $a = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$, $b = \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$. Je-li $a < b$, pak platí

$$\forall \delta > 0: \inf f(P(x, \delta)) \leq a < b \leq \sup f(P(x, \delta)). \quad (4.12)$$

Zvolme $a', b' \in \mathbb{R}$ splňující $a < a' < b' < b$ a dále pak $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pro které množina $B(A, \varepsilon)$ neprotíná alespoň jeden z intervalů $(-\infty, a')$ a (b', ∞) . Z definice limity existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(P(x, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$. Pro toto δ však platnost (4.12) znamená neprázdnost množiny

$$f(P(x, \delta)) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) \subset B(A, \varepsilon) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) = \emptyset.$$

Tento spor tedy dává $a = b$.

V důkazu obrácené implikace označme

$$A = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$$

a uvažme nejprve případ $A = \infty$. Pak pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$ kladné takové, že $\inf f(P(x, \delta)) > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy $f(P(x, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$ a $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = \infty$.

Obdobně bychom dokázali $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = -\infty$ v případě $A = -\infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná taková, že

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x, \delta_1)) \quad \text{a} \quad \sup f(P(x, \delta_2)) < A + \varepsilon.$$

Položíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dostáváme

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x, \delta)) \leq \sup f(P(x, \delta)) < A + \varepsilon.$$

Tedy $f(P(x, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$, což dává $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = A$.

Důkaz této implikace též ověřil platnost rovnosti (4.11).

Přístupme k důkazu tvrzení (c). To však snadno plyne z následujících identit

$$\sup\{-x; x \in A\} = -\inf\{x; x \in A\}, \quad \inf\{-x; x \in A\} = -\sup\{x; x \in A\}$$

platných pro každou neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$, protože pak dostáváme

$$\begin{aligned} \limsup_{y \rightarrow x} -f(y) &= \inf_{\delta > 0} \sup(-f)(P(x, \delta)) = \inf_{\delta > 0} (-\inf f(P(x, \delta))) \\ &= -\sup_{\delta > 0} \inf f(P(x, \delta)) = -\liminf_{y \rightarrow x} f(P(x, \delta)). \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.2. Příklad. Je-li $x \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce definované na nějakém $P(x, \delta)$, platí

$$\begin{aligned}\liminf_{y \rightarrow x} (f(y) + g(y)) &\geq \liminf_{y \rightarrow x} f(y) + \liminf_{y \rightarrow x} g(y), \\ \limsup_{y \rightarrow x} (f(y) + g(y)) &\leq \limsup_{y \rightarrow x} f(y) + \limsup_{y \rightarrow x} g(y),\end{aligned}$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Řešení. Dokážeme pouze druhou nerovnost, důkaz první je obdobný. Označme

$$b_1 = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) \quad \text{a} \quad b_2 = \limsup_{y \rightarrow x} g(y).$$

Je-li $b_1 + b_2 = \infty$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $b_1 + b_2 < \infty$ a necht' $b' \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo větší než $b_1 + b_2$. Snadno nalezneme čísla $b'_1, b'_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $b_1 < b'_1$, $b_2 < b'_2$ a $b'_1 + b'_2 < b'$. Z definice nyní existují $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná splňující

$$\sup f(P(x, \delta_1)) < b'_1 \quad \text{a} \quad \sup g(P(x, \delta_2)) < b'_2.$$

Pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak z Věty 1.7.6 dostáváme

$$\begin{aligned}\sup(f + g)(P(x, \delta)) &\leq \sup f(P(x, \delta)) + \sup g(P(x, \delta)) \\ &\leq \sup f(P(x, \delta_1)) + \sup g(P(x, \delta_2)) \\ &< b'_1 + b'_2 < b'.\end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{y \rightarrow x} (f + g)(y) = \inf_{\delta > 0} \sup(f + g)(P(x, \delta)) < b'.$$

Jelikož bylo b' libovolné, platí

$$\limsup_{y \rightarrow x} (f + g)(y) \leq b_1 + b_2.$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.3. Příklad. Necht' $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom je množina

$$D = \{x \in \mathbb{R}; f \text{ není spojitá v bodě } x\}$$

spočetná.

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je f neklesající. Má tedy v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu zleva i zprava dle Věty 4.2.26. Zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{y \rightarrow x-} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x+} f(y),$$

a tedy

$$D = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x-} f(y) < \lim_{y \rightarrow x+} f(y)\}.$$

Pro každé $x \in D$ označme $a_x = \lim_{y \rightarrow x-} f(y)$ a $b_x = \lim_{y \rightarrow x+} f(y)$. Máme-li $x, y \in D$, $x < y$, pak

$$a_x < b_x \leq a_y < b_y.$$

Tedy je systém otevřených intervalů

$$\{(a_x, b_x); x \in D\}$$

disjunktní, a proto spočetný dle Příkladu 1.6.21. Tedy je i množina D spočetná. ♣

4.4.4. Příklad. Necht f je funkce z \mathbb{R} do \mathbb{R} . Potom je množina

$$E = \{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v bodě } x \text{ ostrý lokální extrém}\}$$

spočetná.

Řešení. Zjevně stačí ukázat, že množina

$$M = \{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

je spočetná. K tomuto účelu nalezneme pro každé $x \in M$ kladné číslo δ_x takové, že

$$\forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x): f(y) < f(x).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$M_n = \{x \in M; \delta_x > \frac{1}{n}\}$$

a uvědomme si, že pro různé body x, y z M_n platí

$$(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}) \cap (y - \frac{1}{2n}, y + \frac{1}{2n}) = \emptyset. \quad (4.13)$$

Uvažujeme-li totiž bod z v eventuálním průniku, platí pak

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

což znamená, že

$$y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \quad \text{a} \quad x \in (y - \delta_y, y + \delta_y).$$

Díky volbě δ_x a δ_y pak platí $f(y) < f(x)$ a $f(x) < f(y)$, což je zřejmý spor. Tím je ověřena platnost (4.13).

Systém intervalů

$$\{(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}); x \in M_n\}$$

je proto disjunktní, a tedy spočetný dle Příkladu 1.6.21.

Tedy i množina

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

je spočetná podle Věty 1.6.19(c). ♣

4.4.5. Příklad. Necht f je reálná funkce. Jestliže f není spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$, ale existuje její vlastní limita v x , potom říkáme, že f má v x **odstranitelnou nespojitost**. Neexistuje-li vlastní limita f v bodě x , pak říkáme, že bod x je bodem **neodstranitelné nespojitosti** funkce f . Body neodstranitelné nespojitosti klasifikujeme dále takto. Existují-li vlastní ale různé jednostranné limity v bodě x , pak

říkáme, že x je bodem **nespojivosti prvního druhu**. Jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že x je bodem **nespojivosti druhého druhu**.

Dokažte, že platí:

- (a) Množina $\{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v } x \text{ odstranitelnou nespojitost}\}$ je spočetná.
 (b) Množina $\{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v } x \text{ neodstranitelnou nespojitost 1. druhu}\}$ je spočetná.

Řešení. (a) Stačí dokázat, že množiny

$$O = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x} f(y) < f(x)\} \quad \text{a} \quad P = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x} f(y) < f(x)\}$$

jsou spočetné. Provedeme důkaz pouze pro množinu O , protože pro množinu P je důkaz obdobný. Pro každé $x \in O$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) < r_x < f(x).$$

Pak množina $O = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} O_r$, kde $O_r = \{x \in O; r_x = r\}$, je sjednocením spočetně mnoha množin, a tedy stačí dokázat, že každá množina O_r je spočetná. Vezměme tedy pevné $r \in \mathbb{Q}$ a pro každé $x \in O_r$ zvolme $\delta_x > 0$ splňující

$$\forall y \in P(x, \delta_x): f(y) < r.$$

Systém intervalů $\mathcal{J} = \{(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x); x \in O_r\}$ je disjunktní. Pokud totiž $x, y \in O_r, x \neq y$, a $(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x) \cap (y - \frac{1}{2}\delta_y, y + \frac{1}{2}\delta_y) \neq \emptyset$ a $\delta_x \leq \delta_y$, potom $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y \leq \delta_y$. Tedy $f(x) < r$ díky volbě δ_y a zároveň $f(x) > r_x = r$, což je spor. Systém \mathcal{J} je tedy spočetný dle Příkladu 1.6.21, a proto je i množina O_r spočetná.

(b) Stačí dokázat, že množiny

$$N = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x-} f(y) < \lim_{y \rightarrow x+} f(y)\},$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x-} f(y) > \lim_{y \rightarrow x+} f(y)\}$$

jsou spočetné. Důkaz provedeme pouze pro množinu N . Důkaz pro M je obdobný. Pro každé $x \in N$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ splňující

$$\lim_{y \rightarrow x-} f(y) < r_x < \lim_{y \rightarrow x+} f(y)$$

a rozložíme N jako $N = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r$, kde $N_r = \{x \in N; r_x = r\}$, $r \in \mathbb{Q}$. Vezměme nyní $r \in \mathbb{Q}$ pevné a pro každé $x \in N_r$ zvolme $\delta_x > 0$ takové, že

$$\forall y \in P_-(x, \delta_x): f(y) < r,$$

$$\forall y \in P_+(x, \delta_x): f(y) > r.$$

Máme-li nyní dva body $x, y \in N_r, x < y$, pak zjevně

$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset.$$

Tedy i

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y + \delta_y) = \emptyset.$$

Opět je tedy systém $\{(x - \delta_x, x + \delta_x); x \in N_r\}$ disjunktní, a proto spočetný. Tedy i množina N_r je spočetná. Odtud plyne spočetnost N . ♣

4.4.6. Příklad. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak má funkce f v každém reálném čísle bod neodstranitelné nespojitosti 2. druhu.

Řešení. Máme-li $x \in \mathbb{R}$ dáno, v každém jeho levém či pravém okolí existuje racionální i iracionální číslo. Tedy dle definice funkce f limita zprava ani zleva v bodě x neexistuje. ♣

4.4.7. Příklad. Dokažte následující variantu Heineovy věty 4.2.17:

Necht $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c . Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = A$.
- (ii) Pro každou rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Řešení. Implikace (i) \implies (ii) platí dle Heineovy věty 4.2.17. Dokažme tedy obrácenou implikaci. Předpokládejme, že f je definována na nějakém okolí $P_-(c, \eta)$. Necht $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq A$. Tedy platí

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in P_-(c, \delta): f(x) \notin B(A, \varepsilon). \quad (4.14)$$

Induktivně nyní zkonstruujeme rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ konvergující k c takto: V prvním kroce položíme $\delta_1 = \eta$. Dle (4.14) existuje $x_1 \in P_-(c, \delta_1)$ takové, že $f(x_1) \notin B(A, \varepsilon)$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nalezeny body $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ splňující $f(x_i) \notin B(A, \varepsilon)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Zvolíme $\delta_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $x_{n+1} \notin P_-(c, \delta_{n+1})$. Použitím (4.14) obdržíme $x_{n+1} \in P_-(c, \delta_{n+1})$ splňující $f(x_{n+1}) \notin B(A, \varepsilon)$. Zjevně pak platí $x_n < x_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena.

Našli jsem tak rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ takovou, že $\{f(x_n)\}$ nekonverguje k A , ale $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ (to platí díky tomu, že $x_n \in P_-(c, \frac{1}{n})$). Důkaz je tímto ukončen. ♣

4.4.8. Příklad. Ukažte, že nekonstantní periodická spojitá funkce má nejmenší kladnou periodu (tzv. *fundamentální periodu*). Najděte nekonstantní periodickou funkci bez fundamentální perody.

Řešení. Předpokládejme, že T_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou kladné periody funkce f konvergující k 0. Necht $x \in \mathbb{R}$ je libovolné, stejně jako $\varepsilon \in (0, \infty)$. Ze spojitosti f v bodě x najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta): |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Pak alespoň jedno číslo tvaru kT_{n_0} , $k \in \mathbb{Z}$, protíná interval $x - \delta, x + \delta$). Tedy

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - f(kT_{n_0})| < \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí $f(0) = f(x)$. Tedy f je konstantní.

Uvažujme nyní Dirichletovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak je každé racionální číslo periodou funkce f , a tedy f nemá fundamentální periodu. ♣

4.4.9. Příklad (Riemannova funkce).

4.4.10. Příklad. Sestrojte funkci $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ takovou, že pro každý nedege-nerovaný interval $I \subset [0, 1]$ platí $f(I) = [0, 1]$.

Řešení. Každé číslo $x \in [0, 1]$ si vyjádříme v desetinném rozvoji jako

$$x = 0.a_1a_2a_3 \dots$$

(Pro číslo $x = 0.a_1 \dots a_n 00 \dots$, kde $a_n \neq 0$, uvažujme desetinný rozvoj tvaru $x = 0.a_1 \dots (a_n - 1)99 \dots$)

Řekneme, že x splňuje podmínku periodicity pro $n \in \mathbb{N}$, pokud číslo $0.a_1a_3a_5 \dots$ je racionální a jeho desetinný rozvoj se periodicky opakuje počínaje číslem a_{2n-1} . Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ nesplňuje podmínku periodicity pro žádné } n \in \mathbb{N}, \\ 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}, & \text{pokud } x \text{ splňuje podmínku periodicity pro } n. \end{cases}$$

Ukažme, že f má požadovanou vlastnost. Necht' tedy $I \subset [0, 1]$ je nedege-nerovaný interval. Vezmeme $n \in \mathbb{N}$ a cifry a_1, \dots, a_{2n-2} takové, že $a_{2n-3} \notin \{0, 1\}$ a

$$[0.a_1a_2 \dots a_{2n-2}0, 0.a_1a_2 \dots a_{2n-2}1] \subset I.$$

Necht'

$$y = 0.b_1b_2b_3 \dots \in [0, 1]$$

je dáno. Definujme číslo $x \in I$ pomocí dalších cifer v jeho rozvoji, konkrétně

$$a_{2n-1} = a_{2n+1} = \dots = a_{4n-5} = 0, \quad a_{4n-3} = 1$$

a necht' další liché cifry x jsou definovány opakováním této sekvence. Na sudé po- zice od $2n$ počínaje položme cifry čísla y , tj.

$$x = 0.a_1a_2 \dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3} \dots$$

Pak $x \in I$, splňuje podmínku periodicity pro n , a tedy

$$f(x) = 0.b_1b_2b_3 \dots$$

♣

4.4.11. Příklad. Naleznete spojitou funkci na \mathbb{R} , která není na žádném nedege-nerovaném intervalu v \mathbb{R} monotónní.

Řešení. Necht $f_1(x) = |x|$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a necht dále f_1 je dodefinována na \mathbb{R} periodicky s periodou 1. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, položíme

$$f_n(x) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak je f_n 4^{-n+1} -periodická spojitá funkce na \mathbb{R} , jejíž maximální hodnota je $\frac{1}{2}4^{-n+1}$. Necht

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Pak f je dobře definovaná, neboť pro každé x je suma v (4.15) absolutně konvergentní. Dále je f spojitá.

Mějme totiž $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dány. Najdeme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{4^{m-1}} < \varepsilon$. Dále necht $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ je takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\} \forall y \in B(x, \delta): |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Pak pro $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |f_i(x)| + |f_i(y)| \\ &\leq m \frac{\varepsilon}{m} + 2 \cdot 4^{-m+1} \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x .

Nyní ukážeme, že není na žádném nedege-nerovaném intervalu monotónní. K tomuto účelu odvodíme následující fakt:

Je-li $a = k4^{-m}$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ a $h_m = 4^{-2m-1}$, pak

$$f(a + h_m) - f(a) > 0 \quad a \quad f(a - h_m) - f(a) > 0.$$

Máme-li totiž a a h_m jako výše, pak $f_n(a) = 0$ pro $n > m$. Dále platí

$$\forall n > 2m + 1: f_n(a + h_m) = 0, \quad \forall n \in \{m + 1, \dots, 2m + 1\}: f_n(a + h_m) = h_m.$$

Nakonec si povšimneme, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall a, h \in \mathbb{R}: |f_n(a + h) - f_n(a)| \leq |h|.$$

Dohromady proto máme

$$\begin{aligned} f(a + h_m) - f(a) &= \sum_{i=1}^n (f_i(a + h_m) - f_i(a)) + \sum_{i=m+1}^{2m+1} f_i(a + h_m) \\ &\geq -mh_m + (m + 1)h_m \\ &= h_m > 0 \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme, že

$$f(a - h_m) - f(a) \geq h_m > 0.$$

Mějme nyní libovolný nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}$. Protože čísla tvaru $\{k4^{-m}; k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ protínají každý otevřený interval, lze vybrat $k \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro a a h_m jako výše máme $a, a + h_m, a - h_m \in I$. Z přecházejících výpočtů pak máme

$$f(a - h_m) > f(a), \quad f(a + h_m) > f(a).$$

Funkce f proto není monotónní na I . ♣

4.4.12. Příklad. Necht $D \subset \mathbb{R}$ je spočetná množina. Najděte neklesající funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že její množina bodů nespojitosti je právě D .

Řešení. Očíslujeme množinu D jako $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ a pro $n \in \mathbb{N}$ položíme

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases}$$

Definujme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x).$$

Zjevně je f dobře definovaná (pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ absolutně konvergentní) a neklesající (neboť všechny funkce f_n jsou neklesající). Ukažme, že f je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Pro takovéto x a dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Dále najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro $y \in B(x, \delta)$ a $n \in \{1, \dots, n_0\}$ platí

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

(všechny funkce f_n jsou spojitě v x). Pak pro $y \in B(x, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2 \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x .

Na druhou stranu, necht $m \in \mathbb{N}$ je pevné. Ukážeme, že f není spojitá v x_m . Všimneme si, že funkce $\sum_{n \neq m} \frac{1}{2^n} f_n$ je též neklesající, a tedy má jednostranné limity

ve všech bodech \mathbb{R} . Proto platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (x_m)_-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (x_m)_-} \frac{1}{2^m} f_m(x) + \lim_{x \rightarrow (x_m)_-} \sum_{n \neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x) \\ &= 0 + \lim_{x \rightarrow (x_m)_-} \sum_{n \neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x) \\ &\leq \sum_{n \neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x_m) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x_m) \\ &= f(x_m). \end{aligned}$$

Tedy f není spojitá v x_m . ♣

4.4.13. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$ a $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce spojité v bodě a . Ukažte, že funkce

$$\begin{aligned} |f|(x) &= |f(x)|, \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{a} \\ \min\{f, g\}(x) &= \min\{f(x), g(x)\}, \end{aligned}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, jsou též spojité v a .

Řešení. Vzhledem k tomu, že $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$, $x \in \mathbb{R}$, je $|f|$ spojitá v a podle Příkladů 4.2.6 a ??.

Dále platí

$$\begin{aligned} \max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \quad \text{a} \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}, \end{aligned}$$

z čehož použitím první části důkazu plnou požadovaná tvrzení. ♣

4.4.14. Příklad. Necht $a, A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce splňující $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = A$.
- (ii) Platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

Řešení. (i) \implies (ii) Necht $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a, \eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a, \eta)$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.21) a Věty 4.2.2 pak dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = A.$$

Nechť nyní $A = 0$. Pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ nalezneme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že pro $y \in P(0, \delta)$ platí $\left| \frac{\sin y}{y} \right| < 2$. Nechť $\eta \in (0, \infty)$ je takové, že pro $x \in P(a, \eta)$ platí $|f(x)| < \delta$ a $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon$. Pak pro $x \in P(a, \eta)$ máme

$$\left| \frac{\sin f(x)}{x} \right| = \begin{cases} \left| \frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Protože pro $x \in P(a, \eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0, \delta)$, dostáváme

$$\left| \frac{\sin f(x)}{x} \right| < 2\varepsilon.$$

Ukázali jsem tedy i v tomto případě, že $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

(ii) \implies (i) Nechť $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$ a $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a, \eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a, \eta)$. (V opačném případě by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim x_n = a$, $f(x_n) = 0$ a $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Z Věty 4.2.16 pak plyne

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x_n)}{x_n} = A,$$

což by byl spor.) Můžeme tedy použít Větu 4.2.21 k odvození rovnosti

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)} \right) = A.$$

Je-li $A = 0$, pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ nalezneme $\delta \in (0, \frac{\pi}{4})$ splňující $\left| \frac{y}{\sin y} \right| < 2$ pro $y \in P(0, \delta)$. Nechť $\eta \in (0, \infty)$ je zvoleno tak, že pro $x \in P(a, \eta)$ platí $\left| \frac{\sin f(x)}{x} \right| < \varepsilon$ a $|f(x)| < \delta$. Pak pro $x \in P(a, \eta)$ platí, že $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\sin f(x) = 0$. Máme tedy

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \begin{cases} \left| \frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)} \right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0, \end{cases} \quad x \in P(a, \eta).$$

Jelikož pro $x \in P(a, \eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0, \delta)$, dostáváme

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < 2\varepsilon.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

4.4.15. Příklad. Nechť φ je rostoucí spojitá funkce na $[1, \infty)$ splňující $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ a f je nekonstatní periodická funkce na \mathbb{R} . Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(\varphi(x))$ neexistuje.

Řešení. Díky předpokladu je $\varphi: [1, \infty) \rightarrow [\varphi(1), \infty)$ bijekce. Nechť $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou body splňující $f(x_1) \neq f(x_2)$ a necht' $p > 0$ je perioda f . Zvolíme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_1 + kp, x_2 + kp \in [\varphi(1), \infty)$. Pak body $x_n = \varphi^{-1}(x_1 + (k+n)p)$ a $y_n = \varphi^{-1}(x_2 +$

$(k+n)p$), $n \in \mathbb{N}$, ukazují na neexistenci limity $f \circ \varphi$ v nekonečnu, neboť $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow \infty$, ale přitom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ \varphi)(x_n) = f(x_1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ \varphi)(y_n) = f(x_2).$$

♣

4.5. Početní příklady k limitě funkce

4.5.1. Příklad. Necht

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Spočítejte limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Řešení. Z Příkladu 4.2.6 víme, že funkce $x^2 + 2x - 3$ i $x^2 - 1$ jsou spojité, a proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2x - 3 = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 1 = -1.$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Při výpočtu druhé limity takto postupovat nemůžeme, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 3 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0.$$

Jelikož výraz $\frac{0}{0}$ není definovaný, nelze použít přímočaře Větu 4.2.2. Označme však

$$g(x) = \frac{x + 3}{x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Pak

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Speciálně tedy platí, že

$$f(x) = g(x), \quad x \in P(1, 2).$$

Proto

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x),$$

pokud jedna strana existuje. Poslední limitu ale snadno spočteme pomocí metody popsané v první část výpočtu. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

♣

4.5.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

Řešení. Vezměme nejprve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pevně a vyjádřeme funkci $x^n - 2x + 1$ jako

$$\begin{aligned} x^n - 2x + 1 &= (x^n - x) - (x - 1) = x(x^{n-1} - 1) - (x - 1) \\ &= x(x - 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) - (x - 1) \\ &= (x - 1)(x(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1) - 1). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme postupem podobným jako v Příkladu 4.5.1 výpočet

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x(x^{98} + x^{97} + \dots + x + 1) - 1)}{(x - 1)(x(x^{48} + x^{47} + \dots + x + 1) - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x(x^{98} + x^{97} + \dots + x + 1) - 1)}{(x(x^{48} + x^{47} + \dots + x + 1) - 1)} \\ &= \frac{99 - 1}{49 - 1} = \frac{49}{24}. \end{aligned}$$

♣

4.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}$$

Řešení. Zajímá nás chování polynomů v zadané limitě pro x jdoucí do nekonečna. V čitateli i jmenovateli máme polynom 50 stupně, u něhož je v nekonečnu převládající člen x^{50} . Rozšíříme tedy zlomek v limitě výrazem $\frac{1}{x^{50}}$ a dostaneme

$$\frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}} = \frac{(2 - \frac{3}{x})^{20}(3 + \frac{2}{x})^{30}}{(2 + \frac{1}{x})^{50}}.$$

Podle Příkladu 4.1.11 platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Tedy z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{x} &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \frac{2}{x} &= 3, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{x} &= 2. \end{aligned}$$

Dále je funkce $y \mapsto y^n$, $y \in \mathbb{R}$, spojitá na \mathbb{R} (viz Příklad 4.2.6), a tedy máme opět z Věty 4.2.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 - \frac{3}{x})^{20}(3 + \frac{2}{x})^{30}}{(2 + \frac{1}{x})^{50}} = \frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}}.$$

♣

4.5.4. Příklad. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$$

Řešení. Vyjádříme

$$\begin{aligned} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1} &= \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \cdots + (x^n - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \cdots + \frac{x^n - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^j - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1) = j. \end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu 1.8.6 pro $a = 1$ a $b = 0$. ♣

4.5.5. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2},$$

kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Řešení. Čitatel zadané funkce vyjádříme jako

$$\begin{aligned} (1 + mx)^n - (1 + nx)^m &= \left(1 + \binom{n}{1}(mx) + \binom{n}{2}(mx)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(mx)^n\right) \\ &\quad - \left(1 + \binom{m}{1}(nx) + \binom{m}{2}(nx)^2 + \cdots + \binom{m}{m}(nx)^m\right). \end{aligned}$$

Protože

$$\binom{n}{1}m = nm = mn = \binom{m}{1}n,$$

máme

$$\frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2} = \left(\binom{n}{2}m^2 - \binom{m}{2}n^2 \right) + P(x),$$

kde $P(x)$ je polynom bez absolutního členu. Z Věty 4.2.2 a Příkladu 4.2.6 tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\binom{n}{2} m^2 - \binom{m}{2} n^2 + P(x) \right) \\ &= \binom{n}{2} m^2 - \binom{m}{2} n^2 + P(0) \\ &= \binom{n}{2} m^2 - \binom{m}{2} n^2.\end{aligned}$$

♣

4.5.6. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right),$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Racionální funkci v zadané limitě upravíme na

$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} &= \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x)^2(1+\dots+x^{m-1})(1+\dots+x^{n-1})} \\ &= \frac{m(1+\dots+x^{n-1}) - n(1+\dots+x^{m-1})}{(1-x)(1+\dots+x^{m-1})(1+\dots+x^{n-1})} \\ &= \frac{m(1+\dots+x^{n-1}-n) - n(1+\dots+x^{m-1}-m)}{(1-x)(1+\dots+x^{m-1})(1+\dots+x^{n-1})}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}&m(1+\dots+x^{n-1}-n) - n(1+\dots+x^{m-1}-m) \\ &= m \sum_{j=1}^{n-1} (x^j - 1) - n \sum_{j=1}^{m-1} (x^j - 1) \\ &= (x-1) \left(m \sum_{j=1}^{n-1} (x^{j-1} + \dots + 1) - n \sum_{j=1}^{m-1} (x^{j-1} + \dots + 1) \right).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Z (4.17) tedy máme

$$\begin{aligned}&\frac{m(1+\dots+x^{n-1}-n) - n(1+\dots+x^{m-1}-m)}{1-x} \\ &= - \left(m \sum_{j=1}^{n-1} (x^{j-1} + \dots + 1) - n \sum_{j=1}^{m-1} (x^{j-1} + \dots + 1) \right).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Pomocí (4.18) dostáváme z (4.16) díky Větě 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m \sum_{j=1}^{n-1} (x^{j-1} + \dots + 1) - n \sum_{j=1}^{m-1} (x^{j-1} + \dots + 1)}{(1 + \dots + x^{m-1})(1 + \dots + x^{n-1})} \\ &= \frac{m \sum_{j=1}^{n-1} j - n \sum_{j=1}^{m-1} j}{mn} \\ &= \frac{\frac{1}{2}m(n-1)n - \frac{1}{2}n(m-1)m}{mn} \\ &= \frac{1}{2}(m-n). \end{aligned}$$

♣

4.5.7. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+13) - 4(x+1)}{x^2 - 9} \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)} \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Funkce

$$g(x) = \frac{-3}{x+3} \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}, \quad x \in (2, \infty),$$

je spojitá na intervalu $I = (2, \infty)$ z následujících důvodů. Funkce $x \mapsto x+13$, $x \mapsto x+1$ jsou spojitě na I dle Příkladu 4.2.6. Vzhledem k Příkladu ?? a Větě 4.3.3 jsou i funkce $x \mapsto \sqrt{x+13}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ spojitě na I . Dále jsou funkce $x \mapsto x+3$, $x \mapsto \sqrt{x+13}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ nenulové na I , a tedy je g , jakožto výsledek algebraických operací provedených na tyto funkce, spojitá na I dle Věty 4.2.5.

Proto máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{x+3} \frac{1}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-3}{6} \frac{1}{\sqrt{16} + 2\sqrt{4}} \\ &= \frac{-1}{16}. \end{aligned}$$

♣

4.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \\ &= \frac{1+x - (1-x)}{1+x - (1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}. \end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 a Příkladu ?? máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

♦

4.5.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2},$$

Řešení. Upravme nejprve výraz v čitateli zadané funkce. Použijeme vzorec pro $a^6 - b^6$, kde $a = \sqrt{x+2}$ a $b = \sqrt[3]{x+20}$. Označíme-li

$$g(x) = a^5 + a^4b + \dots + ab^4 + b^5,$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = 6 \cdot 3^5 \tag{4.19}$$

a

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20} &= \frac{(\sqrt{x+2})^6 - (\sqrt[3]{x+20})^6}{g(x)} \\ &= \frac{(x+2)^3 - (x+20)^2}{g(x)} \\ &= \frac{x^3 + 5x^2 - 28x - 392}{g(x)}. \end{aligned}$$

Polynom $x^3 + 5x^2 - 28x - 392$ má číslo 7 za kořen, a tedy ho lze vyjádřit ve tvaru $(x-7)P(x)$, kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Standardním algoritmem Příkladu ?? dostaneme

$$x^3 + 5x^2 - 28x - 392 = (x-7)(x^2 + 12x + 56). \tag{4.20}$$

Jmenovatele $\sqrt[4]{x+9} - 2$ upravíme pomocí vzorce $a^4 - b^4$ na

$$\sqrt[4]{x+9} - 2 = \frac{(x+9) - 2^4}{h(x)} = \frac{x-7}{h(x)},$$

kde $a = \sqrt[4]{x+9}$, $b = 2$ a

$$h(x) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow 7} h(x) = 4 \cdot 2^3. \quad (4.21)$$

Kombinací (4.19), (4.20) a (4.21) dostaneme pomocí Věty 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2 + 12x + 56)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{x-7} \\ &= \frac{(7^2 + 12 \cdot 7 + 56)(4 \cdot 2^3)}{6 \cdot 3^5} \\ &= \frac{189 \cdot 4 \cdot 2^3}{6 \cdot 3^5}. \end{aligned}$$

♣

4.5.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

Řešení. Označme $a = \sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}}$ a $b = \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}$. Pak

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{a^{12} - b^{12}}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j} b^j} = \frac{(1 + \frac{x}{3})^4 - (1 + \frac{x}{4})^3}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j} b^j} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j} b^j} \left(\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{x}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j} b^j} \left(x \left(\binom{4}{1} - \binom{3}{1} \right) + x^2 P(x) \right), \end{aligned}$$

kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Dále

$$1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1 - (1 - \frac{x}{2})}{1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

Tedy

$$\frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{11} (\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}})^{11-j} (\sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}})^j} \cdot \left(x \left(\binom{4}{1} - \binom{3}{1} \right) + x^2 P(x) \right) \cdot \frac{2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right)}{x}.$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 a spojitosti odmocniny (Příklad ??) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}} = \frac{2 \cdot 2 \left(\binom{4}{1} - \binom{3}{1} \right)}{12} = \frac{1}{3}.$$

♣

4.5.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

Řešení. Odhadneme, že převládající výraz čitatele i jmenovatele zadané funkce je \sqrt{x} . Proto provedeme úpravu

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} &= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}. \end{aligned}$$

Nyní již snadno odvodíme pomocí Věty 4.2.2 a Příkladu ??, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} = 1.$$

♣

4.5.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \right).$$

Řešení. Postupně upravíme výraz $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ na

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} &= \frac{x+2 - (x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{x - (x+1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})}. \end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) &= \frac{-2}{(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}})} \\ &= \frac{-2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

♣

4.5.13. Příklad. Necht' reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ splňují

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b = 0.$$

Najděte a a b .

Řešení. Všimněme si, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x + 1 = \infty$, tedy je funkce $\sqrt{x^2 - x + 1}$ dobře definovaná na nějakém okolí $P_+(-\infty, \delta)$. Uvažujme v dalším tuto funkci na $P_+(-\infty, \delta)$. Dle předpokladu máme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b}{x} + a + \frac{b}{x} \right) = a.$$

Jelikož $x = -\sqrt{x^2}$ pro x záporné, dostáváme

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -1. \end{aligned}$$

Dále platí z předpokladu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) + b = b,$$

tedy

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{-1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♣

4.5.14. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 5}] + x}{\sqrt{x^2 + 1} + [3x]}.$$

Řešení. Protože $[x] \leq x < [x] + 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme odhady

$$\frac{\sqrt{x^2 + 5} + x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 3x} \leq \frac{[\sqrt{x^2 + 5}] + x}{\sqrt{x^2 + 1} + [3x]} \leq \frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + 3x - 1} \quad (4.22)$$

platné pro každé reálné číslo $x > 1$. Označme pro $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} + x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 3x} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + 3x - 1}.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3} = \frac{1}{2} \quad (4.23)$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \quad (4.24)$$

Označíme-li

$$h(x) = \frac{[\sqrt{x^2 + 5}] + x}{\sqrt{x^2 + 1} + [3x]}, \quad x \in (1, \infty),$$

dostáváme z (4.22) nerovnosti

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in (1, \infty).$$

Díky Větě 4.2.9(c) tak z (4.23) a (4.24) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{1}{2}.$$

♣

4.5.15. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

neexistuje.

Řešení. Předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je rovno $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Označme $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Uvažujme pro $n \in \mathbb{N}$ body

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_n = 2\pi n.$$

Pak $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti v definičním oboru funkce $\frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ konvergující k ∞ , a proto z Heineovy věty 4.2.17 plyne

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)(\sin x_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)(\sin y_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)(-1) = -1.$$

To je ale zřejmý spor, takže $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ neexistuje. ♣

Derivace a elementární funkce

Derivace reálné funkce jedné reálné proměnné je po pojmech limity posloupnosti a limity funkce dalším klíčovým pojmem matematické analýzy, který má široké uplatnění v matematických modelech problémů přírodních věd. V této kapitole odvodíme základní vlastnosti pojmu derivace a s jejich pomocí zavedeme základní (elementární) funkce, jako jsou exponenciální funkce, logaritmus, goniometrické funkce, cyklometrické funkce a další. Rozšíření našich poznatků o pojem derivace nám v závěru kapitoly umožní zkoumat některé hlubší důležité vlastnosti reálných funkcí a také studovat a popsat takzvaný průběh funkce. V příkladové části kapitoly se mimo jiné vrátíme k náročnějším úlohám nalezení limity posloupnosti či funkce pomocí nově osvojených technik založených na derivaci funkce a jejich aplikacích.

5.1. Základní vlastnosti derivace

5.1.1. Definice. Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (5.1)$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě a** a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě a** předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva a derivaci zprava často souhrnně nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

5.1.2. Poznámka. Při počítání derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace v bodě } a \left\{ \begin{array}{l} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je } \left\{ \begin{array}{l} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

5.1.3. Věta (jednoznačnost derivace). Jestliže existuje derivace funkce f v bodě a (vlastní či nevlastní), pak je určena jednoznačně.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z definice derivace a Věty 4.1.6 o jednoznačnosti limity funkce. ■

Pro výpočet derivace funkce v bodě je často výhodné použít místo vzorce (5.1) jiný vzorec, který uvedeme v následující větě.

5.1.4. Věta (alternativní vzorec pro výpočet derivace). Necht' $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom platí

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl. Obdobně platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

vždy má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $f'(a)$. Označme

$$F(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pro h z nějakého okolí nuly a

$$g(x) = x - a$$

pro x z nějakého okolí bodu a . Potom platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = f'(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Navíc je funkce g na okolí bodu a ryze monotónní, a tedy prostá, takže pro každé $x \neq a$ platí $g(x) \neq 0$. To znamená, že je splněna podmínka (P) věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.21), a tedy podle této věty dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow a} F(g(x)) = f'(a).$$

Protože $F(g(x)) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, plyne odtud

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Obráceně, předpokládejme, že existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Označme tuto limitu symbolem L . Položme

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pro x z nějakého okolí bodu a a

$$g(h) = h + a$$

pro h z nějakého okolí nuly. Potom platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = a \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = L.$$

Navíc je funkce g na okolí bodu 0 ryze monotónní, a tedy prostá, takže pro každé $h \neq 0$ platí $g(h) \neq a$. Tudíž je opět splněna podmínka (P) věty o limitě složené funkce, a tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(g(h)) = L.$$

Protože $F(g(h)) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, plyne odtud

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L,$$

tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Tím je dokázáno tvrzení pro $f'(a)$. Tvrzení týkající se $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ lze dokázat obdobně. ■

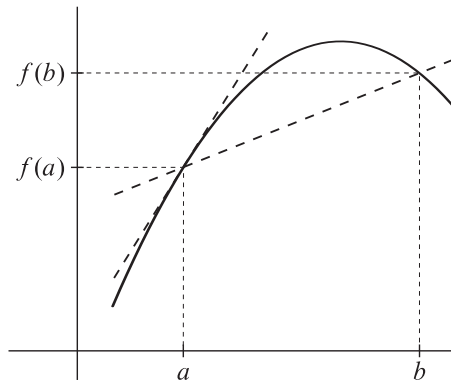
5.1.5. Věta (vztah derivace a jednostranných derivací). Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$. Navíc potom platí $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z definice derivace, definice jednostranných derivací a Věty 4.1.16. ■

5.1.6. Poznámky. (a) Z existence $f'(a)$ (vlastní nebo nevlastní) plyne, že existuje okolí bodu a , na němž je funkce f definovaná. Podobně existence $f'_+(a)$ (opět vlastní nebo nevlastní) zaručuje existenci $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, splňujícího $B_+(a, \delta) \subset \mathcal{D}(f)$. Obdobné tvrzení platí pro derivaci zleva.

(b) Derivace reálné funkce v bodě je „lokální pojem“. To znamená, že jestliže se funkce f a g shodují na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$, pak existuje i $g'(a)$ a platí $f'(a) = g'(a)$.

5.1.7. Geometricky lze pojem derivace interpretovat následujícím způsobem.



OBRÁZEK 1.

Podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je směrnici sečny grafu funkce, tj. přímky, která prochází body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$. Přibližujeme-li bod b k bodu a , pak se tato přímka přibližuje k přímce procházející bodem $[a, f(a)]$ se směrnici $f'(a)$ (pokud $f'(a)$ existuje vlastní).

5.1.8. Definice. Necht f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní $f'(a)$, pak **tečnou ke grafu funkce f v bodě a** nazýváme afinní funkci

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.1.9. Poznámka. Má-li funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ na množině $M \subset \mathbb{R}$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in M$, pak zobrazení $f': M \rightarrow \mathbb{R}$, které přiřadí bodu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$, je reálnou funkcí definovanou na množině M .

5.1.10. Definice. Necht f je reálná funkce. Potom **definičním oborem funkce f'** budeme rozumět množinu všech $x \in \mathcal{D}(f)$, pro která existuje vlastní $f'(x)$.

5.1.11. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}$ a $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = 0$.

Řešení. Necht $a \in \mathbb{R}$. Podle Věty 5.1.4 platí

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0. \quad \clubsuit$$

5.1.12. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. Necht $a \in \mathbb{R}$. Pak podle Příkladu 1.5.6 a Věty 5.1.4 platí

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z věty o aritmetice limit funkcí (Věta 4.2.2) a ze spojitosti mocninných funkcí (Příklad 4.2.6). \clubsuit

5.1.13. Příklad. Necht $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že derivace funkce f v bodě 0 neexistuje, existují však jednostranné derivace funkce f v bodě 0 a platí $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Řešení. Podle definice jednostranných derivací máme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

Protože se jednostranné derivace funkce f v bodě 0 nerovnaj, vyplývá z Věty 5.1.5, že $f'(0)$ neexistuje. \clubsuit

Na následujícím příkladu ilustrujeme důležitý poznatek, že reálná funkce může mít derivaci v bodě, ve kterém není spojitá.

5.1.14. Příklad. Necht $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f'(0) = \infty$.

Řešení. Podle Věty 5.1.4 máme

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = \infty.$$

Z Věty 5.1.5 tedy vyplývá, že $f'(0) = \infty$. ♣

Ukázali jsme, že existence (nevládní) derivace funkce f v bodě a nezaručuje její spojitost v a . Jestliže však má f vlastní derivaci v a , pak je již v tomto bodě spojitá.

5.1.15. Věta (vztah derivace a spojitosti). Necht funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Podle Věty 5.1.4 a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.2) platí

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

neboť $f'(a)$ existuje vlastní. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

neboli f je v bodě a spojitá. ■

5.1.16. Poznámka. Tvrzení obdobné Věte 5.1.15 platí i pro jednostranné derivace. Přesněji: existuje-li vlastní $f'_+(a)$, pak funkce f je spojitá zprava v bodě a a existuje-li vlastní $f'_-(a)$, pak funkce f je spojitá zleva v bodě a .

5.1.17. Věta (aritmetika derivací). Necht $a \in \mathbb{R}$ a funkce f a g jsou definované na nějakém okolí bodu a . Necht existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Pak platí

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f , g spojitá v bodě a , pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. (a) Je-li výraz $f'(a) + g'(a)$ definován, pak podle definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.2) máme

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(a+h) - g(a)) \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že je výraz $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ definován. Dále předpokládejme například, že funkce g je spojitá v bodě a . Potom

$$\lim_{h \rightarrow 0} (g(a+h) - g(a)) = 0.$$

Díky této rovnosti dostaneme pomocí definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((f(a+h) - f(a))g(a+h) + f(a)(g(a+h) - g(a))) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((f(a+h) - f(a))g(a+h)) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a)(g(a+h) - g(a))) \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(c) Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že funkce g je na okolí $B(a, \delta)$ nenulová. Pak pro $x \in B(a, \delta)$ můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\ &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)} ((f(x) - f(a))g(a) - f(a)(g(x) - g(a))).\end{aligned}$$

Potom podle Věty 5.1.4 dostáváme

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(a) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right) \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme využili větu o aritmetice limit pro funkce a vztah

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a),$$

který vyplývá ze spojitosti funkce g v bodě a . ■

5.1.18. Poznámka. Tvrzení Věty 5.1.17 platí obdobně i pro jednostranné derivace.

5.1.19. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Vzorec plyne z Příkladů 5.1.11, 5.1.12 a Věty 5.1.17(a). ♣

Na následujících příkladech ukážeme, že předpoklady Věty 5.1.17 jsou podstatné a není možné je vynechat.

5.1.20. Příklad. Definujme funkce f a g proměnné $x \in \mathbb{R}$ předpisy

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f + g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.1.14 spočteme, že $f'(0) = \infty$ a $g'(0) = -\infty$. Dále platí

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

Opět snadno vypočítáme, že $(f + g)'_+(0) = \infty$ a $(f + g)'_-(0) = -\infty$. Tedy podle Věty 5.1.5 $(f + g)'(0)$ neexistuje. ♣

Předcházející příklad ukazuje, že z existence derivací funkcí f a g v bodě a obecně neplyne existence derivace funkce $f + g$ v bodě a . Funkce uvedené v tomto příkladu ovšem nespĺňují podmínku Věty 5.1.17(a), totiž že výraz $f'(a) + g'(a)$ má mít smysl.

Následující příklad ilustruje důležitost předpokladu spojitosti alespoň jedné z uvažovaných funkcí ve Větě 5.1.17(b).

5.1.21. Příklad. Necht funkce f a g jsou definovány stejně jako v Příkladu 5.1.20. Dokažte, že výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale přesto $(fg)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Vynásobíme-li funkce f a g , dostaneme

$$(fg)(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v Příkladu 5.1.20 odvodíme, že derivace $(fg)'(0)$ neexistuje. Výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ však smysl má, protože

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = \infty \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-\infty) = \infty.$$

Také ve Větě 5.1.17(c) je předpoklad spojitosti funkce g podstatný, jak ukazuje následující příklad.

5.1.22. Příklad. Necht $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ a necht funkce g je definována předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl, přesto ale $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje.

Řešení. Jest

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-g'(0)}{g^2(0)} = \frac{\infty}{\frac{1}{4}} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl. Dále

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_+(0) = -\infty$$

a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_-(0) = \infty.$$

Podle Věty 5.1.5 tedy $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.23. Věta (derivace složené funkce). Necht funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Necht funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a), \quad (5.2)$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Díky existenci derivace $f'(b)$ nalezneme $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, takové, že funkce f je definována na $B(b, \sigma)$ (Poznámka 5.1.6(a)). Protože g je spojitá v a , existuje $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, takové, že $g(B(a, \varrho)) \subset B(b, \sigma)$ (Definice 4.1.19). Funkce $f \circ g$ je tedy dobře definována na okolí $B(a, \varrho)$.

Předpokládejme nejprve, že platí $g'(a) \neq 0$. Pak existuje $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ takové, že pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0. \quad (5.3)$$

Označme

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in P(b, \sigma).$$

Nyní použijeme Větu 4.2.21(P) pro složení vnější funkce φ s vnitřní funkcí g , přičemž podmínka (P) je splněna díky (5.3). Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} (\varphi \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = f'(b).$$

Pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí $g(x) \neq g(a)$, a tedy také

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Odtud podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b)g'(a). \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že $g'(a) = 0$. Protože výraz na pravé straně (5.2) je definován, je $f'(b)$ vlastní. Důkaz vztahu (5.2) v tomto případě znamená dokázat rovnost

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0. \quad (5.4)$$

Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky Větě 4.2.9 nalezneme $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, a $\tilde{\sigma} \in (0, \sigma)$ taková, že platí

$$\forall y \in P(b, \tilde{\sigma}): \left| \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \right| < C. \quad (5.5)$$

Z definice derivace nalezneme $\tilde{\varrho}_1 \in (0, \varrho)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho}_1): \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < \varepsilon. \quad (5.6)$$

Díky spojitosti g v bodě a existuje $\tilde{\varrho}_2 \in (0, \varrho)$ takové, že platí

$$\forall x \in B(a, \tilde{\varrho}_2): g(x) \in B(b, \tilde{\sigma}). \quad (5.7)$$

Položme $\tilde{\varrho} = \min\{\tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_2\}$. Vezměme libovolné $x \in P(a, \tilde{\varrho})$. Pokud $g(x) = g(a)$, pak

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0.$$

Pokud $g(x) \neq g(a)$, pak díky (5.5), (5.6) a (5.7) dostáváme

$$\begin{aligned} \left| \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \right| &= \left| \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \right| \cdot \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| \\ &< C\varepsilon. \end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy ukázali, že pro $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\left| \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \right| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.1.24. Poznámka. Ve Větě 5.1.23 je předpoklad spojitosti funkce g v bodě a automaticky splněn, je-li $g'(a)$ vlastní, jak plyne z Věty 5.1.15.

Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.1.23 nelze obecně vynechat, jak ukazuje následující příklad.

5.1.25. Příklad. Necht funkce f a g jsou definovány pomocí předpisů

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz $f'(g(0))g'(0)$ má smysl, ale přesto $(f \circ g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Podobně jako v Příkladu 5.1.14 odvodíme, že $g'(0) = \infty$. Dále zřejmě platí $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. Výraz

$$f'(g(0))g'(0) = f'(-\frac{1}{2}) \cdot g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty$$

tedy má smysl. Dále platí

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(f \circ g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.26. Věta (derivace inverzní funkce). Necht I je nedegenerovaný interval a necht a je vnitřním bodem I . Necht f je spojitá a ryze monotónní funkce na I . Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I , pak

$$(f^{-1})'(b) = \infty.$$

(c) Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I , pak

$$(f^{-1})'(b) = -\infty.$$

Důkaz. (a) Předpokládejme, že funkce f je na intervalu I rostoucí. Z Věty 4.3.6 vyplývá, že množina $J = f(I)$ je interval. Dle Věty 4.3.13 navíc víme, že inverzní funkce $f^{-1}: J \rightarrow I$ je spojitá a rostoucí. Protože a je vnitřním bodem I a f je rostoucí, je také b vnitřním bodem J . Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(b, \varepsilon) \subset J$. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I víme, že existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $B(a, \delta) \subset I$. Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že toto δ lze zvolit tak, aby $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a, \delta). \quad (5.8)$$

Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a). \quad (5.9)$$

Protože je f^{-1} rostoucí, můžeme použít Větu 4.2.21(P) pro složení vnitřní funkce f^{-1} s vnější funkcí φ a odvodit z (5.9)

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y \rightarrow b} (\varphi \circ f^{-1})(y) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a). \quad (5.10)$$

(a) Zde předpokládáme $f'(a) \neq 0$, takže z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) a (5.10) dostáváme

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Nyní předpokládáme, že platí $f'(a) = 0$. Podle (5.10) máme

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = 0. \quad (5.11)$$

Funkce

$$\psi(y) = \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}, \quad y \in P(b, \varepsilon),$$

je na okolí $P(b, \varepsilon)$ kladná, neboť funkce f^{-1} je rostoucí na J . Věta 4.2.7 pak dává

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\psi(y)} = \infty.$$

Pokud je funkce f klesající, pak lze tvrzení dokázat obdobně. ■

5.1.27. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in (0, \infty)$. Dokažte, že

$$g'(b) = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}, \quad b \in (0, \infty).$$

Řešení. Definujeme funkci f předpisem

$$f(x) = x^n, \quad x \in (0, \infty),$$

a označíme $I = J = (0, \infty)$. Potom $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow I$ a funkce f a g jsou navzájem inverzní. Necht $b \in J$. Označme $a = g(b)$, neboli $a = \sqrt[n]{b}$. Pak podle Věty 5.1.26(a) a Příkladů 5.1.12 a 5.1.11 máme

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{a}{na^n} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

♣

5.1.28. Poznámka. Není těžké ověřit, že je-li $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in [0, \infty)$, pak $g'_+(0) = \infty$.

5.1.29. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je liché a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in \mathbb{R}$. Pak

$$g'(b) = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}, & b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \infty, & b = 0. \end{cases}$$

Řešení. Definujeme funkci f předpisem

$$f(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

a označíme $I = J = (-\infty, \infty)$. Potom $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow I$ a funkce f a g jsou navzájem inverzní. Necht $b \in J$, $b \neq 0$, a $a = g(b)$. Pak podle Věty 5.1.26(a) a Příkladů 5.1.12 a 5.1.11 dostaneme obdobně jako v Příkladu 5.1.27

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

Je-li $b = 0$, pak $g'(0) = \infty$ podle Věty 5.1.26(b). ♣

5.1.30. Věta (nutná podmínka existence extrému). Necht f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f , potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a je různá od 0. Uvažujme nejprve případ $f'(a) > 0$. Dle Věty 4.2.9(a) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že pro $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(a) < f(x)$ a pro $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(a) > f(x)$. Tedy f nemá v a lokální extrém.

Obdobně lze odvodit, že funkce f nemá v a lokální extrém ani v případě, kdy $f'(a) < 0$. Tím je důkaz proveden. ■

5.1.31. Poznámka. Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nabývá svého (dokonce globálního) minima na \mathbb{R} v bodě 0, ale $f'(0)$ neexistuje.

5.2. Věty o střední hodnotě

5.2.1. Věta (Rolleova věta). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) , pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Věty 4.3.9 nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f([a, b])$ a $M = \max f([a, b])$. Pak

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M. \tag{5.12}$$

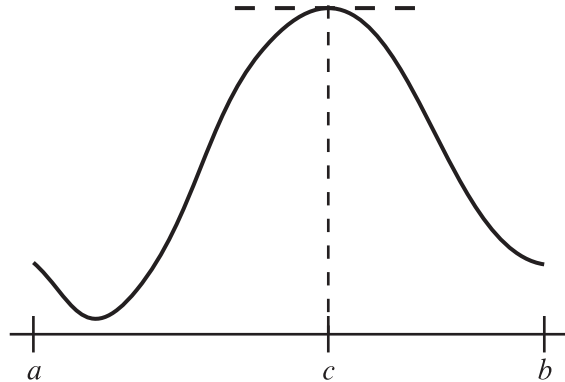
Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a, b]$. Z Příkladu 5.1.11 vyplývá, že $f'(c) = 0$ dokonce v každém bodě $c \in (a, b)$.

Nyní předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou nerovností v (5.12) ostrá. Necht například platí $f(b) < M$. Nalezneme $c \in [a, b]$

splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a, b\}$, a tedy $c \in (a, b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a, b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 5.1.30 platí $f'(c) = 0$.

Jestliže $m < f(a)$, pak lze postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Alternativně je také možné použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. Tím je důkaz hotov. ■

5.2.2. Poznámka. Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.1 tak, že za předpokladů věty graf funkce f obsahuje bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s osou x .



OBRÁZEK 2.

5.2.3. Poznámka. Ve Větě 5.2.1 nelze předpoklad o existenci derivace v bodech intervalu (a, b) vynechat. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, která je na intervalu $[-1, 1]$ spojitá, platí $f(-1) = f(1)$, ale nemá v žádném bodě intervalu $(-1, 1)$ nulovou derivaci.

5.2.4. Věta (Lagrangeova věta). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v převedení problému do situace, ve které bude možné použít Rolleovu větu (Věta 5.2.1). Definujme funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Pak g je spojitá podle Věty 4.2.5 a Příkladu 4.2.6. Přímočarý výpočet navíc dává $g(a) = g(b)$. Protože v každém bodě intervalu (a, b) má funkce

$$x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b],$$

vlastní derivaci (Příklad 5.1.12) a funkce f derivaci, existuje podle Věty 5.1.17(a) derivace g v každém bodě intervalu (a, b) . Díky Větě 5.2.1 tedy lze nalézt bod $c \in (a, b)$ splňující $g'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dostáváme

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy $f'(c)$ je vlastní, a $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

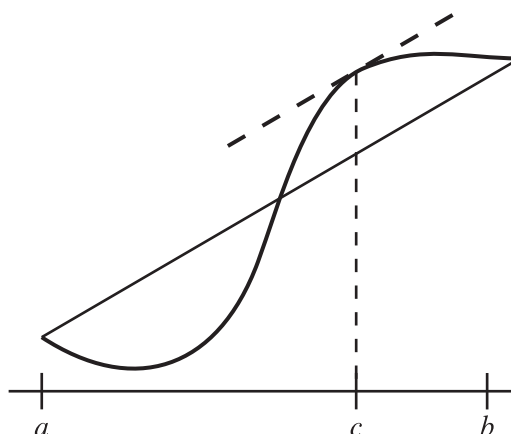
5.2.5. Poznámka. Za předpokladů Věty 5.2.4 můžeme přírůstek funkce f na intervalu $[a, b]$, který je roven $f(b) - f(a)$, vyjádřit takto:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

tedy jako součin přírůstku proměnné x a derivace v bodě c , o jehož poloze víme jen tolik, že patří do (a, b) .

Uvědomme si, že ani Věta 5.2.1 ani Věta 5.2.4 neříkají nic o tom, kolik bodů c s danou vlastností existuje. Říkají pouze, že takový bod je alespoň jeden.

Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.4 tak, že za uvedených předpokladů obsahuje graf funkce f bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s přímkou spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.



OBRÁZEK 3.

5.2.6. Věta. Necht I je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce mající v každém vnitřním bodě intervalu I nezápornou (respektive kladnou) derivaci. Pak f je neklesající (respektive rostoucí) na I .

Důkaz. Předpokládejme, že pro každý vnitřní bod x intervalu I platí $f'(x) \geq 0$. Necht $a, b \in I, a < b$. Pak $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu $[a, b]$. Dle Věty 5.2.4 existuje bod $c \in (a, b)$ splňující

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0,$$

což znamená $f(a) \leq f(b)$. Funkce f je tedy neklesající.

Případ, kdy má f kladnou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I , lze dokázat obdobně. ■

5.2.7. Poznámka. Předpoklad spojitosti lze ve Větě 5.2.6 vynechat, jak uvidíme ve Větě 5.4.7, jejíž důkaz je však o něco obtížnější.

5.2.8. Poznámka. Má-li funkce f ve Větě 5.2.6 derivaci nekladnou (respektive zápornou), aplikace Věty 5.2.6 na funkci $-f$ dává, že f je nerostoucí (respektive klesající).

5.2.9. Věta. Necht I je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce mající v každém vnitřním bodě intervalu I nulovou derivaci. Pak f je konstantní na I .

Důkaz. Podle Věty 5.2.6, jsou funkce f , $-f$ neklesající. Tedy funkce f je zároveň neklesající i nerostoucí na I , jinými slovy je konstantní. ■

5.2.10. Věta (o limitě derivací). Necht' reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Důkaz. Označme $L = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Necht' $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f' má konečné hodnoty na $P_+(a, \delta)$ a navíc pro každé $z \in P_+(a, \delta)$ platí

$$f'(z) \in B(L, \varepsilon). \quad (5.13)$$

Vezměme libovolné $x \in P_+(a, \delta)$. Pak $f: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, x) . Funkce f je spojitá na intervalu $[a, x]$, neboť spojitost v bodech intervalu $(a, x]$ plyne z Věty 5.1.15 a spojitost v a zprava předpokládáme. Dle Věty 5.2.4 existuje $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Protože $c_x \in P_+(a, \delta)$, z (5.13) máme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in B(L, \varepsilon).$$

Dokázali jsme tedy $f'_+(a) = L$ a důkaz je tak hotov. ■

5.2.11. Poznámka. Větu 5.2.10 lze zformulovat a dokázat pro derivaci zleva i pro oboustrannou derivaci.

5.2.12. Poznámka. Vynecháme-li ve Větě 5.2.10 předpoklad spojitosti, závěr přestane obecně platit. Vezmeme-li totiž do úvahy funkci $f(x) = \text{sign } x$, $x \in \mathbb{R}$, v bodě 0, pak $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 0 = 0$, ale $f'_+(0) = \infty$.

Stejně tak nemůžeme z neexistence limity $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ odvodit neexistenci $f'_+(a)$, viz Příklad 5.5.1.

5.2.13. Věta (Cauchyova věta). Necht' f a g jsou funkce spojitě na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, necht' f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a necht' g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (5.14)$$

Důkaz. Z Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) plyne existence bodu $d \in (a, b)$ takového, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Protože $g'(d) \neq 0$, dostáváme $g(b) - g(a) \neq 0$. Definujme funkci

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)), \quad x \in [a, b].$$

Pak je funkce φ podle Věty 4.2.5 spojitá na $[a, b]$ a v každém bodě intervalu (a, b) má derivaci (Věta 5.1.17), neboť funkce

$$x \mapsto (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci a funkce

$$x \mapsto (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$$

má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní derivaci. Navíc $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Z Věty 5.2.1 tedy plyne existence bodu $c \in (a, b)$, který splňuje $\varphi'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\varphi'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)),$$

dle Věty 5.1.17, dosazením $x = c$ máme

$$0 = \varphi'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)),$$

odkud elementární úpravou dostáváme (5.14). ■

5.3. l'Hospitalovo pravidlo

5.3.1. Věta (l'Hospitalovo pravidlo). Necht $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Jestliže navíc platí

- (a) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, nebo
- (b) $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.3.2. Poznámka. Věta 5.3.1 platí i pro limity zleva a oboustranné limity.

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.15)$$

Dokažme nejprve následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení.

- (i) Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje $\alpha > L$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

- (ii) Jestliže $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$, pak existuje $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta') : \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz pomocného tvrzení. (i) Zvolme $r \in (L, \alpha)$. Díky předpokladu existence limity v (5.15) nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \delta_1)$, f zde má vlastní derivaci, g zde má vlastní nenulovou derivaci a platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1) : \frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \quad (5.16)$$

Vezměme nyní libovolná $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) aplikované na f a g na intervalu $[x, y]$ existuje $c \in (x, y)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (5.17)$$

Pro každé $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$, tedy podle (5.16) a (5.17) platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r. \quad (5.18)$$

Předpokládejme, že platí podmínka (a). Potom pro pevné $y \in P_+(a, \delta_1)$ dostaneme podle (5.18)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha.$$

Stačí položit $\delta = \delta_1$ a za předpokladu platnosti podmínky (a) je pomocné tvrzení dokázáno.

Předpokládejme nyní, že platí podmínka (b). Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a, \delta_1)$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} = r + 0 = r < \alpha. \quad (5.19)$$

Existuje tedy $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) : r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha. \quad (5.20)$$

Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby platilo

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) : \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} < 1. \quad (5.21)$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x) - g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

S pomocí (5.20), (5.21) a (5.22) odhadneme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &< r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha.\end{aligned}$$

Položíme $\delta = \delta_2$ a pomocné tvrzení je dokázáno i za předpokladu platnosti podmínky (b).

(ii) Podle (5.15) platí $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-f(x)}{g(x)} = -L$. Předpokládejme, že $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$. Potom platí $-\beta > -L$. Již dokázanou část (i) použijeme pro $\alpha = -\beta$ a nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \frac{-f(x)}{g(x)} < -\beta.$$

Nyní stačí položit $\delta' = \delta$ a tvrzení je dokázáno. ■

Důkaz věty lze nyní již snadno dokončit. Pokud $L = -\infty$, respektive $L = \infty$, tvrzení věty plyne okamžitě z (i), respektive z (ii). Necht $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Použijeme (i) pro $\alpha = L + \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Dále použijeme (ii) pro $\beta = L - \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$. Pro každé $x \in P_+(a, \min\{\delta, \delta'\})$ dostaneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (\beta, \alpha) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = B(L, \varepsilon),$$

což dokazuje naši větu. ■

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.23)$$

Rozlišíme několik případů a pro každý z nich provedeme důkaz zvlášť.

Případ číslo 1. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$ a je splněna podmínka (a).

Díky předpokladu existence limity v (5.23) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}, \tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Definujme funkce

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P_+(a, \tilde{\delta}), \\ 0, & x = a, \end{cases} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in P_+(a, \tilde{\delta}), \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Pak \tilde{f} a \tilde{g} jsou spojité funkce na intervalu $[a, a + \tilde{\delta})$, neboť v bodech $z \in (a, a + \tilde{\delta})$ plyne spojitost z Věty 5.1.15 a spojitost zprava v bodě a plyne z podmínky (a).

Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Z definice limity nalezneme $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \frac{f'(x)}{g'(x)} \in B(L, \varepsilon).$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_+(a, \delta)$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) aplikované na \tilde{f} a \tilde{g} na intervalu $[a, x]$ existuje $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}.$$

Protože

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

a výraz na levé straně je dobře definován dle Věty 5.2.13, má i výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ smysl. Jelikož $c_x \in P_+(a, \delta)$, dostáváme dále

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)} \in B(L, \varepsilon).$$

Tedy platí $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Příklad číslo 2. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L \in \mathbb{R}$.

Mějme dáno $\varepsilon \in (0, 1)$. Díky předpokladu existence limity v (5.23) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby funkce g byla na $P_+(a, \tilde{\delta})$ nenulová. Díky (5.23) a předpokladu $L \in \mathbb{R}$ nalezneme $\delta_1 \in (0, \tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon. \quad (5.24)$$

Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a, \delta_1)$. Pomocí podmínky (b) nalezneme $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ splňující

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) : \left| \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} \right| < \varepsilon \ \& \ \left| \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \right| < \varepsilon. \quad (5.25)$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě (Věta 5.2.13) pro funkce f a g na intervalu $[x, \tilde{y}]$ a nalezneme $c_x \in (x, \tilde{y})$ splňující

$$\frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad (5.26)$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x) - g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} \right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Použijeme (5.26) a vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.\end{aligned}$$

Pomocí vztahů $\varepsilon \in (0, 1)$, (5.24), (5.25) a trojúhelníkové nerovnosti můžeme nyní odhadnout

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\leq \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| + \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\right| \\ &< \varepsilon + (|L| + \varepsilon) \cdot \varepsilon + \varepsilon = (|L| + 2 + \varepsilon)\varepsilon < (|L| + 3)\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz rovnosti $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ v tomto případě proveden.

Příklad číslo 3. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L = \infty$.

Mějme dáno $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$. Díky předpokladu existence limity v (5.23) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby funkce g byla na $P_+(a, \tilde{\delta})$ nenulová. Podle předpokladu $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ nalezneme $\delta_1 \in (0, \tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1) : \frac{f'(x)}{g'(x)} > 2K. \quad (5.28)$$

Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a, \delta_1)$. Pomocí podmínky (b) nalezneme $\delta_2 \in (0, \tilde{y} - a)$ splňující

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) : \left|\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right| < \frac{1}{4} \ \& \ \left|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\right| < \frac{K}{2}. \quad (5.29)$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Potom $x < \tilde{y}$. Použijeme Cauchyovu větu (Věta 5.2.13) pro funkce f a g na intervalu $[x, \tilde{y}]$ a nalezneme $c_x \in (x, \tilde{y})$ splňující

$$\frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad (5.30)$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.\end{aligned} \quad (5.31)$$

Díky (5.30) a (5.31) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\end{aligned} \quad (5.32)$$

Odtud pomocí (5.28) a (5.29) plyne

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 2K - 2K \cdot \frac{1}{4} - \frac{K}{2} = K.$$

Tím je důkaz vztahu $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ v tomto případě proveden.

Příklad číslo 4. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L = -\infty$.

Výsledek z předchozího případu aplikujeme na dvojici funkcí $-f$ a g a obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Platí tedy také

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Příklad číslo 5. Předpokládejme, že $a = -\infty$ a je splněna podmínka (a) nebo podmínka (b).

Funkce f a g jsou definovány na jistém okolí bodu $-\infty$. Proto jsou na jistém pravém okolí bodu 0 funkce F a G dobře definovány předpisem

$$F(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right), \quad G(x) = g\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Pak z Věty 4.2.21 dostáváme $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} G(x) = 0$, pokud je splněna podmínka (a), a $\lim_{x \rightarrow 0+} |G(x)| = \infty$, pokud je splněna podmínka (b). Dále platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right)x^{-2}}{g'\left(-\frac{1}{x}\right)x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right)}{g'\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L.$$

Nyní aplikujeme již dokázanou část l'Hospitalova pravidla na dvojici funkcí F a G v bodě 0 a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

což opětovným použitím Věty 4.2.21 dává

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{f\left(-\frac{1}{y}\right)}{g\left(-\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = L.$$

■

5.3.3. Příklad. Platí, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(x - \sin(x))' = 1 - \cos(x)$, $(x - \sin(x))'' = \sin(x)$ a $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3)'' = 6x$. Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}$, dostáváme použitím l'Hospitalova pravidla 5.3.1(a) rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Dalším použitím l'Hospitalova pravidla 5.3.1(a) obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

♣

5.3.4. Příklad. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, platí vztahy $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^\alpha = 0$.

Řešení. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo 5.3.1(b) a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

Pro výpočet druhé limity nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $\alpha < n$. Pak n -násobné užití Věty 5.3.1(b) dává

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Protože $0 \leq e^{-x} x^\alpha \leq e^{-x} x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, platí $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^\alpha = 0$ dle Věty 4.2.9(c). ♣

5.3.5. Poznámka. Obecně není pravda, že z existence $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ můžeme něco usoudit o $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Například platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + \frac{\sin(x)}{x}} = -\infty,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1 + \cos(x)}$$

neexistuje, neboť funkce $x \mapsto \frac{2x}{1 + \cos(x)}$ není definována na žádném okolí bodu $-\infty$.

5.3.6. Poznámka. l'Hospitalovo pravidlo není vždy vhodným nástrojem pro výpočet limity. Přímočaré použití l'Hospitalova pravidla pro limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

vede k limitě

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Výpočet poslední limity není však snazší než výpočet původní limity.

5.3.7. Poznámka. Uvažujme

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \quad \text{a} \quad g(x) = f(x)e^{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sin(x)}} \quad (5.33)$$

neexistuje. Na druhou stranu, počítáme-li pomocí l'Hospitalova pravidla (Věta 5.3.1), dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)e^{\sin(x)} + f(x)e^{\sin(x)} \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}(\cos(x) + f(x))} = 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

což nesouhlasí s (5.33). Chybné použití l'Hospitalova pravidla spočívá v tom, že výraz $\frac{f'}{g'}$ není definovaný na žádném okolí ∞ , tj. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ z definice neexistuje. Druhá rovnost ve výpočtu (5.34) je tedy chybná.

5.4. Monotónní a konvexní funkce

5.4.1. Definice. Necht f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je

- **rostoucí v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) < f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$,
- **klesající v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) < f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$,
- **neklesající v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \leq f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) \geq f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$,
- **nerostoucí v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \geq f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) \leq f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$.

Podobně definujeme, že funkce f je **rostoucí v a zprava** apod.

5.4.2. Poznámka. Je-li funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ rostoucí na intervalu I , pak je zřejmě rostoucí v každém vnitřním bodě intervalu I a rostoucí zprava či zleva v eventuálních krajních bodech intervalu I .

5.4.3. Věta. Má-li reálná funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ kladnou (respektive zápornou) derivaci zprava, pak je v tomto bodě rostoucí (respektive klesající) zprava.

Důkaz. Předpokládejme, že $f'_+(a) > 0$, tj. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Dle Věty 4.2.9(i) existuje takové $\delta > 0$, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \quad x \in P_+(a, \delta).$$

Pak zřejmě platí $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$, tj. f je rostoucí zprava v a .

Obdobně lze dokázat tvrzení i v případě $f'_+(a) < 0$. ■

5.4.4. Poznámka. Obdobné tvrzení platí pro derivaci zleva a oboustrannou derivaci.

5.4.5. Poznámka. Je-li reálná funkce g rostoucí v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak obecně nemusí existovat $\delta > 0$ takové, že g je monotónní na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$. Stačí vzít $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde f je funkce z Příkladu 5.5.2, a položit $a = 0$. Potom $g'(x) = 1 + f'(x)$ platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále $g'(0) = 1$, a tedy g je rostoucí v 0. Funkce f' není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0, a proto v každém okolí bodu 0 funkce g' nabývá kladných i záporných hodnot. Předpokládejme nejprve, že g je neklesající na jistém okolí $B(0, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom pro každé $x, y \in B(0, \delta)$, $x \neq y$, platí

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \geq 0.$$

Díky větě o srovnání (Věta 4.2.9(b)) dostáváme, že $g'(y) \geq 0$ pro každé $y \in B(0, \delta)$, což je spor. Obdobný spor obdržíme, pokud předpokládáme, že g je nerostoucí na jistém okolí bodu 0.

5.4.6. Věta. Necht $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ roste (respektive neklesá) v každém bodě intervalu I (v případných krajních bodech I uvažujeme příslušné jednostranné varianty). Pak f roste (respektive neklesá) na I .

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí v každém bodě intervalu I , a uvažujme libovolné body $a, b \in I$, $a < b$. Chceme dokázat, že $f(a) < f(b)$. Definujme $M = \{c \in (a, b]; f(c) > f(a)\}$. Pak M je shora omezená množina, neboť b je horní závorou M . Funkce f je rostoucí zprava v bodě a , a proto existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta_1)$. Pak $(a, b] \cap P_+(a, \delta_1) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$. Položme $s = \sup M$. Pak zřejmě $a < s \leq b$. Nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že $f(x) < f(s)$ pro všechna $x \in P_-(s, \delta_2)$. Z definice suprema existuje $t_1 \in M \cap P_-(s, \delta_2)$, pro které tedy platí $f(a) < f(t_1) < f(s)$. Proto dostáváme $s \in M$.

Dokážeme nyní, že $s = b$. Kdyby totiž platilo $s < b$, našli bychom $\delta_3 \in \mathbb{R}$, $\delta_3 > 0$, takové, že $f(x) > f(s)$ pro všechna $x \in P_+(s, \delta_3)$. Pak tedy libovolné $t_2 \in P_+(s, \delta_3) \cap (s, b)$ splňuje $f(a) < f(s) < f(t_2)$, což znamená $t_2 \in M$. To je ale spor s faktem $s = \sup M$. Tím je rovnost $s = b$ dokázána, a tedy díky $s \in M$ máme $f(b) = f(s) > f(a)$. Tím je důkaz nerovnosti $f(a) < f(b)$ proveden.

Předpokládejme nyní, že f je neklesající v každém bodě I . Mějme dány body $a < b$ z intervalu I a zvolme pevné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Funkce $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, $x \in I$, je rostoucí v každém bodě I , tedy dle první části důkazu platí $f(a) + \varepsilon a = g(a) < g(b) = f(b) + \varepsilon b$. Jelikož ε je libovolné, platí $f(a) \leq f(b)$. Tím je důkaz dokončen. ■

5.4.7. Věta. Necht $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má v každém bodě I kladnou (respektive nezápornou, zápornou, nekladnou) derivaci (v případných krajních bodech I uvažujeme jednostranné derivace). Pak f roste (respektive neklesá, klesá, neroste) na I .

Důkaz. Má-li funkce v každém bodě intervalu I kladnou derivaci, je v každém bodě I rostoucí podle Věty 5.4.3. Z Věty 5.4.6 pak plyne, že f je rostoucí na I .

Ostatní případy jsou obdobné. ■

5.4.8. Definice. Necht' I je interval a necht' f je reálná funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je

- **konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

5.4.9. Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu). Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval a necht' $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) f je konvexní na I ,

(ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 : \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$

(iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$

Obdobné charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$. Položme $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. Pak platí $\lambda \in (0, 1)$ a $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Označme $c = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3)$. Přímocharým výpočtem pak obdržíme

$$\frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_3) - c}{x_3 - x_2}. \quad (5.35)$$

Pokud platí $f(x_2) \leq c$, pak pomocí (5.35) dostáváme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad (5.36)$$

Pokud platí jedna z nerovností v (5.36) nebo nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

pak podle (5.35) platí nerovnost $f(x_2) \leq c$.

(i) \Rightarrow (ii) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$. Při označení z předchozího odstavce dostaneme $f(x_2) \leq c$, neboť f je konvexní. Pak podle (5.35) dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) \Rightarrow (i) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, a c je definováno stejně jako v úvodním odstavci. Potom podle předpokladu platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

takže $c \geq f(x_2)$. Tím je podmínka z definice konvexity ověřena.

Ekvivalenci (i) \Leftrightarrow (iii) a (i) \Leftrightarrow (iv) lze pomocí úvah prvního odstavce ověřit obdobně. ■

5.4.10. Věta (vztah konvexity a existence jednostranných derivací). Necht f je funkce konvexní na intervalu I a necht $a \in \text{Int } I$. Potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$. Navíc platí $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.

Důkaz. Necht $a \in \text{Int } I$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující $B(a, \delta) \subset I$ a definujeme funkce

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \in P_+(a, \delta), \\ \psi(y) &= \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, & y \in P_-(a, \delta). \end{aligned}$$

Pro body $y_1, y_2, x_1, x_2 \in P(a, \delta)$ splňující $y_2 < y_1 < a < x_1 < x_2$ dostáváme z Lemmatu 5.4.9

$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \varphi(x_2)$$

a

$$\psi(y_2) = \frac{f(y_2) - f(a)}{y_2 - a} \leq \frac{f(y_1) - f(a)}{y_1 - a} = \psi(y_1).$$

Tedy φ je neklesající na $P_+(a, \delta)$ a ψ je neklesající na $P_-(a, \delta)$. Z Lemmatu 5.4.9 dále pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ a $y \in P_-(a, \delta)$ plyne

$$\psi(y) = \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x). \quad (5.37)$$

Tedy φ je zdola omezená na $P_+(a, \delta)$ a ψ je shora omezená na $P_-(a, \delta)$.

Z Věty 4.2.26 plyne, že

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x)$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{y \rightarrow a^-} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = \lim_{y \rightarrow a^-} \psi(y)$$

existují vlastní.

Navíc z (5.37) a Věty 4.2.26 plyne pro každé $x \in P_+(a, \delta)$

$$f'_-(a) = \lim_{y \rightarrow a^-} \psi(y) \leq \varphi(x).$$

Po dalším použití Věty 4.2.26 dostáváme

$$f'_-(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = f'_+(a).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.4.11. Poznámky. (a) Jednostranné derivace konvexní funkce f na intervalu I se nemusí v bodě $a \in \text{Int } I$ rovnat, a nemusí tedy existovat $f'(a)$. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $x = 0$.

(b) Podobně jako v důkazu Věty 5.4.10 lze odvodit existenci jednostranných derivací konvexní funkce v krajních bodech definičního intervalu. Tyto derivace ale mohou být nevlastní, např. funkce sign uvažovaná na intervalu $[-1, 0]$.

5.4.12. Věta (vztah konvexity a spojitosti). Konvexní funkce na intervalu je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu.

Důkaz. Je-li $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní na intervalu I a $a \in \text{Int } I$, pak obě jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ existují vlastně. Podle Věty 5.1.15 a Poznámky 5.1.16, f je spojitá zleva i zprava v a , tedy je spojitá v a . ■

5.4.13. Poznámka. Funkce sign , která je na intervalu $(-1, 0]$ konvexní, není spojitá v bodě 0. Z konvexity funkce f tedy nevyplývá spojitost ve všech bodech intervalu I , na němž je funkce f definována.

5.4.14. Věta (vztah druhé derivace a konvexity či konkávnosti). Necht f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a necht má f na $\text{Int } I$ spojitou první derivaci. Jestliže je f' rostoucí na $\text{Int } I$, pak f je ryze konvexní na I .

Speciálně, je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \text{Int } I$, pak f je ryze konvexní na I .

Důkaz. Předpokládejme, že f' je rostoucí funkce na $\text{Int } I$, kde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Vezměme libovolné body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I . Díky Lagrangeově větě 5.2.4 existují body $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ splňující

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d).$$

Z předpokladu tedy obdržíme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dle Lemmatu 5.4.9 je tedy f ryze konvexní.

Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \text{Int } I$, je f' rostoucí na $\text{Int } I$ (Věta 5.4.7), a tedy f je ryze konvexní díky první části důkazu. ■

5.4.15. Poznámka. Obdobná tvrzení platí pro konvexitu, ryzí konkávnost a konkávnost.

5.4.16. Příklad. Dokažte, že pro každé $h \in [0, \frac{\pi}{2}]$ platí $\sin h \geq \frac{2}{\pi}h$.

Řešení. Funkce sinus má druhou derivaci rovnou funkci $-\sin$, která je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ menší nebo rovna 0. Funkce sinus je tedy na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ konkávní. Pro $h \in [0, \frac{\pi}{2}]$ položme $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ a $\lambda = \frac{2}{\pi}h$. Podle definice konkávní funkce platí

$$\sin h = \sin(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \sin x + (1 - \lambda) \sin y = \lambda = \frac{2}{\pi}h.$$

♣

5.4.17. Definice. Necht f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** (neboli že a je **inflexním bodem** funkce f), jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že buď

$$\forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a}$$

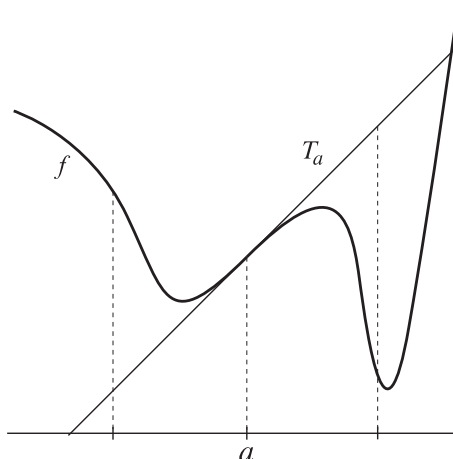
$$\forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) < f(a) + f'(a)(x - a).$$

nebo

$$\forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a}$$

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

Následující obrázek ilustruje právě definovaný pojem inflexního bodu.



OBRÁZEK 4.

5.4.18. Věta (nutná podmínka pro inflexi). Necht f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f''(a)$ a je různá od nuly, pak a není inflexním bodem funkce f .

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f''(a) > 0$. Z definice limity najdeme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Dostáváme tedy, že

$$\begin{aligned} \forall x \in P_-(a, \delta) : f'(x) < f'(a) \quad \text{a} \\ \forall x \in P_+(a, \delta) : f'(x) > f'(a). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_-(a, \delta)$. Protože f je spojitá na $B(a, \delta)$ dle Věty 5.1.15, pomocí Lagrangeovy věty 5.2.4 najdeme $c_x \in (x, a)$ splňující

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(c_x).$$

Protože $f'(c_x) < f'(a)$ z (5.38), máme $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a)$. Úpravou dostáváme $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$.

Je-li $x \in P_+(a, \delta)$, jako výše nalezneme $d_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(d_x) > f'(a).$$

Tedy máme $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$. Jinými slovy, bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou f v bodě a na levém i pravém okolí a . Tedy a není inflexním bodem f . Obdobně bychom postupovali v případě $f''(a) < 0$. ■

5.4.19. Poznámka. Rovnost $f''(a) = 0$ ještě nezaručuje, že a je inflexním bodem f . Příkladem je funkce $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f''(0) = 0$, ale bod 0 není inflexním bodem f , protože graf funkce f leží nad tečnou v bodě 0.

5.4.20. Věta (postačující podmínka pro inflexi). Necht' f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $c \in (a, b)$. Předpokládejme, že

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) < 0$$

nebo

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) < 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem f .

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že pro f platí první varianta, tj.

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) < 0.$$

Z Věty 5.2.6 plyne, že f' je rostoucí na $(a, c]$ a je klesající na $[c, b)$. Pro dané $x \in (a, c)$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení $c_x \in (x, c)$ splňujícího

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c_x) < f'(c).$$

Tedy $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$.

Podobně pro $x \in (c, b)$ najdeme $d_x \in (c, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(d_x) < f'(c).$$

Úpravou obdržíme $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c)$. Tedy c splňuje první variantu v Definicí 5.4.17, tj. c je inflexním bodem f .

Obdobně bychom ověřili, že funkce s vlastností

$$\forall x \in (a, c) : f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b) : f''(x) > 0.$$

splňuje v c druhou variantu definice inflexního bodu. Tím je důkaz dokončen. ■

5.4.21. Příklad. Necht funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^5 (2 + \sin(\frac{1}{x})), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak f má v 0 inflexi, ale neexistuje okolí 0, kde by byly splněny předpoklady Věty 5.4.20.

Řešení. Protože $f'(0) = 0$ (viz výpočet v Příkladu 5.5.1), tečna funkce f v bodě 0 je dána jako

$$t(x) = f(0) + f'(0)x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je-li $x < 0$, pak $f(x) < 0 = t(x)$, pro $x > 0$ máme $f(x) > 0 = t(x)$. Tedy f má v 0 inflexní bod.

Na druhou stranu,

$$f'(x) = \begin{cases} 10x^4 + 5x^4 \sin(\frac{1}{x}) - x^3 \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

a

$$f''(x) = \begin{cases} x(20x^2(2 + \sin(\frac{1}{x})) + 2x \cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x})), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Označíme-li

$$g(x) = 20x^2(2 + \sin(\frac{1}{x})) + 2x \cos(\frac{1}{x}), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pak $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ dle Věty 4.2.15. Tedy výraz $g(x) - \sin(\frac{1}{x})$ nabývá kladných i záporných hodnot na libovolném okolí 0. Protože

$$f''(x) = x(g(x) - \sin(\frac{1}{x})), \quad x \neq 0,$$

nabývá druhá derivace f kladné i záporné hodnoty na libovolném okolí bodu 0. \clubsuit

5.4.22. Definice. Necht f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞ . Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0. \quad (5.39)$$

Obdobně definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

5.4.23. Věta (tvar asymptoty). Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}. \quad (5.40)$$

Obdobně tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme nejprve, že funkce $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce $f \in \infty$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak plyne z předpokladu a Věty 4.2.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{x} \right) = a,$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) + \lim_{x \rightarrow \infty} b = b.$$

\Leftarrow Předpokládejme, že funkce $x \mapsto ax + b$ splňuje (5.40). Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = b - b = 0.$$

Tedy $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce $f \in \infty$. ■

5.4.24. Příklady. 1. Funkce e^x má v $-\infty$ asymptotu $x \mapsto 0$ a v bodě ∞ asymptotu nemá, neboť první limita ve Větě 5.4.23 je nevlastní.

2. Funkce $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ má v bodě ∞ asymptotu $x \mapsto \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$. To plyne z

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{x} = \sqrt{2}$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \sqrt{2}x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. Funkce tangens nemá v bodě ∞ asymptotu, protože není definovaná na žádném jeho okolí.

4. Funkce sinus nemá v bodě ∞ asymptotu, ačkoli první z obou limit ve Větě 5.4.23 existuje a je rovna nule, neexistuje však limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x)$.

5.4.25. Při *vyšetřování průběhu funkce* získáváme zejména následující informace:

- definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti,
- eventuální speciální vlastnosti, např. sudost, lichost nebo periodičita,
- definiční obor derivace, derivace a eventuální jednostranné derivace,
- intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální),
- obor hodnot,
- definiční obor druhé derivace, druhá derivace, konvexita a konkávnost, inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu funkce.

5.4.26. Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Podívejme se nejdříve na funkci

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a funkce g má vlastní první i druhou derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \quad (5.41)$$

g je lichá a kladná na $(0, \infty)$. Počítejme

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} (2(x^2 + 1) - 4x^2) = \frac{-2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy $g' > 0$ na intervalu $(-1, 1)$ a $g' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Dle Věty 5.2.6 g roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Tedy g má minimum v bodě -1 a maximum v 1 . Protože $g(-1) = -1$ a $g(1) = 1$, z Věty 4.3.4 plyne $\mathcal{H}(f) = [-1, 1]$.

Jelikož $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, je funkce f definovaná na \mathbb{R} a je zde spojitá (jelikož g i \arcsin jsou spojitě, plyne tvrzení z Poznámky 4.2.23(b)). Díky (5.41) a spojitosti funkce \arcsin v 0 dostáváme použitím Věty 4.2.21

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(0) = 0.$$

Po dosazení vidíme $f(-x) = -f(x)$, tj. f je lichá.

Při výpočtu derivace dostáváme za pomoci Věty 5.1.17 a vlastnosti (C7)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)^2} \right)^{-1} \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)|1 - x^2|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

V bodech -1 a 1 použijeme Větu 5.2.10 k odvození

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-2}{x^2 + 1} = -1, \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2}{x^2 + 1} = 1, \\ f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{2}{x^2 + 1} = 1, \\ f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-2}{x^2 + 1} = -1. \end{aligned}$$

Tedy derivace v bodech -1 a 1 neexistuje.

Máme $f' > 0$ na $(-1, 1)$ a $f' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Z Věty 5.2.6 plyne, že f roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Dále, f má maximum v bodě 1 a minimum v bodě -1 , přičemž $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ a $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Díky spojitosti funkce f dostáváme za použití Věty 4.3.4 $\mathcal{H}(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Počítáme-li druhou derivaci, dostáváme

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(x^2+1)^2}, & x \in (-1, 1), \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Tedy $f''(x) = 0$ právě v bodě $x = 0$, $f'' > 0$ na $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ a $f'' < 0$ na $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Z Věty 5.4.14 odvodíme, že f je ryze konvexní na intervalech $[-1, 0]$ a $[1, \infty)$ a je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[0, 1]$. Dále má f v 0 inflexní bod dle Věty 5.4.20.

Pro výpočet asymptot můžeme použít Větu 5.4.23, což dává

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 0 \cdot x = 0.$$

Tedy přímka $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v ∞ i $-\infty$.

Nyní již zbývá pouze načrtnout graf funkce f . ♣

5.5. Teoretické příklady k derivaci funkce

5.5.1. Příklad. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Řešení. V každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme derivaci dle Věty 5.1.17 jako

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

V bodě 0 vyjde

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

dle Věty 4.2.15. Podíváme-li se na posloupnost

$$a_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje tato posloupnost k 0, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\cos(2\pi n)) = -1.$$

Tedy dle Heineovy věty (Věta 4.2.16) není pravda, že $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, tj. f' není spojitá v bodě 0. ♣

5.5.2. Příklad. Pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.42)$$

a tedy f má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Funkce f však není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.5.1 dokážeme (5.42).

Položíme-li

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim a_n = 0$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2\sqrt{2\pi n} \cos(2\pi n) \right) = -\infty,$$

a tedy f' není omezená zdola na žádném okolí 0. Podobně, položíme-li

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim b_n = 0$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2\sqrt{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\pi) \right) = \infty,$$

a tedy f' není omezená shora na žádném okolí 0. ♣

5.5.3. Příklad. Necht f je reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$, pro který platí, že $-x \in \mathcal{D}(f)$, kdykoliv $x \in \mathcal{D}(f)$. Necht $a \in \mathcal{D}(f)$ a existuje $f'_+(a)$. Pak existuje $f'_-(-a)$ a platí

$$f'_-(-a) = \begin{cases} -f'_+(a), & f \text{ je sudá,} \\ f'_+(a), & f \text{ je lichá.} \end{cases}$$

Řešení. Necht $\delta \in (0, \infty)$ je takové, že $[a, a + \delta) \subset \mathcal{D}(f)$, a předpokládejme, že f je sudá. Pak platí $(a - \delta, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Položme

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in (a, a + \delta).$$

Pak $g(x) = \frac{f(-x) - f(-a)}{-x - a}$, $x \in (a, a + \delta)$, a použitím Věty 4.2.21 dostáváme

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \lim_{y \rightarrow a-} g(-y) = \lim_{y \rightarrow a-} \frac{f(y) - f(-a)}{-y - a} \\ &= - \lim_{y \rightarrow a-} \frac{f(y) - f(-a)}{a - (-a)} = f'_-(-a). \end{aligned}$$

Tvrzení pro případ liché funkce se ověří obdobně. ♣

5.5.4. Příklad. Necht

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Pomocí Příkladu 5.5.1 odvodíme, že

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Z Věty 5.4.3 plyne, že f je rostoucí v bodě 0.

Definujme nyní body $x_n, y_n, n \in \mathbb{N}$, jako

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}.$$

Přímočarým výpočtem se ověří, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_{n+1} < y_n < x_n$ a že

$$f(y_n) < f(x_n) \quad \text{a} \quad f(y_n) < f(x_{n+1}).$$

Protože posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergují k 0, funkce f není monotónní na žádném okolí 0. ♣

5.5.5. Příklad. Necht

$$f(x) = \begin{cases} x^2 (2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f má v 0 ostré lokální minimum, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není monotónní na žádném jednostranném okolí bodu 0.

Řešení. Funkce f je zjevně kladná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a má tedy v 0 ostré (globální) minimum. Podobně jako Příkladu 5.5.1 odvodíme, že

$$f'(x) = \begin{cases} 2x (2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)) + \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Položíme-li

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztahy

$$x_{n+1} < y_n < x_n, \quad f(y_n) < f(x_n) \quad \text{a} \quad f(y_n) < f(x_{n+1}).$$

Jelikož $\lim x_n = \lim y_n = 0$, funkce f není na žádném pravém okolí 0 monotónní.

Obdobně ukážeme, že f není monotónní na žádném levém okolí bodu 0. Uvažujme-li totiž body $-x_n$ a $-y_n$ (kde x_n a y_n jsou definovány výše), platí

$$-x_n < -y_n < -x_{n+1}, \quad f(-x_n) < f(-y_n), \quad f(-x_{n+1}) < f(-y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tím je požadované tvrzení dokázáno. ♣

5.5.6. Příklad. Necht' má funkce f v bodě a vlastní derivaci a necht' čísla $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ splňují $x_n \leq a \leq y_n$, $y_n - x_n > 0$ a $y_n - x_n \rightarrow 0$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Řešení. Je-li x_n nebo y_n rovno a , jedná se o derivační podíl z definice. Tedy lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_n < a < y_n$. Necht' $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. Protože

$$0 < a - x_n < y_n - x_n \quad \text{a} \quad 0 < y_n - a < y_n - x_n,$$

platí $x_n \rightarrow a$ a $y_n \rightarrow a$. Protože $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, z Heineovy věty 4.2.16 najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} - f'(a) \right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Pro tato n_0 pak máme

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a) \right| \\ &= \left| \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \frac{f(a) - f(x_n)}{y_n - x_n} - \left(\frac{y_n - a}{y_n - x_n} + \frac{a - x_n}{y_n - x_n} \right) f'(a) \right| \\ &\leq \frac{y_n - a}{y_n - x_n} \left| \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} - f'(a) \right| + \frac{a - x_n}{y_n - x_n} \left| \frac{f(a) - f(x_n)}{a - x_n} - f'(a) \right| \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{y_n - a}{y_n - x_n} + \frac{a - x_n}{y_n - x_n} \right) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

5.5.7. Příklad. Necht' $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá periodická nekonstantní funkce. Pak nemá ani v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu.

Řešení. Necht' $a > 0$ je perioda funkce f , tj. $f(x) = f(x + a)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nejprve si rozmysleme, že f je omezená funkce. To plyne z faktu, že f je v absolutní hodnotě omezená na $[0, a]$ nějakou konstantou M (viz Věta 4.3.11), a tedy je omezená M i na každém intervalu tvaru $[ka, (k + 1)a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dostáváme proto, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Předpokládáme-li nyní existenci asymptoty například v ∞ , existuje $b \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - b) = 0$. Najdeme $x \in (0, a)$ splňující $f(x) \neq f(a)$. Z Věty 4.2.17 nyní plyne, že

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + na) = b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(na) = f(0),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen. \clubsuit

5.5.8. Příklad. Necht $a < c < b$ jsou čísla v \mathbb{R}^* a $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je ryze konvexní na $(a, c]$ a na $[c, b)$. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

- (i) Funkce f je ryze konvexní na (a, b) .
- (ii) Platí $f'_-(c) \leq f'_+(c)$.

Dokažte též, že analogické tvrzení platí v případě, že $a, b \in \mathbb{R}$ a f je ryze konvexní na $[a, c]$ a $[c, b]$.

Řešení. Odvodme nejprve následující pozorování.

Necht $a < b < c$ a α, β, γ jsou reálná čísla. Necht

$$\frac{\beta - \alpha}{b - a} < \frac{\gamma - \beta}{c - b}.$$

Pak

$$\frac{\beta - \alpha}{b - a} < \frac{\gamma - \alpha}{c - a}.$$

Abychom toto dokázali, vezměme $t \in (0, 1)$ splňující $b = ta + (1 - t)c$. Pak $b - a = (1 - t)(c - a)$ a $c - b = t(c - a)$. Předpokládaná nerovnost tedy znamená, že

$$\frac{\beta - \alpha}{1 - t} < \frac{\gamma - \beta}{t}, \quad \text{tj.} \quad t(\beta - \alpha) < \gamma - \beta. \quad (5.43)$$

Požadovaná nerovnost pak má tvar

$$\frac{\beta - \alpha}{1 - t} < \frac{\gamma - \alpha}{1}, \quad \text{tj.} \quad \beta - \gamma < t(\alpha - \gamma).$$

Tato nerovnost je však zjevně ekvivalentní s nerovností (5.43).

Přistupme nyní k důkazu tvrzení. Díky Větě 5.4.10 a Poznámce 5.4.11 víme, že f má jednostranné derivace v bodě c . Položme

$$\varphi(x) = \frac{f(c) - f(x)}{c - x}, \quad x \in (a, c), \quad \psi(y) = \frac{f(y) - f(c)}{y - c}, \quad y \in (c, b).$$

Díky Lemmatu 5.4.9 víme, že φ je rostoucí na (a, c) a ψ na (c, b) . Necht $x' \in (a, c)$ a $y' \in (c, b)$ jsou dány. Pak

$$\begin{aligned} \frac{f(c) - f(x')}{c - x'} &< \sup\{\varphi(x); x \in (x', c)\} = f'_-(c), \\ \frac{f(y') - f(c)}{y' - c} &> \inf\{\psi(y); y \in (c, y')\} = f'_+(c). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ověřme nyní implikaci (i) \implies (ii). Je-li f ryze konvexní na intervalu (a, b) , platí podle Lemmatu 5.4.9 nerovnost

$$\forall x \in (a, c) \forall y \in (c, b): \varphi(x) < \psi(y).$$

Tedy z Lemmatu 1.5.28 máme

$$f'_-(c) = \sup\{\varphi(x); x \in (a, c)\} \leq \inf\{\psi(y); y \in (c, b)\} = f'_+(c).$$

Obráceně, necht $f'_-(c) \leq f'_+(c)$. Necht $x < y < z$ jsou body vybrané z intervalu (a, b) . Předpokládejme nejprve, že $x < y \leq c < z$. Pokud $y = c$, máme díky (5.44) nerovnosti

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < f'_-(c) \leq f'_+(c) < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Je-li $y < c$, máme z Lemmatu 5.4.9 a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(c) - f(y)}{c - y} < f'_-(c) \leq f'_+(c) < \frac{f(z) - f(c)}{z - c}.$$

Díky pozorování ze začátku důkazu tedy platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \quad (5.45)$$

Je-li $x < c \leq y < z$, ověříme nerovnost (5.45) analogicky. V případě $x < y < z \leq c$ nebo $c \leq x < y < z$ platí nerovnost (5.45) díky předpokladu.

Tím je podle Lemmatu 5.4.9 dokázána ryzí konvexita f na (a, b) .

V případě, kdy $a, b \in \mathbb{R}$ a f je ryze konvexní na $[a, c]$ a $[c, b]$, postupujeme zcela analogicky. ♣

5.5.9. Příklad. Necht $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, kde $a \neq 0$. Pak rovnice $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ má v \mathbb{R} alespoň jedno řešení.

5.5.10. Příklad. Označme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x \in \mathbb{R}$. Pak f je spojitá funkce na \mathbb{R} . Předpokládáme-li, že $a > 0$, platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3(a + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3}) = \infty$$

a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3(a + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3}) = -\infty.$$

Podle Věty 4.3.6 je tedy $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, a proto existuje alespoň jedno $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$.

Je-li $a < 0$, použijeme právě dokázané tvrzení pro funkci $-f$.

5.5.11. Příklad. Ukažte, že $3 < \pi < 4$.

Řešení. Připomeňme, že číslo π je definováno jako $\pi = 2\alpha$, kde α je jednoznačně určené reálné číslo v intervalu $(0, 2)$ splňující $\cos \alpha = 0$. Zjevně tedy $\pi < 4$. Abychom dokázali nerovnost $\pi > 3$, stačí ověřit, že $\cos(\frac{3}{2}) > 0$ (dle vlastnosti (G4) je funkce kosinus klesající na intervalu $(0, 2)$.)

Označme $\beta = \frac{3}{2}$ a $a_n = \frac{\beta^{2n}}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $n \geq 1$ máme $a_{n+1} \leq a_n$, a tedy dle Věty 3.3.1 platí

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=4}^k (-1)^n a_n \geq 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n a_n \\ &\geq \left(1 - \frac{\beta^2}{2!}\right) + \frac{\beta^4}{4!} \left(1 - \frac{\beta^2}{6 \cdot 5}\right) \\ &= \frac{359}{5 \cdot 2^{10}} > 0\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. \clubsuit

5.5.12. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Řešení. Necht $I = (0, \pi)$ a necht $f(y) = \operatorname{cotg} y$, $y \in (0, \pi)$. Potom inverzní funkce f^{-1} je definována na \mathbb{R} a splňuje $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pro každé $y \in (0, \pi)$ platí

$$f'(y) = \frac{-1}{\sin^2(y)} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 y),$$

a tedy f je spojitá a klesající na I . Necht $x \in \mathbb{R}$ a $y = \operatorname{arccotg}(x)$. Potom $y \in (0, \pi)$ a $x = \operatorname{cotg}(y)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26(a)) tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{1 + \operatorname{cotg}^2(y)} = \frac{-1}{1+x^2},$$

což jsme chtěli dokázat. \clubsuit

V následujícím příkladu ukážeme, že pomocí věty o derivaci inverzní funkce je možné v některých případech spočítat derivaci určité funkce ačkoli pro tuto funkci nemáme k dispozici explicitní vyjádření.

5.5.13. Příklad. Necht funkce f je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x^3 + \sin x$. Ukažte, že f je na \mathbb{R} prostá a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ a pro její inverzní funkci $g = f^{-1}$ spočtěte $g'(b)$ a $g''(b)$, kde $b = f(1)$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x.$$

Je-li $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, platí $3x^2 + \cos x > 0$, a pro $x \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$ máme díky Příkladu 5.5.11 a vlastnosti (G7) odhad

$$3x^2 + \cos x \geq 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \geq 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} > 0.$$

Protože je f' sudá funkce, je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy funkce f je spojitá a rostoucí na \mathbb{R} . Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$. K funkci f tedy existuje inverzní funkce $g = f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Položme $a = 1$ a $b = f(1) = 1 + \sin 1$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26(a)) platí

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{3 + \cos 1}.$$

Použijeme-li dále Větu 5.1.17, máme

$$g''(y) = ((f'(g(y)))^{-1})' = \frac{-f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3}, \quad y \in \mathbb{R},$$

a tedy pro $b = 1 + \sin 1 = f(1)$ máme

$$g''(b) = \frac{\sin 1 - 6}{(3 + \cos 1)^3}.$$

♣

5.5.14. Příklad. Najděte spojitou funkci na \mathbb{R} , která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Řešení. Necht' f_n a f jsou funkce zkonstruované v Příkladu 4.4.11. Necht' $a \in \mathbb{R}$ je libovolný bod. Ukážeme za pomoci Příkladu 5.5.6, že $f'(a)$ neexistuje vlastní. Povšimněme si nejdříve, že f_n je 4^{-n-1} -periodická a na každém intervalu, kde je afinní, má směrnici rovnou buď 1 nebo -1 . Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, najdeme jednoznačně určené $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$\frac{k}{4^{n+1}} \leq a < \frac{k+1}{4^{n+1}}.$$

Položme

$$x_n = \frac{k}{4^{n+1}}, \quad y_n = \frac{k+1}{4^{n+1}}.$$

Pak pro $m \geq n$ platí

$$f_m(x_n) = f_m(y_n) = 0$$

a pro $m \in \{1, \dots, n-1\}$ je funkce f_m afinní na intervalu $[x_n, y_n]$. Tedy

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Protože je f_m afinní na $[x_n, y_n]$ se směrnici 1 či -1 , máme

$$\frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} \in \{-1, 1\}, \quad m \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Proto

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} = \begin{cases} \text{liché celé číslo,} & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ \text{sudé celé číslo,} & \text{pokud } n \text{ je liché.} \end{cases}$$

Limita $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ pro n jdoucí do nekonečna tedy nemůže existovat vlastní, protože tato posloupnost nespĺňuje Bolzanovu-Cauchyovy podmínku 2.4.26. Tedy dle Příkladu 4.4.11 $f'(a)$ neexistuje vlastní. ♣

5.5.15. Příklad. Necht f je konvexní funkce na intervalu (a, b) . Pak množina bodů nediferencovatelnosti funkce f je nejvýše spočetná.

Řešení. Z Věty 5.4.14 víme, že v každém bodě $x \in (a, b)$ existují vlastní jednostranné derivace a platí $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Ukažme nyní, že pro body $x, y \in (a, b)$, $x < y$, platí

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y).$$

K tomuto účelu vezmeme body u, v splňující $x < u < v < y$. Díky konvexitě f (viz Lemma 5.4.9) pak máme

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Tedy pro každé $v \in (x, y)$ platí dle Věty 2.2.46

$$f'_+(x) = \lim_{u \rightarrow x_+} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Opětovným použitím Věty 2.2.46 máme

$$f'_+(x) \leq \lim_{v \rightarrow y_-} \frac{f(v) - f(y)}{v - y} = f'_-(y).$$

Tedy jsem ukázali, že f'_- je neklesající funkce na (a, b) . Podle Příkladu 4.4.3 je tedy f'_- spojitá všude na (a, b) s výjimkou nejvýše spočetné množiny D . Máme-li nyní bod $x \in (a, b) \setminus D$, platí

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \lim_{y \rightarrow x_+} f'_-(y) = f'_-(x).$$

Odtud plyne, že $f'_-(x) = f'_+(x)$. Dle Věty 5.1.5 tudíž existuje $f'(x)$. ♣

5.5.16. Příklad. Necht $f_a(x) = x^a \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x$, $x \in (0, \infty)$. Zjistěte, pro která $a \in \mathbb{R}$ lze f rozšířit na celé \mathbb{R} tak, aby měla všude konečnou derivaci.

Řešení. Nejprve zjistíme, pro která $a \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow 0_+} f_a(x)$. Je-li

$$f_a(x) = \sin(\ln x) \frac{\operatorname{arctg} x}{x} x^{a+1}, \quad x \in (0, \infty),$$

a \sin je omezená funkce, dostáváme pro $a > -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f_a(x) = 0.$$

Pokud $a \leq -1$, položíme $x_n = e^{\pi(\frac{1}{2}-2n)}$ a $y_n = e^{\pi(\frac{3}{2}-2n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak za pomoci Věty 2.3.27 obdržíme pro $a = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f_a(x_n) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} f_a(y_n) = -1,$$

zatímco pro $a < -1$ dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f_a(x_n) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} f_a(y_n) = -\infty.$$

Tedy pro $a \leq -1$ limita $\lim_{x \rightarrow 0_+} f_a(x)$ neexistuje (viz Věta 4.2.17).

Z těchto výpočtů plyne, že pro $a > -1$ lze funkci f_a dodefinovat spojitě na \mathbb{R} tím, že ji na $(-\infty, 0]$ položíme rovnou 0. V případě $a \in (-\infty, -1]$ f spojitě dodefinovat v bodě 0 není možné.

Nechť f_a je pro $a > -1$ dodefinována 0 v bodě 0. Pak je spojitá zprava v bodě 0, a tedy podle Věty 5.2.10 a výše uvedených výpočtů

$$(f_a)'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{a-1} \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x = \lim_{x \rightarrow 0_+} f_{a-1}(x)$$

existuje právě tehdy, když $a > 0$. V tom případě pak derivace funkce f_a v bodě 0 zprava existuje a je rovna 0. Dodefinujeme-li tedy f_a hodnotou 0 na intervalu $(-\infty, 0]$, dostaneme funkci s vlastní derivací na \mathbb{R} . ♣

Následující příklad je zobecněním Bernoulliovy nerovnosti na intervalu $(-1, \infty)$ (vizte Příklad 1.8.11).

5.5.17. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in [1, \infty)$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x.$$

Pak je f spojitá a platí

$$f'(x) = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1), \quad x \in (-1, \infty),$$

což znamená, že $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (-1, 0)$ a $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Tedy f je nerostoucí na intervalu $(-1, 0]$ a neklesající na intervalu $[0, \infty)$ (vizte Větu 5.4.7). Tudíž f nabývá svého minima v bodě 0. Protože $f(0) = 0$, je f nezáporná na $(-1, \infty)$. Odtud plyne dokazovaná nerovnost. ♣

5.5.18. Příklad. Ukažte, že pro každé kladné $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, platí

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení. Předpokládejme, že $a < b$. Podělíme zadané nerovnosti číslem a a položíme $\frac{b}{a} = x$. Tím dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt{x} < \frac{x-1}{\log x} < \frac{1+x}{2}, \quad x \in (1, \infty) \quad (5.46)$$

První nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$x \log^2 x < (x-1)^2, \quad x \in (1, \infty),$$

která plyne z nerovnosti

$$\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x \in (0, \infty), \quad (5.47)$$

dosazením $x-1$ za x .

Dokažme tedy (5.47). K tomuto účelu položme

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x \in [0, \infty).$$

Pak $f(0) = 0$ a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} \left(\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \right) = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2(\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2}))}{2(1+x)\sqrt{1+x}} < 0, \quad x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

protože pro kladná x platí $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$. Tedy je f klesající na $[0, \infty)$, a proto $f(x) < 0$ na $(0, \infty)$. Tím je (5.47) dokázáno.

Ověřme nyní druhou nerovnost v (5.46). Ta je ekvivalentní s nerovností

$$2(x-1) - (x+1)\log x < 0, \quad x \in (1, \infty). \quad (5.48)$$

Definujme funkci

$$f(x) = 2(x-1) - (x+1)\log x, \quad x \in [1, \infty).$$

Pak $f(1) = 0$ a

$$f'(x) = 2 - \frac{x+1}{x} - \log x = 1 - \frac{1}{x} - \log x, \quad x \in (1, \infty).$$

Položme

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \log x, \quad x \in [1, \infty).$$

Pak $g(1) = 0$ a

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < 0, \quad x \in (1, \infty).$$

Funkce g je tedy klesající na $[1, \infty)$, a proto záporná na $(1, \infty)$. Tedy je i f' záporná na $(1, \infty)$. Tím pádem je ale f , jakožto klesající funkce na $[1, \infty)$, záporná na $(1, \infty)$, což dokazuje (5.48). Tím je důkaz dokončen. ♣

5.5.19. Příklad. Dokažte, že $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$ a $H(\{\cos n\}) = [-1, 1]$.

Důkaz. Necht $x \in [-1, 1]$. Nalezneme $a \in [0, 1]$ takové, že $\sin(2\pi a) = x$. Položme $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. Číslo π je iracionální (tento fakt dokážeme pomocí integrálního počtu v Příkladu 9.6.9), a tedy je i číslo α iracionální. Z Příkladu 2.5.12 tudíž vyplývá, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha n_k - [\alpha n_k]) = a. \quad (5.49)$$

Díky spojitosti funkce sinus dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sin(n_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sin(2\pi \alpha n_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin(2\pi \alpha n_k - 2\pi [\alpha n_k]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sin(2\pi(\alpha n_k - [\alpha n_k])) = \sin(2\pi a) = x. \end{aligned}$$

Protože $x \in [-1, 1]$ bylo zvoleno libovolně a inkluze $[-1, 1] \subset H(\{\sin n\})$ je zřejmá, plyne odtud, že $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$. Tvrzení týkající se hromadných bodů posloupnosti $\{\cos n\}$ je možné dokázat obdobně. ■

5.5.20. Příklad. Necht D je nekonečná spočetná podmnožina $(0, 1)$. Najděte spojitou konvexní funkci na $[0, 1]$, která nemá derivaci právě v bodech množiny D .

Řešení. Očíslujme množinu D jako $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ a definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkci $f_n(x) = |x - x_n|$, $x \in [0, 1]$. Pak funkce f_n má následující vlastnosti:

- (a) z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$, $x, y \in [0, 1]$,
- (b) f_n je zjevně konvexní,
- (c) $(f_n)'_-(x_n) = -1$, $(f_n)'_+(x_n) = 1$ a f_n' je vlastní na $(0, 1) \setminus \{x_n\}$,
- (d) f_n je omezená na $[0, 1]$ číslem 1.

Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

Díky vlastnosti (d) je f dobře definovaná funkce na $[0, 1]$, neboť definující řada je absolutně konvergentní. Dále se jednoduše z definice ověří pomocí (b), že f je konvexní.

Zafixujme si index $j \in \mathbb{N}$ a ukažme, že $f'_+(x_j) > f'_-(x_j)$. K tomuto účelu najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{4 \cdot 2^j}$. Pak $n_0 > j$. Z vlastnosti (a) dostáváme pro $h > 0$ splňující $x_j + h \in (0, 1)$ odhad

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{f_n(x_j + h) - f_n(x_j)}{h} \right) &\geq - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \frac{f_n(x_j + h) - f_n(x_j)}{h} \right| \\ &\geq - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} > -\frac{1}{4 \cdot 2^j}. \end{aligned}$$

Derivace zprava funkce f existuje díky její konvexitě, a tak můžeme odhadovat

$$\begin{aligned}
 f'_+(x_j) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (f(x_j + h) - f(x_j)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j + h) - f_n(x_j)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\sum_{n \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j + h) - f_n(x_j)}{h} + \frac{1}{2^j} \frac{f_j(x_j + h) - f_j(x_j)}{h} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j + h) - f_n(x_j)}{h} \right) \\
 &\geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\sum_{n \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x_j + h) - f_n(x_j)}{h} + \frac{1}{2^j} \frac{f_j(x_j + h) - f_j(x_j)}{h} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4 \cdot 2^j} \right) \\
 &= \sum_{n \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{1}{2^j} (f_j)'_+(x_j) - \frac{1}{4 \cdot 2^j} \\
 &= \sum_{n \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{1}{2^j} - \frac{1}{4 \cdot 2^j} \\
 &= \sum_{n \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{3}{4 \cdot 2^j}.
 \end{aligned}$$

(Připomeňme, že funkce f_i , $i \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}$, mají v bodě x_j vlastní derivaci.)
Obdobně odvodíme, že

$$f'_-(x_j) \leq \sum_{n \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) - \frac{3}{4 \cdot 2^j}.$$

Tedy $f'_+(x_j) > f'_-(x_j)$, a tedy derivace f v bodě x_j neexistuje.

Ukažme nyní, že v bodě $x \in (0, 1) \setminus D$ derivace f existuje vlastní. K tomu stačí dokázat, že $f'_+(x) \leq f'_-(x)$. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Jako výše pak máme pro $h > 0$ splňující $x + h \in (0, 1)$ odhad

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \leq \varepsilon.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
 f'_+(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \varepsilon \\
 &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right) + \varepsilon \\
 &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} f'_n(x) + \varepsilon,
 \end{aligned}$$

protože f_n jsou v x diferencovatelné. Obdobně obdržíme

$$f'_-(x) \geq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} f'_n(x) - \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, máme požadovaný odhad $f'_+(x) \leq f_-(x)$. ♣

5.5.21. Příklad. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x-1 \quad (5.50)$$

(viz 1.7.16). Rovnosti v (5.50) navíc platí právě tehdy, když $x = 1$.

Řešení. Označme

$$f(x) = \log x - \frac{x}{x-1}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pak

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty).$$

Tedy f klesá na $(0, 1]$ a roste na $[1, \infty)$. Má tedy v bodě 1 globální minimum. Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$, dostáváme první nerovnost v (5.50). Navíc $f(x) = 0$, tj. v první nerovnosti v (5.50) platí rovnost, právě tehdy, když $x = 1$.

Abychom dokázali druhou nerovnost, položme

$$g(x) = x - 1 - \log x, \quad x \in (0, \infty).$$

Protože

$$g'(x) = \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty),$$

funkce g roste na $[1, \infty)$ a klesá na $(0, 1]$. Má tedy v bodě 1 minimum. Jelikož $g(1) = 0$, je funkce g kladná na $(0, \infty) \setminus \{1\}$. Tím je dokázána druhá nerovnost (5.50). ♣

5.5.22. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$ a

$$f_a(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \log x, \quad x \in (0, \infty).$$

Zjistěte, pro která a existuje bod $z \in (0, \infty)$, ve kterém mají funkce f a g společnou tečnu.

Řešení. Zřejmě pro $x \in (0, \infty)$ platí $f'_a(x) = 2ax$ a $g'(x) = \frac{1}{x}$. Mají-li mít funkce f_a a g v bodě $z \in (0, \infty)$ společnou tečnu, musí platit $2az = f'_a(z) = g'(z) = \frac{1}{z}$. Pro $a \in (\infty, 0]$ takový bod zjevně neexistuje. Je-li $a > 0$, požadovaná rovnost platí pro $z = (2a)^{-\frac{1}{2}}$. Společnou tečnu pak tyto funkce budou mít v případě

$$\frac{1}{2} = f_a((2a)^{-\frac{1}{2}}) = g((2a)^{-\frac{1}{2}}) = \log(2a)^{-\frac{1}{2}}.$$

To nastává v případě $a = (2e)^{-1}$. Společná tečna v bodě \sqrt{e} má pak tvar

$$t(x) = \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{2}}(x - \sqrt{e}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

5.5.23. Příklad. Označme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\{a_n\}$ je klesající posloupnost kladných čísel s kladnou limitou. Ta se obvykle značí γ a nazývá **Eulerovou konstantou**.

Řešení. Položme

$$b_n = 1 + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí pro každé $n \in \mathbb{N}$:

- $b_n < a_n$ (to je zřejmé, jelikož logaritmus je rostoucí funkce),
- $a_{n+1} < a_n$ (tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $\frac{1}{n+1} < \log(1 + \frac{1}{n})$, která plyne z první nerovnosti v (5.50)),
- $b_{n+1} > b_n$ (tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $\log(1 + \frac{1}{n+1}) < \frac{1}{n+1}$, která plyne z druhé nerovnosti v (5.50)),
- b_n je kladné (to plyne z druhé nerovnosti v (5.50), neboť

$$\begin{aligned} \log(n+1) &= \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Tedy máme

$$0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < a_n < \dots < a_2 < a_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

a zřejmě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Z těchto faktů již plyne požadovaný závěr dle Vět 2.4.1 a 2.2.44. ♣

5.5.24. Příklad.

Řešení. ♣

5.5.25. Příklad (Hölderova nerovnost).

Řešení. ♣

5.5.26. Příklad (Minkowského nerovnost).

Řešení. ♣

5.5.1. Hyperbolické funkce.

5.5.27. Definice. Hyperbolické funkce hyperbolický sinus, hyperbolický kosinus, hyperbolický tangens, hyperbolický kotangens definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & x \in \mathbb{R}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Vlastnosti hyperbolických funkcí

(H1) Platí

$$\begin{aligned}\sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, & x \in \mathbb{R}, \\ \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Plyne dosazením do vzorců, například první identita se odvodí pomocí

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) = \sinh(x + y).\end{aligned}$$

(H2) Funkce \sinh je lichá, \cosh je sudá a obě jsou spojité na \mathbb{R} .

Plyne z definice.

(H3) Platí $(\sinh)' = \cosh$ a $(\cosh)' = \sinh$ na \mathbb{R} .

Z definice máme

$$\sinh' x = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(H4) Platí $\sinh 0 = 0$ a $\cosh 0 = 1$. Dále platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty$.

Z definice máme první část tvrzení. Dále platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty$$

díky větě o aritmetice limit (Věta 4.2.2). Ostatní limity se spočtou obdobně.

(H5) Funkce \sinh roste na \mathbb{R} , \cosh roste na $[0, \infty)$ a klesá na $(-\infty, 0]$.

Protože díky (H3) platí $(\sinh)' = \cosh$, což je podle definujícího vzorce kladná funkce na \mathbb{R} , je \sinh rostoucí na \mathbb{R} . Dále máme $(\cosh)' = \sinh$. Ale \sinh je rostoucí a $\sinh 0 = 0$. Tedy \sinh je záporná na $(-\infty, 0)$ a kladná na $(0, \infty)$. Proto je \cosh klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, \infty)$ (viz Věta 5.2.6).

(H6) Platí $\mathcal{H}(\sinh) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\cosh) = [1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H4), (H5), spojitosti obou funkcí a Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot (viz Věta 4.3.4).

(H7) Platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením z definice máme

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) = 1.$$

(H8) Funkce tgh a cotgh jsou liché a na svých definičních oborech spojitě.

Plyne z definice a Věty 4.2.5.

(H9) Platí $\operatorname{tgh} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cotgh} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0_-} \operatorname{cotgh} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0_+} \operatorname{cotgh} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{cotgh} x = 1$.

Dosazením obdržíme $\operatorname{tgh} 0 = 0$. Dále platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1.$$

Ostatní limity spočteme analogicky.

(H10) Platí $(\operatorname{tgh})' = \frac{1}{\cosh^2}$ a $(\operatorname{cotgh})' = \frac{-1}{\sinh^2}$ na \mathbb{R} .

Z (H3) a (H7) máme

$$(\operatorname{tgh})' = \left(\frac{\sinh}{\cosh} \right)' = \frac{1}{\cosh^2} (\cosh^2 - \sinh^2) = \frac{1}{\cosh^2}.$$

Obdobně se ověří druhé tvrzení.

(H11) Funkce tgh roste na \mathbb{R} , cotgh klesá na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H10) a Věty 5.2.6.

(H12) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$ a $\mathcal{H}(\operatorname{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H11), (H9) a spojitosti obou funkcí.

5.6. Početní příklady k derivaci funkce

5.6.1. Limity funkcí.

5.6.1. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Z vlastnosti sinu (G5) víme, že $\sin'(0) = 1$. Dále platí $\sin 0 = 0$ (viz (G4)). Tedy z Definice 5.1.1 plyne

$$1 = \sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

♣

5.6.2. Příklad. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Řešení. Upravíme

$$\frac{\sin 5x}{x} = 5 \frac{\sin 5x}{5x}.$$

Položme

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(x) = 5x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nechť dále

$$c = 0, \quad D = 0, \quad A = 1.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D, \quad \lim_{y \rightarrow D} f(y) = A$$

a pro libovolné $\eta \in (0, \infty)$

$$g(x) \neq D, \quad x \in P(c, \eta).$$

Z Věty 4.2.21(P) a Příkladu 5.6.1 tedy plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{x \rightarrow c} (f \circ g)(x) = A = 1.$$

Z Věty 4.2.2 máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{\sin 5x}{5x} = 5.$$

5.6.3. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Řešení. Upravme

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Jelikož kosinus je spojitá funkce (viz (G13)) a $\cos 0 = 1$ (viz (G6)), plyne z Příkladem 5.6.1 a Věty 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

5.6.4. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}} &= \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x}} \\ &= \frac{x^2}{1 - \cos x + x \sin x} \left(\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x}} \left(\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x} \right) \end{aligned}$$

Pomocí Příkladů 5.6.1 a 5.6.3 dostáváme díky Větě 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \cdot (1 + 1) = \frac{4}{3}.$$

5.6.5. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1, \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1.$$

Řešení. Protože $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ (vlastnosti (E2) a (E3)), platí dle Definice 5.1.1 rovnost

$$1 = \exp'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Obdobně dostaneme z vlastnosti logaritmu (L7) rovnost

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \log(1+0)}{x - 0} = (\log(1+x))'_{x=0} \\ &= \left(\frac{1}{1+x} \right)_{x=0} = 1. \end{aligned}$$

Dále položme

$$f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}, \quad y \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \quad g(x) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

a

$$c = 1, D = 0, A = 1.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D, \quad \lim_{y \rightarrow D} f(y) = 1$$

a $g(x) \neq D$ pro $P(c, 1)$. Tedy z Věty 4.2.21(P) plyne

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = A = 1.$$

♣

5.6.6. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x}.$$

Řešení. Upravíme

$$\frac{\log(1 + \sin x)}{x} = \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x}.$$

Pro $x \in P(0, \pi)$ platí $\sin x \neq 0$, a tedy je splněna podmínka (P) Věty 4.2.21. Proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

♣

5.6.7. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Řešení. Funkci v zadané limitě upravíme na

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Protože $\cos x - 1 \neq 0$ pro $x \in P(0, \frac{\pi}{2})$, z Vět 4.2.21(P) a 4.2.2 máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

♣

5.6.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Řešení. Pišme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos 2x} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 2x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Položíme-li ve Větě 4.2.21(P) $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = \frac{\pi}{4} - x$ (respektive $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2x$) a

$$c = \frac{\pi}{4}, D = 0, A = 1,$$

dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\frac{\pi}{4} - x} = 1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\frac{\pi}{2} - 2x}$$

(platí $\frac{\pi}{4} - x \neq 0$ pro $x \in P(\frac{\pi}{4}, 1)$ a $\frac{\pi}{2} - 2x \neq 0$ pro $x \in P(\frac{\pi}{4}, 1)$). Tedy máme z (5.51)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

♣

5.6.9. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

Řešení. Aby zadaný výpočet měl smysl, je třeba předpokládat, že $a \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Upravíme zadaný výraz na

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} &= \frac{\sin x \cos a - \sin a \cos x}{\cos x \cos a(x - a)} = \frac{\sin(x - a)}{\cos x \cos a(x - a)} \\ &= \frac{1}{\cos x \cos a} \cdot \frac{\sin(x - a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Povšimněme si, že zadaná limita je rovna $\operatorname{tg}'(a)$, a tedy jsme znovu ověřili vzorec (G17). ♣

5.6.10. Příklad. Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

Řešení. Pišme

$$\frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x}. \quad (5.52)$$

Dále máme

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \left(\frac{1 - \cos 2x \cos 3x}{x^2} \right) \\ &= \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \left(\frac{1 - \cos 2x}{x^2} + \cos 2x \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \right) \\ &= \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \left(\frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} 4 + \cos 2x \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} 9 \right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} = \frac{1}{2} + 4 \frac{1}{2} + 9 \frac{1}{2} = 7.$$

Z (5.52) máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} = 7 \cdot 2 = 14. \quad \clubsuit$$

5.6.11. Příklad. Spočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz na

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})} &= \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6})} \cdot \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3} - x)} \cdot \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = 1,$$

konverguje první část výrazu v (5.53) k -1 .

Dále máme

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}} &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{4 \sin^2 x - 3}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{(2 \sin x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot 2 \frac{(\sin x - \sin \frac{\pi}{3})(2 \sin x + \sqrt{3})}{x - \frac{\pi}{3}}.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Protože

$$\frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos(\frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3})) \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}))}{\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})},$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Z (5.53) a 5.54 pak máme

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})} &= -1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= -1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) \\
 &= -24.
 \end{aligned}$$

♣

5.6.12. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

Řešení. Nejprve upravíme

$$\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x}) = -2 \sin \frac{xe^x - xe^{-x}}{2} \sin \frac{xe^x + xe^{-x}}{2}.$$

Dále

$$\begin{aligned}
 &\frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} \\
 &= -2 \frac{\sin \frac{xe^x - xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x - xe^{-x}}{2}} \frac{\sin \frac{xe^x + xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x + xe^{-x}}{2}} \frac{xe^x - xe^{-x}}{2x^2} \frac{xe^x + xe^{-x}}{2x} \\
 &= -2 \frac{\sin \frac{xe^x - xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x - xe^{-x}}{2}} \frac{\sin \frac{xe^x + xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x + xe^{-x}}{2}} \frac{e^{2x} - 1}{2x} e^{-x} \frac{e^x + e^{-x}}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Spočteme nejprve limitu prvního zlomku v (5.55). K tomu označme

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad g(x) = \frac{xe^x - xe^{-x}}{2}.$$

Pak $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ a

$$0 = g(x) = \frac{1}{2}xe^{-x}(e^{2x} - 1) \Leftrightarrow x = 0.$$

Předpoklad (P) Věty 4.2.21 je tak splněn pro libovolné okolí $P(0, \eta)$, a tedy

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{xe^x - xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x - xe^{-x}}{2}}.$$

Podobně využijeme faktu, že

$$\frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

k odvození rovnosti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{xe^x + xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x + xe^{-x}}{2}} = 1.$$

Z Věty o aritmetice limit 4.2.2 a (5.55) pak plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = -2.$$

♣

5.6.13. Příklad. Spočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

Řešení. Pišme

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} &= 2 \cos \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \sin \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Funkce $\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$ konverguje k 0 pro x jdoucí do nekonečna. Ze spojitosti sinu a Věty 4.2.21(S) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\right) = 0.$$

Funkce $2 \cos \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ je omezená na \mathbb{R} , a tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$$

dle Věty 4.2.15.

♣

5.6.14. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{3x}}.$$

Řešení. Dle definice mocniny a^b (viz Definice 6.1.7) platí

$$(1 + 4x)^{\frac{1}{3x}} = \exp\left(\frac{1}{3x} \log(1 + 4x)\right), \quad x \in \left(-\frac{1}{4}, \infty\right) \setminus \{0\}.$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x} \log(1 + 4x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \log(1 + 4x)}{3 \cdot 4x} = \frac{4}{3}$$

a \exp je spojitá funkce (viz (E7), z Věty 4.2.21(S) plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{3x}} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x} \log(1 + 4x)\right) = \exp\left(\frac{4}{3}\right).$$

♣

5.6.15. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Řešení. Vezměme $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a označme

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad x \in (|a|, \infty).$$

Pak f je dobře definovaná funkce splňující

$$f(x) = \exp(x \log(1 + \frac{a}{x})), \quad x \in (|a|, \infty).$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + \frac{a}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} a \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = a,$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \exp(a).$$

Je-li $a = 0$, máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 = \exp(a).$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \exp(a).$$

Z Heineovy věty 4.2.16 plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp(a).$$

♣

5.6.16. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

Řešení. Protože

$$(2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = \exp\left(\frac{x^2+1}{x} \log(2e^x - 1)\right),$$

budeme počítat limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} \log(2e^x - 1)$. Pišme

$$\frac{x^2+1}{x} \log(2e^x - 1) = (x^2+1) \cdot \frac{\log(2e^x - 1)}{2e^x - 2} \cdot 2 \cdot \frac{e^x - 1}{x}.$$

Protože $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ a $2e^x - 1 \neq 1$ pro $x \in P(0, 15)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} \log(2e^x - 1) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

Ze spojitosti funkce \exp dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^2.$$

♣

5.6.17. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Jako v předchozích příkladech je třeba spočítat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} 1+x3^x = 1$, existuje dle Věty 4.2.9(a) číslo $\eta \in (0, \infty)$ takové, že

$$1+x3^x > 0, \quad x \in B(0, \eta).$$

Dále máme pro $x \in B(0, \eta)$

$$0 = \frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1 = \frac{x(2^x - 3^x)}{1+x3^x} \Leftrightarrow x = 0.$$

Z Věty o limitě složené funkce 4.2.21(P) tedy plyne rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} = 1.$$

Protože

$$\frac{1}{x^2} \log \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\log \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1 \right), \quad x \in P(0, \eta),$$

vyjádříme

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1 \right) &= \frac{1}{x} \frac{2^x - 3^x}{1+x3^x} \\ &= \frac{(e^{x \log 2} - 1) - (e^{x \log 3} - 1)}{x} \cdot \frac{1}{1+x3^x} \\ &= \left(\frac{e^{x \log 2} - 1}{x \log 2} \log 2 - \frac{e^{x \log 3} - 1}{x \log 3} \log 3 \right) \frac{1}{1+x3^x}. \end{aligned}$$

Snadno ověříme předpoklady Věty 4.2.21(P) pro okolí $P(0, \eta)$ a dostaneme tak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1 \right) = \log 2 - \log 3 = \log \frac{2}{3}.$$

Závěr proto je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp(\log \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}.$$

5.6.18. Příklad. Necht' $a \in \mathbb{R}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

Řešení. Ze zadání zřejmě plyne, že pro existenci limity je nutné, aby $a \notin \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pro tato a počítejme limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \log \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right).$$

Z vlastností funkce sinus víme, že existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\sin x \neq \sin a, \quad x \in P(a, \eta).$$

Pro $x \in P(a, \eta)$ pak máme

$$\frac{1}{x-a} \log \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right) = \frac{\log \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)}{\frac{\sin x}{\sin a} - 1} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin a}.$$

Podobně jako v Příkladu 5.6.9 odvodíme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a.$$

Z Věty 4.2.21 a 4.2.2 tak plyne

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \log \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right) = \frac{\cos a}{\sin a} = \cotg a.$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \exp(\cotg a).$$



5.6.19. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$. Spočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

Důkaz. Necht $a \in \mathbb{R}$. Je-li $a = 0$, je rovna zadaná limita 1. Necht tedy $a \neq 0$. Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{x}} = 0$, existuje $\eta \in (0, \infty)$ takové, že

$$\frac{a}{\sqrt{x}} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Protože $a \neq 0$, platí

$$\frac{a}{\sqrt{x}} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}, \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Položme

$$f(x) = \left(\cos \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x, \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Pak

$$f(x) = \exp\left(x \log \cos \frac{a}{\sqrt{x}}\right), \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Jelikož

$$x \log \cos \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{\log \cos \frac{a}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{a}{\sqrt{x}} - 1} \cdot \frac{\cos \frac{a}{\sqrt{x}} - 1}{\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot x,$$

platí díky Větě 4.2.21 rovnost

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \cos \frac{a}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \cdot a^2.$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

Z Heineovy věty 4.2.16 nyní plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$



5.6.20. Příklad. Spočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{10} + x + 1) = \infty.$$

Existuje tedy $\eta \in (0, \infty)$ takové, že

$$x^2 - x + 1 > 0, \quad x^{10} + x + 1 > 0, \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Tedy je výraz v zadané limitě dobře definován na $P(\infty, \eta)$.

Pro $x \in P(\infty, \eta)$ pak máme

$$\begin{aligned} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)} &= \frac{\log(x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}))}{\log(x^{10}(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}))} \\ &= \frac{2 \log x + \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10 \log x + \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} \quad (5.57) \\ &= \frac{2 + \frac{\log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\log x}}{10 + \frac{\log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})}{\log x}}. \end{aligned}$$

Protože je logaritmus spojitá funkce na $(0, \infty)$ (viz (L4)) a $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 1$, máme z Věty 4.2.21(S)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 0.$$

Obdobně odvodíme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}) = 0.$$

Z (5.57) pak plyne díky Věť 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)} = \frac{1}{5}.$$

♣

5.6.21. Příklad. Necht $a \in (0, \infty)$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(a+x) + \log(a-x) - 2 \log a}{x^2}.$$

Řešení. Máme

$$\frac{\log(a+x) + \log(a-x) - 2 \log a}{x^2} = \frac{\log(\frac{a^2-x^2}{a^2})}{x^2} = \frac{\log(1 - \frac{x^2}{a^2})}{-\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{-1}{a^2}.$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(a+x) + \log(a-x) - 2 \log a}{x^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

♣

5.6.22. Příklad. Necht $a > 0$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz jako

$$\begin{aligned} \frac{a^x - x^a}{x - a} &= \frac{1}{x - a} (e^{x \log a} - e^{a \log x}) = \frac{e^{a \log a}}{x - a} (e^{(x-a) \log a} - e^{a(\log x - \log a)}) \\ &= \frac{e^{a \log a}}{x - a} (e^{(x-a) \log a} - 1 + 1 - e^{a(\log x - \log a)}) \\ &= a^a \left(\frac{e^{(x-a) \log a} - 1}{(x-a) \log a} \log a - \frac{e^{a(\log x - \log a)} - 1}{a(\log x - \log a)} \cdot a \cdot \frac{\log \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} \cdot \frac{x-a}{a} \cdot \frac{1}{x-a} \right) \end{aligned}$$

Protože je logaritmus prostá funkce (viz (L3)), $\log x \neq \log a$ pro $x \in P(a, a)$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{(x-a) \log a} - 1}{(x-a) \log a} = 1.$$

Obdobně odvodíme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{a(\log x - \log a)} - 1}{a(\log x - \log a)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} = 1.$$

Tedy obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = a^a (\log a - 1)$$

♣

5.6.23. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log \cos(\pi 2^x)}.$$

Řešení. Počítejme limitu

$$\lim_{y \rightarrow 2\pi} f(y),$$

kde

$$f(y) = \frac{\sin^2 y}{\log \cos y}, \quad y \in P(2\pi, \frac{\pi}{2}).$$

Pak máme

$$f(y) = \frac{\sin^2 y}{(y - 2\pi)^2} \cdot \frac{\cos y - 1}{\log \cos y} \cdot \frac{(y - 2\pi)^2}{\cos y - 1}. \quad (5.58)$$

Položme

$$h(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(y) = y - 2\pi, \quad y \in \mathbb{R}.$$

a

$$c = 2\pi, D = 0, A = 1.$$

Protože $g(y) \neq D$ pro $y \in P(2\pi, 11)$ a $\lim_{z \rightarrow D} h(z) = A$, z Věty 4.2.21(P) plyne

$$1 = A = \lim_{y \rightarrow c} (h \circ g)(y) = \lim_{y \rightarrow 2\pi} \frac{\sin(y - 2\pi)}{y - 2\pi} = \lim_{y \rightarrow 2\pi} \frac{\sin y}{y - 2\pi}.$$

Analogicky odvodíme rovnost

$$\lim_{y \rightarrow 2\pi} \frac{\cos y - 1}{(y - 2\pi)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Zjevně

$$\lim_{y \rightarrow 2\pi} \frac{\cos y - 1}{\log \cos y} = 1.$$

Z (5.58) a Věty 4.2.2 tak plyne

$$\lim_{y \rightarrow 2\pi} f(y) = 1 \cdot 1 \cdot (-2).$$

Nakonec označme

$$g(x) = \pi 2^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $g(x) \neq 2\pi$ pro $x \in P(1, 1)$, a tedy z Věty 4.2.21(P) plyne

$$-2 = \lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log \cos(\pi 2^x)}.$$

♣

5.6.24. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz na

$$\frac{\sin x}{(e^x - 1)^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Označíme-li

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x - 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

z jednostranné verze věty o aritmetice limit funkcí (viz Věta 4.2.2 a Poznámka 4.2.4), dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2} = -\infty.$$

Zadaná limita tedy neexistuje dle Věty 4.1.16.

♣

5.6.25. Příklad. Necht a, b, c jsou kladná čísla. Spočítejte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3}(a^x + b^x + c^x) \right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení. Předpokládejme, že $0 < a \leq b \leq c$ a upravme zadaný výraz na

$$\left(\frac{1}{3}(a^x + b^x + c^x) \right)^{\frac{1}{x}} = a \left(\frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x + \left(\frac{c}{a} \right)^x \right) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Označme $d_1 = \frac{b}{a}$, $d_2 = \frac{c}{a}$ a počítejme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1}{3} (1 + d_1^x + d_2^x) \right).$$

Protože $1 \leq d_1 \leq d_2$, je funkce

$$x \mapsto 1 + d_1^x + d_2^x$$

neklesající. Pokud $d_1 = d_2 = 1$, máme $a = b = c$ a zadaná limita je zjevně rovna a . Lze tedy předpokládat, že alespoň $d_2 > 1$. Pak je ale funkce

$$x \mapsto 1 + d_1^x + d_2^x$$

rostoucí na \mathbb{R} , a tedy platí

$$1 + d_1^x + d_2^x = 3 \Leftrightarrow x = 0.$$

Proto lze použít Větu 4.2.21(P) k odvození

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{1}{3} (1 + d_1^x + d_2^x) \right)}{\left(\frac{1}{3} (1 + d_1^x + d_2^x) \right) - 1} = 1.$$

Tím pádem máme

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1}{3} (1 + d_1^x + d_2^x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{1}{3} (1 + d_1^x + d_2^x) \right)}{\left(\frac{1}{3} (1 + d_1^x + d_2^x) \right) - 1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d_1^x - 1}{x} + \frac{d_2^x - 1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \log(d_1 d_2) \\ &= \log \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3}(a^x + b^x + c^x) \right)^{\frac{1}{x}} &= a \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x + \left(\frac{c}{a} \right)^x \right) \right) \right) \\ &= a \exp \left(\log \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} \right) \\ &= \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

5.6.26. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + 2^x) \log\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned} \log(1 + 2^x) \log\left(1 + \frac{3}{x}\right) &= (x \log 2 + \log(1 + 2^{-x})) \cdot \frac{\log(1 + \frac{3}{x})}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{x} \\ &= 3 \left(\log 2 + \frac{\log(1 + 2^{-x})}{x} \right) \cdot \frac{\log(1 + \frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}. \end{aligned}$$

Tedy z Věty 4.2.2 plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + 2^x) \log\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 3 \log 2.$$

5.6.27. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((x + 2) \log(x + 4) - 2(x + 1) \log(x + 1) + x \log x).$$

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned} &(x + 2) \log(x + 4) - 2(x + 1) \log(x + 1) + x \log x \\ &= x (\log(x + 4) - 2 \log(x + 1) + \log x) + 2 (\log(x + 4) - \log(x + 1)) \\ &= x \log \frac{x(x + 4)}{(x + 1)^2} + 2 \log \frac{x + 4}{x + 1} \\ &= x \frac{\log \frac{x(x + 4)}{(x + 1)^2}}{\frac{x(x + 4)}{(x + 1)^2} - 1} \cdot \frac{2x - 1}{(x + 1)^2} + 2 \log \frac{x + 4}{x + 1} \end{aligned}$$

a

$$\frac{x(x + 4)}{(x + 1)^2} \neq 1, \quad x \in P(\infty, 1),$$

máme

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} ((x + 2) \log(x + 4) - 2(x + 1) \log(x + 1) + x \log x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{(x + 1)^2} = 2. \end{aligned}$$

5.6.28. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right).$$

Řešení. Máme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} y \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin y \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\cos y} = 1.$$

Označíme-li tedy

$$f(y) = \operatorname{tg} y \left(\frac{\pi}{2} - y \right), \quad y \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad g(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

a

$$c = \infty, D = \frac{\pi}{2}, A = 1,$$

pak z Věty 4.2.25 plyne

$$1 = A = \lim_{x \rightarrow c} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right).$$

♣

5.6.29. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(a^2 + 1) + a} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2n} \right) \right)^n.$$

Řešení. Nalezněme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že platí $0 < \frac{\pi}{4} - \varepsilon < \frac{\pi}{4} + \varepsilon < 1$. Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) = \frac{\pi}{4}$, existuje $\eta \in (0, \infty)$ takové, že

$$\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \in B\left(\frac{\pi}{4}, \varepsilon\right), \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Definujme pro $x \in P(\infty, \eta)$ funkce

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x(a^2 + 1) + a}, \quad g(x) = \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) \right)^x.$$

Jelikož

$$x(a^2 + 1) + a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{a^2 + 1},$$

existuje $\delta \in (0, \eta)$ takové, že

$$x(a^2 + 1) + a \neq 0, \quad x \in P(\infty, \delta)$$

Pak pro $x \in P(\infty, \delta)$ máme

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x(a^2+1)+a}}{\frac{1}{x(a^2+1)+a}} \cdot \frac{x}{x(a^2+1)+a}.$$

Protože $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1$ (viz (C15)), dostáváme z Věty 4.2.21

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{a^2 + 1}. \quad (5.59)$$

Dále máme

$$g(x) = \exp \left(x \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) \right) \right), \quad x \in P(\infty, \eta). \quad (5.60)$$

Jestliže $a = 0$, platí $g(x) = 1$, a tedy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 1$. V dalším proto předpokládejme, že $a \neq 0$. Pro $x \in P(\infty, \eta)$ platí pak $\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \neq \frac{\pi}{2}$, a tak lze upravit argument exponenciální funkce v (5.60) takto

$$\begin{aligned} x \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) \right) &= \frac{\log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) - 1} \cdot x \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right)} \\ &= \frac{\log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) - 1} \cdot x \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{a}{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{a}{2x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{a}{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{a}{2x}}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right)} \\ &= \frac{\log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) - 1} \cdot \frac{\sqrt{2}x}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right)} \cdot \frac{\sin \frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}} \cdot \frac{a}{2x}. \end{aligned}$$

Díky Věť 4.2.21 a Věť 4.2.2 dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2x} \right) \right) = \frac{\sqrt{2} \frac{a}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = a. \quad (5.61)$$

Kombinací (5.61) a (5.59) máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \frac{e^a}{a^2 + 1}$$

(tento vzorec platí i pro $a = 0$).

Z Heineovy věty 4.2.16 nakonec obdržíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(a^2 + 1) + a} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2n} \right) \right)^n = \frac{e^a}{a^2 + 1}.$$

♣

5.6.30. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

Řešení. Protože

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin y}{\left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\cos y}{\frac{\pi}{2} - y} \right)^2 \frac{1}{1 + \sin y} = \frac{1}{2},$$

máme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\sqrt{1 - \sin y}} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2}{1 - \sin y}} = \sqrt{2}.$$

Označme

$$f(y) = \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\sqrt{1 - \sin y}}, \quad y \in P_-\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1],$$

a

$$c = 1, D = \frac{\pi}{2}, A = \sqrt{2}.$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = D, \quad g(x) < \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-1, 1) \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow D^-} f(y) = A,$$

z Věty 4.2.17 máme

$$\sqrt{2} = A = \lim_{x \rightarrow c^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

♣

5.6.31. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ nenabývá na $P(\infty, 1)$ hodnoty 1 a

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin y}{\sqrt{1-y}} = \sqrt{2}$$

dle Příkladu 5.6.30. Z Věty o limitě složené funkce 4.2.25 tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} = \sqrt{2}.$$

Dále vyjádříme

$$x \left(\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \right) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1} \sqrt{\sqrt{x^2+1} + x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}} \right) \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1+1}} = 1. \end{aligned}$$

♣

5.6.2. Derivace funkce. Při výpočtu derivace dané funkce f nejprve určíme definiční obor této funkce. V těch bodech definičního oboru, ve kterých je to možné, pak vypočteme hodnotu derivace pomocí vzorců pro derivace elementárních funkcí a vět z odstavce 5.1, zejména věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.17) a věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23). V bodech definičního oboru funkce f , v nichž tento postup z nějakého důvodu selhává, se pokusíme vypočítat jednostranné derivace podle Definice 5.1.1, případně pomocí věty o limitě jednostranných derivací (Věta 5.2.10). Máme přitom na paměti, že definiční obor derivace může být vlastní podmnožinou definičního oboru funkce.

5.6.32. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = e^{x^2+2}$.

Řešení. Položme

$$F(x) = x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{a} \quad G(y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Potom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, neboť $f = G \circ F$. Funkce F a G mají vlastní derivace na \mathbb{R} , a tak snadno spočteme derivace

$$F'(y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$G'(x) = (x^2 + 2)' = (x^2)' + 2' = 2x + 0 = 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Protože je G spojitá v každém bodě \mathbb{R} , dostaneme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23)

$$f'(x) = (F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = e^{G(x)} \cdot 2x = e^{x^2+2} \cdot 2x.$$

Definiční obor derivace funkce f je roven \mathbb{R} . ♣

5.6.33. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Řešení. Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Podle věty o derivaci součinu (Věta 5.1.17(b)) dostaneme

$$f'(x) = (x^2)'e^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})'.$$

Zbylou derivaci snadno spočítáme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) pro $F(y) = e^y$ a $G(x) = -x^2$, neboť podle derivace elementárních funkcí dostáváme

$$F'(y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$G'(x) = (-x^2)' = -(x^2)' = -2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Celkově tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} + x^2e^{G(x)}(-2x) \\ &= 2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-2x). \end{aligned}$$

Snadno určíme, že definiční obor derivace je opět celé \mathbb{R} . ♣

5.6.34. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$, platí $x \in \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Vyřešením příslušné nerovnice dostáváme $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Položme

$$F(y) = \log y \quad \text{a} \quad G(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Pro derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{1}{y}, \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \\ G'(x) &= \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pomocí věty o derivaci složené funkce dostáváme pro $x \in \mathcal{D}(f)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(G(x)) \cdot G'(x) = \frac{1}{G(x)} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{x^4 - 1}. \end{aligned}$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Definiční obor funkce $x \mapsto \frac{4x}{x^4-1}$ je sice roven $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, nicméně definiční obor derivace je menší. ♣

5.6.35. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $1 - e^{-x^2} \geq 0$, a proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Derivaci funkce f v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme dvojnásobným užitím věty o derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} (1 - e^{-x^2})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} (-e^{-x^2})(-2x) \\ &= \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}. \end{aligned}$$

V bodě 0 dopočítáme jednostranné derivace přímo podle definice:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Obdobně lze spočítat derivaci zleva za použití vztahu $h = -\sqrt{h^2}$ pro $h < 0$. Dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = -1.$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(0)$ neexistuje, ale platí $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$. ♣

5.6.36. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \min\{x, x^3\}$ v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ve kterém existuje. Pokud v některých bodech derivace neexistuje, vyšetřete existenci jednostranných derivací a pokud existují, spočítejte je.

Řešení. Funkci f můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{pro } x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1], \\ x & \text{pro } x \in [-1, 0] \cup [1, \infty). \end{cases}$$

Tedy zřejmě platí

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Zbývá vyšetřit derivaci v bodech $x = 0, \pm 1$. Protože funkce f je spojitá v bodě -1 , platí podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.10)

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3x^2 = 3, \quad f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1.$$

Odtud plyne, že $f'_-(-1)$ neexistuje. Podobně lze odvodit, že $f'(0)$ a $f'(1)$ neexistují a že platí

$$f'_-(0) = 1, \quad f'_+(0) = 0, \quad f'_-(1) = 3, \quad f'_+(1) = 1. \quad \clubsuit$$

5.6.37. Příklad. Spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ platí, že funkce f je na jistém okolí bodu x definována předpisem $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Derivace v bodě je lokální pojem (Poznámka 5.1.6(c)), a proto pro $x \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^2)' \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \left(\sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

V bodě $x = 0$ spočteme derivaci podle definice

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Věty 4.2.15, neboť funkce sinus je omezená. Platí tedy $f'(0) = 0$ a $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. ♣

5.6.38. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^{\log x}$, $x \in (0, \infty)$.

Řešení. Podle definice obecné mocniny (Definice 6.1.7(c)) platí pro každé $x \in (0, \infty)$ vztah $f(x) = e^{\log x \cdot \log x} = e^{\log^2 x}$. Derivaci spočteme pomocí věty o derivování složené funkce (Věta 5.1.23), tedy

$$f'(x) = e^{\log^2 x} \cdot (\log^2 x)' = e^{\log^2 x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pro definiční obor derivace platí $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$. ♣

5.6.39. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \arccos(1 - x^2)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a reálné číslo x splňuje nerovnosti

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$$

právě tehdy, když $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, je $\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Podle věty pro derivaci složené funkce (Věta 5.1.23), kterou lze použít pro každé $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} (1 - x^2)' = \frac{-1}{\sqrt{2x^2 - x^4}} (-2x) \\ &= \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Funkce f je na svém definičním oboru spojitá, a proto se můžeme pokusit jednostranné limity v bodech množiny $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ počítat jako limity jednostranných derivací podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.10). Dostaneme tak

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = -\sqrt{2}, \\ f'_+(-\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = -\infty, \\ f'_-(\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = \infty. \end{aligned}$$

Definičním oborem f' je tedy množina $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, přičemž hodnoty jednostranných derivací ve zbývajících bodech definičního oboru f jsou uvedeny výše. ♣

5.6.40. Příklad. Dokažte, že pro všechna $x \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x.$$

Řešení. Definiční obor funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Na každém z těchto dvou intervalů platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(\frac{1}{x} \right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

Zadaná funkce je tedy na intervalu $(0, \infty)$ konstantní podle Věty 5.2.9 a dosazením bodu $x = 1$ dostaneme

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce f je tedy rovna $\frac{\pi}{2}$ na celém intervalu $(0, \infty)$. Analogicky dosazením bodu $x = -1$ dostaneme, že f je rovna $-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

5.6.41. Příklad. Necht funkce f je definována na \mathbb{R} předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$.

Řešení. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje polynom P_n takový, že

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} P_n(\frac{1}{x}) & \text{pokud } x \neq 0, \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}$$

(zde využíváme úmluvu $f^{(0)} = f$). Toto tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Předpokládejme nyní, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3} P_n(\frac{1}{x}) \right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Označme pro $y \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(y) = -y^2 P_n'(y) + 2y^3 P_n(y).$$

Pak P_{n+1} je polynom a platí

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pišme nyní polynom P_n jako $P_n(y) = \sum_{k=0}^m a_k y^k$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Pro nenulové reálné číslo x máme rovnosti

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{k=0}^m a_k x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2), Příkladu 5.3.4 a věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.21(P)) tak dostáváme

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \sum_{k=0}^m a_k \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \right) = 0.$$

Tím je ověřen indukční krok, a tak i celé tvrzení. ♣

5.6.3. l'Hospitalovo pravidlo.

5.6.42. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}{x}.$$

Řešení. Označme

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x) \quad \text{a} \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Můžeme se tedy pokusit spočítat zadanou limitu pomocí l'Hospitalova pravidla 5.3.1. Dokážeme-li totiž existenci limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, můžeme z výše uvedeného l'Hospitalova pravidla usoudit na existenci limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, a navíc dostaneme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+(1+x)^2}(1+x)' - \frac{1}{1+(1-x)^2}(1-x)'}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{-1}{1+(1-x)^2} \right) = \frac{1}{1+1} - \frac{-1}{1+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Zadaná limita je tedy rovna 1. ♣

5.6.43. Příklad. Necht $a, b \in (0, \infty)$. Spočítejte limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

Řešení. Z Příkladu 5.3.4 a Věty 4.2.7 plyne, že pro každé $a \in (0, \infty)$ platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty.$$

Máme tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{(ax)^b} \cdot a^b = \infty.$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{(e^x)^b} = 0,$$

pomocí Věty 4.2.25 dostáváme

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^a}{(e^{\log x})^b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

♣

5.6.44. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pokud $\alpha \leq 0$, posloupnost $\{a_n\}$ podle Příkladu 5.6.43 a Věty 4.2.16 nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum a_n$ diverguje. Předpokládejme tedy, že $\alpha > 0$.

Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}}$, $x \in (2, \infty)$, dostaneme pro $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha x^{\alpha-1}(\log x)^{\beta} - \beta x^{\alpha}(\log x)^{\beta-1} x^{-1} \right] \\ &= \frac{x^{\alpha-1}(\log x)^{\beta}}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha - \beta(\log x)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-\alpha - \beta(\log x)^{-1}) = -\alpha < 0,$$

je funkce f na jistém okolí ∞ klesající. Lze tedy k vyšetření konvergence dané řady použít kondenzační kritérium (Věta 3.2.17). Máme

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n n^{\beta} (\log 2)^{\beta}}.$$

Je-li $\alpha > 1$, platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{\alpha-1})^n n^{\beta} (\log 2)^{\beta}}{(2^{\alpha-1})^{n+1} (n+1)^{\beta} (\log 2)^{\beta}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\beta} 2^{1-\alpha} = 2^{1-\alpha} < 1, \end{aligned}$$

a tedy řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje. Pokud $\alpha = 1$, řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje právě tehdy, když $\beta > 1$ (viz Větu 3.2.18).

Z výše uvedených úvah tedy vyplývá, že řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ a $\beta \in \mathbb{R}$, nebo když $\alpha = 1$ a $\beta > 1$. ♣

5.6.45. Příklad. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Řešení. Postupnou aplikací l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos(x) - 1 - 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) - e^x \sin x - 2}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cos(x) - 2e^x \sin x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

♣

5.6.46. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

Řešení. Zadaný výraz upravíme jako

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}. \quad (5.62)$$

Opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \cos x \sin x}{24x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

z (5.62) máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{3}.$$

♣

5.6.47. Příklad. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Máme

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}, \quad (5.63)$$

a

$$\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) \frac{\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1}.$$

Ukažme, že $\operatorname{arctg} x \neq x$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Označíme-li totiž $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, pak

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na \mathbb{R} , a proto z vlastnosti $f(0) = 0$ plyne

$$f(x) > 0, \quad x \in (0, \infty), \quad f(x) < 0, \quad x \in (-\infty, 0).$$

Proto $f(x) \neq 0$ na libovolném $P(0, \eta)$, a tedy $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \neq 1$ na libovolném $P(0, \eta)$. Z Věty o limitě složené funkce 4.2.21 a vlastnosti (C15) tedy dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1} = 1.$$

Dále máme pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

Z (5.63) tedy plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

♣

5.6.48. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz na

$$\begin{aligned} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1} &= \frac{e^{x \log x} - e^{\log x}}{\log x - x + 1} \\ &= e^{\log x} \frac{e^{(x-1)\log x} - 1}{(x-1)\log x} \cdot \frac{\log x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1}. \end{aligned}$$

Dále plyne z l'Hospitalova pravidla 5.3.1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} -2x = -2.$$

Z Věty 4.2.21 a 4.2.2 tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1} = -2.$$

♣

5.6.49. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz do tvaru

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\log(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)} \\ &= \frac{\log(1+x) - \log(x + \sqrt{x^2+1})}{x(x + \sqrt{x^2+1} - 1)} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1} - 1}{\log(x + \sqrt{x^2+1})} \cdot \frac{x}{\log(1+x)}. \end{aligned}$$

Zřejmě platí

$$x + \sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1} - 1}{\log(x + \sqrt{x^2 + 1})} = 1.$$

Zjevně $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log(1+x)} = 1$. Dále

$$\begin{aligned} & \frac{\log(1+x) - \log(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x(x + \sqrt{x^2 + 1} - 1)} \\ &= \frac{\log \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}} - 1} \cdot \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{x(x + \sqrt{x^2 + 1} - 1)} \\ &= \frac{\log \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}} - 1} \cdot \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(1 + \sqrt{x^2 + 1})} \cdot \frac{-x^2}{x(x + \sqrt{x^2 + 1} - 1)}. \end{aligned}$$

Protože

$$\frac{x+1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}} - 1} = 1.$$

Nakonec dostaneme z l'Hospitalova pravidla 5.3.1 rovnost

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(x + \sqrt{x^2 + 1} - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 + 1} - 1} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\log(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\log(1 + x)} \right) = -\frac{1}{2}.$$

♣

5.6.50. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \right).$$

Řešení. Nejprve upravme zadaný výraz na

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) \\ = & \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) \\ & - \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \right) \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \end{aligned}$$

První část dále upravíme

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) \\ = & \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \left(1 - \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) \\ = & \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}}{x} (x - \log e^x - \log(1 + xe^{-x})) \\ = & \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}}{x} (-\log(1 + xe^{-x})). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) = 0.$$

Dále máme pro $a = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $b = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$ rovnost

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \right) \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \\ = & \frac{a^6 - b^6}{a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \\ = & \frac{(x^2 + x + 1)^3 - (x^3 + x^2 + x + 1)^2}{a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \\ = & \frac{x + \sum_{i=1}^4 c_i x^i}{a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \end{aligned}$$

(zde c_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, jsou reálná čísla). Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\log(1 + xe^{-x})}{x} = 1$$

a

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + \sum_{i=1}^4 c_i x^i}{a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + a b^4 + b^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sum_{i=1}^4 c_i x^{i-1}}{\frac{a^5}{x} + \frac{a^4 b}{x} + \frac{a^3 b^2}{x} + \frac{a^2 b^3}{x} + \frac{a b^4}{x} + \frac{b^5}{x}} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) = -\frac{1}{6}.$$

5.6.51. Příklad. Necht' $a \in \mathbb{R}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}} \right).$$

Řešení. Je-li $a = 0$, zadaná limita se zřejmě rovná 0. V dalším výpočtu tedy předpokládejme, že $a \neq 0$.

Označme pro $x \in (|a|, \infty)$ funkce

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \log(x+a), \quad g(x) = \frac{x+a+1}{x+a} \log x.$$

Spočítejte nejdříve limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$. Máme totiž

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{x(x+a)} \left((x+a)(x+1) \log(x+a) - x(x+a+1) \log x \right) \\ &= \frac{1}{x(x+a)} \left(x^2 (\log(x+a) - \log x) + x(a+1) (\log(x+a) - \log x) \right. \\ &\quad \left. + a \log(x+a) \right) \\ &= \frac{1}{x(x+a)} \left(x^2 \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + x(a+1) \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + a \log(x+a) \right) \\ &= \frac{x}{x+a} \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{a+1}{x+a} \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{a}{x(x+a)} \log(x+a). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Označme dále pro $x \in (|a|, \infty)$

$$h(x) = x^2 \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + x(a+1) \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + a \log(x+a).$$

Pak

$$h(x) = x \left(\frac{\log\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}} \cdot a + (a+1) \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + a \cdot \frac{\log(x+a)}{x} \right).$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \begin{cases} \infty, & a > 0, \\ -\infty, & a < 0. \end{cases}$$

V obou případech tak existuje $\eta \in (|a|, \infty)$ takové, že $h(x) \neq 0$ na (η, ∞) . Tedy i

$$f(x) - g(x) = \frac{h(x)}{x(x+a)} \neq 0, \quad x \in (\eta, \infty).$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= e^{\frac{x+1}{x} \log(x+a)} - e^{\frac{x+a+1}{x+a} \log x} \\ &= e^{f(x)} - e^{g(x)} \\ &= e^{g(x)} \cdot \frac{e^{f(x)-g(x)} - 1}{x} \cdot (f(x) - g(x)). \end{aligned} \tag{5.64}$$

Dále

$$\begin{aligned} e^{g(x)}(f(x) - g(x)) &= x e^{\frac{\log x}{x+a}} \frac{1}{x(x+a)} h(x) \\ &= e^{\frac{\log x}{x+a}} \frac{h(x)}{x+a} \\ &= e^{\frac{\log x}{x+a}} \left(\frac{x}{x+a} \frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} a + \frac{x}{x+a} (a+1) \log(1+\frac{a}{x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x+a} a \log(x+a) \right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)}(f(x) - g(x)) = a.$$

Z (5.64) tedy plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}} \right) = a. \quad \clubsuit$$

5.6.4. Aplikace na vyšetřování konvergence číselných řad.

5.6.52. Věta. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, necht $A, B \in \mathbb{R}^*$ a necht $\lim a_n = A$. Necht f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu A splňující $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$. Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

- (P) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \neq A$,
- (S) $A \in \mathbb{R}$ a funkce f je v bodě A spojitá.

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = B.$$

5.6.53. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla, verze $\frac{0}{0}$, platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{2}.$$

Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy dostáváme rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Dále platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+4}} = 1.$$

Odtud a z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Zadaná řada má zřejmě všechny členy kladné a platí $\frac{1}{2} \in (0, \infty)$. Z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy vyplývá, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Tato řada ale konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{4}{3} > 1$. Tedy zadaná řada také konverguje. ♣

5.6.54. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(\frac{n^2 + 4}{n(n-1)} \right).$$

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$, platí

$$\log \left(\frac{x^2 + 4}{x(x-1)} \right) = \log \left(\frac{x^2 - x + x + 4}{x^2 - x} \right) = \log \left(1 + \frac{x+4}{x^2-x} \right).$$

Podle Příkladu 5.6.5

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

navíc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2-x} = 0$$

a pro každé $x \in P(\infty, 2)$ platí

$$\frac{x+4}{x^2-x} \neq 0.$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.21) máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{x+4}{x^2-x}\right)}{\frac{x+4}{x^2-x}} = 1.$$

Podle Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{n+4}{n^2-n}\right)}{\frac{n+4}{n^2-n}} = 1.$$

Navíc zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$, platí

$$\log\left(1 + \frac{x+4}{x^2-x}\right) > 0,$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, platí $a_n > 0$. Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium (Věta 3.2.5). Podle tohoto kritéria, varianty (a), konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-n}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+4}{n^2-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+4n}{n^2-n} = 1$$

a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.11, diverguje podle limitního srovnávacího kritéria také zadaná řada. ♣

5.6.55. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^{n+1}$. Zadanou řadu tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e - \frac{1}{x}\right) = e,$$

přičemž pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e - \frac{1}{x} \neq e$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.21, varianta (P)) tedy dostáváme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(e - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Podle (C4) a (C5) platí $\lim_{y \rightarrow 1^-} \arccos(y) = 0$ a navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\log\left(e - \frac{1}{n}\right) \neq 1$. Z Věty 5.6.52 tedy vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

Posloupnost $\left\{e - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě rostoucí. Funkce \log je na $(0, \infty)$ rostoucí podle (L3) a funkce \arccos je na $[-1, 1]$ klesající podle (C4). Posloupnost $\left\{\arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je tudíž klesající. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). ♣

5.6.56. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccotg}(n) \left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Přepíšeme zadanou řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg}(n) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Víme, že posloupnost $\{\operatorname{arccotg}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg}(n) = 0$. Z Leibnizova kritéria konvergence konvergence číselných řad (Věta 3.3.1) tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg}(n)$$

konverguje. Z Příkladu 2.4.5 víme, že posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a rostoucí. Z Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5(A)) plyne, že i zadaná řada konverguje. ♣

5.6.57. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cos(5n) \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{n+3}.$$

Řešení. Jak víme z Příkladu ??(b), řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n)$ má omezené částečné součty. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, \quad b_n = \operatorname{tg}(a_n) \quad \text{a} \quad c_n = \frac{n}{n+3}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

Odtud plyne, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim a_n = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < a_n \leq a_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} < 1 < \frac{\pi}{2},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Protože funkce tangens je rostoucí na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (viz (G18)), je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Podle (G4) je funkce tangens spojitá v bodě 0, tedy $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}(x) = 0$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \neq 0$. Podle Věty 5.6.52, varianta (P) tudíž platí

$$\lim b_n = \lim \operatorname{tg}(a_n) = 0.$$

Dle Dirichletova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (D)) je tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n) \operatorname{tg}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

konvergentní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{n}{n+3} = \frac{n+3-3}{n+3} = 1 - \frac{3}{n+3},$$

a tedy je posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí. Navíc je omezená, neboť zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{4} \leq c_n < 1.$$

Podle Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (A)) je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

5.6.58. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1} \log(100n)}{\sqrt[4]{n^3 + n} + \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} \log(100x)}{\sqrt[4]{x^3 + x} + \sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pak pro $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\left((x^3 + x)^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1)\log(100x) + (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}\frac{100}{100x}\right)\left((x^3 + x)^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}}\right) - \left((x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}\log(100x)\left(\frac{1}{4}(x^3 + x)^{-\frac{3}{4}}(3x^2 + 1) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\right]}{x^{\frac{5}{12}}\log(100x)} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{1}{3}(1 + x^{-2})^{-\frac{2}{3}}2(1 + x^{-1}) + \frac{(1 + x^{-2})^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}-1+1-\frac{4}{3}}}{\log(100x)}\right)\left((1 + x^{-2})^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\right) - (1 + x^{-2})^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}(1 + x^{-2})^{-\frac{3}{4}}3(1 + (3x)^{-1}) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-\frac{9}{4}+2}\right)\right]}{x^{\frac{5}{12}}\log(100x)} \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[\left(\frac{1}{3}(1 + x^{-2})^{-\frac{2}{3}}2(1 + x^{-1}) + \frac{(1 + x^{-2})^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}-1+1-\frac{4}{3}}}{\log(100x)}\right)\left((1 + x^{-2})^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\right) - (1 + x^{-2})^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}(1 + x^{-2})^{-\frac{3}{4}}3(1 + (3x)^{-1}) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-\frac{9}{4}+2}\right)\right] \end{aligned}$$

obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \left(\frac{2}{3} + 0\right)(1 + 0) - 1\left(\frac{3}{4} + 0\right) = -\frac{1}{12}.$$

Existuje tedy $y \in (0, \infty)$ takové, že pro $x \in (y, \infty)$ je $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající na intervalu (y, ∞) . Dále máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + x^{-2})^{\frac{1}{3}} \frac{\log(100x)}{x^{\frac{1}{12}}}}{(1 + x^{-2})^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}} = 0,$$

(použili jsme Příklad 5.3.4).

Na základě těchto výpočtů tedy vidíme, že posloupnost $\{a_n\}$ od indexu n_0 splňujícího $n_0 > y$ konverguje monotónně k 0. Dle Věty 3.3.1 tedy zadaná řada konverguje.

Řada $\sum |(-1)^n a_n| = \sum a_n$ však nekonverguje, což snadno ověříme srovnáním z řadou $\sum \frac{\log n}{n^{\frac{1}{12}}}$ (tj. použijeme Větu 3.2.5 a Příklad 5.6.44). ♣

5.6.59. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \left(\cotg \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4-2x} - \sin \frac{\pi}{2+x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Jelikož $0 < \frac{\pi}{4-2x} < \pi$ a $2+x \neq 0$ pro $x \in (-1, 1)$, je f dobře definovaná. Počítejme

$$f'(x) = \frac{-\pi}{\left(\sin \frac{\pi}{4-2x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(4-2x)^2} - \cos \frac{\pi}{2+x} \cdot \frac{-\pi}{(2+x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{-\pi}{4}$.

Dle Věty 5.3.1 proto platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x)}{1} = -\frac{\pi}{4}. \quad (5.65)$$

Existuje tedy okolí $P_+(0, \delta)$ takové, že $f(x) < 0$.

Z Heineovy věty 4.2.17 plyne, že pro $n > (\delta)^{-1}$ jsou čísla $-a_n$ kladná a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{8}.$$

Srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.5) odvodíme pomocí Věty 3.2.18 divergenci řady $\sum(-a_n)$. Zadaná řada tedy diverguje. ♣

5.6.5. Průběh funkce. Vyšetřením průběhu zadané funkce rozumíme postupné zjištění všech důležitých informací o dané funkci, díky nimž bychom na konci měli být schopni načrtnout graf funkce. Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme zejména následující její vlastnosti (uvedené pořadí je pouze orientační):

- definiční obor,
- symetrie (zjistíme, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická),
- spojitost (případně jednostranná) ve všech bodech definičního oboru,
- průsečíky s oběma souřadnými osami,
- jednostranné limity v krajních bodech definičního oboru (což mohou být i $\pm\infty$) a ve všech bodech nespojitosti,
- hodnota první derivace, případně jednostranné první derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly monotonie,
- lokální a globální extrém,
- obor hodnot,
- hodnota druhé derivace, případně jednostranné druhé derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly konvexity a konkavity,
- inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu.

5.6.60. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos \left(\frac{|4x|}{4+x^2} \right)$$

Řešení. Definičním oborem funkce \arccos je interval $[-1, 1]$. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\{x \in \mathbb{R}; -1 \leq \frac{|4x|}{4+x^2} \leq 1\}.$$

Platí tedy $x \in \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když platí následující dvě nerovnosti:

$$-1 \leq \frac{|4x|}{4+x^2} \leq 1.$$

První z nerovností platí právě tehdy, když

$$x^2 + |4x| + 4 \geq 0$$

a podobně druhá nerovnost platí právě tehdy, když

$$x^2 - |4x| + 4 \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$x^2 \pm |4x| + 4 = (|x| \pm 2)^2 \geq 0,$$

dostáváme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce $\frac{|4x|}{4+x^2}$ je spojitá na \mathbb{R} a funkce \arccos je spojitá na intervalu $[-1, 1]$. Odtud a z věty o spojitosti složené funkce plyne, že f je spojitá na \mathbb{R} .

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru, tedy v bodech $\pm\infty$. Jest

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|4x|}{4+x^2} = 0,$$

funkce \arccos je spojitá v bodě 0 a platí $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Dle věty o limitě složené funkce, varianta (S), tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Protože $f(0) = \frac{\pi}{2}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pro určení průsečíků grafu funkce s osou x musíme vyřešit rovnici $f(x) = 0$, tedy nalézt kořeny funkce f . Protože jediným kořenem funkce \arccos je bod 1, platí $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\frac{|4x|}{4+x^2} = 1$. To nastane právě tehdy, když $(|x| - 2)^2 = 0$, tedy $x = \pm 2$. Funkce f má tedy právě dva průsečíky s osou x , a to v bodech $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Funkce f je zřejmě sudá. Není lichá, neboť například není splněna podmínka $f(0) = 0$. Není ani periodická, neboť například $f(-2) = f(2) = 0$, ale žádné další kořeny funkce nemá.

Vypočítáme první derivaci funkce f . Pro $x \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ jest

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{16x^2}{(4+x^2)^2}}} \cdot \frac{4(4+x^2) - 2x \cdot 4x}{(4+x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{\sqrt{(x^2 - 4)^2}} \cdot \frac{4}{4+x^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (0, 2) \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (2, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Uvedený výpočet není možné použít pro $x = 2$. V tomto bodě musíme spočítat jednostranné derivace. Jak už víme, funkce f je v bodě 2 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4}{4+x^2} = -\frac{1}{2}$$

a

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Protože $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, funkce f nemá v bodě 2 derivaci.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ spočítáme $f'(x)$ podobně jako výše, anebo použijme Příklad 5.5.3. Obdržíme tak

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (-2, 0). \end{cases}$$

a

$$f'_-(-2) = -\frac{1}{2}, \quad f'_+(-2) = \frac{1}{2}.$$

Funkce f nemá tedy v bodě -2 derivaci.

Posledním bodem, v němž jsme dosud nevyšetřili hodnoty derivace (či jednostranných derivací) funkce f , je bod 0. Funkce f je v bodě 0 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{4+x^2} = 1$$

a

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4}{4+x^2} = -1.$$

Protože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, funkce f nemá v bodě 0 derivaci.

Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Vyšetříme intervaly monotonicity funkce f . Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\forall x \in (-\infty, -2): f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (-2, 0): f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in (0, 2): f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (2, \infty): f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonicity je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -2]$,
- rostoucí na $[-2, 0)$,
- klesající na $[0, 2]$,
- rostoucí na $[2, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f . Z výše uvedených intervalů monotonicity vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna $\frac{\pi}{2}$, a lokální minima v bodech ± 2 , přičemž hodnota obou těchto minim je rovna 0. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému, a tedy funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedené body $-2, 0, 2$. Z tohoto pozorování a z intervalů monotonicity dále plyne, že všechny tři uvedené lokální extrémy jsou ve skutečnosti globální.

Nyní určíme obor hodnot funkce f . Z globality extrémů $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $[\pm 2, 0]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Protože f je spojitá na $[0, 2]$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ a $f(2) = 0$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[0, \frac{\pi}{2}] \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f . Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech $2, 0, -2$. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8x}{(4+x^2)^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2), \\ \frac{-8x}{(4+x^2)^2} & \text{pokud } x \in (-2, 0) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\forall x \in (-\infty, -2): f''(x) < 0,$$

$$\forall x \in (-2, 0): f''(x) > 0,$$

$$\forall x \in (0, 2): f''(x) > 0,$$

$$\forall x \in (2, \infty): f''(x) < 0.$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, -2]$,
- ryze konvexní na $[-2, 0)$,
- ryze konvexní na $[0, 2]$,
- ryze konkávní na $[2, \infty)$.

Z těchto výsledků ovšem nevyplývá, zda je nebo není funkce f konvexní na celém intervalu $[-2, 2]$. Tuto otázku musíme vyšetřit. Povšimneme si, že platí $f(-2) = f(2) = 0$ a zároveň $f(0) > 0$. Dosadíme-li $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 2$ do podmínky (ii) Lemmatu 5.4.9, zjistíme, že tato podmínka není splněna, neboť by muselo platit

$$\frac{f(0) - f(-2)}{2} \leq \frac{f(2) - f(0)}{2},$$

a tedy $\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4}$. Tato podmínka je ale podle lemmatu ekvivalentní konvexitě funkce f na intervalu $[-2, 2]$, takže jsme dokázali, že f na tomto intervalu není konvexní.

(Příklad 5.5.8 nabízí alternativní postup ukazující, že f není konvexní na intervalu $[-2, 2]$.)

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f . Jest

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ i v ∞ asymptotu $\frac{\pi}{2}$ (konstantní funkci). \clubsuit

5.6.61. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg}(|x - \sqrt{3}|).$$

Řešení. Definičním oborem funkce arctg je množina \mathbb{R} , takže $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce arctg i funkce $|\cdot|$ (absolutní hodnota) jsou spojité na \mathbb{R} . Odtud, z věty o aritmetice spojitosti a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na \mathbb{R} .

Funkce f není lichá například proto, že $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \neq 0$. Funkce f není ani sudá, neboť například $f(-\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$, ale $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, a tedy $f(-\sqrt{3}) \neq -f(\sqrt{3})$. Periodicitu funkce f vyšetříme později.

Protože $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{3}]$. Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom buď platí $x = 0$ a $f(0) = \frac{\pi}{3} > 0$ nebo $x \neq 0$ a $f(x) \geq |x| > 0$. Platí tedy $f(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x .

Zřejmě platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Necht nejprve $x \in (-\infty, 0)$. Potom $f(x) = -x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{-2 - (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní necht $x \in (0, \sqrt{3})$. Potom $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Konečně necht $x \in (\sqrt{3}, \infty)$. Potom $f(x) = x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{2 + (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní vyšetříme existenci derivace v bodech 0 a $\sqrt{3}$, pro které jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v těchto bodech. Funkce f je v obou těchto bodech spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 - (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = -\frac{5}{4}, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{3}{4}, \\ f'_-(\sqrt{3}) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = 0, \\ f'_+(\sqrt{3}) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{2 + (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = 2. \end{aligned}$$

Z uvedených výsledků vyplývá, že funkce f nemá první derivaci v bodech 0 a $\sqrt{3}$. Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f . Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\forall x \in (-\infty, 0): f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (0, \sqrt{3}): f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in (\sqrt{3}, \infty): f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, 0]$,
- rostoucí na $[0, \sqrt{3}]$,
- rostoucí na $[\sqrt{3}, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f . Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\frac{\pi}{3}$. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Zbývá vyšetřit bod $x = \sqrt{3}$. V tomto bodě ale funkce f nemá lokální extrém, protože f je rostoucí na pravém okolí tohoto bodu a klesající na levém okolí tohoto bodu. Tudíž funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedený bod $\sqrt{3}$.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f . Z globality minima $[0, \frac{\pi}{3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [\frac{\pi}{3}, \infty)$. Protože f je spojitá na $[0, \infty]$, $f(0) = \frac{\pi}{3}$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[\frac{\pi}{3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [\frac{\pi}{3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f . Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech 0, $\sqrt{3}$. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$.

Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt{3}), \\ \frac{-2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pokud } x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\forall x \in (-\infty, 0): f''(x) < 0,$$

$$\forall x \in (0, \sqrt{3}): f''(x) < 0,$$

$$\forall x \in (\sqrt{3}, \infty): f''(x) < 0.$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, \sqrt{3}]$
- ryze konkávní na $[\sqrt{3}, \infty)$.

Ověřme, že funkce f není konkávní na intervalu $[0, \infty)$. Byla-li by totiž f konkávní na tomto intervalu, platila by podle Příkladu 5.5.8 nerovnost $f'_-(\sqrt{3}) \geq f'_+(\sqrt{3})$. Tak však dle předchozích výpočtů neplatí.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}(f')$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f . Jest

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})}{x} = -1$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-1) \cdot x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3}) + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ asymptotu $-x + \frac{\pi}{2}$. Podobně platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})}{x} = 1$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 1 \cdot x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3}) - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Funkce f má tedy v ∞ asymptotu $x + \frac{\pi}{2}$. ♣

5.6.62. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log(4 + x^2) + 3 \operatorname{arccotg}\left(\frac{2}{x}\right).$$

Řešení. Definičním oborem funkce \log je interval $(0, \infty)$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $4+x^2 \in (0, \infty)$. Definičním oborem funkce $\operatorname{arccotg}$ je \mathbb{R} . Definičním oborem funkce $x \mapsto \frac{2}{x}$ je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy celkem platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Podle věty o spojitosti složené funkce je funkce f spojitá na svém definičním oboru, tedy na množině $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru. Jest

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) &= \log(4) + 3\pi, \\ \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) &= \log(4), & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty. \end{aligned}$$

Z výše uvedených limit funkce f v bodech $\pm\infty$ vyplývá, že funkce není periodická ani lichá. Z jednostranných limit v bodě 0 dále vyplývá, že funkce f není ani sudá.

Vzhledem k tomu, že $0 \notin \mathcal{D}(f)$, funkce f nemá průsečík s osou y . Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $4+x^2 > 1$. Protože je funkce \log je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí, platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ také $\log(4+x^2) > \log(1) = 0$. Dále víme, že $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$. Celkem tedy pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ dostáváme

$$f(x) \geq \log(4+x^2) > 0.$$

Odtud vyplývá, že funkce f nemá žádný průsečík s osou x .

Vypočítáme první derivaci funkce f . Jest

$$f'(x) = \frac{2x}{4+x^2} + \frac{-3}{1+\frac{4}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{2x+6}{x^2+4} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f . Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\forall x \in (-\infty, -3): f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (-3, 0): f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in (0, \infty): f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -3]$,
- rostoucí na $[-3, 0)$,
- rostoucí na $(0, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f . Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální minimum v bodě $x = -3$, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\log(13) + 3 \operatorname{arccotg}(\frac{-2}{3})$. Toto minimum není globální, protože $\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) < f(-3)$, a tedy na pravém prstencovém okolí bodu 0 existuje bod y takový, že $f(y) < f(-3)$. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Tudíž funkce f nemá žádné jiné lokální extrémy než výše uvedený bod -3 . Globální extrémy tedy tato funkce nemá vůbec.

Nyní určíme obor hodnot funkce f . Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že

$$f(x) \in (f(-3), \infty) \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0)$$

a

$$f(x) \in (\log(4), \infty) \quad \text{pro } x \in (0, \infty).$$

Protože $f(-3) > \log(4)$, vyplývá odtud, že $\mathcal{H}(f) \subset (\log(4), \infty)$. Protože f je spojitá na $(0, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \log(4)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezíhodnot, že $(\log(4), \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = (\log(4), \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f . Jest

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x^2 + 6x - 4}{(x^2 + 4)^2} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bude užitečné si uvědomit, že

$$x^2 + 6x - 4 = (x - x_1)(x - x_2), \quad \text{kde } x_1 = -3 - \sqrt{13}, \quad x_2 = -3 + \sqrt{13},$$

a že

$$x_1 < -3 < 0 < x_2.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\infty, x_1): f''(x) < 0, \\ \forall x \in (x_1, 0): f''(x) > 0, \\ \forall x \in (0, x_2): f''(x) > 0, \\ \forall x \in (x_2, \infty): f''(x) < 0. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, x_1]$,
- ryze konvexní na $[x_1, 0)$,
- ryze konvexní na $(0, x_2]$,
- ryze konkávní na $[x_2, \infty)$.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body x_1 a x_2 . Víme, že existují vlastní derivace $f'(x_1)$ a $f'(x_2)$ a f' je zjevně spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z nerovností (5.66) vidíme, že jsou splněny podmínky Věty 5.4.20 (postačující podmínky pro inflexi). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f . Z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f . Jest

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \infty.$$

Funkce f tedy nemá asymptotu v $-\infty$ ani v ∞ .

Závěrem ještě určíme jednostranné limity funkce f' v bodě 0. Tato informace se bude při načrtu grafu funkce f hodit. Jest

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

♣

5.6.63. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x^2 - x + 2)e^{|x+3|-3}.$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Z věty o aritmetice spojitostí a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na \mathbb{R} .

Protože $f(0) = 2$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, 2]$. Rovnice $x^2 - x + 2 = 0$ nemá žádné reálné řešení a navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e^{|x+3|-3} > 0$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x .

Zřejmě platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Z toho vyplývá, že f není ani periodická, ani lichá. Není ani sudá, neboť například $f(-3) = 14e^{-3}$, ale $f(3) = 8e^3$, a tedy $f(-1) \neq -f(1)$.

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Necht' nejprve $x \in (-\infty, -3)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^{-x-6}$, a tedy

$$f'(x) = (-x^2 + 3x - 3)e^{-x-6}.$$

Nyní necht' $x \in (-3, \infty)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$, a tedy

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

Zbývá vyšetřit existenci derivace v bodě $x = -3$, pro který jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v tomto bodě. Funkce f je v bodě $x = -3$ spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x^2 - x + 2)e^{-x-6} = -21e^{-3},$$

$$f'_+(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 - x + 2)e^x = 7e^{-3}.$$

Protože $f'_-(-3) \neq f'_+(-3)$, funkce f nemá první derivaci v bodě -3 . Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Vyšetříme intervaly monotonicity funkce f . Protože ani jeden z mnohočlenů $(-x^2 + 3x - 3)$ a $(x^2 + x + 1)$ nemá žádný reálný kořen, plyne z výše uvedeného výpočtu, že

$$\forall x \in (-\infty, -3): f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (-3, \infty): f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonicity je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -3]$,

- rostoucí na $[-3, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f . Z výše uvedených intervalů monotonic vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě -3 , přičemž hodnota tohoto minima je rovna $14e^{-3}$. Z těchto intervalů monotonic též plyne, že f nemá jiné globální a ani lokální extrémy.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f . Z globality minima $[-3, 14e^{-3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [14e^{-3}, \infty)$. Protože f je spojitá na $(-\infty, -3]$, $f(-3) = 14e^{-3}$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[14e^{-3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [14e^{-3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f . Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodě -3 . Necht $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x-6}(-2x+3) & \text{pokud } x \in (-\infty, -3), \\ e^x(x+2)(x+1) & \text{pokud } x \in (-3, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\infty, -3): f''(x) &> 0, \\ \forall x \in (-3, -2): f''(x) &> 0, \\ \forall x \in (-2, -1): f''(x) &< 0, \\ \forall x \in (-1, \infty): f''(x) &> 0. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konvexní na $(-\infty, -3]$,
- ryze konvexní na $[-3, -2]$,
- ryze konkávní na $[-2, -1]$,
- ryze konvexní na $[-1, \infty)$.

Protože $f'_-(-3) \leq f'_+(-3)$, je f dle Příkladu 5.5.8 ryze konvexní na intervalu $(-\infty, -2]$.

Necht $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. Potom buď $x = -3$ a neexistuje $f'(-3)$ nebo $x \neq -3$ a platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body $x_1 = -2$ a $x_2 = -1$. Víme, že f' existuje a spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Díky (5.67) jsou splněny podmínky Věty 5.4.20 (postačující podmínky pro inflexní). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f a z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f . Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

funkce f nemá v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu. ♣

5.6.64. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{\sqrt{x} - 3}}.$$

Řešení. Zadaná funkce je zřejmě dobře definovaná na $\mathbb{R} \setminus \{27\}$. Dále je díky Větám 4.2.5 a 4.3.3 na svém definičním oboru spojitá. Při výpočtu limit v krajních bodech definičního oboru dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt{x}}}} = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt{x}}}} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 27^+} f(x) &= \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 27^-} f(x) = -\infty. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f)$ není symetrický a ani periodický, funkce není ani sudá, ani lichá, či periodická.

Při výpočtu první derivace funkce f můžeme v bodech $\mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$ použít Větu 5.1.17 a obdržíme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^{\frac{10}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}} \right)' \\ &= \frac{\frac{10}{9} x^{\frac{1}{9}} \left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{10}{9}} \frac{1}{3} \left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{x^{\frac{1}{9}}}{3 \left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{4}{3}}} \left(3x^{\frac{1}{3}} - 10\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 27\}. \end{aligned}$$

V bodě 0 dostaneme

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{9}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\infty, 0): f'(x) &> 0, \\ \forall x \in (0, 27): f'(x) &< 0, \\ \forall x \in \left(27, \frac{1000}{27}\right): f'(x) &< 0, \\ \forall x \in \left(\frac{1000}{27}, \infty\right): f'(x) &> 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonicity je tedy funkce f

- rostoucí na $(-\infty, 0]$,
- klesající na $[0, 27]$,
- klesající na $(27, \frac{1000}{3}]$,
- rostoucí na $[\frac{1000}{3}, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f . Vzhledem k (5.68) nemá f globální extrémy. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna 0, a má lokální minimum v bodě $\frac{1000}{27}$, přičemž hodnota tohoto minima je $\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}$. Z těchto intervalů též vyplývá, že f jiných lokálních extrémů nemá.

Uurčíme nyní $\mathcal{H}(f)$. Jelikož je f spojitá na intervalu $(-\infty, 27)$ i na intervalu $(27, \infty)$, dostáváme kombinací Věty 4.3.6, (5.68) a znalosti lokálních extrémů f , že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0] \cup [\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}, \infty).$$

Druhou derivaci funkce f spočteme v bodech $\mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$. Pro tyto body platí

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{4}{3}}} \right)' \\ &= \frac{\left(\frac{12}{9}x^{-\frac{5}{9}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{9}} \right) (x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{4}{3}} - (3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}) \frac{4}{3} (x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{8}{3}}} \\ &= \frac{(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{8}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{8}{3}}} \left(\left(\frac{4}{3}x^{\frac{2}{9}} - \frac{10}{3} \right) (x^{\frac{1}{3}} - 3) - \frac{4}{9}x^{\frac{2}{9}} (3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}) \right) \\ &= \frac{(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{8}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{8}{3}}} (-2x^{\frac{1}{3}} + 10). \end{aligned}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\infty, 0): f''(x) &< 0, \\ \forall x \in (0, 27): f''(x) &< 0, \\ \forall x \in (27, 125): f''(x) &> 0, \\ \forall x \in (125, \infty): f''(x) &< 0. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Podle Věty 5.4.14 je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, 27]$,
- ryze konvexní na $(27, 125]$,
- ryze konkávní na $[125, \infty)$.

Jelikož je $f'(0) = 0$, je podle Příkladu 5.5.8 f ryze konkávní na $(-\infty, 27)$. Dále z Věty 5.4.20 plyne, že bod 125 je inflexním bodem funkce f . Vzhledem k (5.69) funkce f jiných inflexních bodů nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f . Jest

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} - y^3 \right) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}} - y^3 (y-3)^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^3 (y - (y-3))}{(y-3)^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} (y-3)^{\frac{1}{3}} + (y-3)^{\frac{2}{3}} \right)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{3y^2}{(1-3y^{-1})^{\frac{1}{3}} \left(1 + (1-3y^{-1})^{\frac{1}{3}} + (1-3y^{-1})^{\frac{2}{3}} \right)} = \infty. \end{aligned}$$

Z této limity a Věty 4.2.21 nyní plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}} - x \right) = \infty.$$

Z těchto výpočtů plyne, že f nemá v ∞ asymptotu.

Obdobně obdržíme, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1,$$

dále

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} - y^3 \right) = \infty,$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \infty.$$

Ani v $-\infty$ tedy funkce f asymptotu nemá. ♣

5.6.65. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{\log^2 x}}, & x \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ 0, & x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$, nemůže být f ani sudá, lichá či periodická. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0,$$

je f spojitá v bodech 0 a 1. Zřejmě je též spojitá v bodech množiny $(0, 1) \cup (1, \infty)$, a tedy je spojitá na $\mathcal{D}(f)$. Limita v nekonečnu je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = \infty.$$

Počítáme-li první derivaci funkce f , obdržíme

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} + x e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \cdot \frac{2}{x} \cdot (\log x)^{-3} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} (\log x)^{-3} [\log^3 x + 2], \quad x \in (0, 1) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Přímo z definice spočítáme

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1.$$

Konečně díky Větě 5.2.10 dostáváme

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\log^3 x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\log^{-4} x}{e^{\log^{-2} x}} \log^{-3} x \log^4 x \right) = 0.$$

(Při výpočtu jsme použili Větu 4.2.21 a fakt $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$, viz Příklad 5.6.43.)
Tedy jest

$$\forall x \in (0, e^{-\sqrt[3]{2}}): f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in (e^{-\sqrt[3]{2}}, 1): f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (1, \infty): f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonicity je tedy funkce f

- rostoucí na $[0, e^{-\sqrt[3]{2}}]$,
- klesající na $[e^{-\sqrt[3]{2}}, 1]$,
- rostoucí na $[1, \infty)$.

V bodech 0 a 1 má tedy funkce f globální minimum o hodnotě 0, v bodě $e^{-\sqrt[3]{2}}$ má lokální maximum. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, funkce f nemá globální maximum.

Z těchto úvah a Věty 4.3.4 plyne, že $\mathcal{H}(f) = [0, \infty)$.

Pro $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ spočteme

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \left(2 \log^{-3} x \cdot \frac{1}{x} \right) (1 + 2 \log^{-3} x) + e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \log^{-4} x \frac{-6}{x} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \frac{2}{x} \log^{-6} x [\log^3 x + 2 - 3 \log^2 x]. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$y^3 - 3y^2 + 2 = (y - 1)(y^2 - 2y + 2) = (y - 1)(y - (1 + \sqrt{3}))(y - (1 - \sqrt{3})),$$

máme

$$\begin{aligned}
 \forall x \in (0, e^{1-\sqrt{3}}): f''(x) &< 0, \\
 \forall x \in (e^{1-\sqrt{3}}, 1): f''(x) &> 0, \\
 \forall x \in (1, e): f''(x) &> 0, \\
 \forall x \in (e, e^{1+\sqrt{3}}): f''(x) &< 0, \\
 \forall x \in (e^{1+\sqrt{3}}, \infty): f''(x) &> 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.70}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $[0, e^{1-\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, 1]$,
- ryze konvexní na $[1, e]$,
- ryze konkávní na $[e, e^{1+\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1+\sqrt{3}}, \infty)$.

Díky Příkladu 5.5.8 je funkce f ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, e]$. Z Věty 5.4.20 plyne, že $e^{1-\sqrt{3}}, e, e^{1+\sqrt{3}}$ jsou inflexní body funkce f . V bodě 1 má tečna ke grafu funkce f tvar $t(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, z čehož přímo z definice plyne, že 1 není inflexní bod f . Konečně můžeme z (5.70) usoudit, že jiné než výše uvedené inflexní body funkce f nemá.

Zjistíme nyní, zdali má funkce f v nekonečnu asymptotu. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x} \right) (-\log^{-2} x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\log^{-2} x} = -\infty,
 \end{aligned}$$

funkce f nemá v nekonečnu asymptotu. (Při výpočtu jsme užili Příklad 5.6.43.) ♣

5.6.66. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{6 \sin x}.$$

Řešení. Definiční obor funkce f je množina

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (1+k)\pi)$$

a f je zjevně na $\mathcal{D}(f)$ spojitá.

Vzhledem k tomu, že sinus je lichá funkce, je f též lichá. Navíc je periodická s periodou 2π . Omezíme se tedy při vyšetřování průběhu f na množinu $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Cenným vodítkem nám přitom bude právě lichost zadané funkce.

Máme

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \infty. \quad (5.71)$$

Platí

$$f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{6 \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \left(\sin^2 x - \frac{1}{6} \right), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Označme $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$ a necht

$$x_1 = -\pi + \alpha, \quad x_2 = -\alpha, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \pi - \alpha.$$

Tedy

- $f' > 0$ na intervalech $(-\pi, x_1)$, $(-\frac{\pi}{2}, x_2)$, $(x_3, \frac{\pi}{2})$, (x_4, π) a
- $f' < 0$ na intervalech $(x_1, -\frac{\pi}{2})$, $(x_2, 0)$, $(0, x_3)$, $(\frac{\pi}{2}, x_4)$.

Podle věty o vztahu derivace a monotonicity je tedy funkce f

- rostoucí na intervalech $(-\pi, x_1]$, $[-\frac{\pi}{2}, x_2]$, $[x_3, \frac{\pi}{2}]$, $[x_4, \pi]$ a
- klesající na $[x_1, -\frac{\pi}{2}]$, $[x_2, 0)$, $(0, x_3]$, $[\frac{\pi}{2}, x_4]$.

V bodech $-\frac{\pi}{2}, x_3, x_4$ má lokální minima, přičemž $f(x_3) = f(x_4) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{7}{6}$, a v bodech $x_1, x_2, \frac{\pi}{2}$ má lokální maxima, přičemž $f(x_1) = f(x_2) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{7}{6}$.

Z právě provedených úvah, Věty 4.3.4 a (5.71) plyne, že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty).$$

Druhá derivace funkce f je pak pro $x \in \mathcal{D}(f)$ rovna

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\cos x \left(1 - \frac{1}{6 \sin^2 x} \right) \right)' \\ &= (-\sin x) \left(1 - \frac{1}{6 \sin^2 x} \right) + \cos x \frac{-2}{6} (\sin x)^{-3} \cos x \\ &= \frac{-6 \sin^4 x \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{6 \sin^3 x} \\ &= \frac{-6 \sin^4 x - \sin^2 x + 2}{6 \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Jelikož rovnice

$$-6y^2 - y + 2 = 0$$

má kořeny $-\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$, hledáme ta čísla x , pro která $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Zajímá nás tedy množina $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$. Protože je

- $f'' > 0$ na intervalech $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- $f'' < 0$ na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$,

je podle Věty 5.4.14 funkce f

- ryze konvexní na intervalech $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$, $(0, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- ryze konkávní na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4}]$, $[-\frac{\pi}{4}, 0)$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Dle Věty 5.4.20 jsou body $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ inflexními body funkce f . Vzhledem ke znaménku druhé derivace jiných inflexních bodů funkce f nemá, viz Věta 5.4.18.

Asymptoty zřejmě nemá smysl vyšetřovat, a tedy zbývá pouze načrtnout graf. ♣

5.6.67. Příklad. Vyšetřete průběh funkce zdané parametricky rovnicemi

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přesněji se požaduje následující úvaha. Ukažte, že funkce $\varphi(t) = t - \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, je rostoucí a zobrazuje \mathbb{R} na \mathbb{R} . Existuje proto její inverzní funkce $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\psi(t) = 1 - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce φ i ψ jsou nekonečně diferencovatelné a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = -\infty.$$

Dále

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy $\varphi' > 0$ na intervalech $(2k\pi, 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má derivaci rovnou 0. Funkce φ je proto rostoucí na \mathbb{R} a díky Větě 4.3.4 je $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tím je zaručena existence funkce $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Navíc je φ^{-1} spojitá díky Větě 4.3.13.

Ukažme, že f je 2π -periodická. Necht $x \in \mathbb{R}$ je libovolné a $t \in \mathbb{R}$ splňuje $\varphi(t) = x$. Pak též

$$\varphi(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin t = x + 2\pi.$$

Tedy

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = \psi(t) = \psi(t + 2\pi) = \psi(\varphi^{-1}(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi).$$

Stačí tedy vyšetřit průběh funkce na intervalu $[0, 2\pi]$.

Podle Věty 5.1.26 spočteme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\psi(\varphi^{-1}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \\ &= \sin(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Oznančíme-li $t = \varphi^{-1}(x)$, je výraz $\frac{\sin t}{1 - \cos t}$ kladný pro $t \in (0, \pi)$, záporný pro $t \in (\pi, 2\pi)$ a nulový pro $t = \pi$. Tedy $f' > 0$ na intervalu $(0, \pi)$, $f' < 0$ na intervalu

$(\pi, 2\pi)$ a $f'(x) = 0$ pro $x = \pi$. Jelikož f je spojitá, můžeme použít Větu 5.2.10 a odvodit pomocí Věty 4.2.25

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t^2}{1 - \cos t} \cdot \frac{1}{t} = \infty. \end{aligned}$$

Obdobně odvodíme (například podle Věty 5.3.1)

$$f'_-(2\pi) = \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} \frac{\cos t}{\sin t} = -\infty.$$

Z těchto výpočtů nyní vidíme, že f roste na intervalu $[0, \pi]$ a klesá na intervalu $[\pi, 2\pi]$. Dále má v bodě π globální maximum o hodnotě 2. Vzhledem k tomu, že f je kladná na intervalu $(0, 2\pi)$, má f v bodech 0 a 2π globální minima splňující $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Vzhledem k tomu, že f je jakožto složení spojitých funkcí spojitá, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(f) = [0, 2]$.

K výpočtu f'' opět použijeme Větu 5.1.26. Nejprve označme $\omega(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, $t \in (0, 2\pi)$. Pak

$$\omega'(t) = \frac{-1}{1 - \cos t}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \right)' = (\omega(\varphi^{-1}(x)))' \\ &= \omega'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = \frac{-1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \frac{-1}{(1 - \cos(\varphi^{-1}(x)))^2}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Tedy $f'' < 0$ na $(0, 2\pi)$, a tedy je f ryze konkávní na $[0, 2\pi]$ (viz Věta 5.4.14).

Vzhledem k její periodicitě nemá asymptoty, viz Příklad 5.5.7. ♣

Elementární funkce

Již v první kapitole jsme se zabývali elementárními funkcemi. Uvedli jsme však pouze některé jejich vlastnosti a jejich konstrukcí jsme se nezabývali. Výsledky, které jsme odvodili v předchozích kapitolách, nám nyní umožní elementární funkce zkonstruovat a přesně odvodit jejich základní vlastnosti.

6.1. Exponenciální funkce a logaritmus

6.1.1. Označení. V následující části textu, ale i později, budeme pracovat s nekonečnými řadami tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde x i a_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla. Pro $x = 0, n = 0$, pak ale musíme uvažovat výraz $a_0 0^0$. Symbol 0^0 není obecně definován, zde však bude označovat číslo 1. Tato konvence umožňuje místo komplikovanějšího zápisu $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ psát pouze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

6.1.2. Definice. Exponenciální funkci \exp definujme pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.1)$$

Místo $\exp(x)$ budeme pro jednoduchost zápisu často psát $\exp x$.

6.1.3. Věta (základní vlastnosti funkce \exp). Funkce $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dobře definována a splňuje

$$(E1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$

$$(E2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Důkaz. Z Příkladu 3.9.23 vyplývá, že řada na pravé straně rovnosti (6.1) je absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce \exp je tedy předpisem (6.1) dobře definována na množině \mathbb{R} .

Zvolme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom z binomické věty (Věta 1.5.5) plyne, že

$$\exp(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{n-k} y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.$$

Výraz na pravé straně předchozí vysazené formule je Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ podle Definice 3.6.1. Protože, jak již víme, jsou obě tyto řady

absolutně konvergentní (stačila by jedna), plyne z Mertensovy věty (Věta 3.6.2), že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}$ je konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right),$$

tedy $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$. Odtud plyne tvrzení (E1).

Zbývá dokázat tvrzení (E2). Necht' $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$. Potom podle (6.1) platí:

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\exp x - 1 - x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \left| x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right|.$$

Protože $|x| \leq 1$ a $n-2 \geq 0$ pro každé $n \geq 2$, dostáváme z Věty 3.4.3 a Příkladu 3.8.7, že

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n!} \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-2)|x|.$$

Zřejmě platí $\lim_{x \rightarrow 0} (e-2)|x| = 0$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání (Věta 4.2.9) platí také $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = 0$. Podle Věty 4.1.18 tudíž platí $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right) = 0$. Odtud plyne tvrzení (E2). ■

6.1.4 (vlastnosti exponenciální funkce). Nyní uvedeme několik vlastností exponenciální funkce, které odvodíme pouze z výroků (E1) a (E2). To znamená, že se nebudeme odvolávat na předpis (6.1) ale pouze na (E1) a (E2). Tento přístup nám později umožní dokázat, že exponenciální funkce je svými vlastnostmi (E1) a (E2) jednoznačně určena.

(E3) Platí $\exp(0) = 1$.

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0+0) = (\exp(0))^2$. To znamená, že buď $\exp(0) = 1$, nebo $\exp(0) = 0$. Předpokládejme, že $\exp(0) = 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle (E1) platí $\exp(x) = \exp(x+0) = \exp(x)\exp(0) = 0$. Tedy z (E2) vyplývá, že $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x}$, což je spor. Platí tedy $\exp(0) = 1$.

(E4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

Necht' $x \in \mathbb{R}$. Potom podle definice derivace a (E1) platí

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)\exp(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}. \end{aligned}$$

Odtud podle (E3) a (E2) plyne, že

$$\exp'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

(E5) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Z (E1) a (E3) plyne $1 = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$. Odtud plyne tvrzení.

(E6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Z (E5) plyne $\exp(x) \neq 0$. Dle (E1) platí

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

(E7) Funkce \exp je spojitá na \mathbb{R} .

Podle (E4) má funkce \exp vlastní derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.1.15.

(E8) Funkce \exp je rostoucí na \mathbb{R} .

Podle (E3) a (E6) platí $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.2.6.

(E9) Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

Z (E3) a (E8) plyne $\exp(1) > \exp(0) = 1$. Odtud, z (E1) a Příkladu 2.3.35 dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(1))^n = \infty.$$

To znamená, že funkce \exp není shora omezená. Zároveň je podle 6:P:vlastnost-E8 rostoucí, a tedy z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.26) plyne, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$. Podle (E5), Věty 4.2.21 a již dokázané části tvrzení dále platí, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Tím jsou dokázána obě požadovaná tvrzení.

(E10) Platí $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

Podle (E7) je funkce \exp spojitá, a tedy podle Věty 4.3.6 je množina $\mathcal{H}(\exp)$ interval. Podle (E6) pak platí $\mathcal{H}(\exp) \subset (0, \infty)$. Díky (E9) pak dostáváme $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

6.1.5. Věta. Existuje právě jedna funkce definovaná na \mathbb{R} splňující podmínky (E1) a (E2).

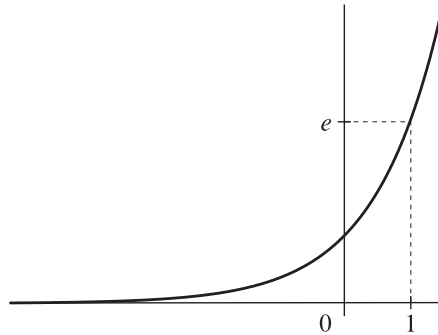
Důkaz. Existence funkce splňující podmínky (E1) a (E2) plyne z Definice 6.1.2 a Věty 6.1.3. Dokážeme nyní její jednoznačnost.

Předpokládejme, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $f(x+y) = f(x)f(y)$ a $g(x+y) = g(x)g(y)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = 1$. Ukážeme, že pak již nutně platí $f = g$.

Z předchozích úvah vyplývá, že funkce f a g splňují všechny podmínky (E3)–(E10), neboť k jejich odvození jsme využili pouze podmínky (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = g(0) = 1$ podle (E3) a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = f(x)$ a $g'(x) = g(x)$ podle (E4). Z podmínky (E6) vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) \neq 0$. Pomocí Věty 5.1.17(c) tudíž dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Podle Věty 5.2.9 je funkce $\frac{f}{g}$ konstantní, tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{f(x)}{g(x)} = c$. Protože $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$, platí $c = 1$. Odtud plyne, že $f = g$. Tvrzení je dokázáno. ■



OBRÁZEK 1. Graf exponenciální funkce

6.1.6. Poznámka. Podle Příkladu 3.8.7 platí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ze vzorce (6.1) tedy plyne

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

6.1.7. Definice.

- (a) Funkce $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci \exp . Nazývá se **přirozeným logaritmem**.
 (b) Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme funkci $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Funkci \log_a nazýváme **logaritmem o základu a** . V případě $a = e$ píšeme pouze \log místo \log_e .

- (c) Necht $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.
- (d) Necht $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.
- (e) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, **n -tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, **n -tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0, \infty)$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0, \infty)$.

6.1.8 (vlastnosti přirozeného logaritmu).

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

Platí $\mathcal{D}(\log) = \mathcal{H}(\exp)$, a proto tvrzení plyne z (E10).

(L2) Platí $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$.

Tvrzení plyne z faktu $\mathcal{H}(\log) = \mathcal{D}(\exp)$.

(L3) Funkce \log je rostoucí na $(0, \infty)$.

Funkce \exp je rostoucí, a proto je podle Věty 4.3.13 rostoucí i funkce \log .

(L4) Funkce \log je spojitá na $(0, \infty)$.

Spojitosť plyne z věty o spojitosti inverzní funkce (Věta 4.3.13).

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Vezměme $x, y \in (0, \infty)$ a označme $a = \log x$ a $b = \log y$. Pak

$$xy = \exp(a) \exp(b) = \exp(a + b) = \exp(\log(x) + \log(y)),$$

a tedy $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

Pro příslušná a, b platí podle definice obecné mocniny

$$\log a^b = \log(\exp(b \log a)) = b \log a.$$

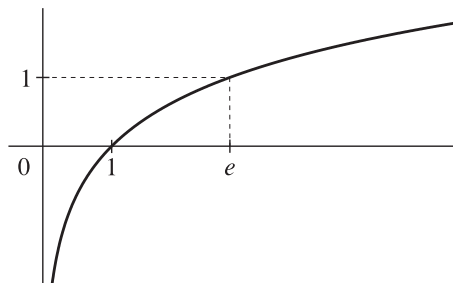
(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $(\log)'x = \frac{1}{x}$.

Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26(a)) a (E4) platí pro $x \in (0, \infty)$ vztah

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L8) Platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$.

Podle (L3) je funkce \log rostoucí, takže z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.26) plyne $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = \inf \mathcal{H}(\log)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \sup \mathcal{H}(\log)$. Z (L2) pak vyplývá naše tvrzení.



OBRÁZEK 2. Graf funkce logaritmus

6.1.9. Poznámky. (a) V Definicí 6.1.7(c) jsme provedli rozšíření výrazu a^b na všechny reálné exponenty b za předpokladu, že základ a je větší než 0. Doposud jsme měli korektně definován výraz a^b , $a > 0$, pouze pro případ, kdy b bylo číslo racionální. Nová definice dává podle vlastnosti (L6) v tomto případě totéž, a je tedy rozšířením definice původní. Místo $\exp(x)$ často píšeme e^x , neboť podle definice obecné mocniny jsou si tyto výrazy rovny. Výraz a^b máme tedy definován v těchto případech:

- $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ libovolné,
- $a \in \mathbb{R}$ libovolné a $b \in \mathbb{N}$,
- $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$.

(b) Necht f a g jsou reálné funkce definované na množině $M \subset \mathbb{R}$, přičemž $f: M \rightarrow (0, \infty)$. Potom symbolem $f(x)^{g(x)}$ budeme označovat funkci definovanou na množině M předpisem $x \mapsto \exp(g(x) \log f(x))$.

6.2. Goniometrické funkce

Při odvozování některých vlastností elementárních funkcí v tomto oddílu využijeme následující lemma.

6.2.1. Lemma. Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje kladné $C \in \mathbb{R}$ (závisující na x) takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $h \in (-1, 1)$ platí

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n. \quad (6.2)$$

Důkaz. Položme $C = 2(|x| + 1)$. Pokud $n = 1$, pak tvrzení triviálně platí. Z binomické věty pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $h \in (-1, 1)$ dostáváme

$$(x + h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Využitím nerovností $|x| + 1 \geq 1$ a $|h| < 1$ obdržíme

$$\begin{aligned} |(x + h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (|x| + 1)^n h^2 \\ &\leq h^2 (|x| + 1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Podle Příkladu 1.8.5 platí $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Pak dostáváme

$$|(x + h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 (|x| + 1)^n 2^n = h^2 C^n.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

6.2.2. Definice. Funkci **sinus**, značíme \sin , a **kosinus**, značíme \cos , definujeme předpisy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.3)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

6.2.3. Věta (základní vlastnosti sinu a kosinu). Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y),$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y),$$

(G3) \sin je lichá funkce a \cos je sudá funkce,

(G4) existuje kladné číslo π takové, že \sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\sin'(0) = 1$.

Důkaz. Podle Příkladu 3.9.24 obě řady konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce \sin a \cos jsou tedy dobře definovány.

Nejprve dokážeme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}: \sin'(x) = \cos(x). \quad (6.5)$$

Vezměme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} & \sin(x+h) - \sin(x) - h \cos(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n} \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Podle Lemmatu 6.2.1 nalezneme pro $x \in \mathbb{R}$ kladné C takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}$, $|h| < 1$, platí

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \leq C^{2n+1}h^2. \quad (6.7)$$

Odtud a z (6.6) dostáváme, že pro každé $h \in P(0, 1)$ platí

$$\begin{aligned} |\sin(x+h) - \sin(x) - h \cos(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} h^2 \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) h^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje podle podílového kritéria. Odtud pak plyne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x+h) - \sin(x) - h \cos(x)}{h} \right| = 0,$$

neboli

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x).$$

Zcela analogicky lze odvodit vztah

$$\forall x \in \mathbb{R}: \cos'(x) = -\sin(x). \quad (6.9)$$

Ověříme vlastnosti (G1)--(G5).

(G1)--(G2) Vezměme $a \in \mathbb{R}$ pevné a pro $x \in \mathbb{R}$ definujme

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (\sin(x+a) - \sin(x)\cos(a) - \sin(a)\cos(x))^2 \\ &\quad + (\cos(x+a) - \cos(x)\cos(a) + \sin(a)\sin(x))^2. \end{aligned}$$

Přímočarý výpočet spolu s (6.5) a (6.9) dává, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\psi'(x) = 0$. Protože

$$\psi(0) = (\sin(a) - \sin(a))^2 + (\cos(a) - \cos(a))^2 = 0,$$

dostáváme $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy také dokazované vztahy z (G1).

(G3) Ze vztahu (6.3) plyne, že funkce \sin je lichá. Podobně z (6.4) plyne, že funkce \cos je sudá.

(G4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right).$$

Pokud $x \in (0, 2)$, potom jsou členy předchozí řady kladné a platí $\sin(x) > 0$. Podle Věty 5.2.6 a (6.9) je funkce \cos klesající na intervalu $(0, 2)$. Ze vztahu

$$\cos(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)}\right)$$

plyne

$$\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2!} \left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4}\right) = -\frac{1}{3} < 0.$$

Existuje tedy právě jedno $\alpha \in (0, 2)$ takové, že $\cos(\alpha) = 0$ (Věta 4.3.4). Tedy funkce \cos je na intervalu $(0, \alpha)$ kladná. Odtud a z (6.5) plyne, že funkce \sin je rostoucí na $[0, \alpha]$ (Věta 5.2.6). Položme nyní $\pi = 2\alpha$. Podle (G1) a (G2) platí

$$1 = \cos(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

a tedy $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Poněvadž $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, platí $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Podle (6.3) snadno ověříme $\sin 0 = 0$. Tím jsou vlastnosti popsané v (G4) ověřeny.

(G5) Podle (6.4) máme $\cos(0) = 1$, a tedy podle (6.5) platí $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. ■

6.2.4 (vlastnosti funkcí sinus a kosinus). K odvození vlastností funkcí sinus a kosinus použijeme pouze vlastnosti (G1)–(G5).

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

Z (G1) a (G4) dostáváme

$$\begin{aligned} 1 &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(0) \\ &= 1 \cdot \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = \cos(0). \end{aligned}$$

(G7) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Z (G2) a (G3) máme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x) \cos(-x) - \sin(x) \sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Tvrzení plyne z (G4) a (G7).

(G9) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

Podle (G1), (G2), (G4) a (G8) platí

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), \\ \cos(x + \pi) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x).\end{aligned}$$

(G10) Funkce \sin a \cos jsou 2π -periodické.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle (G9) platí $\sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$ a $\cos(x + 2\pi) = -\cos(x + \pi) = \cos(x)$.

(G11) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

Spočteme nejprve dvě limity, které budeme potřebovat při odvození derivace funkce \sin . Podle (G5) platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1.$$

Podle vztahu (G2) platí pro každé $h \in \mathbb{R}$ rovnost $\cos(h) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Podle (G7) pak obdržíme vztah $\cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Tento vztah použijeme v následujícím výpočtu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ počítejme

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h^2} h + \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot \frac{-1}{2} \cdot 0 + \cos(x) \cdot \sin'(0) = \cos(x).\end{aligned}$$

(G12) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí podle (G1) a (G8) vztah $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme podle věty o derivaci složené funkce

$$\cos'(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin(x).$$

(G13) Funkce \sin a \cos jsou spojité na \mathbb{R} .

Funkce \sin a \cos mají v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, a tedy jsou podle Věty 5.1.15 v x spojité.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$, právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce \sin je 2π -periodická podle (G10). Stačí tedy určit nulové body v intervalu $[0, 2\pi)$. Podle (G4) platí, že $\sin(0) = 0$ a funkce \sin je kladná na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Odtud a podle (G12) je \cos klesající na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Díky vztahu $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ dostáváme, že funkce \cos je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ kladná. Ze vztahů $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ a $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ dostáváme, že funkce \sin je nulová v intervalu $[0, 2\pi)$ právě v bodech 0 a π .

(G15) Platí $\cos(x) = 0$, právě když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení plyne z (G14) a vztahu $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

6.2.5. Věta. Trojice (\sin, \cos, π) je vlastnostmi (G1)--(G5) určena jednoznačně.

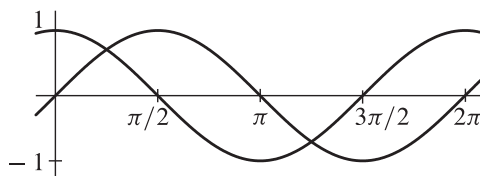
Důkaz. Předpokládejme, že trojice (\sin^*, \cos^*, π^*) splňuje vlastnosti (G1)--(G5). Položme

$$\varphi(x) = (\sin(x) - \sin^*(x))^2 + (\cos(x) - \cos^*(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2(\sin(x) - \sin^*(x)) \cdot (\cos(x) - \cos^*(x)) \\ &\quad + 2(\cos(x) - \cos^*(x)) \cdot (-\sin(x) + \sin^*(x)) = 0. \end{aligned}$$

Tedy je dle Věty 5.2.9 funkce φ konstantní na \mathbb{R} . V bodě 0 je však nulová, a tedy je nulová všude. Proto je $\sin = \sin^*$ a $\cos = \cos^*$. Odtud a díky (G4) platí $\pi = \pi^*$ a důkaz je hotov. ■



OBRÁZEK 3. Grafy funkcí sinus a kosinus

6.2.6. Definice. Funkce **tangens**, značíme ji tg , a **kotangens**, značíme ji cotg , definujeme předpisy

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Funkce \sin , \cos , tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

6.2.7. Poznámka. Vzhledem k tomu, že již bylo zavedeno číslo π a obecná mocnina, máme zavedeno také reálné číslo π^π , o němž jsme se zmínili v 1.1.2.

Vlastnosti funkce tangens.

(G14) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Plyne z (G13) pomocí Věty 4.2.5.

(G15) Funkce tg je lichá.

Plyne z (G3).

(G16) Funkce tg je π -periodická.

Je-li $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$, pak také $x + \pi \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ a $x - \pi \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ podle (G15). Pro $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ pak máme podle (G9)

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x).$$

(G17) Platí $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$.

Pro $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ platí podle věty o derivaci podílu (Věta 5.1.17(c))

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

(G18) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkce \cos je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ kladná, a tedy je derivace funkce tg na tomto intervalu kladná. Z Věty 5.2.6 pak plyne, že funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(G19) Platí $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(G20) Platí $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}(x) = -\infty$.

Tvrzení plyne z poznámky za Větou 4.2.7 a vlastností funkcí sinus a kosinus.

(G21) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce tg je spojitá na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a zobrazuje tento interval opět na interval (Věta 4.3.6), který podle předchozího tvrzení není omezený ani shora ani zdola. Musí tedy být $\operatorname{tg}((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, čímž je tvrzení dokázáno.

Vlastnosti funkce kotangens. Při důkazu následujících vlastností lze postupovat stejně jako v případě funkce tangens, a proto odvození již uvádět nebudeme.

(G21) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G22) Funkce cotg je lichá.

(G23) Funkce cotg je periodická s periodou π .

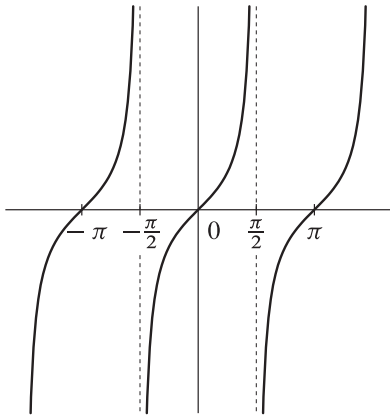
(G24) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G25) Platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

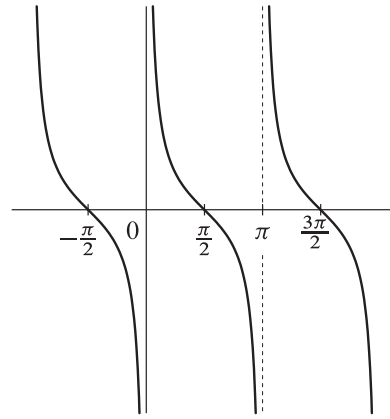
(G26) Platí $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G27) Platí $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(G28) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$.



OBRÁZEK 4. Graf funkce tangens



OBRÁZEK 5. Graf funkce kotangens

6.3. Cyklometrické funkce

6.3.1. Definice. Cyklometrické funkce **arkussinus** (\arcsin), **arkuskosinus** (\arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** ($\operatorname{arccotg}$) definujeme následujícím způsobem

$$\arcsin = (\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1},$$

$$\arccos = (\cos |_{[0, \pi]})^{-1},$$

$$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg} |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1},$$

$$\operatorname{arccotg} = (\operatorname{cotg} |_{(0, \pi)})^{-1}.$$

6.3.2 (vlastnosti cyklometrických funkcí).

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a $\mathcal{H}(\arccos) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce \arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(C4) Funkce \arccos je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí \sin a \cos .

$$\begin{aligned} \arcsin(-1) &= -\frac{\pi}{2}, & \arccos(-1) &= \pi, \\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2}, & \arccos 1 &= 0, \\ \arcsin 0 &= 0, & \arccos 0 &= \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4}, & \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(C6) Platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Funkce \arcsin je prostá, a proto $\arcsin x \neq 0$ pro každé $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Užitím Věty 4.2.21(P) a vlastnosti funkce sinus dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = 1.$$

Odtud po algebraické úpravě plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

Dokazovaný vztah nyní plyne z Věty 4.2.2(c) o limitě podílu.

(C7) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Pro dané $y \in (-1, 1)$ nalezneme $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ splňující $\sin(x) = y$. Podle Věty 5.1.26 platí

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(C8) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

V bodě 1 počítejme dle Věty 5.2.10

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{y \rightarrow 1^-} \arcsin'(y) = \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \infty.$$

Obdobně odvodíme $\arcsin'_+(-1) = \infty$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Vezměme libovolné $x \in [-1, 1]$ a označme $y = \arcsin x$. Potom platí $x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$. Protože $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, je $\frac{\pi}{2} - y \in [0, \pi]$, a tedy $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, odkud již plyne dokazovaná rovnost.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C11) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na \mathbb{R} .

(C13) Platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

(C14) Platí $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(C15) Platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

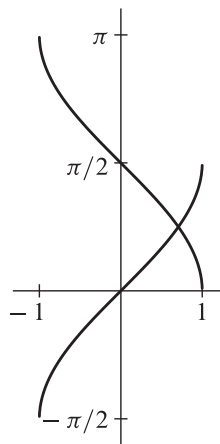
(C18) Funkce $\operatorname{arccotg}$ je spojitá a klesající funkce na \mathbb{R} .

(C19) Platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

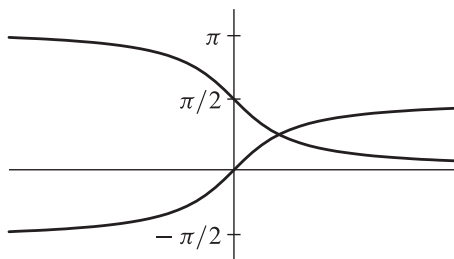
(C20) Platí $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(C21) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

(C22) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.



OBRÁZEK 6. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus



OBRÁZEK 7. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

Taylorův polynom

V této kapitole budeme studovat otázku aproximace obecné funkce polynomm. K dané funkci f a danému bodu $a \in \mathbb{R}$ budeme hledat vhodný polynom, jehož hodnoty v blízkosti a v jistém dobře definovaném smyslu aproximují hodnoty funkce f . Budeme se přitom snažit, aby odchylka funkce od polynomu byla dostatečně malá. Ukážeme si také několik způsobů jak odchylku shora odhadnout.

7.1. Základní vlastnosti

7.1.1. Necht f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a necht existuje vlastní $f'(a)$. Potom existuje tečna ke grafu funkce f v bodě a ve smyslu Definice 5.1.8. Označme funkci, která definuje tuto tečnu, symbolem t , tedy poloźme

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

O této funkci můžeme říci, že v jistém smyslu *aproximuje* chování f v blízkosti bodu a , neboť platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - t(x)|}{|x - a|} = 0. \quad (7.1)$$

To plyne z výpočtu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0 \end{aligned}$$

a z Věty 4.1.18. Neformálně řečeno, pro hodnoty x dostatečně blízké k bodu a je výraz $|f(x) - t(x)|$ podstatně menší než $|x - a|$.

Pokud místo afinní funkce, což je polynom stupně nejvýše 1, použijeme vhodný polynom P obecně vyššího stupně, můžeme doufat v lepší aproximaci, např.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - P(x)|}{|x - a|^n} = 0 \quad (7.2)$$

pro jisté $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Takový polynom P by skutečně aproximoval f s větší přesností, neboť výraz $|x - a|^n$ je pro x dostatečně blízké bodu a podstatně menší

než $|x - a|$, přesněji řečeno, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x - a|^n}{|x - a|} = 0.$$

Při hledání vhodného polynomu bude užitečné si povšimnout, že funkce t splňuje $f(a) = t(a)$ a $f'(a) = t'(a)$. Budeme hledat polynom P tak, aby pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ platilo $f^{(j)}(a) = P^{(j)}(a)$. Ukážeme, že polynom, který je zaveden následující definicí, splňuje tento požadavek i (7.2).

7.1.2. Definice. Necht f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n,$$

nazýváme **Taylorovým polynomem¹ funkce f v bodě a řádu n** .

7.1.3. Necht f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom pro každé $j \in \{0, \dots, n - 1\}$ existuje vlastní $f^{(j)}(x)$ na nějakém okolí bodu a . Speciálně odtud vyplývá, že Taylorův polynom $T_n^{f,a}$ je dobře definován. Zřejmě platí $T_1^{f,a} = t$.

7.1.4. Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x - a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f .

7.1.5. Necht f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Z definice Taylorova polynomu je zřejmé, že platí $\text{st}(T_n^{f,a}) \leq n$. Tato nerovnost ovšem může být ostrá. To nastává právě tehdy, když platí $f^{(n)}(a) = 0$. Položíme-li například $f = \sin$, $a = 0$ a $n = 2$, dostaneme

$$T_2^{\sin,0}(x) = \sin(0) + \sin'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \sin''(0) \cdot x^2 = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

takže $\text{st}(T_2^{\sin,0}) = 1$.

7.1.6. Necht f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Označme $T = T_n^{f,a}$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} T'(x) &= f'(a) + f''(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{(n - 1)!} f^{(n)}(a)(x - a)^{n-1}, \\ T''(x) &= f''(a) + f'''(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{(n - 2)!} f^{(n)}(a)(x - a)^{n-2}, \\ &\vdots \\ T^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x - a), \\ T^{(n)}(x) &= f^{(n)}(a). \end{aligned}$$

¹Brook Taylor (1685--1731)

Dosadíme-li $x = a$, dostaneme vztahy

$$T(a) = f(a), T'(a) = f'(a), T''(a) = f''(a), \dots, T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

7.1.7. Necht' f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f,a}(x)$. Toto tvrzení bezprostředně vyplývá z Definice 7.1.2 a 7.1.6.

7.1.8. Příklad. Spočítejte Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0 pro funkce sinus a kosinus.

Řešení. Protože platí

$$\sin 0 = 0, \sin' 0 = \cos 0 = 1, \sin'' 0 = -\sin 0 = 0, \sin''' 0 = -\cos 0 = -1,$$

dostáváme

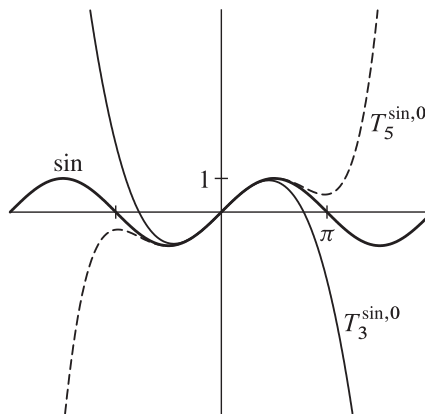
$$T_3^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Podobně lze odvodit vztah

$$T_3^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

♣

7.1.9. Na následujícím obrázku jsou zachyceny grafy funkce sinus a Taylorových polynomů $T_3^{\sin,0}$ a $T_5^{\sin,0}$.



OBRÁZEK 1. Taylorovy polynomy funkce sinus

7.1.10. Budeme studovat otázku, jak kvalitní je aproximace funkce jejím Taylorovým polynomem. Kvalitu přiblížení obvykle měříme velikostí „chyby aproximace“, tedy veličiny $|f(x) - T_n^{f,a}(x)|$ v daném bodě x . Tuto chybu je možné jen málokdy

spočítat přesně, uvedeme ale pro ni několik velmi efektivních odhadů. Chybu aproximace budeme v dalším textu nazývat „zbytkem“. Důležitou charakteristikou kvality aproximace je popis a nebo alespoň horní odhad velikosti zbytku v závislosti na bodu x , jestliže se tento bod blíží k bodu a .

7.1.11. Věta (Peanův tvar zbytku). Necht f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle n . Necht $n = 1$. Potom podle 7.1.3 a (7.1) platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = 0.$$

Necht $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a tvrzení věty platí pro $n-1$. To znamená, že pro každou funkci g takovou, že existuje vlastní $g^{(n-1)}(a)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tento předpoklad využijeme pro $g = f'$. Víme, že funkce f' v bodě a vlastní $(n-1)$ -ní derivaci, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \quad (7.3)$$

Funkce f je spojitá v bodě a , neboť existuje vlastní $f'(a)$. Funkce $T_n^{f,a}$ je polynom, a tedy je také spojitá v bodě a . Z toho plyne, že můžeme využít L'Hospitalova pravidla (viz Větu 5.3.1(a)). Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - T_n^{f,a}(x))'}{((x-a)^n)'}$$

Podle 7.1.6 platí $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$. Tudíž z (7.3) vyplývá, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

7.1.12. Lemma. Necht $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom, st $Q \leq n$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Polynom Q má zřejmě v bodě a kořen. Pak podle Lemmatu ?? existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R takový, že

$Q(x) = (x - a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Potom platí

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x - a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n - k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n - k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech těchto případech dostáváme spor. Tím je tvrzení lemmatu dokázáno. ■

7.1.13. Věta. Necht f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 7.1.11 víme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x - a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0 + 0 = 0.$$

Dále platí $\text{st}(T_n^{f,a} - P) \leq n$, a tedy podle Lemmatu 7.1.12 je $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom. To znamená, že $P = T_n^{f,a}$. ■

Věta 7.1.11 udává asymptotický odhad „řádu“ chyby, jíž se dopustíme při nahrazení funkce Taylorovým polynomem, neříká však nic o její skutečné velikosti. V následující větě odvodíme přesnější formuli pro vyjádření chyby, ovšem za silnějších předpokladů na funkci f .

7.1.14. Věta (obecný tvar zbytku). Necht f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n + 1)$. Necht φ je spojitá funkce na $[a, x]$ mající v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Důkaz. Definujme funkci $F: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x - t) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x - t)^n \right).$$

Funkce F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x) , neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě

intervalu $[a, x]$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (7.4)$$

Nechť $t \in (a, x)$. Potom

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \left(f'(t) + f'(t) \cdot (-1) + f''(t)(x-t) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \right) \\ &= - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $t = \xi$, dostaneme

$$F'(\xi) = - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$. Odtud a z (7.4) dostáváme

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Tvrzení je dokázáno. ■

7.1.15. Věta 7.1.14 platí i v případě $x < a$. Důkaz je stejný.

7.1.16. Předpoklady Věty 7.1.14 lze mírně zeslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a, x) . I za tohoto předpokladu lze použít postup z uvedeného důkazu.

Větu 7.1.14 nyní využijeme k odvození dvou konkrétních tvarů zbytku Taylova polynomu. Dosáhneme toho v obou případech vhodnou volbou funkce φ .

7.1.17. Věta (Lagrangeův tvar zbytku). Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \quad (7.5)$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 7.1.14 tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!} \frac{0 - (x-a)^{n+1}}{(-n+1)(x-\xi)^n} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

■

7.1.18. Věta. Necht' f je reálná funkce, I je interval, $n \in \mathbb{N}$ a f má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci řádu $(n + 1)$. Necht' $M \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in I$ platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Potom pro každé $x \in I$ platí

$$|f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z Věty 7.1.17. ■

7.1.19. Věta (Cauchyův tvar zbytku). Necht' f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n + 1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a). \quad (7.6)$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 7.1.14 existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

■

7.2. Symbol malé o

7.2.1. Z Věty 7.1.11 vyplývá, že za uvedených předpokladů můžeme funkci f na jistém okolí bodu a zapsat ve tvaru $f = T_n^{f,a} + \omega$, kde „chybová funkce“ ω splňuje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\omega(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

7.2.2. Taylorovy polynomy lze mimo jiné použít k počítání limit funkcí a posloupností a k vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy. Ve všech těchto případech většinou počítáme limitu nějaké komplikované funkce. Pro výpočet limity posloupnosti pak obvykle využijeme Heineovu větu a pro vyšetření konvergence řady srovnávací kritérium.

Základní myšlenka výpočtu limity funkce je následující. Funkce, které se objevují ve výrazu, jehož limitu počítáme, vyjádříme jako součet polynomu a chybové funkce. Výpočet limity pak bude sestávat z výpočtu limity obsahující pouze polynomu a chybové funkce. Při vhodném vyjádření funkce ve tvaru „polynom plus chybová funkce“ pak mohou být tyto výpočty velmi jednoduché. Při počítání s chybovými funkcemi totiž nemusíme brát v úvahu jejich přesný tvar, ale pouze odhady velikosti chyby. Hlavní problém výpočtu pak spočívá v tom, jak nalézt k daným funkcím odpovídající polynomy vhodného stupně a chybové funkce. Takové postupy ukážeme v následujícím výkladu.

7.2.3. Definice. Necht f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé o od funkce g** (píšeme $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$), jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

7.2.4. Výraz „ $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ “ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi a nelze s ním pracovat samostatně.

7.2.5. Tvrzení Věty 7.1.11 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a,$$

proto bude v roli funkce g často vystupovat funkce $x \mapsto (x-a)^n$, nebo jen $x \mapsto x^n$ v případě $a = 0$.

(c) Symbol $f(x) = o(1), x \rightarrow a$ podle definice znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

(d) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \rightarrow a$ vynechávat.

7.2.6. Věta (aritmetika malého o). Necht $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže $f_1(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.

(b) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)), x \rightarrow a$.

(c) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)f_2(x)), x \rightarrow a$.

(d) Jestliže $f(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a$.

(e) Jestliže $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $h(x)f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.

(f) Jestliže $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a$, potom $f(x) = o((x-a)^m), x \rightarrow a$.

Důkaz. Všechna tvrzení bezprostředně plynou z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) a Věty 4.2.15. ■

7.2.7. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, necht φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a necht f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b . Předpokládejme, že platí $f(y) = o(g(y)), y \rightarrow b$, a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$. Necht dále existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))), x \rightarrow a$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.21(P)). ■

7.2.8. Příklad. Určete Taylorův polynom řádu 3 funkce tangens v bodě 0.

Řešení. Mohli bychom spočítat derivace funkce tangens až do třetího řádu v bodě 0 a pak sestavit příslušný Taylorův polynom podle definice, jako jsme to učinili v Příkladu 7.1.8. Ukážeme však ještě jiný postup.

Protože má funkce tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ derivace všech řádů, stačí nalézt polynom P takový, že $\text{st}(P) \leq 3$ a $\text{tg } x - P(x) = o(x^3)$, $x \rightarrow 0$. Pak totiž podle Věty 7.1.13 již musí platit $P = T_3^{\text{tg}, 0}$. Označme $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$. Potom

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) = o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

neboli

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) = \omega(x),$$

kde funkce ω je definována na prstencovém okolí bodu 0 a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega(x)}{x^3} = 0.$$

Potom pro každé x z tohoto prstencového okolí platí

$$\sin x = (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)) \cos x. \quad (7.7)$$

Funkce sinus a kosinus můžeme vyjádřit podle Příkladu 7.1.8 ve formě

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x), \end{aligned}$$

kde funkce η a ζ splňují

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\zeta(x)}{x^3} = 0.$$

Uvedená vyjádření funkcí sinus a kosinus nyní dosadíme do (7.7), pravou stranu roznásobíme a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x) &= (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x)\right) = \\ &= A_0 + A_1x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1\right)x^3 + \tau(x), \end{aligned} \quad (7.8)$$

přičemž

$$\tau(x) = \omega(x) - \frac{1}{2}A_2x^4 - \frac{1}{2}A_3x^5 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 + (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x))\zeta(x).$$

Z tvaru funkce τ snadno odvodíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau(x)}{x^3} = 0.$$

Úpravou (7.8) obdržíme

$$A_0 + (A_1 - 1)x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6}\right)x^3 = \eta(x) - \tau(x).$$

Označme symbolem Q polynom na levé straně předchozího vztahu. Potom st $Q \leq 3$ a z tvaru pravé strany plyne, že $Q(x) = o(x^3), x \rightarrow 0$. Podle Lemmatu 7.1.12 musí být polynom Q nulový, a tedy musí mít nulové koeficienty, tj.

$$A_0 = 0, \quad A_1 - 1 = 0, \quad A_2 - \frac{1}{2}A_0 = 0, \quad A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6} = 0.$$

Odtud dostaneme $A_0 = 0, A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = \frac{1}{3}$, neboli

$$T_3^{tg;0}(x) = x + \frac{1}{3}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.2.9. Při počítání úloh podobného typu, jaký jsme viděli v Příkladu 7.2.8 se často užívá následující konvence. Místo abychom pracovali s jednotlivými chybovými funkcemi - v našem příkladu to byly funkce $\omega, \eta, \zeta, \tau$ - budeme je značit vždy stejným symbolem, který bude obsahovat pouze informaci o přesnosti našeho odhadu. Místo abychom psali například $f(x) = g(x) + \omega(x)$, kde $\omega(x) = o(x^3), x \rightarrow 0$, budeme psát rovnou $f(x) = g(x) + o(x^3), x \rightarrow 0$. Tento způsob zápisu činí výpočet přehlednější, nicméně je třeba dát pozor na jistá jeho úskalí. Nebudeme se zde snažit dát tomuto zápisu přesný matematický význam. Budeme jej chápat pouze jako zkrácenou verzi zápisu s chybovými funkcemi, který již přesný matematický význam má. Korektnost našeho výpočtu bude dána tím, že jej můžeme zapsat vždy naprosto přesně s použitím chybových funkcí. Výpočet z Příkladu 7.2.8 pak lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) &= (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)) \cdot (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) \\ &= A_0 + A_1x + (A_2 - \frac{1}{2}A_0)x^2 + (A_3 - \frac{1}{2}A_1)x^3 \\ &\quad + o(x^3) - \frac{1}{2}A_2x^4 - \frac{1}{2}A_3x^5 - \frac{1}{2}x^2o(x^3) \\ &\quad + (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)) \cdot o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$-\frac{1}{2}A_2x^4 = o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{z definice}),$$

$$-\frac{1}{2}A_3x^5 = o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{z definice}),$$

$$-\frac{1}{2}x^2o(x^3) = o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{Věta 7.2.6(v)}),$$

$$(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)) \cdot o(x^3) = o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{Věta 7.2.6(e)}).$$

Odtud plyne podle Věty 7.2.6(a)

$$A_0 + (A_1 - 1)x + (A_2 - \frac{1}{2}A_0)x^2 + (A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6})x^3 = o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Závěr výpočtu již nyní proběhne stejně jako v předchozí variantě.

Při zvládnutí této metody lze k výsledku často dospět rychleji než postupným derivováním dané funkce, neboť s odhady chyb lze pracovat velmi efektivně.

7.3. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí

Ve Větě 7.1.11 jsme viděli, že s rostoucím řádem Taylorova polynomu dostáváme přesnější aproximaci dané funkce f . Bylo by tedy možné očekávat, že bychom danou funkci mohli jistým způsobem vyjádřit pomocí limity Taylorových polynomů, tedy ve tvaru nekonečné řady. Tato úvaha motivuje následující definici.

7.3.1. Definice. Necht' f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a** . Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**².

7.3.2. Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad (7.9)$$

pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (7.9) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0 (viz Příklad 5.6.41), takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$.

V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Nyní postupně spočteme Taylorovy polynomy a řady některých elementárních funkcí. Budeme se zároveň zabývat otázkou, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou tyto řady konvergentní a zda je jejich součtem původně zadaná funkce. Místo symbolu $T_k^{f,a}$ budeme psát pro přehlednost pouze T_k , neboť z kontextu bude vždy zřejmé, s jakou funkcí f pracujeme. Bod a bude shodou okolností roven vždy 0. Dále budeme značit $R_k = f - T_k$. Platnost rovnosti (7.9) v daném bodě $x \in \mathbb{R}$ je pak ekvivalentní výroku $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(x) = 0$. Připomínáme, že i zde budeme využívat úmluvu $f^{(0)} = f$.

²Colin Maclaurin (1698--1746)

7.3.3 (exponenciální funkce). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\exp^{(l)} x = \exp x$. Je tedy $\exp^{(l)} 0 = 1$ pro každé $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Taylorův polynom T_k má pak tvar

$$T_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{k!}x^k.$$

Taylorova řada se středem v bodě 0 má potom tvar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

podle definice exponenciální funkce (6.1).

7.3.4 (funkce sinus). Pro derivace funkce sinus platí

$$\sin' x = \cos x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \sin^{(3)} x = -\cos x, \quad \sin^{(4)} x = \sin x$$

a dále se funkce periodicky opakují, tj. $\sin^{(k+4)} x = \sin^{(k)} x$. Tedy

$$\sin 0 = 0, \quad \sin' 0 = 1, \quad \sin'' 0 = 0, \quad \sin^{(3)} 0 = -1, \quad \sin^{(4)} 0 = 0, \dots$$

Taylorovy polynomy v bodě 0 mají tudíž tvar $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$. Obecně pak máme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k-1}(x) = T_{2k}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

Pro funkci sinus je Taylorův polynom řádu $2k$ v bodě 0 polynomem stupně $2k-1$. Podle (6.3) pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

7.3.5 (funkce kosinus). Podobně jako v předchozím případě dostaneme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k}(x) = T_{2k+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}.$$

Z (6.4) pak plyne pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztah

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

7.3.6 (funkce $x \mapsto \log(1+x)$). Funkce $f(x) = \log(1+x)$ má na svém definičním oboru $(-1, \infty)$ derivace všech řádů. Snadno lze matematickou indukci dokázat, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$f^{(l)}(x) = (-1)^{l-1} \frac{(l-1)!}{(1+x)^l}.$$

Odtud dostáváme

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0!, \quad f''(0) = -1!, \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

a tudíž pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_k(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k}x^k.$$

Zvolme $x \in (0, 1]$. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku (Věta 7.1.17). Podle této věty pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $\xi_n \in (0, x)$ takové, že

$$\log(1+x) - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} = \frac{1}{(n+1)!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Odhadneme

$$\left| \log(1+x) - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} \right| \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi_n} \right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Odtud plyne

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (7.10)$$

Uvažujme nyní $x \in (-1, 0)$. Pro tyto hodnoty proměnné x využijeme Cauchyův tvar zbytku (Věta 7.1.19). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle této věty číslo $\xi_n \in (x, 0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \log(1+x) - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) x (x - \xi_n)^n \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} \cdot x \cdot (x - \xi_n)^n. \end{aligned}$$

Zřejmě platí nerovnost

$$1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \leq -x,$$

a tedy můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} \left| \log(1+x) - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} \right| &\leq \frac{(\xi_n - x)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}} |x| = \left(\frac{\xi_n - x}{1+\xi_n} \right)^n \frac{|x|}{1+\xi_n} \\ &= \left(1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \right)^n \frac{|x|}{1+\xi_n} \leq (-x)^n \frac{|x|}{1+x} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}. \end{aligned}$$

Protože dále platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} = 0$, dostáváme

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Pro každé $x \in (-1, 1]$ tedy platí

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (7.11)$$

7.3.7. Ze vztahu (7.11) dostaneme dosazením $x = 1$ zajímavou rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2.$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$ řada v (7.11) diverguje, a pro takové x vztah (7.11) neplatí.

7.3.8. Příklad. Napište Maclaurinovu řadu pro funkci $x \mapsto \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení. Z 7.3.6 plyne, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2} (\log(1+x) - \log(1-x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}. \end{aligned}$$

♣

7.3.9 (funkce $x \mapsto (1+x)^\alpha$). Poslední funkcí, pro kterou Taylorův polynom v bodě 0 odvodíme z definice, bude funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, \infty)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Na svém definičním oboru má funkce f derivace všech řádů. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & \dots \\ \dots, & & f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \end{aligned}$$

a tedy

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Taylorův polynom k -tého řádu pro funkci f v bodě 0 má proto tvar

$$T_k(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definujme pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **zobecněné kombinační číslo** $\binom{\alpha}{j}$ předpisem

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $j \leq \alpha$ tento předpis dává obvyklé kombinační číslo. Nyní můžeme $T_k(x)$ přepsat ve tvaru

$$T_k(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k. \quad (7.12)$$

Ukážeme, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \quad (7.13)$$

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Zvolme tedy $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, pevně. Podle Cauchyova tvaru zbytku (Věta 7.1.19) nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo ξ_n ležící mezi 0 a x takové, že

$$(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^n \binom{\alpha}{j} x^j = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n) (1+\xi_n)^{\alpha-n-1} (x-\xi_n)^n x.$$

Funkce $z \mapsto z^{\alpha-1}$ je na intervalu $(0, \infty)$ monotónní, a tedy

$$(1+\xi_n)^{\alpha-1} \leq \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}.$$

Můžeme odhadnout

$$\left| (1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^n \binom{\alpha}{j} x^j \right| \leq \frac{1}{n!} |\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)| \cdot \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\} \cdot \left| \frac{x-\xi_n}{1+\xi_n} \right|^n \cdot |x|, \quad (7.14)$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\left| \frac{x-\xi_n}{1+\xi_n} \right| \leq |x|,$$

můžeme dále odhadnout

$$\left| (1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^n \binom{\alpha}{j} x^j \right| \leq \frac{1}{n!} |\alpha \cdots (\alpha-n)| C \cdot |x|^{n+1}, \quad (7.15)$$

kde $C = \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$. Označme $a_n = \frac{1}{n!} |\alpha \cdots (\alpha-n)| C \cdot |x|^{n+1}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha-n-1}{n+1} \right| \cdot |x| = |x| < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní podle d'Alembertova kritéria (Věta 3.2.11), a proto podle Věty 3.1.15 nutně platí $\lim a_n = 0$. Odtud a z (7.15) vyplývá platnost (7.13).

Nyní uvedeme několik příkladů na výpočet a použití Taylorova polynomu. Na následujícím příkladu ilustrujeme způsob, jak vypočítat Taylorův polynom bez derivování.

7.3.10. Příklad. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ nalezněte Taylorovy polynomy všech řádů v bodě 0.

Řešení. Víme (viz Příklad 3.1.8), že pro každé $x \in (-1, 1)$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n x^n = \\ &= 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k + (-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{1+x}. \end{aligned}$$

Dále

$$(-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{1+x} = o(x^k), \quad x \rightarrow 0,$$

a tedy $T_k^{f,0}(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k$ podle Věty 7.1.13. Tento výsledek, který jsme odvodili bez počítání derivací, je ve shodě se vztahem (7.12) pro případ $\alpha = -1$. ♣

7.3.11. Příklad. Necht $f(x) = \sin(\sin x)$. Spočítejte $T_5^{f,0}$.

Řešení. Podle Věty 7.1.13 platí

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5), \quad y \rightarrow 0.$$

Podle Věty 7.2.7, kde $g(y) = y^5$ a $\varphi(x) = \sin x$, dostáváme

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{120} \sin^5 x + o(\sin^5 x), \quad x \rightarrow 0. \quad (7.16)$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, je tedy podle Věty 7.2.6(d)

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{120} \sin^5 x + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \quad (7.17)$$

Spočítejme rozvoje pro funkce $\sin^3 x$ a $\sin^5 x$. S využitím toho, že $-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = o(x^2)$, $x \rightarrow 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^3 = \\ &= x^3 + 3x^2 \left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) + 3x \left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^2 + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^3 = \\ &= x^3 + \left(-\frac{1}{2}x^5 + 3x^2 o(x^3) \right) + 3x (o(x^2))^2 + (o(x^2))^3 = \\ &= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Při odvození posledních dvou rovností jsme využili Větu 7.2.6(a)–(c),(f). Podobně platí

$$\sin^5 x = (x + o(x))^5 = x^5 + \sum_{j=1}^5 \binom{5}{j} x^{5-j} (o(x))^j = x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Všimněme si, že při umocňování Taylorova rozvoje je vhodné stanovit jeho řád pokud možno co nejnižší, abychom si výpočet zbytečně nekomplikovali, ale tak aby výsledný odhad chyby byl požadovaného řádu. Pro rozvoj $\sin^3 x$ s chybou $o(x^5)$ stačilo pracovat s Taylorovým polynomem funkce sinus třetího řádu, a pro rozvoj $\sin^5 x$ s chybou $o(x^5)$ jsme vystačili dokonce s Taylorovým polynomem funkce sinus prvního řádu.

Po dosažení do (7.17) a (7.16) dostaneme

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

takže $T_5^{f,0}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$. ♣

7.3.12. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sin x) - \sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}.$$

Řešení. Podle předchozího příkladu platí

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

a dále podle Věty 7.2.7, Věty 7.2.6(d), (7.17) a 7.12 platí

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= (2x) - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0, \\ \sqrt[3]{1+x^2} &= 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}(x^2)^2 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme

$$\begin{aligned} \sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2} &= \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right) = \\ &= 2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nakonec spočteme zadanou limitu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sin x) - \sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2}}{x^5} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)) - (2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5))}{x^5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$



7.3.13. Příklad. Nalezněte $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, aby pro Taylorův polynom T_k funkce \exp platil odhad $|\exp(x) - T_k(x)| < 0,001$ pro každé $x \in [0, 1]$.

Řešení. Necht' $x \in [0, 1]$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku (Věta 7.1.17) existuje $\xi_k \in (0, 1)$ takové, že

$$|\exp x - T_k(x)| = e^{\xi_k} \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{e}{(k+1)!} < \frac{3}{(k+1)!}. \quad (7.18)$$

Pro $k = 6$ platí $\frac{3}{(k+1)!} = \frac{1}{1680} < 0,001$. Zadané přesnosti tedy podle odhadu (7.18) dosáhneme na celém intervalu $[0, 1]$ pro $k = 6$, tj. použijeme-li k přibližnému výpočtu hodnoty $\exp x$ polynom

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6.$$



7.3.14. Poznámka. Teorie aproximací, ve které funkce aproximujeme i jinými objekty než polynomy.

7.4. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu

7.4.1. Příklad. Necht' $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivace všech řádů v každém bodě intervalu $[a, b]$, přičemž existuje číslo M takové, že $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in [a, b]$. Pak pro každé x a x_0 v $[a, b]$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Řešení. Zvolme pevně $x, x_0 \in [a, b]$. Použijeme pro odhad chyby Lagrangeův tvar zbytku (Věta 7.1.17). Z této věty plyne, že existuje ξ ležící mezi x_0 a x splňující

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n,$$

kde

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Odtud ihned vyplývá odhad

$$|r_n| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proto $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ a platí

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

♣

Následující příklad obsahuje pomocné technické tvrzení, které využijeme v dalším výkladu.

7.4.2. Příklad. Necht φ je omezená funkce na \mathbb{R} taková, že φ' je omezená na \mathbb{R} . Necht $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom je funkce

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

diferencovatelná a platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Necht $C \in \mathbb{R}$ je takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|\varphi(x)| \leq C \quad \text{a} \quad |\varphi'(x)| \leq C. \quad (7.19)$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k C$ konverguje, plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2), že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x)$ konverguje absolutně. Podle Věty 3.4.3 tedy tato řada konverguje, takže funkce g je dobře definovaná na \mathbb{R} .

Vezměme pevné $x \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2}$ konverguje, a tedy k tomuto ε lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} < \varepsilon. \quad (7.20)$$

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 5.2.4) aplikované na funkci $y \mapsto \varphi(n^2 y)$ vyplývá, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b) = n^2 \varphi'(n^2 \xi)(a - b).$$

Odtud plyne, že

$$|\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b)| \leq C n^2 |a - b|. \quad (7.21)$$

Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $h \in P(0, \delta)$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n < n_0$, platí

$$\left| \frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| < \frac{\varepsilon}{n^k}. \quad (7.22)$$

Pak pro $h \in P(0, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \left| \frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| \\ &\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\left| \frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) \right| + |n^2 \varphi'(n^2 x)| \right). \end{aligned}$$

Odhadneme-li první sumu pomocí (7.22) a druhou pomocí (7.19), (7.20) a (7.21), dostaneme

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x) \right| \\ &< \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \frac{\varepsilon}{n^k} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k 2C n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} \varepsilon + 2C \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \\ &\leq (1 + 2C)\varepsilon. \end{aligned}$$

♣

7.4.3. Příklad. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(n^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že f má derivace všech řádů, avšak její Taylorova řada se středem v bodě 0 diverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Řešení. Funkce kosinus i všechny její derivace jsou omezené funkce. Podle Příkladu 7.4.2 je funkce f dobře definovaná a pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{2k} \cos^{(k)}(n^2 x). \quad (7.23)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{R}$ máme $\cos^{(4k)}(y) = \cos y$, a tedy

$$f^{(4k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k}.$$

Nyní dokážeme, že Taylorova řada funkce f nekonverguje v žádném bodě různém od nuly. Vezměme tedy $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože $(4k)! \leq (4k)^{4k}$, pro každé $k, m \in \mathbb{N}$

platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0)x^{4k} \right| &= \frac{1}{(4k)!} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k} |x|^{4k} \\ &\geq \frac{1}{(4k)!} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} \\ &\geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$ splňující $k^2|x|^2 > 2$ a položíme $m = 2k$. Potom z (7.24) dostaneme

$$\left| \frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0)x^{4k} \right| \geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} = \left(\frac{k^2|x|^2}{2} \right)^{2k} > 1.$$

Taylorova řada funkce f v bodě x se středem v bodě 0 tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady, a tudíž podle Věty 3.1.15 diverguje. ♣

7.4.4. Příklad. ³⁴ Necht $\sum a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (1, \infty)$ taková, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \geq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ konverguje.

(b) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $p \in (1, q)$ a položíme $b_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(n+1) \log^p(n+1)}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{(n+1) \log^p(n+1) - n \log^p n}{n \log^p n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ použijeme Větu 7.1.17 pro funkci $f(x) = x \log^p x$, $x \in (0, \infty)$, a interval $[n, n+1]$ a nalezneme bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2} f''(c_n).$$

³⁴de Morgan

⁴Bertrand

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned} & (n+1) \log^p(n+1) - n \log^p n \\ &= \log^p n + p \log^{p-1} n + \frac{p \log^{p-1} c_n + p(p-1) \log^{p-2} c_n}{2c_n}. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\beta_n = \frac{p \log^{p-1} c_n + p(p-1) \log^{p-2} c_n}{2c_n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

platí podle Příkladu 5.6.43 a Věty 4.2.16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0.$$

Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takové, že

$$\beta_n < (q-p) \log^{p-1} n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_1.$$

Pro $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ pak platí

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= 1 + \frac{\log^p n + p \log^{p-1} n + \beta_n}{n \log^p n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q \log^{p-1} n}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n \log n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_2. \end{aligned}$$

Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$, pak dostáváme

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n \log n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Díky Příkladu 3.8.2 dostáváme konvergenci řady $\sum a_n$, neboť řada $\sum b_n$ konverguje podle Příkladu 5.6.44.

(b) Položme $b_n = \frac{1}{n \log n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Podobně jako výše nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1) \log(n+1) - n \log n}{n \log n} = 1 + \frac{1}{n \log n} \left(1 + \log n + \frac{1}{2c_n} \right).$$

Dostaneme tedy pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, n \geq n_0$, odhad

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \log n} + \frac{1}{2c_n n \log n} > \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Tedy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, n \geq n_0,$$

Vzhledem k tomu, že řada $\sum \frac{1}{n \log n}$ diverguje (viz Příklad 5.6.44), dostáváme díky Příkladu 3.8.2 divergenci řady $\sum a_n$. ♣

7.4.5. Příklad.⁵ Necht' $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $\{b_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel. Předpokládejme, že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že pokud $a > 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, pokud $a \leq 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

Řešení. Pokud $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, lze použít Příklad 3.8.1. Díky předpokladu máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b_n}{n^\varepsilon} \right) = a,$$

a tedy řada $\sum a_n$ konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a < 1$.

Pokud $a = 1$, platí díky Příkladu 5.6.43

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n \log n}{n^\varepsilon} = 0.$$

Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

Z Příkladu 7.4.4 nyní plyne divergence dané řady. ♣

7.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu

7.5.1. Příklad. S přesností 10^{-4} vypočítejte $\cos(0,1)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $|f^{(k)}(x)| \leq 1$. Podle Věty 7.1.18 tedy pro $a = 0$, $x = 0,1$ a $M = 1$ tedy platí

$$|f(0,1) - T_n^{f,0}(0,1)| \leq \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pro $n = 3$ tedy platí

$$|f(0,1) - T_3^{f,0}(0,1)| < 10^{-4}.$$

Přibližnou hodnotu $\cos(0,1)$ s požadovanou přesností obdržíme jako hodnotu Taylorova polynomu funkce kosinus řádu 3, tedy

$$T_3^{f,0}(0,1) = 1 - \frac{(0,1)^2}{2} = 0,995.$$

♣

Jak jsme již uvedli výše, Taylorův polynom lze v určitých případech použít k výpočtu limit funkcí či posloupností nebo k vyšetřování konvergence číselných řad. Tyto postupy nyní ilustrujeme na několika příkladech.

⁵Gauss

7.5.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

Řešení. Podle 7.3.5 platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

♣

7.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x}.$$

Řešení. Podle 7.3.3 a 7.3.4 dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^3 + o(x^3) - 1}{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -6.$$

♣

7.5.4. Příklad. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}} \right).$$

Řešení. Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4},$$

pokud limita vpravo existuje. Stačí tedy spočítat tuto limitu. Z 7.3.5 a 7.3.3 dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left(1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right)}{x^4} \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

♣

7.5.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cotg^2 x \right).$$

Řešení. Výraz, jehož limitu počítáme, přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{x^2} - \cot^2 x = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4}.$$

Z Příkladu 5.6.1 a věty o aritmetice limit plyne, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$. Pro druhý zlomek využijeme Taylorových rozvoju příslušných funkcí, tedy 7.3.4 a 7.3.5. Dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^4} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Z věty o aritmetice limit tedy vyplývá, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \frac{2}{3}.$$

♣

7.5.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x}.$$

Řešení. Podle 7.3.4 platí

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Dál máme z 7.3.9

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \quad y \rightarrow 0,$$

$$(1+y)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{5}{81}y^3 + o(y^3), \quad y \rightarrow 0.$$

V následujícím výpočtu bude symbol $o(x^3)$ uvažován pro $x \rightarrow 0$. Podle Věty 7.2.6 platí

$$\begin{aligned} (1 + (x^3 - 2x))^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(x^3 - 2x)^2 + \frac{1}{16}(x^3 - 2x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(4x^2) + \frac{1}{16}(-8x^3) + o(x^3) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} (1 + (x^2 - 3x))^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x) - \frac{1}{9}(x^2 - 3x)^2 + \frac{5}{81}(x^2 - 3x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x) - \frac{1}{9}(9x^2 - 6x^3) + \frac{5}{81}(-27x^3) + o(x^3). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6} &= x \left(-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} \right) + x^2 \left(-\frac{4}{8} - \frac{1}{3} + \frac{9}{9} - \frac{1}{6} \right) \\ &+ x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{16} - \frac{6}{9} + 27\frac{5}{81} \right) \\ &= x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \right) = -6.$$

♣

7.5.7. Příklad. Necht'

$$f(x) = \frac{1}{e} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, \infty).$$

Najděte polynom P třetího stupně, který splňuje

$$f(x) - P(x) = o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Řešení. V následujícím výpočtu budeme uvažovat symbol o pro $x \rightarrow 0$. Platí

$$f(x) = e^{\frac{\log(1+x)}{x} - 1} = e^{\frac{\log(1+x) - x}{x}}, \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Označme $g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x}$, $x \in \mathcal{D}(f)$. Protože podle 7.3.6 platí

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

máme

$$\log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

a tedy

$$g(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

Protože

$$g(x) = x \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \right),$$

platí $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ a existuje okolí $P(0, \delta)$, na kterém funkce g nenabývá hodnoty 0.

Jelikož dle 7.3.3 platí

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3),$$

dostáváme díky Věť 4.2.21

$$\begin{aligned} e^{g(x)} &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{4} - 2\frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Požadovaný polynom P je tedy tvaru

$$P(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.5.8. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3}.$$

Řešení. Symbol o opět uvažujeme pro $x \rightarrow 0$. Díky Příkladu 7.5.7 máme

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex &= e \left(\frac{1}{e} (1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e} (1-x)^{-\frac{1}{x}} + x \right) \\ &= e \left(\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) - \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3\right) + x \right) \\ &= e \left(-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3) \right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{7}{8}.$$

7.5.9. Příklad. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^3} \right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

v závislosti na parametru α .

Řešení. Podle Příkladu 7.3.8 a dále podle 7.3.6 a 7.3.4 jest pro každé $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) - \sin(x) - \frac{x^3}{2} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{2} + o(x^5) \\ &= x^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!} \right) + o(x^5) = \frac{23}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pro speciální volbu $x = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dostáváme

$$\log\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^3} = \frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Označme pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$a_n = \left(\log\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^3} \right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

a

$$b_n = \frac{n^{\alpha-5}}{\log^2 n}.$$

Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(\frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5}) \right) = \frac{23}{120}. \quad (7.25)$$

Srovnávací posloupnost $\{b_n\}$ volíme tak, aby $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ vyšla konečná a nenulová. Jelikož jsou členy řady $\sum b_n$ kladné, z (7.25) plyne, že řada $\sum a_n$ má od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ kladné členy. Dále z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) plyne, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$. Stačí tedy vyšetřit konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ v závislosti na parametru α .

To jsme však již provedli v Příkladu 5.6.44, podle kterého řada $\sum b_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. Zadaná řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. ♣

7.5.10. Příklad. Pro $p \in (0, \infty)$ vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n^p$, kde

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Použijeme Raabeovo kritérium 3.8.1. Počítejme tedy pro $n \in \mathbb{N}$ výraz

$$n \left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} - 1 \right) = n \left(\left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} \right)^p - 1 \right) = \frac{n \left((n+1)^p - \left(n+\frac{1}{2}\right)^p \right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^p}.$$

Pro funkci $f(x) = x^p$, $x \in (0, \infty)$ a každý interval $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$ použijeme Větu 7.1.17 a nalezneme tak $c_n \in (n + \frac{1}{2}, n + 1)$ splňující

$$(n+1)^p - \left(n+\frac{1}{2}\right)^p = \frac{p}{2} \left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-1} + \frac{1}{2} p(p-1) c_n^{p-2} \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^p}{(n+1)^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^p} \leq \frac{c_n^{p-2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^p} \leq \frac{(n+1)^p}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p+2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

platí díky Větě 2.2.46 rovnost $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{c_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p} = 0$. Proto máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{p}{2}n(n+\frac{1}{2})^{p-1}}{(n+\frac{1}{2})^p} + \frac{p(p-1)}{8} \frac{nc_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p} \right) = \frac{p}{2}.$$

Řada $\sum a_n^p$ tedy konverguje pro $p > 2$ a diverguje pro $p < 2$.

Je-li $p = 2$, platí

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{(n+\frac{1}{2})^2} \right)^2 = 1 + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{4(n+\frac{1}{2})^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Položíme-li $b_n = -\frac{n^2+n}{4n^2+4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme omezenou posloupnost splňující

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{b_n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podle Příkladu 7.4.5 tedy řada $\sum a_n^2$ diverguje. ♣

7.5.11. Příklad. Necht' $\alpha \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Řešení. Podle Příkladu 7.3.6 platí

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varphi(x), \quad x \in (-1, 1),$$

kde φ je funkce splňující $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0$. Položme

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad c_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \varphi(b_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Protože $b_n \in (-1, 1)$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, platí

$$\log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) = b_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Řada $\sum b_n$ konverguje pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Dále díky Větě 4.2.16 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi(b_n)}{b_n^2} \right) = 1.$$

Tedy dle Věty 3.2.5 a řada $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$. To ale nastane právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$ (viz Věta 3.2.18).

Platí tedy $\sum a_n = \sum (b_n + c_n)$, přičež $\sum b_n$ vždy konverguje a $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. Řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. ♣

7.5.12. Příklad. Zjistěte pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce

$$f(x) = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + Cx^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

lokální maximum v bodě 0.

Řešení. Symbol o uvažujeme pro $x \rightarrow 0$. Díky 7.3.5 a 7.3.3 máme

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \quad \text{a} \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6). \end{aligned}$$

Tedy

$$f(x) = x^4 \left(\frac{12C - 1}{12} \right) + x^6 \left(\frac{14}{6!} \right) + o(x^6).$$

Označme $c = \frac{12C-1}{12}$. Je-li $C > \frac{1}{12}$, tj. $c > 0$, máme

$$f(x) = x^4 \left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2) \right).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2) \right) = c$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\frac{f(x)}{x^4} > \frac{c}{2}, \quad x \in P(0, \delta).$$

Tedy $f(x) > 0$ pro $x \in P(0, \delta)$. Jelikož $f(0) = 0$, má v tomto případě funkce f v bodě 0 lokální minimum.

Obdobně odvodíme, že pro $C < \frac{1}{12}$ má f v 0 lokální maximum.

Je-li $C = \frac{1}{12}$, dostáváme

$$f(x) = \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6) = x^6 \left(\frac{14}{6!} + o(1) \right).$$

Zcela analogickou úvahou jako výše obdržíme, že f má v 0 lokální minimum. ♣

7.5.13. Příklad. Zjistěte, zdali je 0 inflexním bodem funkce

$$f(x) = \sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Během výpočtu budeme symbol o používat pro $x \rightarrow 0$. Pro funkci platí

$$f''(x) = (\cos x + \cosh x)' = -\sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Platí tedy $f''(0) = 0$. Jelikož $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, máme díky 7.3.3 a 7.3.4 vztahy

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \\ \sinh x &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{n=0}^5 \frac{x^n}{n!} + o(x^5) \right) - \left(\sum_{n=0}^5 \frac{(-x)^n}{n!} + o(x^5) \right) \right) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5). \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$f''(x) = 2 \frac{x^3}{3!} + o(x^5) = x^3(2 + o(x^2)).$$

Z tohoto vztahu dostáváme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x^3} = 2$, a tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\frac{f''(x)}{x^3} > 1$ pro $x \in P(0, \delta)$. Platí tedy, že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\delta, 0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, \delta)$. Podle Věty 5.4.20 má f v bodě 0 inflexní bod. ♣

Mocninné řady

Jak víme z kapitoly o Taylorově polynomu, je v některých případech možné vyjádřit danou funkci ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Někdy je vhodnější pracovat s uvedeným rozvojem spíše než s původním tvarem funkce.

8.1. Základní vlastnosti

8.1.1. Definice. Mocninnou řadou o středu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (8.1)$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

8.1.2. Pokud za x v (8.1) dosadíme reálné číslo, dostaneme číselnou řadu, přičemž symbolem $a_0(x - x_0)^0$ rozumíme a_0 (vizte Úmluvu 7.1.4). Mocninná řada tedy určuje funkci

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

jejímž definičním oborem je množina těch $x \in \mathbb{R}$, pro která příslušná číselná řada konverguje. Tato řada je konvergentní alespoň pro $x = x_0$. Funkce tohoto tvaru budou nyní předmětem našeho zájmu.

8.1.3. Věta. Uvažujme mocninnou řadu (8.1). Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\varrho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, je řada (8.1) absolutně konvergentní,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, je řada (8.1) divergentní.

Prvek ϱ splňuje

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (8.2)$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ položíme $b_n = a_n(x - x_0)^n$. Označme dále $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Předpokládejme nejprve, že $\gamma \in (0, \infty)$. Pak

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} |x - x_0| = \gamma |x - x_0|.$$

Odtud vyplývá, že

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} > 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$. Podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.4.6(b) a (d)) je tudíž řada (8.1) absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a divergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$.

Je-li $\gamma = 0$, pak podle (8.2) platí $\varrho = \infty$ a obdobným výpočtem jako výše dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Daná mocnná řada je tedy absolutně konvergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(b)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $\gamma = \infty$, pak podle (8.2) platí $\varrho = 0$ a

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Daná mocnná řada je tedy divergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(d)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$.

Ve všech třech případech jsme tedy ověřili, že číslo ϱ má požadované vlastnosti.

Dokážeme nyní jednoznačnost prvku ϱ . Předpokládejme, že prvek $\varrho' \in \mathbb{R}^*$ má také uvedené vlastnosti, a přitom $\varrho \neq \varrho'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varrho < \varrho'$. Potom by ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $\varrho < |x - x_0| < \varrho'$ musela řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergovat a zároveň divergovat, což není možné. Tím je důkaz dokončen. ■

8.1.4. Definice. Uvažujme mocnnou řadu (8.1). Jednoznačně určený prvek ϱ z předchozí věty nazýváme **poloměrem konvergence** řady (8.1).

8.1.5. Věta. Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocnná řada a necht' existuje $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Potom je tato limita rovna poloměru konvergence uvedené mocnné řady.

Důkaz. Podle Poznámky 3.2.16 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Tvrzení tudíž plyne z Věty 8.1.3 a Věty 2.4.13. ■

8.1.6. Příklady. Spočítejte poloměry konvergence mocnných řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ uvedené řady konvergují.

Řešení. Podle Příkladu 2.5.6 platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je roven ∞ a řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty,$$

a tedy poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ je roven 0. Řada konverguje pouze pro $x = 0$.

Díky Příkladu 2.2.52 víme, že

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ je roven 1. Řada tedy absolutně konverguje pro každé $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| > 1$. Zbývá vyšetřit konvergenci v bodech 1 a -1 . Jak víme z Příkladů 3.1.11 a 3.3.2, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ diverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje. Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ tedy konverguje pro $x \in [-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní $x \in \mathbb{R}$. ♣

8.1.7. Poznámka. Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada a $\varrho \in \mathbb{R}^*$ je její poloměr konvergence. Potom nastane právě jedna z následujících tří možností:

- buď $\varrho = 0$ a řada konverguje pouze pro $x = x_0$,
- nebo $\varrho = \infty$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- nebo $\varrho \in (0, \infty)$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, a může nebo nemusí konvergovat pro $x = x_0 + \varrho$ a pro $x = x_0 - \varrho$.

8.2. Derivace mocninné řady

V dalším textu se nám bude hodit následující pomocné lemma technické povahy. Tvrzení je obdobné Lemmatu 6.2.1, které jsme využili při odvozování elementárních funkcí. Zde však potřebujeme přesnější odhad a obecnější formu výrazu na pravé straně nerovnosti.

8.2.1. Lemma. Necht' $x \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $h \in (-\delta, \delta)$ platí

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 \delta^{-2} (|x| + \delta)^n. \quad (8.3)$$

Důkaz. Pokud $n = 1$, pak tvrzení zřejmě platí, neboť na levé straně nerovnosti je nula a na pravé je nezáporné číslo. Necht' $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom z binomické věty

pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ dostáváme

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Z nerovnosti $|h| < \delta$, z trojúhelníkové nerovnosti pro konečné sumy a ještě jednou z binomické věty pak odvodíme odhad

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^{k-2} h^2 \\ &\leq h^2 \delta^{-2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \\ &= h^2 \delta^{-2} (|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.2.2. Věta (derivace mocninné řady). Necht' ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven ϱ . Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom má funkce f v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$.

Důkaz. Zřejmě platí $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{n|a_n|}$. Dokážeme opačnou nerovnost, tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, pak tato nerovnost platí zřejmě. Předpokládejme, že $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Víme, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\sqrt[n]{n} < (1+\varepsilon)$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ potom platí

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k|a_k|} \leq (1+\varepsilon) \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|},$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Celkem tedy máme $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Odtud a z definice poloměru konvergence mocninné řady vyplývá, že poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^n$ je roven ϱ . Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ je zřejmě konvergentní pro $x = x_0$. Jestliže $x \in \mathbb{R}$ splňuje $0 < |x-x_0| < \varrho$, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} = \frac{1}{x-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^n,$$

a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ konvergentní. Obdobnou úvahou lze dokázat, že pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| > \varrho$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ divergentní. Poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ je tedy roven ϱ .

Dokážeme nyní druhou část tvrzení. Jestliže $\varrho = 0$, pak je tvrzení triviální, neboť žádné $x \in \mathbb{R}$ s uvedenou vlastností neexistuje. Předpokládejme, že $\varrho > 0$.

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $x_0 = 0$. Zvolme $x \in (-\varrho, \varrho)$. K důkazu tvrzení stačí dokázat, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \quad (8.4)$$

Nalezneme $\delta > 0$ splňující $|x| + \delta < \varrho$. Potom pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ platí $|x+h| \leq |x| + |h| < |x| + \delta < \varrho$, a tedy je výraz $f(x+h)$ dobře definován. Z Lemmatu 8.2.1 tudíž plyne

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n ((x+h)^n - x^n - h n x^{n-1}) \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |(x+h)^n - x^n - h n x^{n-1}| \\ &\leq \frac{1}{|h|} h^2 \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n \\ &= |h| \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Protože $|x| + \delta < \varrho$, je podle Věty 8.1.3 řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n$ konvergentní. Odtud vyplývá, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h| \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n = 0,$$

a tedy také

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = 0.$$

Odtud a z Věty 2.2.24 plyne (8.4). Tvrzení je dokázáno. \blacksquare

8.2.3. Věta (vztah mocninné řady a Taylorova polynomu). Necht' ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Potom

(a) pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, existuje vlastní $f^{(k)}(x)$ a platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k},$$

(b) speciálně platí $f^{(k)}(a) = k!a_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(c) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí $T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne iterováním Věty 8.2.2 k -krát. Tvrzení (b) je speciálním případem tvrzení (a) pro $x = x_0$. Dokážeme tvrzení (c). Podle již dokázaného tvrzení (a) má funkce f na intervalu $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ derivace všech řádů a platí

$$f^{(k)}(a) = k!a_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Podle definice Taylorova polynomu tedy máme

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

8.2.4. Při derivování mocninné řady (8.1) člen po členu se zachovává poloměr konvergence ϱ . V případech, kdy $\varrho \in (0, \infty)$, se však může stát, že v některém z krajních bodů $x_0 + \varrho$ a $x_0 - \varrho$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ diverguje, přestože původní řada (8.1) v těchto bodech konverguje. Příkladem je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, která je konvergentní pro $x \in [-1, 1)$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ není konvergentní pro $x = -1$.

8.2.5. Věta. Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ jsou mocninné řady. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ obě řady konvergují ke stejnému součtu, potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $a_n = b_n$.

Důkaz. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ potom platí $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$. Podle Věty 8.2.3(a) je $f^{(n)}(a) = n!a_n = n!b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $a_n = b_n$. Rovnost $a_0 = b_0$ plyne ze vztahu $f(a) = a_0 = b_0$. ■

8.2.6. Věta. Necht' ϱ je poloměr konvergence řady (8.1). Potom poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \tag{8.5}$$

je také roven ϱ . Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < \varrho$ označme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

Potom v každém takovém bodě má funkce g vlastní derivaci a platí

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 0, \\ \frac{a_{n-1}}{n}, & \text{pokud } n \geq 1. \end{cases}$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n.$$

Podle Věty 8.2.2 mají řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ stejný poloměr konvergence ϱ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < \varrho$ platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

8.2.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \quad (8.6)$$

Řešení. Položme

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1}, & \text{jestliže } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Chceme dokázat, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Z Příkladu 2.2.52 plyne, že

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2k+1}} = 1,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je roven 1. Pro $x \in (-1, 1)$ položme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pak dle Věty 8.2.2 a Příkladu 3.1.8 platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jest

$$(n+1)a_{n+1} = \begin{cases} (-1)^{2k}, & \text{jestliže } n = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ je liché.} \end{cases}$$

Tudíž

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Zároveň však pro každé $x \in (-1, 1)$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$. Pro $x \in (-1, 1)$ položme $g(x) = f(x) - \operatorname{arctg} x$. Pak podle věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.17) platí

$g'(x) = 0$ pro každé $x \in (-1, 1)$. Protože g má v každém bodě intervalu $(-1, 1)$ vlastní derivaci, je podle věty o vztahu derivace a spojitosti (Věta 5.1.15) na tomto intervalu spojitá. Tudíž podle Věty 5.2.9 existuje $c \in \mathbb{R}$ splňující $g(x) = c$, $x \in (-1, 1)$, tedy $f(x) = \operatorname{arctg} x + c$, $x \in (-1, 1)$. Protože $f(0) = 0$, a tedy $g(0) = f(0) - \operatorname{arctg} 0$, je $c = 0$ a $f(x) = \operatorname{arctg} x$. ♣

8.2.8. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}. \quad (8.7)$$

Řešení. Rovnost lze dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 8.2.7 s použitím vzorce

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1),$$

jenž vyplývá ze vztahu (7.13) pro $\alpha = -\frac{1}{2}$. ♣

8.3. Abelova věta

Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Předpokládejme, že $\varrho \in (0, \infty)$. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ pro $x \in (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$. V tomto oddílu se budeme zabývat souvislostí limity $\lim_{x \rightarrow (x_0 + \varrho)^-} f(x)$ a součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$. Vzniká totiž přirozená otázka, zda je možné platnost vzorců (8.6) a (8.7) rozšířit i na krajní body.

Nejprve si povšimneme, že obecně žádná souvislost mezi uvedenou limitou a řadou neexistuje. Položíme-li například $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $\varrho = 1$ a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ pro $x \in (-1, 1)$. To znamená, že $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pro $x \in (-1, 1)$, a tedy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$. Přitom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.

Ukazuje se, že lze obdržet mnohem příznivější výsledky v případě, kdy je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konvergentní. Tuto situaci popisuje Abelova věta, kterou nyní zformulujeme a dokážeme. Nejprve uvedeme pomocné tvrzení.

8.3.1. Lemma. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Potom jsou pro každé $x \in (-1, 1)$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Důkaz. Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je podle předpokladu konvergentní, a tedy omezená. Takže existuje $C > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq C$. Zvolme $x \in (-1, 1)$. Potom

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|s_n||x|^n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C}|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C}|x| = |x| < 1.$$

Z Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.4.6(a)) tedy vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ je absolutně konvergentní. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je podle předpokladu konvergentní, a tedy podle Věty 3.1.15 platí $\lim a_n = 0$. Tudiž také posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je omezená. Odtud pomocí obdobné úvahy jako výše vyplývá, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je absolutně konvergentní. Necht $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom platí

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=0}^N s_n x^n &= \sum_{n=0}^N s_n x^n - \sum_{n=0}^N s_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^N s_n x^n - \sum_{n=1}^{N+1} s_{n-1} x^n \\ &= s_0 + \sum_{n=1}^N (s_n - s_{n-1}) x^n - s_N x^{N+1} \\ &= \sum_{n=0}^N a_n x^n - s_N x^{N+1}. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_N\}_{N=0}^{\infty}$ je omezená a $\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = 0$. Podle Věty 2.2.41 tedy platí $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N x^{N+1} = 0$. Odtud a z věty o aritmetice limit vyplývá, že

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \lim_{N \rightarrow \infty} (1-x) \sum_{n=0}^N s_n x^n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N a_n x^n - s_N x^{N+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

8.3.2. Věta (Abel). Necht ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Předpokládejme, že $\varrho \in (0, \infty)$.

(a) Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje, potom platí

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 + \varrho)^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

(b) Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n$ konverguje, potom platí

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 - \varrho)^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení (a). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $\varrho = 1$. Označme $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ a pro $x \in (-1, 1)$ položme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Chceme

dokázat, že $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = s$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|s_n - s| < \varepsilon$. Nyní pro tato ε a n_0 nalezneme $\delta \in (0, 1)$ takové, že pro každé $x \in (1 - \delta, 1)$ platí $(1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| < \varepsilon$. Potom podle Lemmatu 8.3.1 pro každé $x \in (1 - \delta, 1)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - s| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s \right| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s \right| \\ &= \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - (1-x)s \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |s_n - s| x^n \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| x^n + (1-x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |s_n - s| x^n \\ &< (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| + (1-x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \varepsilon x^n \\ &< \varepsilon + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon x^n \\ &= \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = s$. Tím je tvrzení dokázáno pro $\varrho = 1$.

Nyní předpokládejme, že $\varrho \in (0, \infty)$. Potom platí

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n| \varrho^n} = \frac{1}{\varrho} \varrho = 1,$$

a tedy je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n x^n$ roven 1. Z již dokázané části tvrzení a z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.21(P)) tedy plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow \varrho^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \rightarrow \varrho^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n \left(\frac{x}{\varrho}\right)^n = \lim_{y \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

Větu 4.2.21 jsme mohli použít díky tomu, že vnitřní funkce $x \mapsto \frac{x}{\varrho}$ je rostoucí. Tím je dokázáno tvrzení (a). Tvrzení (b) lze dokázat obdobným způsobem. ■

8.3.3. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in [-1, 1]$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Řešení. Dle (8.6) víme, že tvrzení platí pro každé $x \in (-1, 1)$. Dokážeme jeho platnost pro $x = 1$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konverguje podle Leibnizovy věty (Věta 3.3.1). Tedy ze spojitosti funkce $\operatorname{arctg} x$ a z Abelovy věty plyne, že

$$\operatorname{arctg} 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Obdobným postupem lze dokázat, že $\arctg(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, neboť řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ také konverguje podle Leibnizovy věty. ♣

8.3.4. Poznámka. V Příkladu 8.3.3 jsme dokázali následující zajímavý vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pro aproximaci čísla π však není tento vzorec vhodný, protože řada na pravé straně rovnosti konverguje velice pomalu. Například pro určení hodnoty čísla π s přesností, jaká byla známa již Archimédovi, je třeba sečíst více než 300 členů uvedené řady.

8.3.5. Na závěr tohoto oddílu uvedeme ještě důkaz Abelovy věty (Věta 3.6.5).

Věta. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

Důkaz. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Obě tyto řady mají poloměr konvergence větší nebo roven jedné, neboť číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou podle předpokladu konvergentní. Odtud vyplývá, že obě řady jsou absolutně konvergentní pro každé $x \in (-1, 1)$. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) tedy pro každé $x \in [0, 1)$ platí

$$f(x)g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+1-i} x^{k+1-i} b_i x^i \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right) x^{k+1}.$$

Z Abelovy věty (Věta 8.3.2) pak plyne

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+i-1} b_i \right).$$

■

8.4. Teoretické příklady na mocninné řady

8.4.1. Příklad (Tauberova¹ věta). Necht' má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence 1 a necht' $L \in \mathbb{R}^*$. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$.

¹Alfred Tauber (1866-1942)

Řešení. Protože $\lim n a_n = 0$, platí podle Věty 2.2.24 také $\lim n |a_n| = 0$. Z Věty 3.4.11 pak vyplývá, že i $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k |a_k| = 0$.

Označme

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom $\lim f(x_n) = L$.

Nechť nejprve $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon, \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k |a_k| < \varepsilon \quad (8.9)$$

a

$$n |a_n| < \varepsilon. \quad (8.10)$$

Položme $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom pro každé $x \in (0, 1)$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} s_n - L &= \sum_{k=0}^n a_k - L = \sum_{k=0}^n a_k - L + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (1 - x^k) + f(x) - L - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \end{aligned}$$

a tedy

$$|s_n - L| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| (1 - x^k) + |f(x) - L| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k.$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ máme

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x),$$

dostáváme

$$\sum_{k=0}^n |a_k| (1 - x^k) \leq (1 - x) \sum_{k=0}^n k |a_k|.$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby $n \geq n_0$. Potom z (8.10) plyne

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon x^{n+1}}{n(1-x)} < \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Celkově dostáváme pro každé $x \in (0, 1)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ odhad

$$|s_n - L| \leq (1 - x) \sum_{k=0}^n k |a_k| + |f(x) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Do tohoto odhadu nyní dosadíme hodnotu $x = x_n$. Ze (8.8) a (8.9) pak obdržíme

$$\begin{aligned} |s_n - L| &\leq (1 - x_n) \sum_{k=0}^n k|a_k| + |f(x_n) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1 - x_n)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k|a_k| + |f(x_n) - L| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy $\lim s_n = L$.

Nyní předpokládejme, že $L = \infty$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in (0, 1)$ platí

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n a_k + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (1 - x^k) + f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \\ &\geq f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k. \end{aligned}$$

Nyní nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $|a_n| \leq \frac{1}{n}$. Pak pro každé takové n dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &= \frac{x^{n+1}}{n(1-x)} \leq \frac{1}{n(1-x)}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do tohoto odhadu $x = x_n$, dostaneme $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \leq 1$. Tedy celkem

$$s_n \geq f(x_n) - 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Tvrzení nyní plyne z toho, že $\lim f(x_n) = \infty$.

Nechť $L = -\infty$. Položíme $b_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Potom zřejmě platí $\lim n b_n = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \infty$. Z již dokázaného tvrzení tudíž plyne $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$. ♣

8.4.2. Poznámka. V Tauberově větě z Příkladu 8.4.1 lze předpoklad $\lim n a_n = 0$ nahradit předpokladem, že posloupnost $\{n a_n\}$ je omezená. Důkaz tohoto tvrzení, který podal J. E. Littlewood², je podstatně obtížnější než důkaz původní Tauberovy věty a zde jej uvádět nebudeme.

8.5. Početní příklady na mocninné řady

8.5.1. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

²John Edensor Littlewood (1885-1977)

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \frac{1}{n^3} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1,$$

a tudíž ze vzorce (8.2) dostaneme $\varrho = 1$.

Poloměr konvergence ϱ lze také vypočítat pomocí Poznámky 3.2.16, neboť platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1. \quad \clubsuit$$

8.5.2. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \frac{n!}{(2n)!} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{(2n)!}}{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \infty.$$

Podle Poznámky 3.2.16 je tedy poloměr konvergence roven $\varrho = \infty$. ♣

8.5.3. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k!}}{k!}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{pokud } n = k! \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, a tedy podle Věty 2.4.15 a Příkladu 2.2.52 máme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.32) platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k!]{a_{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k!]{\frac{1}{k!}} = 1,$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$. Odtud a ze vzorce (8.2) vyplývá, že poloměr konvergence je roven 1. ♣

8.5.4. Příklad. Necht $0 < a < b$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(na^n + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n.$$

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ na^n + \frac{b^n}{n^2} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí odhady

$$\frac{b^n}{n^2} \leq na^n + \frac{b^n}{n^2} \leq 2nb^n.$$

Pomocí limity z Příkladu 2.2.52 dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} = b \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2nb^n} = b,$$

a proto podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.46) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na^n + \frac{b^n}{n^2}} = b.$$

Podle (8.2) je tedy poloměr konvergence ϱ roven $\frac{1}{b}$. ♣

8.5.5. Příklad. Necht $c > 0$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{c^{n^2}} x^n.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme

$$a_n = \frac{n!}{c^{n^2}}.$$

Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{c^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{c^{(n+1)^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0, 1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1, \infty). \end{cases}$$

Podle Poznámky 3.2.16 tedy pro poloměr konvergence ϱ dostáváme

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0, 1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1, \infty). \end{cases} \quad \clubsuit$$

8.5.6. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x \in (-1, 1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady a jednoduché úpravy platí pro $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{1 - x^2} = -(x^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^{2n+2} - x^{2n}) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n}. \end{aligned}$$

Tedy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$, kde

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché,} \\ -2 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé.} \end{cases}$$

♣

8.5.7. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, $x \in (-1, 1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Dostali jsme mocninnou řadu se středem v bodě 0 a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{pokud } n = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{pokud } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Poloměr konvergence této řady je roven 1. Podle Věty 8.1.3 konverguje mocninná řada na intervalu $(-1, 1)$ absolutně. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) platí

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k a_{n-k} x^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \end{aligned}$$

kde

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n - k$ stejnou paritu, tj. jsou obě lichá nebo obě sudá. Pokud je navíc k sudé, pak platí

$$a_k a_{2n-k} = (-1)^{\frac{k}{2}} (-1)^{n-\frac{k}{2}} = (-1)^n.$$

Pokud je k liché, pak platí $a_k a_{2n-k} = 0 \cdot 0 = 0$. Počet sudých čísel v množině $\{0, 1, \dots, 2n\}$ je roven $n + 1$. Máme tedy $b_{2n} = (-1)^n (n + 1)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n + 1 - k$ rozdílnou paritu, a proto je právě jedno z čísel a_k a a_{2n+1-k} rovno 0. Odtud plyne, že $b_{2n+1} = 0$.

Výsledná řada má tedy tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

♣

8.5.8. Příklad. Rozviňte funkci $f(x) = \sin^2 x$ do mocninné řady.

Řešení. Podle vzorce pro sin polovičního úhlu a podle známé mocninné řady pro cos dostáváme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

♣

8.5.9. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3}.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3} x^{2n+3}.$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence je $R = 1$. Posloupnost $\frac{1}{2n+3}$ monotónně klesá k nule, a tedy podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) tato mocninná řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} = \frac{x^2}{1 + x^2},$$

kde jsme v posledním kroku využili vzorce pro součet geometrické řady. Snadnou integrací dostaneme

$$f(x) = \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = x - \arctan x + C.$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} 0^{2n+3} = 0 - \arctan 0 + C,$$

a tedy $C = 0$. Součet zadané řady nyní dopočteme podle Abelovy věty

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \arctan x) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

♣

8.5.10. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n}.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Pravou stranu můžeme snadno derivovat, a tedy podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

První člen řady je nulový, a proto opětovným použitím věty o derivaci mocninné řady dostaneme

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Z posledních dvou rovností snadno dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n)x^n &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n)x^{n-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x^2 f''(x) + 3x f'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. Dosazením $x = \frac{1}{3}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3.$$

♣

8.5.11. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} x^{2n+1}.$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této mocninné řady je $R = 1$ a že tato řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty (Věta 8.3.2) tedy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}. \quad (8.11)$$

Poslední řadu si označme $g(x)$. Tato řada má poloměr konvergence 1, a z věty o derivaci mocninné řady dostaneme pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2},$$

kde jsme v posledním kroku použili vzorec pro součet geometrické řady. Integrací spočteme

$$g(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx = \frac{1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{2} \log(1-x) + C.$$

Dosazením $x = 0$ do řady pro $g(x)$ lehce dopočteme $C = 0$. Z (8.11) máme

$$f'(x) = xg(x) = \frac{1}{2}x \log(x+1) - \frac{1}{2}x \log(1-x).$$

Standardní integrací pomocí per-partes a rozkladu na parciální zlomky, kterou zde nebudeme detailně rozepisovat, lze z tohoto spočítat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \log(1+x) + \frac{1}{2} x^2 \log(1+x) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \log(1-x) + \frac{1}{2} x^2 \log(1-x) \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \log \frac{x+1}{1-x} + \frac{1}{4} x^2 \log \frac{x+1}{1-x} + C_2. \end{aligned}$$

Dosazením $x = 0$ pak snadno zjistíme, že $C_2 = 0$. Podle Abelovy věty dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2 - 1) \log \frac{x+1}{1-x} = \frac{1}{2},$$

kde jsme v posledním kroku mimo jiné využili známou limitu $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \log(1-x) = 0$. ♣

8.5.12. Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ je limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} \quad (8.12)$$

konečná a nenulová.

Řešení. Jest

$$\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^{k+1}}.$$

Podle 8.6 a 7.3.5 máme

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x \cos x &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^6) \\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Odtud a z 7.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^k}. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, plyne z věty o aritmetice limit, že pro volbu $k = 3$ je hledaná limita konečná a nenulová, přesněji

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Opětovným použitím věty o aritmetice limit odtud ihned dostaneme, že pro $k = 1$ nebo $k = 2$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = 0.$$

Konečně pro sudé číslo $k, k > 3$, platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = \infty$$

a pro liché číslo $k, k > 3$, limita (8.12) neexistuje. ♣

Integrál

V této kapitole budeme studovat tři důležité pojmy: primitivní funkce, Riemannův integrál a Newtonův integrál. Zavedení Riemannova integrálu je motivováno geometrickou úlohou nalézt obsah dané množiny. Pojem primitivní funkce pak poskytuje efektivní nástroj k výpočtu Riemannova integrálu v celé řadě případů. Oba pojmy pak přirozeně vedou k definici Newtonova integrálu, který je odlišný od Riemannova a v některých situacích je vhodnější než Riemannův. Závěr kapitoly bude věnován aplikacím určitého integrálu: výpočet délky křivky, výpočet objemu a povrchu rotačního tělesa, integrální kritérium konvergence řad a také uvedeme integrální tvar zbytku Taylorova polynomu.

9.1. Primitivní funkce

V tomto oddílu se budeme zabývat úlohou, která je v jistém smyslu opačná k derivování, neboli budeme k zadané funkci f hledat funkci F takovou, že zderivováním F obdržíme f . Jak uvidíme, tento problém je zpravidla komplikovanější než úloha nalézt derivaci zadané funkce.

9.1.1. Definice. Necht I je neprázdný otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ je **primitivní funkce** k funkci f na I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

9.1.2. (a) Necht F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Potom F je na I spojitá, neboť má dle definice v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci (vizte 9.1.21).

(c) Primitivní funkce není určena jednoznačně. Necht F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I a $c \in \mathbb{R}$. Potom je funkce $F + c$ také primitivní funkcí k f na I .

(d) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

9.1.3. Věta. Necht I je otevřený interval, $f, F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$ a F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I . Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $F(x) = G(x) + c$.

Důkaz. Definujme funkci $H: I \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $H(x) = F(x) - G(x)$, $x \in I$. Potom $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé $x \in I$. Podle Věty 5.2.9 je tedy H konstantní na I . ■

9.1.4. Necht funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F . Podle 9.1.2(c) a předchozí věty vidíme, že libovolnou primitivní funkci k funkci f na I získáme z jediné primitivní funkce F přičtením vhodné konstantní funkce.

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme symbolem

$$\int f(x) dx.$$

Pro popis této množiny budeme používat značení

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I, \quad (9.1)$$

kteří znamená, že pro libovolnou primitivní funkci G k funkci f na intervalu I existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G = F + c$ na intervalu I . Na levé straně vztahu (9.1) stojí *množina* všech primitivních funkcí k funkci f , zatímco na pravé straně stojí reprezentant této množiny, tedy funkce F , jedna z primitivních funkcí k funkci f na I . Vztah $\stackrel{c}{=}$ tedy není rovností v obvyklém smyslu slova (například není symetrický) a čteme jej jako **rovnost až na konstantu**.

Jednotlivé části symbolu $\int f(x) dx$ jsou znak **integrálu** \int , **integrand** $f(x)$, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci, a symbol dx označující proměnnou, vzhledem k níž integrujeme. Symbol dx uvažovaný samostatně nemá v této kapitole žádný matematický význam a nelze s ním algebraicky manipulovat.

9.1.5. O správnosti následujících vzorců se lze přesvědčit zderivováním:

$$\int x^n dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{pro } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0; \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty) \text{ pro } n \in \mathbb{Z}, n < -1,$$

$$\int x^\alpha dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \in (0, +\infty) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{1}{x} dx \stackrel{c}{=} \log|x|, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty),$$

$$\int e^x dx \stackrel{c}{=} e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \sin x dx \stackrel{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \cos x dx \stackrel{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi), k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} dx \stackrel{c}{=} \cotg x, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arcsin} x, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arccos} x, \quad x \in (-1, 1).$$

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později (vizte Důsledek 9.2.29).

9.1.6. Věta (existence primitivní funkce). Necht I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f má na I primitivní funkci.

9.1.7. Věta. Necht funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .

Důkaz. Podle Věty 5.1.17 platí

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. ■

9.1.8. Definice. Necht X je reálný vektorový prostor, $A, B \subset X$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom definujeme množiny $A + B$ a cA předpisy

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\} \quad \text{a} \quad cA = \{ca; a \in A\}.$$

Jestliže $x \in X$, potom symbolem $x + A$ značíme množinu $\{x\} + A$.

9.1.9. Necht I je otevřený interval. Potom systém X všech reálných funkcí na I tvoří vektorový prostor, přičemž pro $f, g \in X$ a $c \in \mathbb{R}$ definujeme výrazy $f + g$ a cf předpisy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{a} \quad (cf)(x) = cf(x) \quad \text{pro } x \in I.$$

9.1.10. Definice. Necht I je otevřený interval, X je systém všech reálných funkcí na I a $A \subset X$. Řekneme, že A je **určená až na konstantu**, jestliže existuje funkce $f \in X$ taková, že $A = \{f + c; c \in \mathbb{R}\}$.

9.1.11. Lemma. Necht I je otevřený interval a X je vektorový prostor všech reálných funkcí na I . Necht neprázdná množina $A \subset X$ je určená až na konstantu a C značí množinu všech konstantních funkcí na I . Pak platí následující tvrzení.

- (a) Je-li $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je cA též určená až na konstantu.
- (b) Platí $A = A + C$.

(c) Pokud a_1, a_2 jsou reálná čísla, platí

$$a_1A + a_2A = \begin{cases} (a_1 + a_2)A, & a_1 + a_2 \neq 0, \\ C, & a_1 + a_2 = 0 \text{ a } a_1 \neq 0, \\ \{0\}, & a_1 = a_2 = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) ihned plynou z definice.

(c) Nejprve uvažujeme případ $a_1 + a_2 \neq 0$. Necht $f_1, f_2 \in A$ jsou dány. Jelikož $A = \{f + c : c \in \mathbb{R}\}$ pro nějaké $f \in X$, existují $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ splňující $f_i = f + c_i$, $i = 1, 2$. Pak

$$\begin{aligned} a_1f_1 + a_2f_2 &= (a_1 + a_2)f + a_1c_1 + a_2c_2 \\ &= (a_1 + a_2) \cdot \left(f + \frac{a_1c_1 + a_2c_2}{a_1 + a_2}\right) \in (a_1 + a_2)A. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $g \in (a_1 + a_2)A$. Pak platí $g = (a_1 + a_2)(f + c)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Tedy

$$g = a_1(f + c) + a_2(f + c) \in a_1A + a_2A.$$

Tím je první případ ověřen.

Pokud $a_1 + a_2 = 0$ a $a_1 \neq 0$, pak pro $f_1, f_2 \in A$ máme jako výše $f_i = f + c_i$, $i = 1, 2$, a tedy

$$a_1f_1 + a_2f_2 = a_1c_1 + a_2c_2 \in C.$$

Je-li $c \in C$ dána, pak $f_1 = f + \frac{c}{a_1}$ a $f_2 = f$ splňují $a_1f_1 + a_2f_2 = c$, a tedy požadovaný vztah platí.

Případ $a_1 = a_2 = 0$ je pak zřejmý. ■

9.1.12. Věta (integrace per partes). Necht I je otevřený interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx, \quad x \in I. \quad (9.2)$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I dle 9.1.2(a), takže i funkce fG je spojitá na I . Má tedy primitivní funkci na I dle Věty 9.1.6. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf . Pak z Věty 5.1.17 máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \stackrel{c}{=} GF - H.$$

Množina funkcí na pravé straně (9.2) obsahuje funkci $GF - H$, stejně tak i množina funkcí na levé straně (9.2), a proto se obě množiny rovnají (vizte Větu 9.1.3). ■

9.1.13. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci \arctg na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom je f spojitá na \mathbb{R} , a tedy podle Věty 9.1.12 platí

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \int g(x)F(x) \, dx \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &\stackrel{c}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

9.1.14. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci xe^x na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 9.1.12 položíme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = e^x$ a $G(x) = e^x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int xe^x \, dx &= \int g(x)F(x) \, dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx \\ &= xe^x - \int e^x \, dx \stackrel{c}{=} e^x(x-1), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

♣

9.1.15. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $\log x$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 9.1.12 položíme $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= \int 1 \cdot \log x \, dx = \int g(x)F(x) \, dx \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx \stackrel{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

♣

9.1.16. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 9.1.6) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na \mathbb{R} . Z Věty 9.1.12 dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = x \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x(-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Z Lemmatu 9.1.11 nyní plyne následujícím způsobem tvrzení.

Nechť C značí množinu konstantních funkcí na \mathbb{R} a necht' $f = \frac{x}{(1+x^2)^n}$. V obdržené rovnici

$$I_n = f + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

přičteme k oběma stranám $-I_n + 2nI_{n+1}$ a obdržíme

$$2nI_{n+1} + I_n - I_n = f + 2nI_n - I_n - 2nI_{n+1} + 2nI_{n+1},$$

tj.

$$2nI_{n+1} + C = f + (2n-1)I_n + C.$$

To ale dává rovnost

$$2nI_{n+1} = f + (2n-1)I_n,$$

z které již požadovaný závěr plyne. \clubsuit

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

9.1.17. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ na \mathbb{R} .

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 9.1.6) plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na \mathbb{R} primitivní funkci. Dvojitým použitím Věty 9.1.12 dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

Lemma 9.1.11 nyní použijeme pro obdrženou rovnost $A = g - A$, kde $A = \int e^x \sin x dx$ a $g = e^x(\sin x - \cos x)$. Přičtením A k oběma stranám rovnice tak obdržíme $2A =$

$g + C$, kde C značí množinu všech konstantních funkcí na intervalu $(-\infty, \infty)$. Z této rovnosti již plyne

$$\int e^x \sin x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

♣

9.1.18. Použijme metodu per partes pro výpočet primitivní funkce k funkci tg na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx = (-\cos x) \frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x) \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= -1 + \int \operatorname{tg} x \, dx, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Tato rovnost by mohla svádět k odvození identity $0 = -1$. Tento spor je však jen zdánlivý, neboť správně použité Lemma 9.1.11 dává pro $A = \int \operatorname{tg} x \, dx$ rovnost $C = -1 + C$, kde C značí množinu všech konstantních funkcí na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, která žádný spor nepředstavuje.

9.1.19. Věta (Darboux). Necht f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f Darbouxovu vlastnost na I , tj. $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.

Důkaz. Necht $J \subset I$ je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 1.5.23.

Necht F je primitivní k funkci f na I . Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

tj. H má na I vlastní derivaci.

Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. (V opačném případě bychom postupovali obdobně.) Protože funkce H nabývá na intervalu $[x_1, x_2]$ minima (Věta 4.3.9), můžeme ho označit jako x_0 . Jelikož

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta): H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$. Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.

Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$, a proto platí $H'(x_0) = 0$ (vizte Větu 5.1.30). Odtud $f(x_0) = z$. ■

9.1.20. Necht I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom na I platí následující implikace:

f je spojitá $\Rightarrow f$ má primitivní funkci $\Rightarrow f$ má Darbouxovu vlastnost.

9.1.21. Z Věty 9.1.19 plyne, že funkce sign nemá na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkci.

9.1.22. Věta (první věta o substituci). Necht $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a, b) , $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) platí

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

V následujících příkladech použijeme právě dokázanou první větu o substituci.

9.1.23. Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^4 t \cos t dt.$$

Řešení. Položme $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$,

$$f(x) = x^4, \quad x \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{5}x^5, \quad x \in (a, b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 9.1.22) platí

$$\int \sin^4 t \cdot \cos t dt = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sin^5 t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

♣

9.1.24. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá na celém \mathbb{R} , existuje k ní tedy primitivní funkce na celém \mathbb{R} . Při výpočtu $\int g(x) dx$ použijeme substituci „ $t = 2 + 5x^2$ “, tj. funkci $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $\varphi(x) = 2 + 5x^2$, neboť si všimneme, že $\varphi'(x) = 10x$, a tedy

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} dx = \frac{1}{10} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} dx.$$

Podle Věty 9.1.22 je třeba vypočítat

$$\frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sqrt{t}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Každá funkce

$$x \mapsto \frac{1}{5} \sqrt{2 + 5x^2} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je tedy primitivní funkcí k funkci g na \mathbb{R} . ♣

9.1.25. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \frac{1}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na svém definičním oboru $(-2/3, 4/3)$, a tedy k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní. Nejprve si funkci g upravíme následujícím způsobem:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - (3x - 1)^2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x-1}{3}\right)^2}}.$$

Počítejme tedy

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1/3)^2}} dx.$$

Tento integrál připomíná integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \stackrel{c}{=} \arcsin t.$$

Užijeme Větu 9.1.22. Roli funkce φ bude plnit funkce $x \mapsto x - 1/3$, jejíž derivace je rovna 1. Dostáváme tak

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1/3)^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} dx.$$

Podle Věty 9.1.22 stačí spočítat

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \arcsin t, \quad t \in (-1, 1),$$

takže

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1/3)^2}} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \arcsin(x - 1/3), \quad x \in (-2/3, 4/3).$$

♣

9.1.26. Chceme-li použít Větu 9.1.22 při výpočtu primitivní funkce k funkci g , je třeba nalézt funkce f a φ tak, aby platilo $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Často postupujeme tak, že nejprve zvolíme funkci φ a k ní pak určíme funkci f . V Příkladech 9.1.24 a 9.1.25 jsme výraz $\varphi'(x) dx$ nahradili výrazem dt a zbývající část integrandu již byla ve tvaru $f \circ \varphi$. Formálně jsme tedy provedli substituci $\varphi(t) = x$ a $\varphi'(t) dt = dx$. Poslední vztah, kterému nedáváme žádný matematický význam, je užitečnou pomůckou při výpočtech.

V případě, že se nám nepodařilo tvar funkce f předchozím způsobem nalézt, ale derivace funkce φ je všude kladná (resp. všude záporná), můžeme postupovat následujícím způsobem. Výraz x nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(t)$ a výraz dx výrazem

$(\varphi^{-1})'(t) dt$, tak obdržíme výraz $\int g(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) dt$. Integrand je potom hledanou funkcí f . Platí totiž

$$f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi^{-1}(\varphi(x))) \cdot (\varphi^{-1})'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(x),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26).

9.1.27. Věta (druhá věta o substituci). Necht $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Necht f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 9.1.19 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 5.4.7 je buď φ klesající na (α, β) , nebo je φ rostoucí na (α, β) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned} (G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) a větu o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26). ■

V následujícím příkladu použijeme druhou větu o substituci, kterou jsme právě dokázali.

9.1.28. Příklad. Spočítejte primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$.

Řešení. Položme $(a, b) = (-1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$\varphi(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Tedy podle druhé věty o substituci (Věta 9.1.27) platí

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

♣

Uvedeme nyní ještě jednu užitečnou variantu věty o substituci.

9.1.29. Věta. Necht $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $\varphi'(x)$ vlastní a nenulová. Potom $\varphi((a, b))$ je interval, který označíme (α, β) . Definujme funkci $g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)$. Necht G je primitivní funkce k g na (α, β) . Potom $G \circ \varphi$ je primitivní funkce k f na (a, b) .

Důkaz. Funkce φ má na (a, b) vlastní derivaci, tudíž je spojitá, a tedy má Darbouxovu vlastnost. Odtud plyne, že $\varphi((a, b))$ je interval. Podle Věty 9.1.19 platí buď $\varphi'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, nebo $\varphi'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Tedy podle Věty 5.4.7 je buď φ klesající na (a, b) , nebo je φ rostoucí na (a, b) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$. Odtud plyne, že funkce g je dobře definovaná. Potom pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\begin{aligned} (G \circ \varphi)'(x) &= (g \circ \varphi)(x)\varphi'(x) = f(x)(\varphi^{-1})'(\varphi(x))\varphi'(x) \\ &= \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))}\varphi'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. ■

9.1.30. Věta 9.1.6 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci. Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí. Tuto vlastnost má například funkce e^{-x^2} , důkaz však není snadný. Ukážeme nyní některé druhy funkcí, kde tato potíž nevzniká. Základní třídou takových funkcí jsou funkce racionální. Ukážeme také ještě některé další typy funkcí, jejichž integraci je možné převést na integraci racionálních funkcí pomocí vhodné substituce.

Integrace racionálních funkcí.

9.1.31. Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině \mathbb{R} , která neobsahuje žádný kořen polynomu Q .

9.1.32. Nejprve uvedeme některé poznatky z algebry. Všimněme si, že máme-li polynom

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

lze za proměnnou x dosazovat i komplexní čísla, přičemž hodnoty pak budou opět komplexní čísla. Každý polynom tedy můžeme chápat i jako zobrazení z \mathbb{C} do \mathbb{C} . Ve zbytku tohoto oddílu budeme uvažovat i polynomy s komplexními koeficienty, tj. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Podobně jako v reálném případě, je takový polynom roven nule pro každé $x \in \mathbb{C}$, právě když jsou všechny jeho koeficienty nulové. Odtud plyne, že můžeme definovat stupeň takového polynomu stejně jako v reálném případě a budeme jej značit symbolem $\text{st } P$.

9.1.33. Lemma (o dělení polynomů). Necht P a Q jsou dva polynomy (obecně s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:

- $\text{st } Z < \text{st } Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

9.1.34. Důsledek. Je-li P polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$ jeho **kořen** (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Důkaz. Položme $Q(x) = x - \lambda$. Pak dle Lemmatu 9.1.33 existují polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$, kde $\text{st } Z < \text{st } Q = 1$. Polynom Z je tedy konstantní. Platí $0 = P(\lambda) = R(\lambda)(\lambda - \lambda) + Z(\lambda)$, tedy $Z(\lambda) = 0$. Z toho plyne, že Z je nulový. ■

9.1.35. Věta (rozklad na kořenové činitele). Necht $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{C}. \quad (9.3)$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, neboť $P(x) = a_1(x - (-\frac{a_0}{a_1}))$ a stačí položit $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. Necht tedy $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a tvrzení platí pro všechny polynomy stupně nejvýše $n - 1$. Podle základní věty algebry (Věta ??) existuje kořen $x_n \in \mathbb{C}$ polynomu P . Dle Důsledku 9.1.34 je $P(x) = (x - x_n)R(x)$ pro nějaký polynom R . Všimněme si, že $\text{st } R = n - 1$ a navíc koeficient u x^{n-1} v polynomu R je roven a_n . Podle indukčního předpokladu tedy existuje rozklad $R(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$. Tím dostaneme i požadovaný rozklad polynomu P . ■

9.1.36. (a) Pro každý polynom je rozklad (9.3) určený jednoznačně až na pořadí činitelů. Mezi čísla x_1, \dots, x_n se vyskytují všechny kořeny polynomu P . Odtud plyne, že polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ má nejvýše n různých kořenů.

(b) Tvrzení Důsledku 9.1.34 lze ještě dále zesílit následujícím způsobem. Je-li P nenulový polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak existuje právě jedno $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a jednoznačně určený polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$ a $R(\lambda) \neq 0$.

Platí-li totiž $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro jistý polynom R a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak je nutně polynom R nenulový a $k \leq \text{st } P$. Můžeme tedy nalézt největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro které existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$. Z Důsledku 9.1.34 plyne, že $R(\lambda) \neq 0$, jinak bychom dostali spor s maximalitou k .

Dokažme jednoznačnost. Předpokládejme, že platí $P(x) = (x - \lambda)^l \tilde{R}(x)$ pro nějaké $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a polynom \tilde{R} splňující $\tilde{R}(\lambda) \neq 0$. Všimněme si, že z volby k plyne $l \leq k$. Pak dostáváme $(x - \lambda)^{k-l} R(x) = \tilde{R}(x)$ pro $x \neq \lambda$ a ze spojitosti plyne, že tento vztah je splněn i pro $x = \lambda$. Musí být $k = l$, jinak dosazením $x = \lambda$ dostáváme $\tilde{R}(\lambda) = 0$, což je spor. Potom také $R = \tilde{R}$, čímž je důkaz proveden.

9.1.37. Definice. Necht P je nenulový polynom, $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že číslo λ je **kořen násobnosti** k polynomu P , jestliže existuje polynom R splňující $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

9.1.38. Poznámka. Z poznámky před definicí plyne, že násobnost kořene je určená jednoznačně a je rovna počtu výskytů čísla λ v n -tici x_1, x_2, \dots, x_n z Věty 9.1.35.

9.1.39. Věta. Necht P je polynom s reálnými koeficienty a $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen polynomu P násobnosti k . Pak i komplexně sdružené číslo $\bar{\lambda}$ je kořen polynomu P násobnosti k .

Důkaz. ■

9.1.40. Věta. Necht $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ taková, že

- $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- žádné dva z polynomů $x - x_1, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,
- polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.

Důkaz. Necht x_1, \dots, x_k jsou všechny (navzájem různé) reálné kořeny polynomu P s násobnostmi p_1, \dots, p_k a z_1, \dots, z_l jsou kořeny polynomu P s kladnou imaginární složkou s násobnostmi q_1, \dots, q_l . Potom jsou též podle Věty 9.1.39 čísla $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l$ kořeny polynomu P s násobnostmi q_1, \dots, q_l . Můžeme tedy psát

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x - z_1)^{q_1} (x - \bar{z}_1)^{q_1} \dots (x - z_l)^{q_l} (x - \bar{z}_l)^{q_l}.$$

Dále platí $(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 + (-z_i - \bar{z}_i)x + z_i \bar{z}_i$. Obě čísla $-z_i - \bar{z}_i, z_i \bar{z}_i$ jsou reálná, a proto můžeme položit $\alpha_i = -z_i - \bar{z}_i$ a $\beta_i = z_i \bar{z}_i$. Snadno ověříme, že požadované vlastnosti jsou splněny. ■

9.1.41. Věta (rozklad na parciální zlomky). Necht P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\text{st } P < \text{st } Q$ a necht

$$Q(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 9.1.40. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots + \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Q je *monický*, tj. jeho vedoucí koeficient je roven 1.

1. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro případ, kdy $Q(x) = (x - x_1)^n$ nebo $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Je-li $n = 1$, je výraz $\frac{P}{Q}$ v požadovaném tvaru.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Necht' nyní Q je tvaru $Q(x) = (x - x_1)^n$. Pak existují polynom A a $r \in \mathbb{R}$ takové, že $P(x) = A(x)(x - x_1) + r$. Tedy

$$\frac{P(x)}{(x - x_1)^n} = \frac{A(x)}{(x - x_1)^{n-1}} + \frac{r}{(x - x_1)^n}.$$

Na první člen vpravo aplikujeme indukční předpoklad a druhý je již v požadovaném tvaru.

Podobně postupujeme v případě $Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^n$. Předpokládáme-li platnost tvrzení pro každé $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, píšeme $P(x) = A(x)(x^2 + \alpha x + \beta) + R(x)$, kde A je polynom a R je polynom nejvýše stupně 1. Pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}} + \frac{R(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}.$$

Opět lze na první člen použít indukční předpoklad, zatímco druhý je v požadovaném tvaru.

Tím je tvrzení dokázáno v případě, kdy Q je polynom typu $(x - x_1)^n$ nebo $(x^2 + \alpha x + \beta)^n$, kde kvadratický člen je nerozložitelný.

2. Dokazujme nyní tvrzení pro případ, kdy Q je součinem n různých typů nerozložitelných prvočinitelů. Pro případ $n = 1$ bylo tvrzení dokázáno v části 1.

Předpokládejme nyní jeho platnost pro všechna $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Necht' $Q = GH$ je polynom stupně n , kde G i H jsou monické, nesdílejí žádné netriviální společné dělitele a $\text{st } P < n$. Tedy $\text{st } P < \text{st } G + \text{st } H = n$ a $\min\{\text{st } G, \text{st } H\} \geq 1$. Jelikož nemají G a H žádného netriviálního společného dělitele, dle Lemmatu ?? existují polynomy C a D takové, že $1 = CG + DH$. Pak C nemá společný násobek s H a D nemá společný násobek s G . Pak máme

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{PCG}{Q} + \frac{PDH}{Q} = \frac{PC}{H} + \frac{PD}{G}.$$

Dostali jsme tak součet dvou výrazů, z nichž každý má ve jmenovateli méně než n různých nerozložitelných prvočinitelů. V případě, kdy $\text{st } PC < \text{st } H$ a $\text{st } PD < \text{st } G$, lze aplikovat indukční předpoklad a důkaz ukončit. V opačném případě předpokládejme nejprve, že $\text{st } PC \geq \text{st } H$. Pak $PC = GH + R$ pro nějaké polynomy G a R , kde $\text{st } R < \text{st } H$. To implikuje, že R nesdílí s H žádného společného dělitele, neboť v opačném případě by společný dělitel H a R byl též dělitelem P (neboť C nemá s H společného dělitele), což by byl spor s podmínkou (vii).

Máme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(CG + DH)}{Q} = \frac{(QH + R)G + DHP}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q}.$$

Jako výše díky podmínce (vii) vidíme, že $Q + DF$ nemá společného dělitele s G . Pak

$$\text{st } RG < \text{st } H + \text{st } G \quad \text{a} \quad \text{st } P < \text{st } H + \text{st } G,$$

a tedy též

$$\text{st}(Q + DF) < \text{st } H + \text{st } G.$$

Tedy $\text{st}(Q + DF) < \text{st } G$ a $\text{st } R < \text{st } H$. Dostáváme tak

$$\frac{P}{Q} = \frac{RG + (Q + DF)H}{Q} = \frac{R}{H} + \frac{Q + DF}{G},$$

přičemž na oba zlomky na pravé straně již lze použít indukční předpoklad.

Důkaz je tak dokončen. ■

9.1.42 (postup při hledání primitivní funkce k funkci racionální). Mějme polynomy P a Q . Máme-li integrovat racionální funkci P/Q , pak postupujeme takto:

V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q , vydělíme polynom P polynomem Q (Lemma 9.1.33) a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q . Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R . Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\text{st } P < \text{st } Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q , resp. P/Q , kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Nyní si ukážeme jak na to. Parciální zlomek odpovídající reálnému kořeni a integrujeme následovně:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x-a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx &= \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_1} + \\ &+ \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{((x + \alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4)^q} dx =$$

$$= \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2 + 1\right)^q} dx.$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1+t^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si ukázali v Příkladu 9.1.16.

9.1.43. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x^2 + 2x - 3)}.$$

Řešení. Nejprve určíme definiční obor funkce f . Výraz $x^2 + 2x + 2$ je vždy kladný, $x^2 + 2x - 3$ lze rozložit a platí $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Odtud je vidět, že $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Funkce f je spojitá na celém D_f . Má tedy primitivní funkci na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, +\infty)$.

Protože polynom v čitateli je menšího stupně, než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na D_f na parciální zlomky. Rozklad bude mít tvar

$$\frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1)(x + 3)} =$$

$$= \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{E}{x - 1} + \frac{F}{x + 3}. \quad (9.4)$$

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3) +$$

$$+ (Cx + D)(x - 1)(x + 3) +$$

$$+ E(x^2 + 2x + 2)^2(x + 3) + F(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1), \quad (9.5)$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Polynomy jsou však spojitě na \mathbb{R} , a proto vztah (9.5) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (9.5).

$$\begin{aligned} x^5: & \quad 0 = A + E + F, \\ x^4: & \quad 0 = 4A + B + 7E + 3F, \\ x^3: & \quad 0 = 3A + 4B + C + 20E + 4F, \\ x^2: & \quad 0 = -2A + 3B + 2C + D + 32E, \\ x^1: & \quad 1 = -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F, \\ x^0: & \quad 0 = -6B - 3D + 12E - 4F. \end{aligned}$$

Dostali jsme tak soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých.

b) Dosadíme do (9.5) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají 0 (tj. reálné kořeny jmenovatele původního zlomku - v našem případě čísla -3 a 1).

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (9.5) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (9.4), který má tedy tvar

$$f(x) = -\frac{1}{25} \cdot \frac{x}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{x + 3}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx \stackrel{c}{=} \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{1}{((x + 1)^2 + 1)^2} dx \stackrel{c}{=} \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{c}{=} \log|x - 1|, \quad x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, +\infty), \\ \int \frac{1}{x + 3} dx &\stackrel{c}{=} \log|x + 3|, \quad x \in (-\infty, -3) \text{ a } x \in (-3, +\infty). \end{aligned}$$

Na každém z intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, +\infty)$ je tak primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$\begin{aligned} -\frac{1}{50} \log(x^2 + 2x + 2) + \frac{7}{50} \operatorname{arctg}(x + 1) + \frac{1}{10} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \\ + \frac{1}{100} \log|x - 1| + \frac{3}{100} \log|x + 3| + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

9.1.44. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$.

Řešení. Standardním postupem (dělením polynomů) spočteme

$$\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = x^3 + 2 + 3 \frac{x + 1}{x^2 - 1} = x^3 + 2 + 3 \frac{1}{x - 1}.$$

Tedy

$$\int \frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} dx \stackrel{c}{=} \frac{x^4}{4} + 2x + 3 \log|x - 1|$$

na $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a na $(1, \infty)$.

♣

9.1.45. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)}$.

Řešení. Obecný rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Vynásobíme obě strany výrazem $(x+1)^2(x^2+x+1)$ a obdržíme $x^2+1 = x^3(B+C) + x^2(A+2B+2C+D) + x(A+2B+2C+2D) + (A+B+D)$.

Dva polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnají všechny jejich koeficienty. Tedy dostaneme tedy soustavu čtyř lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= B + C \\ 1 &= A + 2B + 2C + D \\ 0 &= A + 2B + C + 2D \\ 1 &= A + B + D. \end{aligned}$$

Její řešení je

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -1.$$

Tedy

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Máme

$$\int \frac{2}{(x+1)^2} dx \stackrel{c}{=} \frac{-2}{x+1} \quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (-1, \infty)$$

a

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1} dx.$$

Ten substitucí $t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ převedeme na integrál $\int \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{t^2+1} dt$. Tedy

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} \stackrel{c}{=} \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Dohromady máme

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx \stackrel{c}{=} \frac{-2}{x+1} + \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$

na $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.

•

Trigonometrické substituce.

9.1.46. Definice. Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[u, v] \mapsto \sum_{i,j=0}^n a_{ij} u^i v^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{0, \dots, n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

9.1.47. Označení. Až do konce tohoto oddílu budeme symbolem R značit racionální funkci dvou proměnných.

9.1.48. Definice. Řekneme, že R je **sudá v první souřadnici**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}(R)$ a máme $R(-x, y) = R(x, y)$. Analogicky definujeme **lichost v první** a **sudost a lichost v druhé souřadnici**.

Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x, -y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x, y) = R(-x, -y)$. Analogicky definujeme lichost funkce R .

9.1.49. Necht R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin t, \cos t) dt, \quad t \in I, \quad (9.6)$$

přičemž integrand je definován na intervalu I . Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít následujících substitucí.

(a) Je-li R lichá ve druhé souřadnici, lze užít substituci $\sin t = x$. Přesněji řečeno: použijeme Větu 9.1.22 pro funkci $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $\varphi(t) = \sin t$. Příslušnou funkci f lze pak volit jako racionální funkci jedné reálné proměnné. Podobné upřesnění je možné doplnit i v následujících bodech (b)-(d).

(b) Je-li R lichá v první souřadnici, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li R sudá, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$.

(d) Vždy lze použít substituci $\operatorname{tg}(t/2) = x$.

9.1.50. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(t) = \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t + \cos^4 t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce g je spojitá na \mathbb{R} , má tedy na \mathbb{R} primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a vidíme, že R je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá. Pro převod na integraci racionální funkce lze tedy užít jakoukoliv ze substitucí uvedených v 9.1.49.

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočteme nejprve

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \\ \sin t &= 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2}, \\ dt &= \frac{2}{1 + x^2} dx.\end{aligned}$$

Při určení dx jsme použili rovnost $x = 2 \operatorname{arctg} t$ a 9.1.26.

Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t(1-t^2)(1+t^2)}{16t^4 + (1-t^2)^4} dt.$$

Je vidět, že jsme dosáhli svého cíle. Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $x \in (-\pi, \pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkusme tedy další substituce.

(a) Substituce $x = \sin t$. V našem případě lze funkci f upravit na tvar

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $dx = \cos t dt$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1} dx.$$

Užitím substituce $u = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2} du = \int \frac{1}{(2u - 1)^2 + 1} du \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2u - 1), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tedy

$$\int g(t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin^2 t - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Substituce $t = \cos x$. Funkci f lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{\cos x}{(1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x} \cdot \sin x.$$

Uvědomíme-li si, že $dt = -\sin x dx$, dostáváme

$$-\int \frac{t}{(1-t^2)^2 + t^4} dt \stackrel{c}{=} -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Výpočet je zcela analogický výpočtu v předchozím případě.) Primitivní funkci k f je na \mathbb{R} kterákoliv z funkcí

$$-\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cos^2 x - 1) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

(c) Zkusme ještě substituci $t = \operatorname{tg} x$, která je v našem případě rovněž použitelná. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $f(x)$ výrazem $\cos^2 x$ a dostaneme

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Nyní použijeme vztah $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{t}{t^4 + 1} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My však víme, že funkce f má primitivní funkci na celém \mathbb{R} (je totiž na \mathbb{R} spojitá). Tuto primitivní funkci můžeme nalézt způsobem, který byl popsán v předchozím příkladu.

Pokusme se shrnout: Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f . Tento nedostatek lze překonat „nalepováním“ v bodech, které jsme museli vynechat. Obdobná situace je při užití substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$ - ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepší - pokud to dovoluje tvar integrované funkce - se jejímu použití vyhnout a použít příslušnou ze zbývajících tří substitucí.

Z výše uvedeného je vidět, že tvar výsledku může podstatně záviset na použité substituci, vždy však jde o funkce, které se liší pouze o konstantu. ♣

9.1.51. Příklad. Určete primitivní funkci k $f(x) = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x}$.

Řešení. Funkce f je spojitá na celém \mathbb{R} a má tedy na \mathbb{R} primitivní funkci. Označíme-li

$$R(u, v) = \frac{1}{1 + 3v^2},$$

potom $f(x) = R(\sin x, \cos x)$. Platí $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Lze tedy užít substituci $t = \operatorname{tg} x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Abychom tuto substituci mohli provést, vypočteme

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Dále z rovnosti $x = \operatorname{arctg} t$ dostáváme $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ podle poznámky na straně ???. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1 + 3 \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{4 + t^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podle věty o substituci tedy platí

$$\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

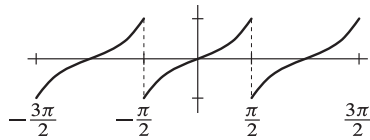
Označíme-li $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)$, je funkce F primitivní k f na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém \mathbb{R} . Každá primitivní funkce G k f na \mathbb{R} je rovna $F + c_k$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c_k \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Protože G je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi -} G(x) = \frac{\pi}{4} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi +} G(x) = -\frac{\pi}{4} + c_{k+1},$$

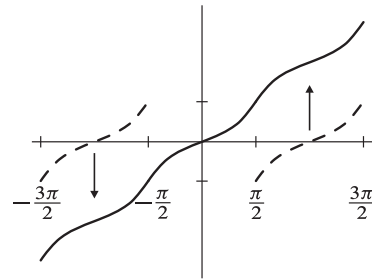
musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{2}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne $c_k = c_0 + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Každá primitivní funkce k f má tedy tvar

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + c_0 + k\frac{\pi}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ \frac{\pi}{4} + c_0 + k\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Funkce G vznikla tak, že na každém intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ jsme k funkci F přičetli vhodnou konstantu tak, aby výsledná funkce byla spojitá, vizte obrázky. Tomuto postupu se říká „lepení“.



OBRÁZEK 1.



OBRÁZEK 2.

9.1.52. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$$

Řešení. Zadaná trigonometrická funkce je typu (ii)

9.1.53. Věta. Necht f, F jsou spojitě funkce na otevřeném intervalu I , $c \in I$ a necht $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I .

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z Věty 5.2.10.

9.1.54. Příklad. Spočítejte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$.

Řešení. Protože $R(a, b) = \frac{1}{1+a^2}$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. V první větě o substituci (Věta 9.1.22) je pak $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ a $(a, b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zjevně je $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ nenulová na $(-\infty, \infty)$ a $\varphi((-\infty, \infty)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Protože $\operatorname{tg} x = t$, máme

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}.$$

Tedy

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+2t^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Z druhé věty o substituci (Věta 9.1.27) tedy plyne, že

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \quad (9.7)$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je ale spojitá na celém \mathbb{R} , a tedy dle Věty ?? má na \mathbb{R} primitivní funkci G . Tu najdeme pomocí již nalezené funkce F z (9.7). Protože

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

položíme

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak G je spojitá funkce a v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(x) = (1 + \sin^2 x)^{-1}$. V bodech tvaru $k\pi + \frac{\pi}{2}$ tato rovnost platí díky Větě 9.1.53. ♣

Integrály typu $R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$.

9.1.55. Při integraci funkce $R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, kde $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

9.1.56. Věta (Integrály tvaru $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$). Necht $q \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$ a $R(x, y)$ je racionální funkcí dvou proměnných. Necht I je otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}\left(R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right)$. Položíme $\varphi(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$, $x \in I$. Pak je φ monotónní funkce, $J = \varphi(I)$ je otevřený interval a $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální

spojitá funkce definovaná na J . Je-li F její primitivní funkce na J , je $F \circ \varphi$ primitivní funkce k $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$ na I .

Důkaz. Zobrazení $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ je ryze monotónní na každém otevřeném intervalu obsaženém v jeho definičním oboru. Vzhledem k monotonii odmocniny pak dostáváme ryzi monotónii funkce $x \mapsto \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$ na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru této funkce. Proto je φ ryze monotónní funkce a její obor hodnot J je otevřený interval (viz Věta 4.3.6). Inverzní funkce $\varphi^{-1}: J \rightarrow I$ je určena jako $\varphi^{-1}(t) = \frac{t^q d - b}{a - t^q c}$, z čehož plyne, že $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální funkce na J . Fakt, že $F \circ \varphi$ je primitivní k $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$ na I , nyní plyne z Věty 9.1.27. ■

9.1.57. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ je definovaná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Pak

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = \varphi(t),$$

přičemž $\varphi: (0, 1) \rightarrow (-\infty, -1)$ a $\varphi: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací

$$\varphi'(t) = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2}.$$

Podle druhé věty o substituci (Věta 9.1.27) dostaneme integrál

$$I = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} t \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} dt.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} = -\frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t + 1} - \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log|t + 1| - \log|t - 1| - 2 \operatorname{arctg} t, \quad \text{na } (0, 1) \text{ a } (1, \infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx \stackrel{c}{=} \log \left| \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty).$$

♣

9.1.58. Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$.

Řešení. Funkce je na $D_f = (0, +\infty)$ spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Vyskytují-li se v předpisu funkce f výrazy

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$, pak uijeme substituci $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$, kde s je nejmenší společný násobek čísel q_1, \dots, q_n .

V našem případě máme v předpisu funkce f mocniny $x^{1/2}$ a $x^{2/3}$. Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6. Uijeme tedy substituci $t = x^{1/6}$, $x \in (0, +\infty)$. Odtud odvodíme $dx = 6t^5 dt$. Na intervalu $(0, +\infty)$ pak hledáme primitivní funkci

$$\int \frac{t^6 - 1}{t^6(t^3 + t^4)} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^6 - 1}{t^5 + t^4} dt.$$

Protože v posledním integrovaném výrazu (je to racionální funkce proměnné t) je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$\begin{aligned} (t^6 - 1) : (t^5 + t^4) &= t - 1 + \frac{t^4 - 1}{t^4(t+1)} = \\ &= t - 1 + \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = \\ &= t - 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4}. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme integrovat

$$6 \int \frac{t^6 - 1}{t^5 + t^4} dt \stackrel{c}{=} 3t^2 - 6t + 6 \log t + 6 \frac{1}{t} - 3 \frac{1}{t^2} + 2 \frac{1}{t^3}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Dle věty o substituci je primitivní funkcí k f na $(0, +\infty)$ každá funkce tvaru

$$3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \log x + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. ♣

Integrály typu $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt$.

9.1.59. Také integraci funkce $R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechtě tedy $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2 + bt + c$ můžeme pro převod použít některý z následujících postupů.

(a) Pokud má q dvojnásobný reálný kořen α . Pak platí $q(t) = a(t - \alpha)^2$. Funkce g má neprázdný definiční obor, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t - \alpha|, \quad t \in \mathbb{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2 . Potom „slepíme“ F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I , která bude primitivní ke g na I .

(b) Pokud $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{at}, \quad t \in I. \quad (9.8)$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{ax} - b}, \quad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1} . Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{ax^2} + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{ax} - b)^2}$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g . Substituce (9.8) se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{at} + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Pokud $a < 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2 , přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)} = \sqrt{-a}(t - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I , který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v 9.1.55.

9.1.60. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + t + 1}} dt$.

Řešení. Integrand označíme g . Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém \mathbb{R} , použijeme tedy Eulerovu substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \quad dt = -2 \frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2} dx.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné x výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)} dx.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x - 2)(2x - 1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x - 2)(2x - 1)} dx &= \int 1 dx + 2 \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{1}{2x - 1} dx \stackrel{c}{=} \\ &\stackrel{c}{=} x + 2 \log |x - 2| - \frac{1}{2} \log |2x - 1| \end{aligned}$$

na intervalech $(\frac{1}{2}, 2)$ a $(2, \infty)$.

Podle Věty 9.1.22) má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + t + 1} - t + 2 \log \left| \sqrt{t^2 + t + 1} - t - 2 \right| \\ - \frac{1}{2} \log \left| 2\sqrt{t^2 + t + 1} - 2t - 1 \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

9.1.61. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$.

Řešení. Použijeme substituci

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t.$$

Pak

$$x = \frac{1 - t^2}{2t} = \varphi(t)$$

a

$$\varphi'(t) = \frac{1(1 - t^2)}{2t^2}.$$

Pak $\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ a $\varphi : (1, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Tedy počítáme integrál

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t} \frac{1+t^2}{2t}} \frac{-(1+t^2)}{2t^2} dt \\ &= \int \frac{-2}{1-t^2} dt = - \left(\int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \right) \\ &\stackrel{c}{=} -\log |t^2 - 1|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = -\log \left| \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 - 1 \right| \quad \text{na } (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty).$$

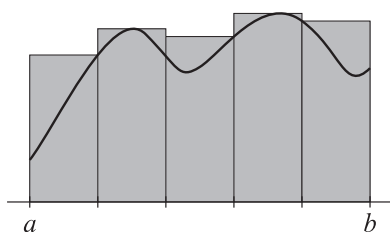
♣

9.2. Riemannův integrál

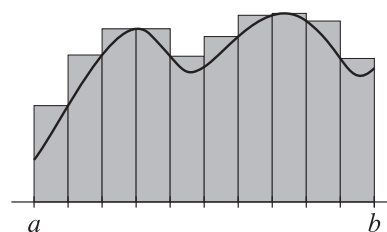
Zavedení Riemannova integrálu je mimo jiné motivováno problémem, jak definovat pojem obsahu i pro komplikovanější množiny v rovině než jsou jednoduché geometrické útvary jako obdélník, trojúhelník, apod.

Mějme tedy omezenou nezápornou funkci f definovanou na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Chceme definovat, jakou plochu má obrazec pod grafem funkce f tak, aby to bylo v souladu s tím, jak počítáme plochu u jednoduchých geometrických obrazců.

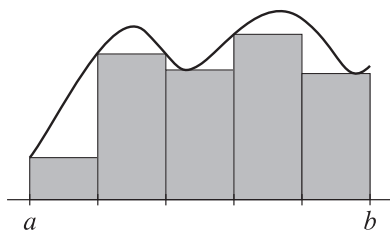
Jednou z možností je aproximovat obrazec pomocí konečných sjednocení obdélníků, jejichž plochu známe, a pak pomocí „limitního přechodu“ dojít k výsledku. Celá myšlenka je patrna z následujících obrázků. V prvních dvou odhadujeme plochu obrazce shora, ve druhých dvou naopak zdola.



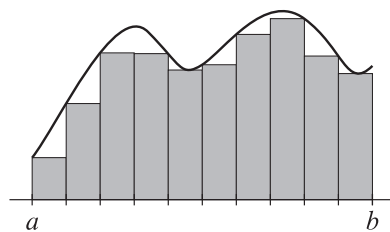
OBRÁZEK 3.



OBRÁZEK 4.



OBRÁZEK 5.



OBRÁZEK 6.

Vyjádřeme tyto intuitivní úvahy matematicky přesnou řečí.

9.2.1. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a, b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělicími body** D . **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$v(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělicí body D jsou obsaženy v D' .

9.2.2. Označení. Necht f je reálná funkce a $M \subset \mathbb{R}$. Potom symbol $\sup_M f$ značí $\sup\{f(x); x \in M\}$ a symbol $\inf_M f$ značí $\inf\{f(x); x \in M\}$.

9.2.3. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je nějaké dělení intervalu $[a, b]$. Potom definujeme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Hodnotu $\overline{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D .

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

9.2.4. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht f je omezená funkce na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a, b]$ je pak rovna společné hodnotě $\int_a^b f(x) dx$ a $\overline{\int_a^b f(x) dx}$ a značíme ji $\int_a^b f(x) dx$. Je-li $a > b$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, a je-li $a = b$ položíme $\int_a^b f(x) dx = 0$.

9.2.5. Označení. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}(a, b)$.

9.2.6. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f, D)$ a $\underline{S}(f, D)$ nemusely být vlastní.

9.2.7. Příklady. (a) Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $c \in \mathbb{R}$. Necht $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem $f(x) = c$, $x \in [a, b]$. Potom $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$, protože pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f = \inf_I f = c$, a tedy $\overline{S}(f, D) = \underline{S}(f, D) = c(b - a)$ pro každé dělení D intervalu $[a, b]$.

(b) Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Necht D je Dirichletova funkce. Potom $\int_a^b D(x) dx = 0$ a $\overline{\int_a^b D(x) dx} = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Necht R je Riemannova funkce. Potom $R \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b R(x) dx = 0$ (odvodíme později).

(d) Platí $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

9.2.8. Poznámka. Necht $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, $M_1 \subset M_2$. Necht f je funkce definovaná alespoň na M_2 . Potom platí

$$\sup_{M_1} f \leq \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \geq \inf_{M_2} f.$$

9.2.9. Věta (vlastnosti dělení). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht f je omezená funkce na $[a, b]$.

(a) Necht D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$, přičemž D' zjemňuje D . Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

(b) Necht D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(c) Platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Důkaz. (a) Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) &= \inf_{[x_{j-1}, z]} f \cdot (z - x_{j-1}) + \inf_{[z, x_j]} f \cdot (x_j - z) \\ &\quad - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Protože

$$\inf_{[x_{j-1}, z]} f \geq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z, x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz první nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělicí bod navíc. Obecný případ první nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti první.

(b) Máme-li dána dělení D a D' , snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D' . Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D').$$

(c) Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Tedy i

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Tím je důkaz proveden. ■

9.2.10. Důsledek. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht' D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Označme kde $m = \inf_{[a, b]} f$ a $M = \sup_{[a, b]} f$. Pak

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b-a).$$

Důkaz. První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení $D'' = \{a, b\}$. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Věty 9.2.9. ■

9.2.11. Věta (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak pro každé

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$ platí

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx \leq \bar{S}(f, D) < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + \varepsilon$$

a

$$\int_a^b f(x) dx \geq \underline{S}(f, D) > \int_a^b f(x) dx - \varepsilon.$$

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\bar{S}(f, D_0) < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\{\mu(D_0), \frac{\varepsilon}{4Kn}\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0 . Ověříme nejprve, že

$$\bar{S}(f, D) \leq \bar{S}(f, P) + 2Knv(D). \quad (9.9)$$

Označme totiž jako \mathcal{D} všechny intervaly dané dělením D a \mathcal{P} všechny intervaly dané dělením P . Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I . Pak

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot |I| \quad \text{a} \quad \bar{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot |I|$$

Nechť interval $I = [\alpha, \beta]$ splňuje $I \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v \mathcal{P} , příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný. Není-li I v \mathcal{P} , protíná jeho vnitřek množinu X . Vzhledem k nerovnosti $v(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{0, \dots, n\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\bar{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\sup_{[\alpha, \beta]} f \cdot (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\bar{S}(f, P)$ máme součet

$$\sup_{[\alpha, x_i]} f \cdot (x_i - \alpha) + \sup_{[x_i, \beta]} f \cdot (\beta - x_i).$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{[\alpha, \beta]} f(\beta - \alpha) - \left(\sup_{[\alpha, x_i]} f(x_i - \alpha) + \sup_{[x_i, \beta]} f(\beta - x_i) \right) \right| \\ & \leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \leq 2Knv(D). \end{aligned}$$

Jelikož je intervalů z \mathcal{D} protínajících X nejvýše n , máme

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) \leq 2Knv(D),$$

tj. nerovnost (9.9).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\begin{aligned} \int_a^{\overline{b}} f(x) dx & \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Knv(D) \\ & \leq \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + 2\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta_2$ platí

$$\int_a^b f(x) dx \geq \underline{S}(f, D) \geq \int_a^b f(x) dx - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov. ■

9.2.12. Důsledek. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim v(D_n) = 0$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \quad \text{a} \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Dokážeme pouze druhý vztah, první lze dokázat obdobně. Necht $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.2.11 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $v(D_n) < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D_n) < \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.2.13. Věta. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je omezená funkce na $[a, b]$ a posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n). \quad (9.10)$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n). \quad (9.11)$$

Důkaz. Dle Věty 9.2.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underline{S}(f, D_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D_n).$$

Odtud plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Díky (9.10) dostáváme $\int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. Funkce f je tedy riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí (9.11). ■

9.2.14. Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a spočítejte $\int_0^1 f(x) dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3} (n-1)n(2n-1), \\ \overline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Věty 9.2.13 pak máme $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. ♣

9.2.15. Věta (kritérium existence Riemannova integrálu). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

- (i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,
- (ii) pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Necht $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Necht D je dělení intervalu $[a, b]$ zjemňující D_1 i D_2 . Pak dostaneme díky Věť 9.2.9 nerovnosti

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &\leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2) \\ &\leq \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy (ii) platí.

(ii) \Rightarrow (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. ■

9.2.16. Definice. Necht $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je **stejněměrně spojitá** na I , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x, y \in I: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

9.2.17. Je-li funkce f na intervalu I stejněměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Necht $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejněměrné spojitosti pro ε . Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0 , respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I .

9.2.18. Příklad. Necht $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I , ale není stejněměrně spojitá na I .

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejněměrné spojitosti. ■

9.2.19. Věta (vztah spojitosti a stejněměrné spojitosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejněměrně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz. Necht f není stejněměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě 2.4.7 vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$ (Věta 2.2.44). Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x .

Podle Heineovy věty (Věta 4.3.2) platí

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}). \quad (9.12)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|. \quad (9.13)$$

Díky (9.12) platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|) = 0.$$

Odtud a z (9.13) dostáváme pomocí věty o dvou strážnících

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ však platí $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, což je spor. ■

9.2.20. Věta (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Důkaz. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Důsledek 4.3.11). Pro ověření riemannovské integrovatelnosti můžeme použít Větu 9.2.15. Necht $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá (Věta 9.2.19), lze tedy nalézt $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že $v(D) < \delta$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Věta 9.2.15 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. ■

9.2.21. Věta (vztah monotonicity a riemannovské integrovatelnosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]: f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.2.15. Necht $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)(f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, $i = 0, \dots, n$. Pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle Věty 9.2.21 tedy platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. ■

9.2.22. Věta (linearita Riemannova integrálu). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\ \int_a^b \alpha f(x) \, dx &= \alpha \int_a^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Důkaz. Funkce f a g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a proto jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i funkce $f + g$ je omezená na $[a, b]$.

Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

$$\inf_I f + \inf_I g \leq \inf_I (f + g) \quad \text{a} \quad \sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \quad (9.14)$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.2.12 platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx. \end{aligned}$$

Ze (9.14) tedy máme podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f + g, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f + g, D_n) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Z Důsledku 9.2.12 plyne $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ a

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Předpokládejme nyní, že platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \geq 0$. Funkce αf je omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f \quad \text{a} \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim v(D_n) = 0$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Z Důsledku 9.2.12 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$.

K dokončení důkazu nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\lim v(D_n) = 0$ dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x) dx.$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$. ■

9.2.23. Věta (Riemannův integrál a uspořádání). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Necht $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim v(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

9.2.24. Věta (aditivita Riemannova integrálu). Necht $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$, právě když $f \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (9.15)$$

Důkaz. Necht $\{D_n^1\}, \{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a, c]$, respektive $[c, b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Necht $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělicích bodů dělení D_n^1 a D_n^2 . Pak platí $\lim v(D_n) = 0$.

\Leftarrow Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, c]$ i na intervalu $[c, b]$, takže je omezená i na intervalu $[a, b]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D_n) &= \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2), \\ \underline{S}(f, D_n) &= \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Podle Věty 9.2.12

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Dle Důsledku 9.2.12 platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a také (9.15).

\Rightarrow Předpokládejme $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Funkce f je tedy omezená na intervalu $[a, b]$. Použijeme posloupnosti dělení definované v předchozí části. Funkce f pak splňuje rovnosti (9.16). Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) \\ &\leq (\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) + (\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)) \\ &= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n). \end{aligned}$$

Poněvadž platí $\lim (\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)) = 0$, neboť $f \in \mathcal{R}(a, b)$, platí podle věty o dvou strážnících

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) = 0.$$

Odtud již plyne z Věty 9.2.12 riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Integrovatelnost f na intervalu $[b, c]$ lze dokázat obdobně. Rovnost (9.15) plyne z první části důkazu. ■

9.2.25. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) + \int_c^a f(x) dx = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 9.2.24 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

9.2.26. Věta. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (9.17)$$

Důkaz. Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f. \quad (9.18)$$

Nerovnost (9.18) ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &\leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta \\ &\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost (9.18) ověřena.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.2.15 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z (9.18) plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 9.2.15 je tedy $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$. Zbývá odvodit nerovnost (9.17).

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (9.19)$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.2.22. Použijeme nerovnost (9.19) pro funkci f a pomocí Věty 9.2.22 obdržíme

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-f(x)) dx \leq \int_a^b |-f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (9.20)$$

Z nerovností (9.19) a (9.20) dostáváme (9.17). ■

9.2.27. Lze ukázat, že pokud $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, pak $fg \in \mathcal{R}([a, b])$. Riemannovsky integrovatelné funkce tak tvoří takzvanou *algebru*. Důkaz tohoto tvrzení ale již provádět nebudeme.

9.2.28. Věta (derivace funkce horní meze). Necht $J \subset \mathbb{R}$ je nede degenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}(a, b)$ pro každé $a, b \in J$. Necht $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in J.$$

Potom platí:

- (a) F je spojitá na J ,
- (b) jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0 , pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Necht $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J . Dokážeme, že

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená. Necht K je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \delta] : |f(x)| \leq K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_c^y f(x) dx - \int_c^{y_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)| dx \leq \int_{y_0}^y K dx = K(y - y_0). \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} F(y) = F(y_0).$$

Spojitosť zleva v bodech J , které nejsou levým krajním bodem J , lze dokázat obdobně.

(b) Necht $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right|.$$

Platí $\int_{x_0}^x f(x_0) dt = f(x_0) \cdot (x - x_0)$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$. Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Výraz $\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. ■

9.2.29. Důsledek (vztah spojitosti a existence primitivní funkce).

- (a) Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu (a, b) . Potom f má na (a, b) primitivní funkci.
 (b) Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Potom existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.2.20) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce. Věta 9.2.28 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na (a, b) , tj. F je primitivní k f .

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a - 1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b + 1). \end{cases}$$

Pak je \tilde{f} spojitá na $(a - 1, b + 1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t) dt, \quad x \in (a - 1, b + 1).$$

Pak je \tilde{F} primitivní funkce k \tilde{f} na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá (vizte Větu 5.1.15). Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f , existuje podle Věty 9.1.3 $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) : F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow a+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt = \tilde{F}(b) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. ■

9.2.30. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Jestliže g je funkce definovaná alespoň na $[a, b]$, která se v intervalu $[a, b]$ liší od f v konečném počtu bodů, potom $g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Důkaz. Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g . Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme m počet prvků množiny J . Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Označme \mathcal{I} systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme \mathcal{J} systém těch intervalů z \mathcal{I} , které mají neprázdný průnik s J . Systém \mathcal{J} má tedy nejvýše m prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z \mathcal{I} . Potom platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) &= \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I| \\ &= \sum_{I \in \mathcal{J}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|, \end{aligned} \quad (9.21)$$

neboť $\sup_I f = \sup_I g$, pokud $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$. Můžeme tedy odhadnout

$$\begin{aligned} |\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D)| &\leq \sum_{I \in \mathcal{J}} (|\sup_I f| + |\sup_I g|) \cdot |I| \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{J}} 2K \cdot |I| \leq \sum_{I \in \mathcal{J}} 2K \cdot v(D) \\ &\leq 2m \cdot 2K \cdot v(D) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Obdobně obdržíme

$$|\underline{S}(f, D) - \underline{S}(g, D)| < \varepsilon. \quad (9.23)$$

Podle (9.21), (9.22) a (9.23) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D) \\ < \overline{S}(f, D) + \varepsilon < \int_a^b f(x) dx + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Odtud podle Věty 9.2.15 plyne, že g je na intervalu $[a, b]$ riemannovsky integrovatelná. Z odhadu (9.24) pak plyne $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. ■

9.2.31. Věta (charakterizace riemannovské integrovatelnosti). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

- (i) Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$.
- (ii) Existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $v(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x) dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.2.15 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $v(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $v(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Výrok (ii) tedy platí.

(ii) \Rightarrow (i) Necht (ii) je splněna pro $I \in \mathbb{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f . Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $v(D) < \delta$ máme

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\begin{aligned} \eta &= \min\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}, \\ K &= \max\{|f(x_i)|; i \in \{1, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolně. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ t & i = j. \end{cases}$$

Pak

$$\begin{aligned} |f(t)(x_j - x_{j-1})| &= \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^n K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b-a). \end{aligned}$$

Tedy platí

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta} (1 + |I| + K(b-a))$$

a f je omezená.

Můžeme tedy použít Větu 9.2.15. Necht $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Necht $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a) \leq I + \varepsilon + \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f, D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < 2(1 + b-a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. ■

9.2.32. Podívejme se ještě na vztah hodnoty I a hodnoty $\int_a^b f(x) dx$ v předchozí větě. Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x) dx$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) \Rightarrow (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b-a).$$

Tedy

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\int_a^{\overline{b}} f(x) dx \leq I$. Obdobně odvodíme $\int_a^{\underline{b}} f(x) dx \geq I$, a tedy $I = \int_a^b f(x) dx$.

9.2.33. Poznámka. Podmínka (ii) Věty 9.2.31 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

9.3. Newtonův integrál

9.3.1. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F ,
- existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny \mathbb{R}^* .

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny \mathbb{R}^* určený výrazem

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x) dx$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. Jestliže $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

9.3.2. Označení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b , kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N) \int_a^b f(x) dx \quad \text{a} \quad (R) \int_a^b f(x) dx.$$

9.3.3. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta 9.1.3).

(b) Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a necht f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{existuje} & \left\{ \begin{array}{l} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty, \text{ tedy diverguje,} \end{array} \right. \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

9.3.4. Označení. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech reálných, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Necht funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

9.3.5. Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočítejte $(N) \int_0^1 x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

♣

9.3.6. Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočítejte $(N) \int_1^\infty x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

♣

9.3.7. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \text{sign } x$ je intervalu $[-1, 1]$ monotónní, a tedy podle Věty 9.2.21 také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1, 1)$ nemá f dle 9.1.21 primitivní funkci.

9.3.8. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

9.3.9. Věta (linearita Newtonova integrálu). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Necht F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b) . Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit (Věta 4.2.2) máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

9.3.10. Věta (Newtonův integrál a uspořádání). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Necht platí $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Necht F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b) . Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b) (vizte Větu 5.4.7). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 9.3.9 máme

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

9.3.11. Věta (aditivita Newtonova integrálu). Necht $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$.

(a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$, potom $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (9.25)$$

(b) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a f je spojitá v c , pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí (9.25).

Důkaz. (a) Necht F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) . Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b) . Navíc má funkce F v bodě c , jakožto spojitá funkce na (a, b) , vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(b) Necht F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b) . Funkce f je spojitá na v bodě c , a proto je omezená na jistém okolí bodu c . Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.3.10 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^x (-K) dt \leq \int_{c-\delta}^x f(t) dt \leq \int_{c-\delta}^x K dt = K(x - c + \delta).$$

Dále platí $\int_{c-\delta}^x f(t) dt = F(x) - F(c-\delta)$ pro každé $x \in (c-\delta, c)$, neboť F je spojitá na (a, c) . Limita $\lim_{x \rightarrow c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x \rightarrow c+} G(x)$ je vlastní. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x \rightarrow c-} F(x) = \lim_{x \rightarrow c+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \rightarrow c-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí díky Větě 5.2.10

$$H'(c) = \lim_{x \rightarrow c} H'(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c . Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b) a má vlastní limity v krajních bodech (a, b) , protože je v příslušných bodech mají funkce F a G . Tedy $f \in \mathcal{N}(a, c)$. ■

9.3.12. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a f je spojitá na (a, b) . Pak $\int_a^b |f(x)| dx$ existuje a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důkaz. Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní dle Věty 9.1.6. Označme ji F . Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající (vizte Větu 5.4.7). Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b) , přičemž $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ definován. Je-li tento rozdíl roven ∞ , požadovaná nerovnost zjevně platí. Pokud je konečný, pak $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$. Můžeme tedy použít Větu 9.3.10. Platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, a tedy

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \max \left\{ \int_a^b f(x) dx, - \int_a^b f(x) dx \right\} \\ &= \max \left\{ \int_a^b f(x) dx, \int_a^b -f(x) dx \right\} \leq \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

9.3.13. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

9.3.14. Věta (per partes pro Newtonův integrál). Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b) . Necht' F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b) . Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b) . Označme ji písmenem H . Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF . Rozdíl výrazů $[GF]_a^b, \int_a^b G(x)f(x) dx$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Z 9.3.13 plyne, že

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)g(x) dx &= [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b \\ &= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.3.15. Věta (substituce pro Newtonův integrál). Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β) . Necht' φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci (funkci φ'). Z Darbouxovy vlastnosti derivace (Věta 9.1.19) tedy plyne, že obraz intervalu (α, β) při zobrazení φ' , tedy množina $\varphi'((\alpha, \beta))$, je interval. Z předpokladu víme, že bod 0 není prvkem tohoto intervalu. Z toho vyplývá, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládáme, že φ' je záporná na (α, β) .

Předpokládáme, že existuje $\int_a^b f(x) dx$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t) = b$$

a z Věty 4.2.25

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^+} F(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x), \quad \lim_{t \rightarrow \beta^-} F(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))(-\varphi'(t)) dt = [-F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\lim_{x \rightarrow a_+} F(x) + \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci (Věta 9.1.27) pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f . Platí

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \rightarrow \beta_-} G(t), \quad \lim_{x \rightarrow b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \rightarrow \alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x) dx = [-G \circ \varphi]_a^b = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt. \quad \blacksquare$$

9.3.16. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce). Necht $a \in \mathbb{R}^*$ a necht $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$. Necht funkce F je definována alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x, y \in P(a, \delta): |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$ a $A \in \mathbb{R}$. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$ kladné, že

$$\forall x \in P(a, \delta): |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x, y \in P(a, \delta)$ máme

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - A| + |A - F(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

\Leftarrow Necht platí podmínka věty. Necht je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Věta 2.4.26). Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, necht kladné $\delta \in \mathbb{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Pak pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$ (ta existuje díky Větě 2.4.26). Pak $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost

$\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a . Necht' $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ z Bolzanovy--Cauchyovy podmínky. Necht' $n_1 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1: x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty 4.2.16 máme proto $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = A$. ■

9.3.17. Tvrzení Věty 9.3.16 platí obdobně i pro jednostranné limity.

9.3.18. Věta. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b) . Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Podle Věty 9.1.6 má f na (a, b) primitivní funkci F . Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Cauchyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Necht' $K \in \mathbb{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b): |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí z Věty ??(c)

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.3.16.

Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně. ■

9.3.19. Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.3.18 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \arctg(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu \mathbb{R} také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ však dokonce ani neexistuje.

9.3.20. Věta (vztah Riemannova a Newtonova integrálu). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, existuje podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.2.31) $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_i - x_{i-1}]$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R) \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Mějme tedy $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno a $\delta \in (0, \infty)$ nalezeno tak, že splňuje tuto podmínku. Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ .

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \rightarrow a^+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$ dle Poznámky ??(a) a faktu $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Navíc $H' = f$ na (a, b) . Pro každé $i = 1, \dots, n$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$\begin{aligned} (N) \int_a^b f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = H(b) - H(a) \\ &= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^n (H(x_i) - H(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\left| (N) \int_a^b f(x) dx - (R) \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R) \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.3.21. Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 9.2.20, Věty 9.3.18 a Věty 9.3.20. ■

9.4. Konvergence Newtonova integrálu

9.4.1. Věta (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Necht dále je f spojitá na $[a, b]$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f . Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, dostáváme $G(x) \geq F(x)$ na (c, b) . Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva (vizte Větu 4.2.26) a platí

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow b-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ vlastní.

Obě funkce mají vlastní limitu v c , jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty 9.3.18. Věta ??(c) nyní dává $f \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

9.4.2. Poznámka. Tvrzení Věty 9.4.1 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

9.4.3. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konverguje.

Řešení. Zkoumejme konvergenci $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$. Máme totiž pomocí per partes

$$\int \cos \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int x \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Protože $\int_0^1 \cos \frac{1}{x}$ konverguje (Věta 9.3.18), konverguje i

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \left[x \cos \frac{1}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx.$$

Substitucí $\frac{1}{x} = t$ máme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 t \left(\sin \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} dt$$

(viz Věta 9.3.15). ♣

9.4.4. Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy dle Věty 9.3.18 konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1, \infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1, \infty)$ (Příklad 9.3.5(b)), je podle Věty 9.4.1 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Použitím Věty ??(c) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0, \infty)$. ♣

9.4.5. Věta (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht' $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Necht' f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Označme $c = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a necht' $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Z Věty 4.2.9 existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) : 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$ dle Věty ??(c), a tedy Věta 9.4.1 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde Newtonovsky integrovatelná. Dle Věty ??(d) je $g \in \mathcal{N}(a, x_0)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomoci odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b) . ■

9.4.6. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2} dx$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}}{x^{-\frac{5}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2. \end{aligned}$$

Podle Věty 9.4.5 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1, \infty)$ (Příklad 9.3.5(b)). ♣

9.4.7. Lemma (odhady Newtonova integrálu součinu dvou funkcí). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq g(a) \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt.$$

Speciálně platí

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq g(a) \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f(t) dt \right|.$$

Důkaz. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejno-
měrné spojitosti funkcí f a fg (viz Věta 9.2.19) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že
platí

$$\forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow \left(|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon \right) \& \left(|f(x) - f(y)| < \varepsilon \right). \quad (9.26)$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ . Pak máme ze (9.26) pro každé
 $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i] : f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt.$$

Obdobnou úvahou dostáváme pomocí (9.26)

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t) dt &\leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq g(x_{i-1}) \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + (g(a) + 1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Pak

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t)g(t) dt &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t) dt \\
 &\leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a) + 1) \\
 &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a) \\
 &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \\
 &\leq \sup_{t \in [a, b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon} \\
 &= g(a) \sup_{t \in [a, b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).
 \end{aligned}$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

První nerovnost lze dokázat obdobně. ■

9.4.8. Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). Necht $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht $a < b$. Necht $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Dále necht $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

- (a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.
- (b) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. V obou případech má funkce fg na (a, b) funkci primitivní, označme ji H . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že g je nerostoucí. V opačném případě bychom mohli pracovat s funkcí $-g$, neboť změna znaménka u g konvergence integrálu $\int_a^b f(x)g(x) dx$ neovlivní.

(a) Můžeme předpokládat, že g je nezáporná, protože jinak bychom uvažovali funkci $g(x) + K$, kde K je číslo splňující

$$\forall x \in [a, b) : |g(x)| < K.$$

Pak totiž konvergence integrálu

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b (f(x)(g(x) + K) - f(x)K) dx$$

plyne z dokázaného tvrzení pro nezápornou funkci a Věty ??(a).

Mějme tedy g nezápornou a necht' $C \in (0, \infty)$ splňuje

$$\forall x \in [a, b) : |g(x)| < C.$$

Podle předpokladu existuje $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ vlastní. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. K němu nalezneme pomocí Bolzanovy--Cauchyovy podmínky pro funkce (Věta 9.3.16) kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b, \delta) : -\varepsilon < F(y) - F(x) < \varepsilon.$$

Potom pro x, y z okolí $P_-(b, \delta)$, $x < y$, platí podle Lemmatu 9.4.7

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) dt \leq g(x) \sup_{z \in [x, y]} \int_x^z f(t) dt \\ &= g(x) \sup_{z \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \leq g(x)\varepsilon \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) dx \geq g(x) \inf_{z \in [x, y]} \int_x^z f(t) dt \\ &\geq g(x) \inf_{x \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \geq -g(x)\varepsilon \geq -C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| < C\varepsilon.$$

Tedy H splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku v bodě b zleva, má v něm vlastní limitu zleva.

Snadnou úvahou pak obdržíme $fg \in \mathcal{N}(a, b)$ (viz závěr důkazu Věty 9.4.1). Podrobněji, zvolme $c \in (a, b)$. Ze spojitosti funkce fg na $[a, c]$ odvodíme $fg \in \mathcal{N}(a, c)$ (Věta 9.3.18). Dále H je spojitá v c , a tedy má zde vlastní limitu. Proto $fg \in \mathcal{N}(a, c)$. Věta ??(e) pak završí argumentaci.

(b) Z předpokladu plyne, že $g(x) \geq 0$ pro všechna $x \in [a, b)$. Necht' $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je takové, že

$$\forall x \in (a, b) : |F(x)| < K.$$

Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_-(b, \delta) : |g(x)| < \varepsilon.$$

Pak pro $x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$ máme

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) dt \\ &\leq g(x) \sup_{z \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \\ &\leq \varepsilon \sup_{z \in [x, y]} (F(z) - F(x)) \\ &\leq 2K\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
 H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t) dt \\
 &\geq g(x) \inf_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\
 &\geq \varepsilon \inf_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\
 &\geq -2K\varepsilon,
 \end{aligned}$$

a tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| \leq 2K\varepsilon.$$

Tedy Věta 9.3.16 říká, že H má vlastní limitu v b zleva. Jako výše pak důkaz uzavřeme pozorováním, že $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

9.4.9. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 9.4.8(b) pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f , totiž $\sin x$, je omezená na $(1, \infty)$ a $g(x)$ je na $[1, \infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. A obě funkce jsou zjevně spojité na $[1, \infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje. ♣

9.4.10. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \arctg x \frac{\cos x}{x} dx$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 9.4.8(a) položíme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \arctg x.$$

Obě funkce jsou spojité na $[1, \infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tedy integrál konverguje podle Větě 9.4.8(a). ♣

9.4.11. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverguje.

Řešení. Protože platí

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x \in [1, \infty),$$

stačí dle Věty 9.4.1 ověřit divergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Pišme

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Jest

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{4} \int_2^\infty \frac{\cos y}{y} dy$$

a z předchozího příkladu víme, že $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tím spíše $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(2, \infty)$, a tedy i $\frac{\cos 2x}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Máme tudíž

$$\frac{1}{2x} = \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^2 x}{x},$$

přičemž $\frac{1}{2x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$ a $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Kdyby $\frac{\sin^2 x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, pak by podle Věty ??(a) platilo i $\frac{1}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, což by byl spor. Odtud plyne, že $\frac{\sin^2 x}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$, a tedy i $\frac{|\sin x|}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$. ♣

9.4.12. Věta (první věta o střední hodnotě). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Funkce f , jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M (viz Věta 4.3.9). Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \quad (9.27)$$

Pokud $\int_a^b g(x) dx = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x) dx > 0$. Potom ze (9.27) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$ dle Věty 4.3.6, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.4.13. Věta (druhá věta o střední hodnotě). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Necht' f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je monotónní a spojitá na $[a, b]$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx. \quad (9.28)$$

Důkaz. Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezeme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (9.28).

Definujme

$$\varphi(y) = g(a) \int_a^y f(t) dt + g(b) \int_y^b f(t) dt, \quad y \in [a, b].$$

Potom lze funkci φ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b)) \int_a^y f(t) dt + g(b) \int_a^b f(t) dt, \quad y \in [a, b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$ (Věta 9.2.28), a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y \in [a, b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y \in [a, b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 9.4.7 pak dává

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)g(t) dt - g(b) \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b f(t)\psi(t) dt \\ &\leq \psi(a) \sup_{t \in [a, b]} \int_a^t f(s) ds \\ &= (g(a) - g(b)) \max_{t \in [a, b]} \int_a^t f(s) ds, \end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)g(t) dt &\leq (g(a) - g(b)) \max_{t \in [a, b]} \int_a^t f(s) ds + g(b) \int_a^b f(t) dt \\ &= \max_{t \in [a, b]} \left((g(a) - g(b)) \int_a^t f(s) ds + g(b) \int_a^b f(t) dt \right) \\ &= \varphi(y_1). \end{aligned}$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 9.4.7

$$\int_a^b f(t)g(t) dt \geq \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a, b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t) dt$ (Věta 4.3.6), a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = \varphi(c) = g(a) \int_a^c f(t) dt + g(b) \int_c^b f(t) dt.$$

■

9.4.14. Poznámka. Věta 9.4.13 nabízí alternativní důkaz Věty 9.4.8. Mějme totiž f, g, F, H jako v důkazu Věty 9.4.8. V případě tvrzení (a) najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b, \delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Nechť g je omezená konstantou C . Vezměme $x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$. At $c \in [x, y]$ splňuje

$$\int_x^y f(t)g(t) dt = g(x) \int_x^c f(t) dt + g(y) \int_c^y f(t) dt. \quad (9.29)$$

Pak pro tato x, y máme

$$\begin{aligned} |H(x) - H(y)| &= \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| = \left| g(x) \int_x^c f(t) dt + g(y) \int_c^y f(t) dt \right| \\ &\leq C \left| \int_x^c f(t) dt \right| + C \left| \int_c^y f(t) dt \right| \\ &= C |F(c) - F(x)| + C |F(y) - F(c)| \\ &\leq 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy H má v b zleva vlastní limitu a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

V Případě tvrzení (b) Věty 9.4.8(b), necht C omezuje F a $|g(x)| < \varepsilon$ pro $x \in P_-(b, \delta)$. Necht $x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$. Najdeme bod $c \in [x, y]$ splňující (9.29). Pak máme odhad

$$\begin{aligned} |H(x) - H(y)| &= \left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| = \left| g(x) \int_x^c f(t) dt + g(y) \int_c^y f(t) dt \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \int_x^c f(t) dt \right| + \varepsilon \left| \int_c^y f(t) dt \right| \\ &= \varepsilon |F(c) - F(x)| + \varepsilon |F(y) - F(c)| \\ &\leq 4C\varepsilon. \end{aligned}$$

Důkaz pak dokončíme jako výše.

9.5. Aplikace určitého integrálu

9.5.1. Věta (Integrální kritérium). Necht f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Necht pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ konverguje.

Důkaz. Uvažujme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ a dělení $D = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_1 - 1, n_1\}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= a_{n_0} + \dots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i, \\ \underline{S}(f, D) &= a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i. \end{aligned}$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i &= \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x) dx \\ &= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x) dx = (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x) dx \\ &\leq \overline{S}(f, D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^x f(t) dt, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞) , a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme z (9.30)

$$\begin{aligned} \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{n_0}^x f(t) dt \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0+1}^n a_i \\ &= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i. \end{aligned}$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak pro (9.30) dává

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{n_0}^n f(t) dt \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} F(x). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a podle (9.31) je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ konverguje. ■

9.5.2. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

diverguje podle Věty 9.5.1. ♣

9.5.3. Věta (Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru). Necht $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n + 1)$ -ní derivaci. Pak

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (9.32)$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt,$$

tedy (9.32) pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n + 1$. Mějme tedy $(n + 2)$ -krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes (Věta 9.3.14) počítat

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt \\ &= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} \right]_a^x \\ &\quad - \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n (-1) dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\ &= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ■

9.5.4. Definice. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** C^1 , tj. φ_i jsou spojitě na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

9.5.5. Příklady. (a) Jednotkovou kružnici v rovině lze vyjádřit křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Graf funkce f na intervalu je křivkou popsanou zobrazením $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$.

(c) Geometrický obraz křivky lze často parametrizovat různými zobrazeními φ , například graf funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ lze popsat také jako $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

9.5.6. Definice. Necht $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ke křivka. Její **délkou** rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D); D \text{ dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^n \|\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\|.$$

9.5.7. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom definujeme

$$(N) \int_a^b f(x) dx = \left((N) \int_a^b f_1(x) dx, \dots, (N) \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Obdobně definujeme $(R) \int_a^b f(x) dx$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i \in \mathcal{R}(a, b)$

9.5.8. Lemma. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \left\| \left[\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right] \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad (9.33)$$

Důkaz. Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\| dt$ konverguje. Položme

$$y = \left[\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right] \in \mathbb{R}^n.$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b f_i(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n y_i f_i(t) \right) dt \leq \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n f_i^2(t) \right)} dt \\ &= \int_a^b \|y\| \|f(t)\| dt = \|y\| \int_a^b \|f(t)\| dt. \end{aligned}$$

Pokud $y = 0$, (9.33) zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, právě provedený výpočet dává (9.33). ■

9.5.9. Věta. Necht $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka. Pak platí

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2} dt.$$

Důkaz. Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.5.8

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^k \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Odtud plyne $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ'_i stejnoměrně spojité na $[a, b]$ (viz Věta 9.2.19), existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta : |\varphi'_i(t) - \varphi'_i(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $v(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| dt - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) &\leq \|\varphi'(x_j)\| (x_j - x_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) dt \right\| \\ &\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) dt \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) dt \right\| \\ &\leq \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \leq \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a) \leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \leq L(\varphi)$. ■

9.5.10. Příklad. (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

9.6. Teoretické příklady na integrál

9.6.1. Příklad. Definujme funkci $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ je iracionální,} \\ \frac{1}{q}, & \text{pokud } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělné.} \end{cases}$$

Ukažte, že f nemá primitivní funkci na žádném intervalu $(a, b) \in [0, 1]$ a $(R) \int_0^1 f(x) dx = 0$.

Řešení. Je-li $(a, b) \subset [0, 1]$ libovolný interval, vezmeme racionální číslo tvaru $\frac{p}{q}$, p, q nesoudělné, ležící v intervalu (a, b) . Pak funkce f nenabývá na (a, b) žádných iracionálních hodnot v intervalu $(0, \frac{1}{q})$, a tedy nemá na (a, b) Darbouxovu vlastnost. Proto dle Věty 9.1.19 nemá na (a, b) primitivní funkci.

Ukažme nyní, že $(R) \int_0^1 f(x) dx = 0$. K tomuto účelu postačí ukázat, že pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[0, 1]$ splňující $\overline{S}(f, D) \leq \varepsilon$. Pak totiž

$$0 \leq \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \varepsilon$$

a $(R) \int f(x) dx = 0$ dle Věty 9.2.15.

Najděme nyní takové dělení. Množina

$$M = \{x \in [0, 1]; f(x) \geq \varepsilon\}$$

je konečná. Lze proto najít navzájem se neprotínající intervaly I_1, \dots, I_n takové, že $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$ a $M \subset \bigcup_{i \in I} I_i$. Necht' D sestává z koncových bodů intervalů I_i , $i = 1, \dots, n$, s eventuálně přidanými body 0 a 1. Pak pro interval I z D různý od I_1, \dots, I_n platí $\sup_I f \leq \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{I_i} f \right) |I_i| + \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} \left(\sup_I f \right) |I| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |I_i| + \varepsilon \sum_{I \notin \{I_1, \dots, I_n\}} |I| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

♣

9.6.2. Příklad. Necht' f je spojitá funkce na otevřeném omezeném intervalu (a, b) . Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá na (a, b) právě tehdy, když existují vlastní limity v krajních bodech (a, b) .

Řešení. Má-li f vlastní limity v krajních bodech intervalu (a, b) , můžeme definovat $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow a^+} f(y), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ \lim_{y \rightarrow b^-} f(y), & x = b. \end{cases}$$

Pak F je na $[a, b]$ spojitá, a tedy i stejnoměrně spojitá (vizte Větu 9.2.19). Tedy f je stejnoměrně spojitá na (a, b) .

Obráceně, je-li f stejnoměrně spojitá na (a, b) , splňuje v obou krajních bodech Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (Věta 9.3.16). To ověříme takto. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, dle definice stejnoměrné spojitosti, tj.

$$\forall x, y \in I : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Tedy pro $x, y \in P_+(a, \delta)$ máme $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, což jsme potřebovali dokázat. ♣

9.6.3. Příklad. Necht $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak funkce

$$x \mapsto f(x)g(x), \quad x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \text{ a } x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$$

leží v $\mathcal{R}(a, b)$.

Řešení. Jelikož maximum i minimum dvou omezených funkcí je funkce omezená a

$$\begin{aligned} \max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \end{aligned}$$

jsou funkce $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ riemannovsky integrovatelné dle Věty ??(a).

Obraťme nyní naši pozornost k součinu fg . Protože $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2)$, stačí dokázat integrovatelnost f^2 pro $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Mějme tedy funkci $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak f^2 je omezená funkce díky omezenosti f . Je-li c konstanta, platí $f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$, a tedy stačí uvažovat nezápornou funkci f . Necht tedy f je nezáporná a omezená číslem M . Pro $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, najdeme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$ (viz Věta 9.2.15). Necht \mathcal{D} značí množinu intervalů v dělení D .

Protože pro množinu A nezáporných čísel platí

$$\sup A^2 = \sup\{x^2; x \in A\} = (\sup A)^2 \quad \text{a} \quad \inf A^2 = (\inf A)^2,$$

máme pro množinu A sestávající z nezáporných čísel a omezenou číslem M odhad

$$\begin{aligned} \sup A^2 - \inf A^2 &= (\sup A)^2 - (\inf A)^2 \\ &= (\sup A - \inf A)(\sup A + \inf A) \\ &\leq 2M(\sup A - \inf A) \end{aligned} \tag{9.34}$$

Použitím (9.34) dostáváme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f^2, D) - \underline{S}(f^2, D) &= \sum_{I \in \mathcal{D}} \left(\sup_I f^2 - \inf_I f^2 \right) |I| \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{D}} 2M \left(\sup_I f - \inf_I f \right) |I| \\ &\leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f^2 je riemannovsky integrovatelná dle Věty 9.2.15. ♣

9.6.4. Příklad. Necht $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná kladná funkce na $[a, b]$. Pak $(R) \int_a^b f(x) dx > 0$.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in [a, b]$ a přitom $(R) \int_a^b f(x) dx = 0$. Předpokládejme navíc, že f je omezená číslem 1 na $[a, b]$. Induktivně zkonstruujeme intervaly $[a_n, b_n] \subset [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,
- $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$,
- $\sup_{[a_n, b_n]} f \leq \frac{1}{n}$.

V prvním kroku konstrukce položíme $[a_1, b_1] = [a, b]$ a povšimneme si, že jsou požadované vlastnosti splněny.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nedegenerované intervaly $[a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$ splňující $\sup_{[a_n, b_n]} f \leq \frac{1}{n}$. Protože platí podle Věty ??(c)

$$0 = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_n} f(x) dx + \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx + \int_{b_n}^b f(x) dx$$

a členy na pravé straně jsou nezáporné (viz Věta ??(b)), máme

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = 0.$$

Vzměme dělení D intervalu $[a_n, b_n]$ takové, že $S(f, D) < \frac{1}{n+1}$. Protože $S(f, D) \geq S(f, D')$ pro každé jemnější dělení D' , můžeme předpokládat, že norma D je menší než $\frac{1}{n+1}$. Z definice $S(f, D)$ plyne, že alespoň na jednom intervalu určeném dělením D je supremum funkce f menší než $\frac{1}{n+1}$. Tento interval označíme jako $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, čímž je indukční krok dokončen.

Příklad ?? nyní dává, že existuje bod $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Pro něj pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(x) \leq \sup_{[a_n, b_n]} f \leq \frac{1}{n},$$

a tedy $f(x) = 0$. To je však spor s předpokladem. ♣

9.6.5. Příklad. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Odvodíme rekurentní formuli pro $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$. Integrací per partes totiž dostáváme pro $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \, dx &= \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Proto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx.$$

Protože

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$$

máme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx &= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx &= \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}. \end{aligned}$$

Závěrem použijeme substituci $t = \frac{\pi}{2} - x$ k odvození

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

♣

9.6.6. Příklad (Wallisova formule). Ukažte, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Díky Příkladu 9.6.5 máme

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \\ C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}. \end{aligned}$$

Tedy dostáváme

$$\frac{\pi}{2} = S_n \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \frac{S_n}{C_n} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}. \quad (9.35)$$

Povšimněme si, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < \sin^{2n+2} x < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

a tedy dle Příkladu 9.6.4

$$0 < S_{n+1} \leq C_n \leq S_n \leq C_{n-1}.$$

Tím pádem máme

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{C_{n-1}}{C_n} \geq \frac{S_n}{C_n} \geq \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Limitním přechodem v (9.35) máme požadovanou rovnost

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}$$

♣

9.6.7. Příklad (Stirlingův vzorec). Ukažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Řešení. Označme

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \quad \text{a} \quad b_n = \log a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí pro $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) \log \frac{n+1}{n} - 1. \quad (9.36)$$

Protože dle Příkladu 7.3.8 platí

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1),$$

máme

$$\log \frac{n+1}{n} = \log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Dosazením do (9.36) dostaneme

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) \log \frac{n+1}{n} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}.$$

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$ klesající.

Dále dostáváme odhad

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^k = \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Tím pádem obdržíme

$$\begin{aligned} b_1 - b_n &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

což znamená, že

$$b_n > b_1 - \frac{1}{4}.$$

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$, jakožto klesající a zdola omezená, konvergentní k nějakému číslu b . Z toho máme konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n} = e^b.$$

Označíme $C = e^b$ a spočítáme její hodnotu. Protože víme z Příkladu 9.6.6, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)},$$

máme použitím $\lim a_n = C$ rovnost

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} C^4 (2n)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{C^2 4n \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (2n+1)} \\ &= C^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} 4n^2 n^{4n}}{4n (2n+1) (2n)^{4n}} = C^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(2n+1)} \\ &= \frac{C^2}{2}. \end{aligned}$$

Protože $C \geq 0$, dostáváme

$$C = \sqrt{\pi}$$

a Stirlingova formule je odvozena. ♣

9.6.8. Příklad (Laplaceův-Gaussův integrál). Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí po substituci $x = \sin t$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \quad (9.37)$$

podle Příkladu 9.6.5. Dále pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí díky substituci $x = \operatorname{tg} t$ a opět díky Příkladu 9.6.5

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \cos^{-2} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \pi}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) 2}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Dále platí

$$1-y \leq e^{-y} \leq \frac{1}{1+y}, \quad y \in [0, \infty). \quad (9.39)$$

Označíme-li totiž

$$\varphi_1(y) = e^{-y} - 1 + y, \quad \varphi_2(y) = 1 - (1+y)e^{-y}, \quad y \in [0, \infty),$$

pak

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$$

a

$$\varphi_1'(y) = 1 - e^{-y} > 0, \quad \varphi_2'(y) = ye^{-y} > 0, \quad y \in (0, \infty).$$

Obě funkce jsou tedy rostoucí na $[0, \infty)$ (viz Věta 5.2.6), a proto nezáporné na $(0, \infty)$. Odtud již plyne (9.39).

Z (9.39) máme

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2}, \quad x \in (0, 1),$$

a

$$e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Substitucí $t = x\sqrt{n}$ dostaneme

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^\infty e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Z rovností (9.37) a (9.38) obdržíme

$$\sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \leq \int_0^\infty e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \pi}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) 2}. \quad (9.40)$$

Spočtěme nyní limity krajních výrazů v (9.40). Použitím Stirlingovy formule 9.6.7 máme

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} 2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi n \sqrt{n} 2^{2n} n^{2n} e}{\sqrt{2\pi(2n+1)} (2n+1)^{2n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi n \sqrt{n} n^{2n} e}{\sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^n \right)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{e}{(e^{\frac{1}{2}})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
 \end{aligned}$$

Z tohoto vzorce pak dostáváme

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \pi}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot 2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} \frac{\pi}{2(2n+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \pi (2n+1)!}{2(2n+1) 2^{2n} (n!)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi (2n+1)!}{2(2n+1) \sqrt{n} 2^{2n} (n!)^2} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
 \end{aligned}$$

Tedy z Věty 2.2.46 máme limitním přechodem v (9.40)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♣

9.6.9. Příklad. Ukažte, že číslo π je iracionální.

Důkaz. Předpokládejme, že $\pi = \frac{a}{b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme polynomy

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^n b^k x^k,$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Všimněme si, že $n! f(x)$ má celé koeficienty a členy u x mají stupeň alespoň n . Proto

$$f(0), f^{(1)}(0), \dots, f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}. \quad (9.41)$$

Protože $f(x) = f(\frac{a}{b} - x) = f(\pi - x)$, platí též

$$f(\pi), f^{(1)}(\pi), \dots, f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}. \quad (9.42)$$

Protože $f^{(2n+2)}(x) = 0$, odvodíme

$$(F'(x) \sin x - F(x) \cos x)' = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x.$$

Tedy

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x] = F(\pi) + F(0).$$

Díky (9.41) a (9.42) platí

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ale máme

$$0 < f(x) \sin x < \frac{1}{n!} (\pi^n a^n),$$

a tedy dle Příkladu 9.6.4 platí

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < \pi \frac{1}{n!} (\pi^n a^n).$$

Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je tedy

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \in \mathbb{N} \cap (0, 1),$$

což je spor. ■

9.6.10. Příklad. Necht f je sudá funkce a $[-a, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}(-a, a)$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a, a)$), pak

$$(R) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2(R) \int_0^a f(x) \, dx \quad (\text{resp. } (N) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2(N) \int_0^a f(x) \, dx).$$

Necht f je lichá funkce a $[-a, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}(-a, a)$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a, a)$), pak

$$(R) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0 \quad (\text{resp. } (N) \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0).$$

Řešení. Pro newtonovsky integrovatelné funkce tvrzení snadno plyne z Věty o substituci 9.3.15, neboť substitucí $x = -t$ dostaneme pro sudou funkci rovnost

$$\begin{aligned} (N) \int_{-a}^a f(x) dx &= (N) \int_{-a}^0 f(x) dx + (N) \int_0^a f(x) dx \\ &= (N) \int_0^a f(-t) dt + (N) \int_0^a f(t) dt \\ &= (N) \int_0^a f(t) dt + (N) \int_0^a f(t) dt \\ &= 2(N) \int_0^a f(x) dx, \end{aligned}$$

pro lichou pak

$$\begin{aligned} (N) \int_{-a}^a f(x) dx &= (N) \int_{-a}^0 f(x) dx + (N) \int_0^a f(x) dx \\ &= (N) \int_0^a f(-t) dt + (N) \int_0^a f(t) dt \\ &= (N) \int_0^a -f(t) dt + (N) \int_0^a f(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nechť f je nyní sudá funkce riemannovsky integrovatelná na $[-a, a]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení $D_n^+ = \{\frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$ a $D_n^- = \{-a + \frac{ja}{n}\}_{j=0}^n$. Díky Důsledku 9.2.12 platí

$$\int_{-a}^{\bar{0}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n^-) \quad \text{a} \quad \int_0^{\bar{a}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n^+).$$

Vzhledem k sudosti funkce f platí $\bar{S}(f, D_n^-) = \bar{S}(f, D_n^+)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy dostáváme

$$\begin{aligned} (R) \int_{-a}^a f(x) dx &= (R) \int_{-a}^0 f(x) dx + (R) \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_{-a}^{\bar{0}} f(x) dx + \int_0^{\bar{a}} f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n^-) + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n^+) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n^+) \\ &= 2 \int_0^{\bar{a}} f(x) dx = 2 \cdot (R) \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Je-li funkce f lichá, platí pro výše uvažovaná dělení D_n^- a D_n^+ vztah $\overline{S}(f, D_n^+) = -\underline{S}(f, D_n^-)$. Tím pádem máme

$$\begin{aligned} (R) \int_{-a}^a f(x) dx &= (R) \int_{-a}^0 f(x) dx + (R) \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

9.6.11. Příklad. Necht $p \in \mathbb{R}$ a f je p -periodická funkce.

- (a) Necht jsou intervaly $[a, b]$ a $[a + p, b + p]$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Pak je riemannovsky integrovatelná na $(a + p, b + p)$ a platí $(R) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx$.
- (b) Necht jsou intervaly (a, b) a $(a + p, b + p)$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je newtonovsky integrovatelná funkce na (a, b) . Pak je newtonovsky integrovatelná na $(a + p, b + p)$ a platí $(N) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx$.

Řešení. (a) Necht $\{D_n\}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $v(D_n) \rightarrow 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení D'_n intervalu $[a + p, b + p]$, které vznikne z D_n přičtením p k dělicím bodům dělení D_n . Jelikož je f p -periodická, platí $\overline{S}(f, D'_n) = \overline{S}(f, D_n)$ a $\underline{S}(f, D'_n) = \underline{S}(f, D_n)$. Tedy existuje $(R) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx$ a platí pro něj

$$(R) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

- (b) Necht F je primitivní funkce k f na (a, b) . Pak je funkce

$$G(x) = F(x - p), \quad x \in (a + p, b + p),$$

primitivní k f na $(a + p, b + p)$. Vskutku, pro $x \in (a + p, b + p)$ platí

$$G'(x) = F'(x - p) = f(x - p) = f(x).$$

Jelikož máme

$$\begin{aligned} [G(x)]_{a+p}^{b+p} &= \lim_{x \rightarrow (b+p)^-} G(x) - \lim_{x \rightarrow (a+p)^+} G(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow (b+p)^-} F(x - p) - \lim_{x \rightarrow (a+p)^+} F(x - p) \\ &= \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = [F(x)]_a^b, \end{aligned}$$

platí

$$(N) \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

♣

9.6.12. Příklad. Ukažte, že součin dvou riemannovsky integrovatelných funkcí na omezeném uzavřeném intervalu je opět riemannovsky integrovatelná funkce. Dále najděte příklad newtonovsky integrovatelné funkce na otevřeném intervalu, jejíž druhá mocnina není newtonovsky integrovatelná.

Řešení. Mějme $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$. Protože

$$fg = \frac{1}{2} ((f+g)^2 - f^2 - g^2),$$

stačí dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$ pro $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Jelikož je riemannovsky integrovatelná funkce omezená, lze přičtením vhodné konstanty $c \in \mathbb{R}$ zařídit, že $f+c$ je nezáporná. Pak ale

$$f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$$

je v $\mathcal{R}(a, b)$, pokud $f+c \in \mathcal{R}(a, b)$. Lze tedy předpokládat, že f je nezáporná riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Naším cílem je dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$.

Nejprve si rozmysleme, že pro omezenou $A \subset [0, \infty)$ platí

$$(\sup A)^2 = \sup\{a^2; a \in A\} \quad \text{a} \quad (\inf A)^2 = \inf\{a^2; a \in A\}. \quad (9.43)$$

Z nerovnosti $(\sup A)^2 \geq a^2, a \in A$, je totiž patrné, že $(\sup A)^2 \geq \sup\{a^2; a \in A\}$. Máme-li $\varepsilon(0, \infty)$ dáno, najdeme $\tilde{a} \in A$ takové, že $\tilde{a} > \sup A - \varepsilon$. Pak

$$\sup\{a^2; a \in A\} \geq (\tilde{a})^2 > (\sup A)^2 - \varepsilon(2 \sup A - \varepsilon).$$

Tedy dostáváme i opačnou nerovnost pro první tvrzení. Druhé se dokáže obdobně.

Mějme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolné. Podle Věty 9.2.15 najdeme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \varepsilon.$$

Nechť $M \in \mathbb{R}$ omezuje f na $[a, b]$. Pak máme z (9.43)

$$\begin{aligned} \overline{S}(f^2, D) - \underline{S}(f^2, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f^2 - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f^2 \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f \right)^2 - \left(\inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right)^2 \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right) \left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f + \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right) \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i, x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \leq 2M (\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D)) \leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Věta 9.2.15 říká, že $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$.

Pro důkaz druhé části tvrzení stačí uvažovat funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, 1)$. Pak $f \in \mathcal{N}(0, 1)$, ale $f^2 \notin \mathcal{N}(0, 1)$. \clubsuit

9.6.13. Příklad. Najděte příklad funkce f , která má primitivní funkci na intervalu $(-1, 1)$, ale $|f|$ ani f^2 primitivní funkci na $(-1, 1)$ nemá.

Řešení. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) + 3\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Protože je funkce

$$g(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x^3}\right), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

spojitá na $(-1, 1)$, má zde primitivní funkci. Tedy i funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

má primitivní funkci na $(-1, 1)$. Ukážeme, že

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left| \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \right|, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

primitivní funkci na $(-1, 1)$ nemá. Předpokládejme, že G je primitivní funkce k $|f|$ na $(-1, 1)$. Položme

$$H(x) = (R) \int_{-1}^x |f(t)| dt, \quad x \in (-1, 0).$$

Pak podle Věty 9.2.28 je H dobře definovaná funkce na $(-1, 0)$ a její derivace je zde rovna $|f|$. Věta 9.1.3 tedy dává existenci konstanty $c \in \mathbb{R}$ takové, že $H(x) = G(x) + c$, $x \in (-1, 0)$. Pak tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = G(0) + c$$

je vlastní. Ukážeme, že tento fakt vede ke sporu. Počítejme pomocí Věty o substituci ??

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (R) \int_{-1}^x \frac{1}{t^2} \left| \sin\left(\frac{1}{t^3}\right) \right| dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (N) \int_{-1}^x \frac{1}{t^2} \left| \sin\left(\frac{1}{t^3}\right) \right| dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (N) \int_{\frac{1}{x}}^{-1} |\sin t^3| dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (N) \int_1^{\frac{1}{x}} |\sin t^3| dt \\ &= (N) \int_1^{\infty} |\sin t^3| dt \\ &= (N) \int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t^{\frac{2}{3}}} dt \\ &\geq (N) \int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t} dt = \infty \end{aligned}$$

(poslední rovnost plyne z Příkladu 9.4.11). Tím jsme dostali kýžený spor.

Pro funkci f^2 postupujeme obdobně pomocí výpočtu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (R) \int_{-1}^x f^2(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (N) \int_{-1}^x \frac{1}{t^4} \left(\sin\left(\frac{1}{t^3}\right) \right)^2 dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (N) \int_{\frac{1}{x}}^{-1} t^2 (\sin t^3)^2 dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (N) \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 (\sin t^3)^2 dt \\ &= (N) \int_1^\infty t^2 (\sin t^3)^2 dt \\ &= \frac{1}{3} (N) \int_1^\infty \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{6} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_1^\infty = \infty. \end{aligned}$$

•

9.6.14. Příklad. Necht $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je monotónní spojitá funkce a necht konverguje $(N) \int_0^1 f(x) dx$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je nerostoucí a nezáporná. Označíme $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx, \end{aligned}$$

a tedy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

Na druhou stranu máme odhady

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \sum_{k=2}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= a_n + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Jelikož integrál $\int_0^1 f(x) dx$ konverguje, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx = 0$. (Vskutku, je-li F primitivní funkce k f na $(0, 1)$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x)]_0^{\frac{1}{n}} = 0.)$$

Dostáváme tak

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Platí tak $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. ♣

9.6.15. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

Řešení. Pro $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ platí

$$\log a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{k}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Použijeme-li předešlý Příklad 9.6.14 na funkci $f(x) = \log x$, dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \int_0^1 \log x dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1 dx = -1.$$

Ze spojitosti funkce \exp tak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \exp(-1). \quad \clubsuit$$

9.7. Početní příklady na integrál

Výpočet primitivní funkce. Jestliže v níže uvedených příkladech na určení primitivní funkce není uveden interval, pak hledáme primitivní funkci na všech maximálních otevřených intervalech obsažených v definičním oboru integrandu.

9.7.1. Příklad. Spočtete

$$\int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx.$$

Řešení. Díky Věť 9.1.7 platí

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^4}} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5} \right) dx \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{9\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}, \quad x \in (-\infty, 0), x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

♣

9.7.2. Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^4 x dx.$$

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \end{aligned}$$

dostáváme

$$\int \sin^4 x dx \stackrel{c}{=} \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.3. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx.$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} dx = \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx - \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx \\ &\stackrel{c}{=} -\operatorname{cotgh} x - \operatorname{tgh} x \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ a } x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

♣

9.7.4. Příklad. Spočtěte

$$\int \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx.$$

Řešení. Pomocí Věty 9.1.12 postupně odvodíme

$$\begin{aligned} \int \log^2 x \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2 \int \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2 \left(-\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \right) \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{x} (\log^2 x + 2 \log x + 2), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

♣

9.7.5. Příklad. Spočítejte

$$\int x^2 \arccos x dx.$$

Řešení. Dvojnásobným použitím Věty 9.1.12 dostáváme

$$\begin{aligned} \int x^2 \arccos x dx &= \frac{x^3 \arccos x}{3} + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 (\sqrt{1-x^2})' dx \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{1}{3} \int 2x \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Pomocí substituce $t = 1 - x^2$ převedeme poslední integrál na hledání primitivní funkce $\int -\sqrt{t} dt$. Tedy

$$\int 2x \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{c}{=} -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

z čehož plyne závěr

$$\int x^2 \arccos x dx \stackrel{c}{=} \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{2}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

♣

9.7.6. Příklad. Spočítejte

$$\int \sin(\log x) dx \quad \text{a} \quad \int \cos(\log x) dx.$$

Řešení. Označíme-li $I_1 = \int \sin(\log x) dx$ a $I_2 = \int \cos(\log x) dx$, pomocí Věty 9.1.12 dostáváme pro $x \in (0, \infty)$ rovnosti

$$I_1 = x \sin(\log x) - I_2 \quad \text{a} \quad I_2 = x \cos(\log x) + I_1.$$

Množiny I_1 a I_2 jsou určené až na konstantu. Použitím Lemmatu 9.1.11 máme po dosazení druhé rovnice do první a přičtení I_1 rovnost

$$2I_1 = I_1 + I_1 = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - I_1 + I_1 = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) + C$$

(C značí množinu všech konstantních funkcí na $(0, \infty)$). Tedy

$$I_1 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} (x \sin(\log x) - x \cos(\log x)), \quad x \in (0, \infty).$$

Obdobně odvodíme vztah

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} (x \sin(\log x) + x \cos(\log x)), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

9.7.7. Příklad. Spočtěte

$$\int (2x - 3)^{10} dx$$

Řešení. Máme

$$\int (2x - 3)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x - 3)^{10} 2 dx.$$

Položíme-li ve Větě ?? $\varphi(x) = 2x - 3$ a $f(t) = t^{10}$, máme $\int f(t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{11} t^{11}$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy platí

$$\int (2x - 3)^{10} \stackrel{c}{=} \frac{1}{22} (2x - 3)^{11}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.8. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx.$$

Řešení. Zvolíme substituci $t = \varphi(x) = e^x$, čímž úlohu převedeme na výpočet

$$\int \frac{t}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \stackrel{c}{=} t - \log|1+t|$$

pro $t \in (-\infty, -1)$ a $t \in (-1, \infty)$. Proto

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx \stackrel{c}{=} e^x - \log(1 + e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.9. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$ je spojitá na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a na těchto intervalech tedy budeme hledat její primitivní funkci. Platí

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Pro první člen platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \stackrel{c}{=} -\cotg x, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

V druhém členu použijeme Větu ?? pro funkci $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Jelikož $\int f(t) \stackrel{c}{=} -\frac{1}{t}, t \in (-\infty, 0)$ a $t \in (0, \infty)$, platí

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{\sin x}, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Položíme-li nyní

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-\cos x + 1}{\sin x}, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

dostaneme spojitou funkci na $(-\pi, \pi)$, která je dle předchozích výpočtů a Věty 9.1.53 primitivní k h na $(-\pi, \pi)$. Rozšíříme-li g 2π -periodicky na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že g je primitivní k h na množině $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ (viz Příklad 9.6.11). ♣

9.7.10. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx.$$

Řešení. Položme $\varphi(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{4+t^2}$ pro $t \in \mathbb{R}$. Potom

$$\int f(t) dt = \int \frac{1}{4 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx,$$

dostáváme podle Věty ??

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.11. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Předpokládejme nejprve, že $x \in (1, \infty)$. Potom platí

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

Položme dále $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (1, \infty)$ a $g(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ pro $t \in (-1, 1)$. Potom

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (1, \infty).$$

Protože $\int g(t) dt \stackrel{c}{=} -\arcsin t$, $t \in (-1, 1)$, platí podle Věty 9.1.29

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (1, \infty).$$

Podobně odvodíme, že

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (-\infty, -1).$$

♣

9.7.12. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x \log x \log \log x} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(1, e)$ a (e, ∞) . Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x \log \log x}$ a $\varphi(x) = \log \log x$ pro $x \in (1, e)$. Potom $\varphi((1, e)) = (-\infty, 0)$. Definujme $g(t) = \frac{1}{t}$ pro $t \in (-\infty, 0)$. Potom

$$\int f(x) dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Protože $\int g(t) dt \stackrel{c}{=} \log |t|$, $t \in (-\infty, 0)$, máme podle druhé věty o substituci (Věta 9.1.27)

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \log |\varphi(x)| = \log |\log \log x|, \quad x \in (1, e).$$

Obdobně odvodíme, že

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \log |\log \log x|, \quad x \in (e, \infty).$$

♣

9.7.13. Příklad. Spočtěte

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

Řešení. Položme $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ pro $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $g(t) = \frac{1}{t}$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\int f(x) dx = - \int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Tedy

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} -\log |\cos x|, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

♣

9.7.14. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x}$ je spojitá funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, kde tedy budeme hledat funkci k ní primitivní. Platí

$$h(x) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Položíme-li $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{t^2 - 1}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, platí

$$h(x) = \frac{1}{\log \frac{3}{2}} f(\varphi(x)) \varphi'(x).$$

Protože

$$\int f(t) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \quad \text{pro } t \in (-\infty, -1), t \in (-1, 1) \text{ a } t \in (1, \infty),$$

dostáváme

$$\int h(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2(\log 3 - \log 2)} \log \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ a } x \in (0, \infty).$$

♣

9.7.15. Příklad. Spočtěte

$$\int x \sqrt{2-5x} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci k $h(x) = x\sqrt{2-5x}$ budeme hledat na intervalu $(-\infty, \frac{2}{5})$. Uvažujme substituci $\varphi(x) = 2-5x$, $x \in (-\infty, \frac{2}{5})$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \frac{2-t}{5}$, $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{1}{5}$ a

$$h(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2}{25}\sqrt{t} + \frac{1}{25}t^{\frac{3}{2}}, \quad t \in (0, \infty).$$

Jelikož

$$\int h \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125}t^{\frac{5}{2}}, \quad t \in (0, \infty),$$

dle Věty 9.1.29 platí

$$\int h(x) dx \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}, \quad x \in (-\infty, \frac{2}{5}).$$

♣

9.7.16. Příklad. Spočtěte

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci k $h(x) = \cos^5 x \sqrt{\sin x}$ budeme hledat na intervalech $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pišme

$$h(x) = \cos^4 x \sqrt{\sin x} \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x} \cos x.$$

Položíme-li $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = (1-t^2)^2 \sqrt{t}$, $t \in (0, \infty)$, platí

$$\int f(t) dt = \int \left(\sqrt{t} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} \right) dt \stackrel{c}{=} \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}, \quad t \in (0, \infty).$$

Pomocí Věty ?? dostáváme

$$\int h(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \sin x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} \sin x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} \sin x^{\frac{11}{2}} \quad \text{pro } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

♣

9.7.17. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx,$$

kde a je kladné reálné číslo.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, a $\varphi(t) = a \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1 + \sinh^2 t}} = \frac{1}{a \cosh t}$$

a

$$\varphi'(t) = a \cosh t.$$

Tedy

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int 1 dt \stackrel{c}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proto

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Poslední rovnost snadno odvodíme ze vzorce $\frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.)

♣

9.7.18. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$$

Řešení. Dle Věty ?? existují čísla $A, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pak platí

$$x^2 + 1 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Ze spojitosti obou stran této rovnosti pak plyne, že je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Porovnáme-li koeficienty polynomy na levé straně s koeficienty polynomu na straně pravé, obdržíme $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ a $C = \frac{1}{2}$. Proto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx &= \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \log|x-1| \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \log|x^2 - 1| \quad \text{pro } x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 1) \text{ a } x \in (1, \infty). \end{aligned}$$

♣

9.7.19. Příklad. Spočtěte

$$\frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Řešení. Jelikož polynom $x^4 + 1$ nemá reálné kořeny, lze ho vyjádřit jako součin dvou nerozložitelných kvadratických polynomů. Ty nalezneme buď za pomoci metody neurčitých koeficientů nebo pomocí rozkladu

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Rozklad na parciální vzorky tedy bude mít tvar

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Úpravou obržíme rovnost

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax + B)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ &= x^3(A + C) + x^2(-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D) + x(A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D) + (B + D). \end{aligned}$$

Řešením příslušné soustavy lineárních rovnic dostáváme

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x + \sqrt{2})}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

Obdobně postupujeme i u druhého členu, což vede k výsledku

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 + 1} dx &\stackrel{c}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

9.7.20. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$$

Řešení. Použijeme substituci $y = x - 1$, čímž se problém převede na výpočet

$$\begin{aligned} \int \frac{(y+1)^3}{y^{100}} dy &= \int (y^{-97} + 3y^{-98} + 3y^{-99} + y^{-100}) dy \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}y^{-96} - \frac{3}{97}y^{-97} - \frac{3}{98}y^{-98} - \frac{1}{99}y^{-99}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dy &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}(x-1)^{-96} - \frac{3}{97}(x-1)^{-97} - \frac{3}{98}(x-1)^{-98} \\ &\quad - \frac{1}{99}(x-1)^{-99} \quad \text{pro } x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, \infty). \end{aligned}$$

♣

9.7.21. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx.$$

Řešení. Jelikož

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx = \frac{1}{5} \int \frac{x^5 5x^4}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx,$$

substitucí $y = x^5$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{y}{(y^2 + 2y + 2)^2} dy.$$

Díky Příkladu 9.1.16 pak máme

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{(y^2 + 2y + 2)^2} dy &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{2y + 2}{(y^2 + 2y + 2)^2} - \frac{2}{(y^2 + 2y + 2)^2} \right) dy \\ &= -\frac{1}{2(y^2 + 2y + 2)} - \int \frac{1}{((y+1)^2 + 1)^2} dy \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2(y^2 + 2y + 2)} - \frac{y+1}{2(y^2 + 2y + 2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(y+1). \end{aligned}$$

Závěr jest tedy následující:

$$\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx \stackrel{c}{=} -\frac{x^5 + 1}{10(x^{10} + 2x^5 + 2)} - \frac{1}{10} \operatorname{arctg}(x^5 + 1),$$

přičemž rovnost platí na \mathbb{R} .

♣

9.7.22. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$ splňuje

$$h(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 x + 2) \cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Položíme $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a $f(t) = \frac{1}{t^2+2}$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož

$$\int f(t) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

máme pro funkci

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

rovnost

$$\int h(x) \stackrel{c}{=} H(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Nechť nyní H je π -periodicky dodefinována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pak též $H'(x) = h(x)$ na této množině (viz Příklad 9.6.11). Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} H(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} H(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

je funkce

$$F(x) = \begin{cases} H(x) + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

díky Věť 9.1.53 primitivní k h na celém \mathbb{R} . ♣

9.7.23. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sin x} dx \quad \text{a} \quad \int \frac{1}{\cos x} dx.$$

Řešení. Pro funkci $h(x) = \frac{1}{\sin x}$ platí

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi). \end{aligned}$$

Položíme-li $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ a $f(t) = \frac{1}{t}$, máme rovnost

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Proto

$$\int h(x) dx \stackrel{c}{=} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, \quad x \in (-\pi, 0), \quad x \in (0, \pi).$$

Díky periodicitě však tato rovnost platí i pro všechna $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pro výpočet druhé primitivní funkce uvažujme rovnost $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$, $x \in \mathbb{R}$, a substituční funkci $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + x$. Díky Věťe ?? a předešlému výpočtu pak platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} dx \\ &\stackrel{c}{=} \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \quad \text{pro } x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

♣

9.7.24. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(\sin^2 x)} = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)},$$

substitucí $t = \varphi(x) = \cos x$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} dt.$$

Snadným rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$\frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} = \frac{1}{3(2+t)} - \frac{1}{6(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)}.$$

Tedy

$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \log(2+t) + \frac{1}{6} \log(1-t) - \frac{1}{2} \log(1+t)$$

pro $t \in (-\infty, -2)$, $t \in (-2, -1)$, $t \in (-1, 1)$ a $t \in (1, \infty)$. z čehož plyne

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \log(2 + \cos x) + \frac{1}{6} \log(1 - \cos x) - \frac{1}{2} \log(1 + \cos x),$$

přičemž $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

♣

9.7.25. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Stejně jako ve Větě ?? máme $\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ a $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Dostáváme tak úlohu

$$\int \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 2)^2} dt = \int \frac{t^2 + 2 - 1}{(t^2 + 2)^2} dt = \int \frac{1}{t^2 + 2} - \int \frac{1}{(t^2 + 2)^2} dt.$$

První integrál vyjde

$$\int \frac{1}{t^2 + 2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

zatímco druhý je dle rekurzivního vzorce 9.1.16 roven

$$\int \frac{1}{(t^2 + 2)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{2(1 + (\frac{t}{\sqrt{2}})^2)} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dohromady dostáváme

$$\int \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 2)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) - \frac{t}{4(2 + t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením tak získáváme rovnost

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx \stackrel{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Označme

$$F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}.$$

Z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že F je primitivní k zadané funkci také na každém intervalu tvaru $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(x) = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} F(x) = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}},$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + k \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na \mathbb{R} a mimo body $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 9.1.53 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém \mathbb{R} . ♣

9.7.26. Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = 2 \operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Dosazením získáváme integrál

$$\int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2} dt = \frac{3}{5} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}(t + \frac{1}{3})\right)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3t + 1}{\sqrt{5}} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pak je funkce

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right)$$

primitivní k zadané funkci $f = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Z periodicity uvažovaných funkcí je F primitivní k f i na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\pi^+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k \frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + k \frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x = \pi + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na \mathbb{R} a mimo body $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 9.1.53 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém \mathbb{R} . \clubsuit

9.7.27. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

Řešení. Polynom $x^2 + x + 1$ je kladný na celé reálné ose, a tedy budeme hledat primitivní funkci na celém \mathbb{R} . Použijeme Eulerovu substituci (viz Věta 9.1.59), tj. položíme $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Pak

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t}$$

a

$$(\varphi^{-1})'(t) = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}.$$

Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce

$$\int -2 \cdot \frac{(1 - 2t)(t^2 - t + 1)}{(-t^2 + t - 2)(1 - 2t)^2} dt = 2 \int \frac{1}{1 - 2t} dt \\ \stackrel{c}{=} -\log |1 - 2t|, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Proto platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx \stackrel{c}{=} -\log \left| 1 - 2 \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$



9.7.28. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$$

Řešení. Použijeme Větu 9.1.56, takže položíme $\varphi(x) = \sqrt[6]{x+1}$. Pak $(\varphi^{-1})(t) = t^6 - 1$ a $(\varphi^{-1})'(t) = 6t^5$. Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{(1-t^3)6t^5}{1+t^2} dt.$$

Standardním postupem odvodíme identitu

$$\frac{t^8 - t^5}{t^2 + 1} = t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 + \frac{-t + 1}{t^2 + 1}.$$

Jelikož

$$\int \frac{-t + 1}{t^2 + 1} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int \frac{t}{t^2 + 1} dt \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \log(1 + t^2),$$

máme výsledek

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-t^3)6t^5}{1+t^2} dt &\stackrel{c}{=} -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t \\ &\quad + 3 \log(1 + t^2) - 6 \operatorname{arctg} t, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Nyní jen stačí dosadit $t = \sqrt[6]{1+x}$ a obdržíme tak hledanou primitivní funkci pro $x \in (-1, \infty)$. ♣

9.7.29. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1},$$

zvolíme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (viz Věta 9.1.56). Pak $\varphi^{-1}(t) = -\frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{-4t}{(1-t^2)^2}$. Úlohu tak převedeme na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} dt.$$

Standardním postupem obdržíme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2}{(1+t)^3},$$

což znamená, že

$$\int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}$$

pro $t \in (-\infty, -1)$, $t \in (-1, 1)$ a $t \in (1, \infty)$. Dosazením $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ dostaneme hledanou primitivní funkci na intervalu $(1, \infty)$. ♣

9.7.30. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx.$$

Řešení. Substitucí $t = \varphi(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$ dostáváme

$$\varphi^{-1}(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right)^2 \quad \text{a} \quad (\varphi^{-1})'(t) = \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{2t^3}.$$

Tím jsme úlohu převedli na hledání primitivní funkce

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{(t^2 + 1)(t^2 - 1)}{2t^3} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3} dt \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \left(t - \log |t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) \end{aligned}$$

pro $t \in (-\infty, -1)$, $t \in (-1, 0)$ a $t \in (0, \infty)$. Dosazením $t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$ obdržíme hledanou primitivní funkci na intervalu $(0, \infty)$. ♣

9.7.31. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x \sqrt{-\log^2 x + 4 \log - 3}} dx.$$

Řešení. Substitucí $t = \log x$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{1}{\sqrt{-t^2 + 4t - 3}} dt.$$

Jelikož

$$\sqrt{-t^2 + 4t - 3} = \sqrt{(t-1)(3-t)} = (3-t) \sqrt{\frac{t-1}{3-t}}, \quad t \in (1, 3),$$

položíme $y = \varphi(t) = \sqrt{\frac{t-1}{3-t}}$. Pak $\varphi^{-1}(y) = \frac{3y^2+1}{y^2+1}$, $(\varphi^{-1})'(y) = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$ a $3-t = \frac{2}{y^2+1}$. Tím obdržíme

$$\int \frac{1}{\frac{2}{y^2+1} \cdot y} \cdot \frac{4y}{(y^2+1)^2} dy = \int \frac{2}{y^2+1} dy \stackrel{c}{=} 2 \operatorname{arctg} y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Proto platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-\log^2 x + 4\log - 3}} dx \stackrel{c}{=} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\log x - 1}{3 - \log x}}, \quad x \in (e, e^3).$$

♣

9.7.32. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} dx.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(-\infty, 0)$. Výpočet započneme úpravou

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}}{(1+e^x) - (1-e^x)} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x} dx - \int \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x} dx. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Podívejme se nejprve na první člen. V něm provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1+e^x}$, $x \in (-\infty, 0)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(t^2 - 1)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2t}{t^2-1}$. Úlohu jsme tak převedli na výpočet primitivní funkce

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt.$$

Dle Věty ?? existují čísla $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Úpravou a použitím spojitosti dostáváme rovnost

$$t^2 = A(t^3 + t^2 - t - 1) + B(t^2 + 2t + 1) + C(t^3 - t^2 - t + 1) + D(t^2 - 2t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Systém rovnic

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B - C + D &= 1 \\ -A + 2B - C - 2D &= 0 \\ -A + B + C + D &= 0 \end{aligned}$$

má řešení

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = \frac{1}{4}.$$

Proto platí

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{4} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)}.$$

V druhém výrazu z (9.44) provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1 - e^x}$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(1 - t^2)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$. Dostaneme tak integrál

$$\int \frac{-t^2}{(1-t^2)^2} dt.$$

Použitím první části výpočtu obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} dx &\stackrel{c}{=} \frac{1}{4} \log \left| \frac{t_1-1}{t_1+1} \right| - \frac{1}{4(t_1-1)} - \frac{1}{4(t_1+1)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \log \left| \frac{t_2-1}{t_2+1} \right| - \frac{1}{4(t_2-1)} - \frac{1}{4(t_2+1)}, \end{aligned}$$

kde $t_1 = \sqrt{1+e^x}$ a $t_2 = \sqrt{1-e^x}$. Výpočet přitom platí na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

Určitý integrál.

9.7.33. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n},$$

stačí dle Věty 2.2.46 určit limitu výrazu

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}}.$$

Uvážíme-li však funkci $f(x) = 2^x$, $x \in [0, 1]$, obdržíme riemannovsky integrovatelnou funkci na $[0, 1]$ (viz Věta 9.2.20) a dle Důsledku 9.2.13 máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} = (R) \int_0^1 2^x dx = (N) \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\log 2} [2^x]_0^1 = \frac{1}{\log 2}.$$

♣

9.7.34. Příklad. Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Označme

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a

$$F(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dle Věty 9.2.28 platí

$$F'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (F(x^3) - F(x^2))' = g(x^3)3x^2 - g(x^2)2x \\ &= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

9.7.35. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Řešení. Pomocí l'Hospitalova pravidla odvodíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

♣

9.7.36. Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

Řešení. Použitím Věty 9.3.15 a Příkladu 9.6.11 dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{200\pi} \sqrt{1 - \cos y} dy = 50 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos y} dy \\ &= 50 \left(\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos y} dy + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos y} dy \right) \\ &= 100 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos y} dy = 100 \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1 + \cos y}} dy \\ &= 100 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 200 \left[\sqrt{t} \right]_{t=0}^{t=2} = 200\sqrt{2}. \end{aligned}$$

♣

9.7.37. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos x} dx,$$

kde $\varepsilon \in [0, 1)$.

Řešení. Použitím substituce $\cotg \frac{x}{2} = t$, kde $\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{t^2-1}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{t^2(1+\varepsilon) + 1-\varepsilon} dt \\ &= \frac{4}{1-\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(t \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)^2} dt \\ &= \left[\frac{4}{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{arctg} \left(t \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right) \right]_{t=0}^{y=\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{4}{\sqrt{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

♣

9.7.38. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Řešení. Pomocí Věty 9.3.14 dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx \\ &= \frac{3}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

♣

9.7.39. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| \, dx.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| \, dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\log x) \, dx + \int_1^e \log x \, dx \\ &= [-x \log x + x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x \log x - x]_1^e \\ &= 2 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

♣

9.7.40. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx, \quad \int_1^\infty x^\alpha \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1, & \alpha \neq -1, \\ [\log x]_0^1, & \alpha = -1 \end{cases}$$

integrál $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

Podobně odvodíme, že $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$. ♣

9.7.41. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\log x|^\beta \, dx, \quad \int_{10}^\infty x^\alpha |\log x|^\beta \, dx,$$

kde α a β jsou reálné parametry.

Řešení. Uvažujme nejprve první integrál. Integrovaná funkce má v bodě $\frac{1}{2}$ vlastní limitu a na intervalu $(0, \frac{1}{2})$ je spojitá. Je tedy třeba vyšetřit její integrovatelnost u bodu 0.

Pokud $\alpha > -1$, zvolíme $\alpha' \in (-1, \alpha)$ a díky platnosti vztahu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-\alpha'} |\log x|^\beta = 0$$

odvodíme odhad

$$x^\alpha |\log x|^\beta \leq x^{\alpha'},$$

který platí ne nějakém okolí $(0, \delta)$. Jelikož $\int_0^\delta x^{\alpha'} \, dx$ konverguje (viz Příklad 9.7.40), konverguje dle Věty 9.4.1 i integrál původní.

Pokud $\alpha = -1$, platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} |\log x|^\beta \, dx = \begin{cases} -\left[\frac{(-\log x)^{\beta+1}}{\beta+1} \right]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta \neq -1, \\ -[\log(-\log x)]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta = -1. \end{cases}$$

Tedy integrál konverguje pro $\beta < -1$.

Je-li konečně $\alpha < -1$, zvolíme $\alpha' \in (\alpha, -1)$ a díky platnosti vztahu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha - \alpha'} |\log x|^\beta = \infty$$

odvodíme odhad

$$x^\alpha |\log x|^\beta \geq x^{\alpha'},$$

který platí na nějakém okolí $(0, \delta)$. Z divergence integrálu $\int_0^\delta x^{\alpha'}$ pak plyne divergence integrálu zadaného.

Závěrem tedy lze říci, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$ nebo když $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Druhý integrál bychom vyšetřili obdobným způsobem, přičemž by nám vyšlo, že konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ nebo když $\alpha = -1$ a $\beta < -1$. ♣

9.7.42. Příklad. Dokažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Řešení. Snadno ověříme, že integrál konverguje. Vskutku,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \log x}{\log x} = 1,$$

a $\log x$ je funkce integrovatelná u 0 (viz Příklad 9.7.41).

Nyní pomocí substituce $x = 2t$ máme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(2 \sin t \cos t) \, dt \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2 \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t) \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t) \, dt \right). \end{aligned}$$

Jelikož substitucí $t = \frac{\pi}{2} - u$ v posledním integrálu získáváme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t) \, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u) \, du,$$

platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \, dx = \frac{\pi \log 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \, dx.$$

Tím je požadovaná rovnost dokázána. ♣

9.7.43. Příklad. Vypočtěte integrály

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx, \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad \text{a} \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \, dx.$$

Řešení. První integrál převedeme pomocí per partes na

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = [x \log(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

V druhém provedeme substituci $x = \sin t$ a dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt = -\frac{\pi \log 2}{2}.$$

Třetí pak opět pomocí per partes vyčíslíme jako

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx = [\arcsin x \log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

♣

Konvergence integrálu.

9.7.44. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx.$$

Řešení. Integrandy jsou spojité funkce, takže stačí vyšetřit existenci integrálů v krajních bodech daných intervalů. Podívejme se nejprve na funkci $f(x) = \frac{-\log x}{1-x^2}$. Pak pro $g(x) = -\log x$ platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Jelikož má $g(x)$ u 0 konvergentní integrál, dle Věty 9.4.5 má u 0 i $f(x)$ konvergentní integrál. Tedy i $-f(x)$ (což je zadaná funkce) má u 0 konvergentní integrál.

U bodu 1 platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log x}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2},$$

a tedy je zadaná funkce u 1 jakožto omezená funkce integrovatelná.

Závěr tedy je, že první integrál konverguje.

Druhý integrand u 0 srovnáme s funkcí $\log x$, co je funkce u 0 integrovatelná. U nekonečna se integrand chová jako $\frac{\log x}{x^2}$ (tj. pro $f(x) = \frac{\log x}{1+x^2}$ a $g(x) = \frac{\log x}{x^2}$ platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, co je integrovatelná funkce. Tedy i f je integrovatelná u nekonečna. Dohromady máme, že i druhý integrál je konvergentní.

♣

9.7.45. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Integrand $f(x)$ je nezáporná spojitá funkce na $(0, \infty)$, budeme tak vyšetřovat integrovatelnost v krajních bodech tohoto intervalu. Položíme $g(x) = x^{3-\alpha}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Dle Věty 9.4.5 konverguje f u 0 právě tehdy, když u 0 konverguje g . To však nastává právě pro $3 - \alpha > -1$, tj. $\alpha < 4$.

U nekonečna uvážíme funkci $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1,$$

a tedy f má u nekonečna konvergentní integrál právě tehdy, když g je integrovatelná u nekonečna. To však nastává právě pro $\alpha - 1 > 1$.

Dohromady tak máme, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (2, 4)$. \clubsuit

9.7.46. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

Řešení. Daná funkce $f(x)$ je integrovatelná u 0, neboť zde je omezená ($\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ a $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je omezená). U nekonečna f srovnáme s funkcí $g(x) = \frac{1}{x^2}$, neboť pak máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}.$$

Jelikož je g integrovatelná u nekonečna, je i f integrovatelná u nekonečna. Proto je f integrovatelná na $(0, \infty)$. \clubsuit

9.7.47. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \operatorname{tg}^{\alpha} x dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Co se týče integrovatelnosti daná funkce f u 0, položme $g(x) = x^{\alpha+2}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log(\cos x) \cos x - 1}{\cos x - 1} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \frac{1}{\cos^{\alpha} x} = -\frac{1}{2}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když g je integrovatelná u 0. To nastává v případě $\alpha > -3$.

Situaci u bodu $\frac{\pi}{2}$ nám pomůže objasnit funkce

$$g(x) = \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha}}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin^\alpha x \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \right)^\alpha \frac{\log(\cos x)}{\log(\frac{\pi}{2} - x)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\log(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}) + \log(\frac{\pi}{2} - x)}{\log(\frac{\pi}{2} - x)} = 1. \end{aligned}$$

Jelikož je funkce g integrovatelná u $\frac{\pi}{2}$ zleva právě tehdy, když $\alpha < 1$ (viz Příklad 9.7.41, máme dle Věty 9.4.5 nutnou a postačující podmínku pro integrovatelnost f u $\frac{\pi}{2}$.

Závěr tedy jest, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-3, 1)$. ♣

9.7.48. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Vzhledem ke spojitosti dané funkce f na $[1, \infty)$ stačí vyšetřit její integrovatelnost v nekonečnu. Je-li $\alpha > 1$, platí $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, a tedy f je absolutně integrovatelná. Je-li $\alpha \in (0, 1]$, má $\sin x$ omezenou primitivní funkci a $x^{-\alpha}$ je klesající funkce s limitou 0 v nekonečnu. Dle Věty 9.4.8 je integrál z f konvergentní. Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x x^{-\alpha} dx \right| \geq (2n\pi)^{-\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x dx = 2 \cdot (2n\pi)^{-\alpha}.$$

Z tohoto odhadu vidíme neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci k f v nekonečnu. Integrál tak není v tomto případě konvergentní.

Uvažujme nyní znovu $\alpha \in (0, 1]$. Pak pro přirozená čísla $n < m$ platí

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{2m\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx &= \sum_{k=n}^{m-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \\ &\geq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(2(k+1)\pi)^\alpha} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= 2^{1-\alpha} \pi^{-\alpha} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{k=1}^\infty (k+1)^{-\alpha}$ divergentní, plyne z předcházejícího odhadu neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci k f v nekonečnu.

Integrál je tak konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 0$, a je absolutně konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$. ♣

9.7.49. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})x^{-\alpha} dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

a

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

dostáváme pro danou funkci f vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{4-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když $4 - \alpha > -1$, tj. $\alpha < 5$.

Zkoumejme nyní situaci v nekonečnu. Povšimněme si, že $e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}$ je (absolutně) integrovatelná v nekonečnu pro každé α . To totiž ihned plyne z odhadu

$$e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha} \leq x^{-2}$$

platného na nějakém okolí ∞ , který odvodíme z limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}}x^\gamma = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pro $\alpha > 1$ tak máme odhad

$$|f(x)| \leq \frac{2}{x^\alpha},$$

a tedy je f absolutně integrovatelná.

Pokud $\alpha \in (0, 1]$, jsou funkce $\frac{\cos x}{x^\alpha}$ a $e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}$ integrovatelné, a tedy i f je integrovatelná. Není však absolutně integrovatelná, neboť máme odhad

$$|f(x)| \geq \frac{|\cos x|}{x^\alpha} - e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha},$$

kde na pravé straně je součet divergentní a konvergentní funkce, tj. funkce s divergentním integrálem.

Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, integrál $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ diverguje (viz Příklad 9.7.48). Jelikož $\int_{10}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha} dx$ konverguje, diverguje i $\int_{10}^{\infty} f(x) dx$.

Závěr tedy jest, že $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (0, 5)$. Dále daný integrál konverguje absolutně právě tehdy, když $\alpha \in (1, 5)$.

♣

9.7.50. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálů

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} dx, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} dx.$$

Řešení. U prvního integrálu vyšetřujeme díky nezápornosti integrandu pouze absolutní konvergenci. Jelikož však

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{2x}$ diverguje a $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x}$ konverguje (viz Věta 9.4.8), diverguje i integrál $\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$.
U druhého integrálu odhadneme

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{x} \right| &= \left| \frac{x \sin x - x \sin x - 2 \sin^2 x}{x(x + 2 \sin x)} \right| \\ &\leq \frac{2}{x(x - 2)} \end{aligned}$$

Funkce $\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{x}$ je tak integrovatelná (viz Věta 9.4.1), což díky integrovatelnosti funkce $\frac{\sin x}{x}$ implikuje integrovatelnost funkce

$$\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} = \left(\frac{\sin x}{x + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{x} \right) + \frac{\sin x}{x}.$$

U absolutní konvergence použijeme odhad

$$\left| \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} \right| \geq \frac{|\sin x|}{x + 2} = \frac{|\sin x|}{x} \frac{x}{x + 2},$$

který dává díky Příkladu 9.7.48 a Větě 9.4.8(A) divergenci daného integrálu.

U třetího integrálu postupujeme obdobně jako u předešlého, dostaneme však odhad

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| = \left| \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2 \sin x)} \right| \geq \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}.$$

Snadno odvodíme, že funkce na pravé straně této nerovnosti není integrovatelná, a tedy je funkce

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} = \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2 \sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

součtem funkce s konvergentním integrálem a funkce s divergentním integrálem. Jedná se tedy o neintegrovatelnou funkci. ♣

9.7.51. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} x \sin x^4 dx$$

Řešení. U 0 jest funkce spojitá, a tedy integrovatelná. Dále pišme

$$\int_1^{\infty} x \sin x^4 dx = \int_1^{\infty} 4x^3 \sin x^4 \frac{1}{4x^2} dx.$$

Jelikož je funkce $\int 4x^3 \sin x^4 = -\cos x^4$ omezená a $\frac{1}{4x^2}$ konverguje v nekonečnu monotónně k nule, konverguje integrál dle Věty 9.4.8(D).

U absolutní konvergence je třeba znovu vyzkoumat integrovatelnost v nekonečnu. K tomuto účelu použijeme substituci $x^4 = y$ a obdržíme

$$\int_1^{\infty} x |\sin x^4| dx = \int_1^{\infty} \sqrt[4]{y} \frac{\sin y}{4y^{\frac{3}{4}}} dy = \frac{1}{4} \int_1^{\infty} \frac{|\sin y|}{y^{\frac{1}{2}}} dy,$$

což je divergentní integrál (viz Příklad 9.7.48). Tedy je daný integrál absolutně divergentní. ♣

9.7.52. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \sin(x + \log x) dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Označme $\varphi(x) = x + \log x$. Jelikož $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, vidíme, že $1 \leq \varphi' \leq 2$ a φ' klesá. Tedy φ' i $\frac{1}{\varphi'}$ jsou omezené monotónní funkce. Dle Věty 9.4.8(A) tak platí

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \sin \varphi(x) dx \text{ konverguje} \iff \int_1^{\infty} x^{\alpha} (\sin \varphi(x)) \varphi'(x) dx \text{ konverguje.}$$

Budeme tak vyšetřovat konvergenci druhého integrálu.

Označme $\psi(x) = \varphi'(x) \sin \varphi(x)$. Pak $\int \psi(x) dx = -\cos \varphi(x)$ je omezená, a tedy v případě $\alpha < 0$ integrál konverguje dle Věty 9.4.8(D). Pokud $\alpha = 0$, integrál diverguje, neboť

$$\int_1^{\infty} \varphi'(x) \sin \varphi(x) dx = [-\cos \varphi(x)]_1^{\infty}$$

neexistuje (viz Příklad 4.4.15). Je-li $\alpha > 0$, pak integrál diverguje. V opačném případě by totiž integrál

$$\int_1^{\infty} \psi(x) dx = \int_1^{\infty} x^{\alpha} \psi(x) x^{-\alpha} dx$$

konvergoval dle Věty 9.4.8(A), což dle předcházející části neplatí. Integrál tak konverguje pro $\alpha < 0$.

Vyzkoumejme nyní absolutní konvergenci. Podobně jako výše odvodíme z Věty 9.4.8(A), že

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} |\sin \varphi(x)| dx \text{ konverguje} \iff \int_1^{\infty} x^{\alpha} |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx \text{ konverguje.}$$

Pro případ $\alpha < -1$ je zjevně integrál konvergentní. Předpokládejme, že $\alpha \in [-1, 0)$. Zvolme libovolné $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, a necht $x, y \in [1, \infty)$ splňují $\varphi(a) = n\pi$

a $\varphi(b) = m\pi$ (Takové body existují, neboť $\varphi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ je rostoucí bijekce.)
Pak

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx &\geq \int_a^b x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx \\ &\geq b^\alpha \int_a^b |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx = b^\alpha \int_{n\pi}^{m\pi} |\sin y| dy \\ &= b^\alpha 2(m - n). \end{aligned}$$

Jelikož

$$b \leq b + \log b = \varphi(b) = m\pi,$$

platí $b^\alpha \geq (m\pi)^\alpha$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx &\geq 2(m^{1+\alpha} - b^\alpha n) \\ &= 2(m^{1+\alpha} - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha) \\ &\geq 2(1 - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha). \end{aligned} \quad (9.45)$$

Protože $\lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha = 0$, dostáváme z (9.45) neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky v nekonečnu.

Vskutku, necht' $x_0 \in (1, \infty)$ je libovolné. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\varphi^{-1}(n\pi) > x_0$ a necht' $m > n$ je takové přirozené číslo, že $n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha < \frac{1}{2}$. Pak (9.45) dává

$$\int_{x_0}^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx \geq \int_a^\infty x^\alpha |\sin \varphi(x)| \varphi'(x) dx > 1.$$

Tím je ukázáno, že daný integrál diverguje absolutně pro $\alpha \in [-1, 0)$. \clubsuit

9.7.53. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x} dx$$

Řešení. Ukážeme nejprve, že pro libovolné $a < b$ platí

$$\left| \int_a^b \sin(\sin x) dx \right| \leq 2\pi. \quad (9.46)$$

Je-li totiž $b - a \leq 2\pi$, pak odhad zjevně platí. V opačném případě nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a + k2\pi \geq b$ a $a + (k-1)2\pi < b$. Pak

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sin(\sin x) dx \right| &= \left| \int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x) dx - \int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x) dx \right| \\ &= \left| \int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x) dx \right| \leq 2\pi, \end{aligned}$$

neboť

$$\int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x) dx = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{a+n2\pi}^{a+(n+1)2\pi} \sin(\sin x) dx = 0.$$

Tato rovnost platí díky výpočtu

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(\sin x) dx &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x) dx + \int_0^{\pi} \sin(\sin(y + \pi)) dy \\ &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x) dx + \int_0^{\pi} \sin(-\sin y) dy = 0. \end{aligned}$$

Tím je (9.46) dokázána.

Ověřme nyní platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro daný integrál. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, položme $x_0 = \max\{1, 4\pi\varepsilon^{-1}\}$. Pak pro $a, b \in (x_0, \infty)$, $a < b$, existuje dle Věty 9.4.13 $c \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^c \sin(\sin x) dx + \frac{1}{b} \int_c^b \sin(\sin x) dx.$$

Z toho dostáváme díky (9.46)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x} dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \left| \int_a^c \sin(\sin x) dx \right| + \frac{\varepsilon}{4\pi} \left| \int_c^b \sin(\sin x) dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} 2\pi + \frac{\varepsilon}{4\pi} 2\pi = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je konvergence daného integrálu dokázána. ♣

9.7.54. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x} dx.$$

Řešení. Platí $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} x$, takže můžeme psát

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x} dx = \int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3}) \frac{-x^2}{2} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} dx.$$

Jelikož je $f(\sin x^{-2})(-2x^{-3}) \frac{-x^2}{2} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ omezená a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$, konverguje dle Věty 9.4.8(D) integrál

$$\int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3}) \frac{-x^2}{2} dx.$$

K ověření konvergence stačí nyní dle Věty 9.4.8(A) ukázat, že je funkce $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ na nějakém pravém okolí bodu 0 omezená a monotónní. Její omezenost je zřejmá, neboť má v 0 vlastní limitu. Dále platí

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\},$$

a tedy pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(0) = 0 \quad \text{a} \quad f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

Jelikož má f spojitou druhou derivaci, platí $f'' < 0$ pro nějaké $(0, \delta)$. Tedy f' klesá na $(0, \delta)$, což implikuje, že $f' < 0$ na $(0, \delta)$. Tedy f klesá na $(0, \delta)$. Proto je funkce $\frac{1}{f}$ monotónní na $(0, \delta)$ a důkaz je tak hotov. ♣

Metrické prostory

Tato kapitola je věnována metrickým prostorům, tj. množinám, na kterých je dán způsob měření vzdálenosti. Metrické prostory nám umožní definovat pojem spojitosti obecněji než tomu bylo v Kapitole 4. Dále budeme zkoumat některé důležité typy metrických prostorů. Výsledky této kapitoly budeme později často používat.

10.1. Základní pojmy

10.1.1. Definice. Necht P je množina a $\varrho: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující následující tři podmínky:

- (a) $\forall x, y \in P: \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (b) $\forall x, y \in P: \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- (c) $\forall x, y, z \in P: \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Potom funkci ϱ nazýváme **metrikou** na P a dvojici (P, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**. Jsou-li x, y prvky množiny P , pak nezáporné číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme jejich **vzdáleností**.

10.1.2. Metrický prostor (P, ϱ) sestává z množiny prvků P a z funkce ϱ , pomocí které mezi prvky P měříme vzdálenost. V tomto kontextu budeme o prvcích množiny P hovořit jako o bodech. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina. Podmínky (a)–(c) vyjadřují přirozené požadavky, které by měl splňovat libovolný způsob měření vzdálenosti na jakékoli množině. Podmínka (a) vyjadřuje jednak to, že dva různé body mají vždy od sebe kladnou vzdálenost a jednak to, že vzdálenost každého bodu od sebe sama je vždy nulová. Podmínka (b) říká, že vzdálenost bodu x od bodu y je vždy stejná jako vzdálenost bodu y od bodu x . Podmínka (c), kterou nazýváme **trojúhelníkovou nerovností**, je dalším přirozeným požadavkem.

10.1.3. Úmluva. Přestože metrický prostor (P, ϱ) je dvojice (množina, metrika), často používáme obratu „metrický prostor P “, pokud je volba metriky zřejmá z kontextu.

Příklady metrických prostorů. Následující série příkladů ilustruje právě definovaný pojem metrického prostoru. S metrickými prostory z těchto příkladů se budeme setkávat i později.

10.1.4. Příklad. Definujme funkci ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že (\mathbb{R}, ϱ) tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x - y| \in [0, \infty)$. Stačí tedy ověřit platnost podmínek (a)–(c) z Definice 10.1.1. Podmínky (a) a (b) jsou však zřejmě splněny a podmínka (c) plyne z Důsledku 1.5.11(b). \clubsuit

10.1.5. Úmluva. V dalším textu budeme na metrickém prostoru \mathbb{R} vždy uvažovat metriku ϱ definovanou v Příkladu 10.1.4, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Občas budeme (nejen v této kapitole) využívat následující užitečnou nerovnost.

10.1.6. Věta (Cauchyova nerovnost). Necht $n \in \mathbb{N}$ a necht $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right). \quad (10.1)$$

Důkaz. Pokud jsou všechna čísla a_1, \dots, a_n rovna nule, pak v (10.1) nastává rovnost. Předpokládejme nyní, že alespoň jedno z čísel a_1, \dots, a_n je různé od nuly. Uvažujme výraz

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2, \quad (10.2)$$

který lze přepsat na tvar

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Koeficient u x^2 je nenulový a výraz (10.2) je nezáporný pro libovolné x reálné, takže rovnice

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$$

má nejvýše jeden reálný kořen. Diskriminant této rovnice je tedy menší nebo roven nule. Odtud plyne, že

$$4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0,$$

což snadno dává (10.1). \blacksquare

10.1.7. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_2 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_2(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Ověříme podmínku (c). Necht' $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Označme $a_i = x_i - y_i$ a $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, \dots, n$. Potom z Cauchyovy nerovnosti (Věta 10.1.6) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \varrho_2(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\ &= \varrho_2(x, y) + \varrho_2(y, z). \end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ je metrický prostor. ♣

10.1.8. Funkci ϱ_2 z Příkladu 10.1.7 nazýváme **eukleidovskou metrikou** na \mathbb{R}^n . Symbol ϱ_2 je zvolen z důvodů, které budou zřejmé z dalšího textu. Pro $n = 1$ splývá metrika ϱ_2 na \mathbb{R} s metrikou ϱ zavedenou v Příkladu 10.1.4. Pokud budeme pracovat s prostorem \mathbb{R}^n , budeme na něm vždy uvažovat metricku ϱ_2 , nebude-li výslovně řečeno jinak.

10.1.9. Příklad. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_1 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad (10.3)$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_1(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Necht' $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom z Důsledku 1.5.11(b) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \varrho_1(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &= \varrho_1(x, y) + \varrho_1(y, z). \end{aligned}$$

Tím je ověřena platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ je metrický prostor. ♣

10.1.10. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_∞ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad (10.4)$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_\infty(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Necht $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že

$$\varrho_\infty(x, z) = \max\{|x_i - z_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = |x_j - z_j|.$$

Podle Důsledku 1.5.11(b) pak máme

$$|x_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

Protože

$$|x_j - y_j| \leq \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \varrho_\infty(x, y)$$

a

$$|y_j - z_j| \leq \max\{|y_i - z_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \varrho_\infty(y, z),$$

dostáváme celkem

$$\varrho_\infty(x, z) \leq \varrho_\infty(x, y) + \varrho_\infty(y, z).$$

Tím jsme ověřili platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ je metrický prostor. ♣

Před formulací dalšího příkladu připomeňme, že symbol \mathbb{C} značí množinu všech komplexních čísel.

10.1.11. Příklad (Gaussova rovina). Funkci $\varrho: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ definujme předpisem $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Dokažte, že (\mathbb{C}, ϱ) je metrický prostor.

Řešení. Každé komplexní číslo je jednoznačně určeno dvěma reálnými složkami – reálnou a imaginární. Funkci ϱ pak z těchto složek počítáme podle stejného vzorce, kterým počítáme vzdálenost ϱ_2 dvou bodů v \mathbb{R}^2 pomocí jejich souřadnic. Podle Příkladu 10.1.7 je tedy (\mathbb{C}, ϱ) metrický prostor. ♣

10.1.12. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme symbolem $\mathcal{C}([a, b])$ množinu všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$. Definujme funkci ϱ_{sup} na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\text{sup}}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{sup} nazýváme **supremovou metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

Řešení. Necht $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Podle věty o spojitosti a aritmetických operacích (Věta 4.2.5) a věty o spojitosti složené funkce (Věta 4.2.23) platí $|f - g| \in \mathcal{C}([a, b])$. Podle věty o existenci extrémů (Věta 4.3.9) nabývá funkce $|f - g|$ na $[a, b]$ svého maxima, takže funkce ϱ_{sup} je na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ dobře definovaná a splňuje

$\varrho_{\text{sup}}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Podmínky (a) a (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Necht' $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{y \in [a, b]} |f(y) - g(y)| + \sup_{y \in [a, b]} |g(y) - h(y)| \\ &= \varrho_{\text{sup}}(f, g) + \varrho_{\text{sup}}(g, h). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že číslo $\varrho_{\text{sup}}(f, g) + \varrho_{\text{sup}}(g, h)$ je horní zavorou množiny

$$\{|f(x) - h(x)|; x \in [a, b]\},$$

a tedy podle definice suprema platí

$$\varrho_{\text{sup}}(f, h) \leq \varrho_{\text{sup}}(f, g) + \varrho_{\text{sup}}(g, h).$$

Tím je ověřena podmínka (c) z Definice 10.1.1. Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ je metrický prostor. ♣

10.1.13. Příklad. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme funkci ϱ_{int} na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\text{int}}(f, g) = (R) \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{int} nazýváme **integrální metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

K řešení příkladu budeme potřebovat následující lemma.

10.1.14. Lemma. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $h \in \mathcal{C}([a, b])$. Necht' existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $h(x_0) > 0$. Potom $\int_a^b |h(x)| dx > 0$.

Důkaz. Necht' nejprve x_0 je vnitřním bodem $[a, b]$. Ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(x_0)$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)| dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |h(x)| dx \geq \frac{1}{2}h(x_0) \cdot 2\delta = \delta h(x_0) > 0.$$

Nyní předpokládejme, že $x_0 = a$. Potom ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $\delta < b - a$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(a)$ pro každé $x \in [a, a + \delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)| dx \geq \int_a^{a + \delta} |h(x)| dx \geq \frac{1}{2}h(a) \cdot \delta > 0.$$

V případě $x_0 = b$ postupujeme obdobně. ■

Řešení Příkladu 10.1.13. Podle Věty 9.2.20 je funkce ϱ_{int} dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\text{int}}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Jestliže $f = g$, potom zřejmě $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$. Jestliže naopak $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ a platí $\varrho_{\text{int}}(f, g) = 0$, pak podle Lemmatu 10.1.14 je $f(x) - g(x) = 0$ pro každé $x \in [a, b]$, tedy $f = g$. Tím je ověřena

podmínka (a) z Definice 10.1.1. Podmínka (b) je zřejmě splněna. Ověříme platnost podmínky (c). Necht' $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom pomocí Důsledku 1.5.11(b) a linearitu určitého integrálu (Věta 9.2.22) dostáváme

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f, h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)| dx \\ &\leq \int_a^b (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - h(x)| dx \\ &= \varrho_{\text{int}}(f, g) + \varrho_{\text{int}}(g, h). \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ je metrický prostor. ♣

10.1.15. Příklad. Necht' P je libovolná množina. Definujme funkci $\varrho_{\text{diskr}}: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dokažte, že potom $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{diskr} nazýváme **diskrétní metrikou** na P a $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ **diskrétním metrickým prostorem**.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a) a (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Necht' $x, y, z \in P$. Jestliže $x = z$, potom $\varrho_{\text{diskr}}(x, z) = 0$, a tedy nerovnost v (c) je zřejmě splněna. Jestliže $x \neq z$, potom $x \neq y$ nebo $z \neq y$. Odtud plyne, že

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) + \varrho_{\text{diskr}}(y, z) \geq 1 = \varrho_{\text{diskr}}(x, z).$$

Podmínka (c) je tedy splněna. Dokázali jsme, že $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je metrický prostor. ♣

10.1.16. Příklad. Necht' P je množina všech posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, tedy $P = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, neboli

$$P = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}; \forall n \in \mathbb{N}: x_n \in \{0, 1\}\}.$$

Pro posloupnosti $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ z P definujme

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ \frac{1}{k}, & \text{pokud } x \neq y, \text{ kde } k = \min\{m \in \mathbb{N}; x_m \neq y_m\}. \end{cases}$$

Dokažte, že (P, ϱ) je metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ zřejmě platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$ a jsou také zřejmě splněny vlastnosti (a), (b) z Definice 10.1.1. Necht' $x, y, z \in P$. Ověříme platnost trojúhelníkové nerovnosti $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Jestliže $x = z$, potom nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $x \neq z$. Potom existuje nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq z_k$. Odtud plyne, že $x_k \neq y_k$ nebo $z_k \neq y_k$, a tedy $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \frac{1}{k}$. Máme tak $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$. Ověřili jsme, že (P, ϱ) je metrický prostor. ♣

Normované lineární prostory. Výčet příkladů metrických prostorů nyní rozšíříme o normované lineární prostory.

10.1.17 (vektorový prostor). Symbol \mathbb{F} bude značit množinu reálných čísel \mathbb{R} nebo množinu komplexních čísel \mathbb{C} . Pro porozumění následující definici je třeba znát pojem *vektorového prostoru nad \mathbb{F}* . Tento pojem jakož i definice dalších důležitých pojmů lineární algebry a související základní výsledky je možné nalézt například v [3]. Vektorový prostor nad \mathbb{F} chápeme jako trojici $(X, +, \cdot)$, kde X je množina, $+$ je operace sčítání na X a \cdot je operace násobení prvků X prvky z \mathbb{F} . Většinou budeme ale používat kratší termín „vektorový prostor X “ místo přesnějšího „vektorový prostor $(X, +, \cdot)$ “. Nulový prvek budeme značit symbolem 0 .

10.1.18. Definice. Necht X je vektorový prostor nad \mathbb{F} . Zobrazení $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme **normou** na X , jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

- (a) $\forall x \in X: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (b) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- (c) $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ pak nazýváme **normovaným lineárním prostorem** nad tělesem \mathbb{F} . Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hovoříme o **reálném** normovaném lineárním prostoru, pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ hovoříme o **komplexním** normovaném lineárním prostoru.

10.1.19. Věta. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{F} . Definujme zobrazení $\varrho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ předpisem $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Potom ϱ je metrika na X .

Důkaz. Necht $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Ověříme podmínky (a)–(c) z Definice 10.1.1. Rovnost $\varrho(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = 0$, neboli $x = y$. Použijeme-li podmínku (b) z Definice 10.1.18 pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \cdot \|y - x\| \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x), \end{aligned}$$

tedy podmínka (b) z Definice 10.1.1 je splněna. Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z Definice 10.1.18

$$\begin{aligned} \varrho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z). \end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i podmínku (c) z Definice 10.1.1. Tím je důkaz dokončen. ■

10.1.20 (normovaný lineární prostor jako metrický prostor). V souladu s Větou 10.1.19 budeme každý normovaný lineární prostor považovat také za prostor metrický s metrikou definovanou pomocí normy způsobem uvedeným v tvrzení Věty 10.1.19. Tak dostáváme důležitou třídu metrických prostorů.

Uvedme několik příkladů reálných normovaných lineárních prostorů.

10.1.21. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Sčítání prvků z \mathbb{R}^n je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z \mathbb{R}^n reálnými čísly. Pro $x = \{x_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $y = \{y_n\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}_{j=1}^n$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}_{j=1}^n$. Definujme funkci $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

kde $x = \{x_i\}_{i=1}^n$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Zřejmě platí $\|x\| \in [0, \infty)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Jestliže $x = 0$, potom $x_i = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\|x\| = 0$. Jestliže naopak $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|x\| = 0$, potom $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, takže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $x_i^2 = 0$. Odtud již snadno plyne $x = 0$. Podmínka (a) z Definice 10.1.18 je tedy splněna.

Necht $x \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

a tedy podmínka (b) z Definice 10.1.18 je splněna.

Necht konečně $x, y \in \mathbb{R}^n$. Potom pomocí výpočtu v řešení Příkladu 10.1.7 dostaneme $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ověřili jsme platnost podmínky (c) z Definice 10.1.18. Funkce $\|\cdot\|$ je tedy norma na \mathbb{R}^n . ♣

10.1.22. Definice. Funkci $\|\cdot\|$ z Příkladu 10.1.21 nazýváme **eukleidovskou normou na \mathbb{R}^n** .

10.1.23. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu $\mathcal{C}([a, b])$ opatříme obvyklým sčítáním funkcí a obvyklým násobením funkce reálným číslem. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ na $\mathcal{C}([a, b])$ předpisem $\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{[a, b]} |f|$. Dokažte, že $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Je snadné ověřit, že množina $\mathcal{C}([a, b])$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor. Poznamenejme jen, že je třeba využít Větu 4.2.5, ze které plyne, že součet spojitých funkcí je spojitá funkce a násobek spojité funkce je také spojitá funkce. Podle Věty 4.3.9 je $\|f\|_{\text{sup}} \in [0, \infty)$ pro každé $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Vlastnosti (a), (b) z Definice 10.1.18 jsou zřejmě splněny. Pro $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ díky trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.10) platí

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\text{sup}} &= \sup\{|f(x) + g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\} + \sup\{|g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &= \|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}}. \end{aligned}$$

Tím je ověřena vlastnost (c) z Definice 10.1.18 a $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je reálný normovaný lineární prostor. ♣

10.1.24. Příklad (prostor ℓ_∞). Definujme ℓ_∞ jako množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Sčítání prvků z ℓ_∞ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$, $y = \{y_n\} \in \ell_\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Operace sčítání prvků z ℓ_∞ i násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly jsou dobře definovány, neboť součet dvou omezených posloupností je opět omezená posloupnost a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost. Není těžké ověřit, že ℓ_∞ s uvedenými operacemi tvoří reálný vektorový prostor. Poznamenejme jen, že nulovým vektorem je posloupnost, jejíž všechny členy jsou rovny 0.

Ověříme, že zobrazení $x \mapsto \|x\|$ je norma na ℓ_∞ . Pokud $x = 0 \in \ell_\infty$, pak snadný výpočet dává $\|x\| = 0$. Pokud pro $x \in \ell_\infty$ platí $\|x\| = 0$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ musí platit $|x_n| = 0$, a tedy $x = 0$. Máme-li $x \in \ell_\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom

$$\|\alpha x\| = \sup\{|\alpha x_n|; n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}.$$

Pro $x, y \in \ell_\infty$ máme díky trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.10)

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sup\{|x_n + y_n|; n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|x_n| + |y_n|; n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n|; n \in \mathbb{N}\} = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

♣

10.1.25. Příklad (prostor c_0). Definujme c_0 jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $\lim x_n = 0$. Sčítání prvků z c_0 je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z c_0 reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in c_0$, $y = \{y_n\} \in c_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in c_0$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že pak dvojice $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Řešení. Pokud $x = \{x_n\} \in c_0$, $y = \{y_n\} \in c_0$, pak $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = 0 + 0 = 0$, a tedy $x + y \in c_0$. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\lim \alpha x_n = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy opět $\alpha x \in c_0$. Poněvadž každý prvek z c_0 leží v ℓ_∞ , (Věta 2.2.41) tvoří c_0 vektorový podprostor ℓ_∞ . Zobrazení $x \mapsto \|x\|_\infty$ je pak normou na c_0 podle Příkladu 10.1.24. ♣

Podprostor, otevřená koule a diametr.

10.1.26. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M \times M})$ zřejmě tvoří opět metrický prostor, neboť podmínky (a)-(c) z Definice 10.1.1 jsou splněny pro všechna $x, y, z \in P$, a tedy i pro všechna $x, y, z \in M$. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

10.1.27. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M \times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P, ϱ) . Metriku $\varrho|_{M \times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ .

10.1.28. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Potom množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

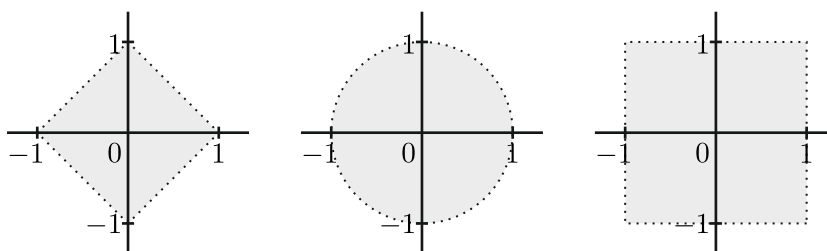
$$B(x, r) = \{y \in P; \varrho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem x a poloměrem r** .

10.1.29. Příklad. Uvažujte metrický prostor \mathbb{R} s eukleidovskou metrikou. Necht $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Dokažte, že $B(x, r) = (x - r, x + r)$.

Řešení. Tvrzení plyne z definice eukleidovské metriky na \mathbb{R} elementárním výpočtem. ♣

10.1.30 (geometrie koulí v \mathbb{R}^2). Na následujících obrázcích jsou znázorněny otevřené koule v \mathbb{R}^2 se středem v počátku a poloměrem 1 postupně pro metriky ϱ_1 , ϱ_2 a ϱ_∞ po řadě z Příkladů 10.1.9, 10.1.7, 10.1.10.



10.1.31. Příklad. Necht $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{pokud } r \leq 1, \\ P, & \text{pokud } r > 1. \end{cases}$$

Řešení. Tvrzení plyne bezprostředně z definice diskrétní metriky. ♣

10.1.32. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Potom **vzdálenost bodu x od množiny A** definujeme předpisem

$$\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y); y \in A\}.$$

Namísto symbolu $\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A)$ lze užít také symboly $\text{dist}_\varrho(x, A)$, $\varrho(x, A)$ nebo $\text{dist}(x, A)$, je-li z kontextu jasné, s jakým metrickým prostorem pracujeme.

10.1.33. Speciálně pro každé $x \in P$ platí $\text{dist}(x, \emptyset) = \infty$.

10.1.34. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A, B \subset P$, $A \subset B$, a $x \in P$. Dokažte, že potom platí $\text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(x, A)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $A \subset B$, platí

$$\{\varrho(x, y); y \in A\} \subset \{\varrho(x, y); y \in B\}.$$

Tudíž

$$\text{dist}(x, B) = \inf\{\varrho(x, y); y \in B\} \leq \inf\{\varrho(x, y); y \in A\} \leq \text{dist}(x, A).$$

Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

10.1.35. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. **Diametr prostoru** P definujeme předpisem

$$\text{diam } P = \sup\{\varrho(x, y); x, y \in P\},$$

pokud je P neprázdný, a klademe $\text{diam } \emptyset = 0$. **Diametrem množiny** A rozumíme diametr metrického prostoru (A, ϱ) .

10.1.36. Definice. Řekneme, že metrický prostor P je **omezený**, jestliže platí $\text{diam } P < \infty$. Řekneme, že podmnožina A prostoru P je **omezená**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) omezený.

10.1.37. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina P prázdná nebo jednobodová, pak platí $\text{diam } P = 0$. Jestliže má množina P alespoň dva různé body, pak z podmínky (a) v Definicí 10.1.1 plyne, že $\text{diam } P > 0$.

10.1.38. Příklad. Necht P je množina. Dokažte, že diskretní metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je omezený.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \leq 1$, a tedy $\text{diam } P \leq 1$. Tudíž je $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ omezený. ♣

10.1.39. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Necht $A \subset B \subset P$. Potom $\text{diam } A \leq \text{diam } B$.
- (b) Necht navíc $P \neq \emptyset$. Pak je množina $A \subset P$ omezená právě tehdy, když existují $r > 0$ a $x \in P$ taková, že $A \subset B(x, r)$.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z definice suprema a diametru a z inkluze

$$\{\varrho(x, y); x, y \in A\} \subset \{\varrho(x, y); x, y \in B\}.$$

- (b) Pokud je A omezená, pak stačí zvolit $x \in P$ libovolně a položit $r = \text{diam } P + 1$. Pokud platí $A \subset B(x, r)$ pro jistá $x \in P$ a $r > 0$, pak použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro libovolné $u, v \in A$ nerovnosti

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, x) + \varrho(x, v) \leq r + r = 2r.$$

Odtud plyne $\text{diam } A \leq 2r < \infty$. Množina A je tedy omezená. ♣

10.2. Konvergence v metrických prostorech

Konvergenci posloupností reálných čísel jsme se podrobně zabývali v Kapitole 2. Nyní pojem konvergence zobecníme pro posloupnosti prvků metrického prostoru. To nám umožní zkoumat konvergenci posloupností, jejichž členy jsou komplikovanější objekty než reálná čísla, například vektory, funkce, matice, množiny a další.

10.2.1. Definice. Necht' (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků P **konverguje** k prvku $x \in P$ v prostoru (P, ϱ) , jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ v (P, ϱ) . **Konvergentní posloupností** v (P, ϱ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (P, ϱ) .

10.2.2. Necht' $P = \mathbb{R}$. Pak výše uvedený pojem konvergence splývá s pojmem konvergence posloupnosti reálných čísel.

10.2.3. Definice. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru (P, ϱ) . Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **podposloupnost** posloupnosti $\{x_n\}$, případně **vybranou posloupností**, z posloupnosti $\{x_n\}$.

10.2.4. Věta (vlastnosti konvergence). Necht' (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P .

- (a) Pak má posloupnost $\{x_n\}$ v (P, ϱ) nejvýše jednu limitu.
- (b) Jestliže existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, potom je x limitou posloupnosti $\{x_n\}$.
- (c) Necht' $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $x \in P$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (P, ϱ) , pak x je také limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in P$, které jsou limitami posloupnosti $\{x_n\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a $\varrho(y, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_1$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom platí

$$0 \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_2}) + \varrho(x_{n_2}, y) < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$.

(b) Pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$, takže prvek x je limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

(c) Protože posloupnost reálných čísel $\{\varrho(x_{n_k}, x)\}$ je vybraná z posloupnosti $\{\varrho(x_n, x)\}$, plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti reálných čísel (Věta 2.2.32), že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_k}, x) = 0$, a tedy x je limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$. ■

10.2.5. Označení. Pokud je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní v metrickém prostoru (P, ϱ) , pak je podle Věty 10.2.4(a) její limita určena jednoznačně a budeme ji značit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nebo jen $\lim x_n$. Pokud $\lim x_n = x$, pak také píšeme $x_n \xrightarrow{\varrho} x$, $n \rightarrow \infty$, případně pouze $x_n \xrightarrow{\varrho} x$.

10.2.6. Příklad. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků neprázdné množiny P . Dokažte, že $\{x_n\}$ je konvergentní v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \geq n_0$.

Řešení. \Rightarrow Necht $x_n \rightarrow x$ pro nějaký prvek $x \in P$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < 1$. Z definice diskrétní metriky plyne, že pro každé takové n platí $x_n = x$.

\Leftarrow Tato implikace platí v každém metrickém prostoru, jak vyplývá z Věty 10.2.4(b). \clubsuit

V následujícím příkladu ukážeme, že konvergence ve vícerozměrném eukleidovském prostoru splývá s konvergencí „po složkách“. Souřadnice prvku $z \in \mathbb{R}^n$ budeme v následujícím příkladu i později označovat z_1, z_2, \dots, z_n .

10.2.7. Příklad. Necht $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z \mathbb{R}^n a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že potom platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = y$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = y_i$.

Řešení. \Rightarrow Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^m - y_i^m| \leq \varrho_2(x^m, y)$. Odtud plyne tvrzení.

\Leftarrow Předpokládejme, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = y_i$. Potom ze spojitosti odmocniny, věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) a Heineovy věty (Věta 4.2.16) dostáváme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho(x^m, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - y_i)^2} = 0,$$

a tedy $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = y$. \clubsuit

10.2.8. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\varrho_1(x, y) \leq \sqrt{n} \varrho_2(x, y) \leq n \varrho_{\infty}(x, y) \leq n \varrho_1(x, y). \quad (10.5)$$

Řešení. Z Cauchyovy nerovnosti (Věta 10.1.6) odvodíme, že

$$\begin{aligned} \varrho_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i - y_i| \\ &\leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)} \\ &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{n} \varrho_2(x, y). \end{aligned}$$

Dále odhadneme shora výrazy $|x_i - y_i|$, $i = 1, \dots, m$, jejich maximem a dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho_2(x, y) &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\})^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\} = \sqrt{n} \varrho_\infty(x, y). \end{aligned}$$

Nerovnost $\varrho_\infty(x, y) \leq \varrho_1(x, y)$ zřejmě platí. Dokazované tvrzení pak plyne z právě odvozených nerovností. ♣

10.2.9. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$, $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ je posloupnost prvků z \mathbb{R}^n a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že následující tři výroky jsou ekvivalentní.

- (i) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$.
- (ii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$.
- (iii) Platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$.

Řešení. (i) \Rightarrow (ii) Předpokládejme, že $x^m \xrightarrow{\varrho_1} y$. Potom $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_1(x^m, y) = 0$. Z (10.5) plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \leq \sqrt{n} \varrho_1(x^m, y)$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \geq 0$, vyplývá z věty o dvou strážnících, že také $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_2(x^m, y) = 0$, a tedy platí (ii).

(ii) \Rightarrow (iii) Předpokládejme nyní, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_2} y$. Pak opět z (10.5) dostaneme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_\infty(x^m, y) \leq \sqrt{n} \varrho_2(x^m, y)$, a tedy $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_\infty(x^m, y) = 0$. Tím je dokázáno tvrzení (iii).

(iii) \Rightarrow (i) Konečně předpokládáme-li, že platí $x^m \xrightarrow{\varrho_\infty} y$, pak tvrzení (i) vyplývá obdobným způsobem jako dříve z nerovnosti $\varrho_1(x^m, y) \leq n \varrho_\infty(x^m, y)$ platné pro každé $m \in \mathbb{N}$. ♣

10.3. Topologické pojmy v metrických prostorech

Termíny *topologie* a *topologický* budou vysvětleny v závěru příštího oddílu. Nejprve zavedeme dva důležité typy podmnožin metrických prostorů (uzavřené a otevřené množiny), tři množinové operace v metrických prostorech (vnitřek, hranice a uzávěr) a budeme zkoumat jejich vlastnosti. Užitečnost těchto pojmů se projeví v dalších oddílech a kapitolách.

Uzavřené a otevřené množiny.

10.3.1. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Řekneme, že množina M je **uzavřená** v (P, ϱ) , jestliže pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny M je limita této posloupnosti prvkem M .

10.3.2. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- (a) Dokažte, že $[a, b]$ je uzavřená množina v \mathbb{R} .

(b) Dokažte, že $(a, b]$ není uzavřená množina v \mathbb{R} .

Řešení. (a) Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků intervalu $[a, b]$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Podle Důsledku 2.4.23 platí $H(\{x_n\}) = \{x\}$. Podle Příkladu 2.4.19 tudíž platí $x \in [a, b]$. Tedy $[a, b]$ je uzavřená množina.

(b) Položme $x_n = a + \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{x_n\}$ posloupnost prvků intervalu $(a, b]$ splňující $x_n \rightarrow a$. Protože $a \notin (a, b]$, plyne odtud, že $(a, b]$ není uzavřená množina. ♣

10.3.3. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$ je konečná množina. Dokažte, že M je uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Předpokládejme, že $x \notin M$. Položme $d = \min\{\varrho(x, y); y \in M\}$. Protože M je konečná, platí $d > 0$. Dále zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_n, x) \geq d$. To je ale spor s tím, že $x_n \rightarrow x$. Odtud plyne, že $x \in M$, a tedy je množina M uzavřená. ♣

10.3.4. Příklad. Dokažte, že v diskretním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $M \subset P$, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M , $x \in P$ a platí $x_n \rightarrow x$. Podle Příkladu 10.2.6 existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $y \in P$ takové, že $x_n = y$ pro každé $n \geq n_0$. Odtud plyne $y \in M$. Z Věty 10.2.4(a) plyne $x_n \rightarrow y$, a tedy z Věty 10.2.4(b) vyplývá $x = y$. Tedy $x \in M$, takže M je uzavřená. ♣

10.3.5. Věta (vlastnosti uzavřených množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené množiny.
- Necht \mathcal{F} je neprázdný systém uzavřených množin. Potom je množina $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená.
- Necht $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny F_1, \dots, F_m jsou uzavřené. Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená.

Důkaz. (a) Prázdná množina neobsahuje žádnou posloupnost, takže implikace v definici uzavřené množiny je splněna. Uzavřenost množiny P je zřejmá.

(b) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcap \mathcal{F}$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Necht $F \in \mathcal{F}$. Potom je $\{x_n\}$ posloupnost prvků F . Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Protože F byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Tedy $\bigcap \mathcal{F}$ je uzavřená množina.

(c) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcup_{i=1}^m F_i$ splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Protože množin F_1, \dots, F_m je konečně mnoho, existuje $j \in \{1, \dots, m\}$ takové, že množina $\{n \in \mathbb{N}; x_n \in F_j\}$ je nekonečná. Existuje tedy podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$, jejíž prvky jsou v F_j . Podle Věty 10.2.4(c) platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Protože F_j je uzavřená množina, platí $x \in F_j$, a tedy tím spíše $x \in \bigcup_{i=1}^m F_i$. Odtud plyne, že $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina. ■

10.3.6. V tvrzení (c) Věty 10.3.5 je důležité, že systém množin, které sjednocujeme, je konečný. Bez tohoto předpokladu tvrzení neplatí. Uvažujme množiny $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$. Z Příkladu 10.3.2 tedy plyne, že každá z množin F_n je uzavřená, ale množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ není uzavřená.

10.3.7. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem** množiny M , jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M a označujeme symbolem $\text{Int } M$ podle latinského slova interior (vnitřek).

Řekneme, že množina M je **otevřená** v (P, ϱ) , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

10.3.8. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} je každý otevřený interval otevřená množina.

Řešení. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $x \in (a, b)$. Položme $r = \min\{x - a, b - x, 1\}$, potom zřejmě platí $B(x, r) = (x - r, x + r) \subset (a, b)$, a tedy x je vnitřním bodem (a, b) . Odtud plyne, že (a, b) je otevřená množina. ♣

10.3.9. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $r_0 > 0$. Dokažte, že potom je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina.

Řešení. Zvolme $x \in B(x_0, r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x_0, x)$. Potom $r > 0$. Pro každé $y \in B(x, r)$ navíc platí

$$\varrho(x_0, y) \leq \varrho(x_0, x) + \varrho(x, y) < \varrho(x_0, x) + r = r_0.$$

Tedy $y \in B(x_0, r_0)$. Odtud plyne $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$. Každý bod množiny $B(x_0, r_0)$ je tedy jejím vnitřním bodem, a proto je $B(x_0, r_0)$ otevřená množina. ♣

10.3.10. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} není interval $(0, 1]$ otevřenou množinou a že platí $\text{Int}(0, 1] = (0, 1)$.

Řešení. Necht $r > 0$. Potom $B(1, r) = (1 - r, 1 + r) \not\subset (0, 1]$, takže bod $x = 1$ není vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Interval $(0, 1]$ tedy není otevřenou množinou. Z Příkladu 10.3.8 vyplývá, že každý bod $x \in (0, 1)$ je vnitřním bodem intervalu $(0, 1)$, a tedy i vnitřním bodem intervalu $(0, 1]$. Odtud plyne, že $\text{Int}(0, 1] = (0, 1)$. ♣

10.3.11. Věta (vlastnosti otevřených množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- Prázdná množina a P jsou otevřené množiny v (P, ϱ) .
- Necht \mathcal{G} je systém otevřených množin v (P, ϱ) . Potom je množina $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená v (P, ϱ) .
- Necht $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny G_1, \dots, G_m jsou otevřené v (P, ϱ) . Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená v (P, ϱ) .

Důkaz. (a) Tvrzení plyne bezprostředně z definice otevřené množiny.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Potom existuje množina $G \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože G je otevřená množina, existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Odtud plyne, že $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

(c) Necht $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je množina G_i otevřená, tedy existuje $r_i > 0$ takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i; i \in \{1, \dots, m\}\}$. Potom zřejmě platí $B(x, r) \subset B(x, r_i)$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, a tedy $B(x, r) \subset G_i$, takže $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená. ■

10.3.12. V tvrzení Věty 10.3.11(c) je důležité, že počet množin, které pronikáme, je konečný. Pro nekonečný systém otevřených množin obdobné tvrzení neplatí, tj. průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřenou množinou. Příkladem je prostor \mathbb{R} , kde pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je G_n otevřená množina, ale $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1]$, což není otevřená množina, jak víme z Příkladu 10.3.10.

10.3.13. Věta (vztah otevřených a uzavřených množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom množina M je otevřená právě tehdy, když $P \setminus M$ je uzavřená.

Důkaz. \Rightarrow Necht M je otevřená množina, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P \setminus M$, $x \in P$ a platí $x_n \rightarrow x$. Předpokládejme, že $x \in M$. Potom díky otevřenosti M existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x_{n_0}, x) < r$. Potom $x_{n_0} \in (P \setminus M) \cap B(x, r)$, což je spor. Tedy $x \notin M$. To znamená, že $x \in P \setminus M$, a tedy $P \setminus M$ je uzavřená množina.

\Leftarrow Předpokládejme, že M není otevřená množina. Pak existuje $x \in M$ takové, že pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Speciálně pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze nalézt $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M)$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak leží celá v množině $P \setminus M$ a zřejmě splňuje $x_n \rightarrow x$. Protože $x \notin P \setminus M$, plyne odtud, že $P \setminus M$ není uzavřená. ■

10.3.14. Příklad. Dokažte, že v diskretním metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je každá množina uzavřená.

Řešení. Předpokládejme, že $M \subset P$. Z Příkladu 10.3.4 vyplývá, že M je uzavřená v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$. Ze stejného příkladu ale vyplývá, že také množina $P \setminus M$ je uzavřená. Podle Věty 10.3.13 je tedy množina M otevřená. ♣

10.3.15. Věta (charakterisace vnitřku). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\text{Int } M$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v M .

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in \text{Int } M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Dokážeme, že $B(x, r) \subset \text{Int } M$. Zvolme $y \in B(x, r)$. Označme $s = r - \varrho(x, y)$. Potom $s > 0$. Dále platí $B(y, s) \subset B(x, r)$, neboť pro každé $z \in B(y, s)$ máme

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \varrho(x, y) + s = r.$$

Tedy $B(y, s) \subset M$, takže $y \in \text{Int } M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset \text{Int } M$, a tedy $\text{Int } M$ je otevřená.

Nyní dokážeme, že $\text{Int } M$ je největší otevřená množina obsažená v M . Necht $G \subset M$ je otevřená množina. Potom pro každé $x \in G$ nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Platí tedy také, že $B(x, r) \subset M$. To znamená, že x je vnitřním bodem množiny M , a tedy $x \in \text{Int } M$. Platí tudíž $G \subset \text{Int } M$. ■

10.3.16. Věta. Necht (P, ρ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom

$$\text{Int } M = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset M\}.$$

Důkaz. Označme

$$G = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset M\}.$$

Předpokládejme nejprve, že $x \in \text{Int } M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Odtud plyne, že $B(x, r) \subset G$, a tedy speciálně $x \in G$. Tím je dokázána inkluze $\text{Int } M \subset G$.

Nyní předpokládejme, že $y \in G$. Pak existují $x \in P$ a $r > 0$ taková, že $B(x, r) \subset M$ a $y \in B(x, r)$. Podle Příkladu 10.3.9 je množina $B(x, r)$ otevřená, a tedy podle Věty 10.3.15 $B(x, r) \subset \text{Int } M$. Tím je dokázána inkluze $G \subset \text{Int } M$, a tedy množinová rovnost $G = \text{Int } M$. ■

10.3.17. Věta (otevřené podmnožiny \mathbb{R}). Množina $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když G je spočetným disjunktivním sjednocením otevřených intervalů.

Důkaz. \Rightarrow Je-li G prázdná, pak tvrzení platí, neboť stačí uvažovat prázdný systém intervalů. Předpokládejme nyní, že $G \neq \emptyset$. Necht $y \in G$. Potom definujeme prvky $a_y, b_y \in \mathbb{R}^*$ předpisem

$$a_y = \inf\{x \in \mathbb{R}; [x, y] \subset G\}, \quad b_y = \sup\{z \in \mathbb{R}; [y, z] \subset G\}.$$

Dokážeme, že $a_y, b_y \notin G$. Jestliže $a_y = -\infty$, pak zřejmě $a_y \notin G$. Předpokládejme tedy, že $a_y \in \mathbb{R}$ a navíc $a_y \in G$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(a_y, r) \subset G$, tedy $(a_y - r, a_y + r) \subset G$. Pro libovolné $s \in (0, r)$ pak platí $[a_y - s, y] \subset G$, to je ale spor s definicí a_y . Odtud vyplývá, že $a_y \notin G$. Obdobně lze dokázat, že $b_y \notin G$. Povšimněme si, že $a_y < y < b_y$.

Dále dokážeme, že $(a_y, b_y) \subset G$. Předpokládejme, že $z \in (a_y, b_y)$. Potom buď $z \in (a_y, y]$ nebo $z \in [y, b_y)$. V prvním případě existuje podle definice a_y prvek $x \in (a_y, z)$ takový, že $[x, y] \subset G$. Odtud plyne $z \in G$. Ve druhém případě lze odvodit platnost $z \in G$ obdobně.

Položme $\mathcal{J} = \{(a_y, b_y); y \in G\}$. Potom platí $\bigcup \mathcal{J} \subset G$. Opačná inkluze $G \subset \bigcup \mathcal{J}$ je zřejmá, neboť pro každé $y \in G$ platí $y \in (a_y, b_y) \in \mathcal{J}$. Tedy $G = \bigcup \mathcal{J}$.

Necht $y, z \in G$. Dokážeme, že potom buď $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$ nebo $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Předpokládejme, že $(a_y, b_y) \neq (a_z, b_z)$. Jestliže $a_y = a_z$, potom $b_y \neq b_z$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_y > b_z$. Potom ale $b_z \in (a_y, b_y)$, a tedy $b_z \in G$, což je spor. Jestliže $a_y \neq a_z$, potom bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_y < a_z$. Protože $a_z \notin G$, platí $a_z \notin (a_y, b_y)$. Takže

$b_y \leq a_z$, a tedy $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Systém \mathcal{J} je tedy disjunktní. Z Příkladu 1.6.21 pak plyne, že systém \mathcal{J} je spočetný.

← Tato implikace plyne z Příkladu 10.3.8 a Věty 10.3.11(b). ■

10.3.18. Příklad. Necht P je množina a $M \subset P$. Dokažte, že v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ platí $\partial M = \emptyset$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in P$. Potom pro $r \in (0, 1]$ podle Příkladu 10.1.31 platí $B(x, r) = \{x\}$. Jestliže $x \in M$, pak $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Je-li naopak $x \in P \setminus M$, pak $B(x, r) \cap M = \emptyset$. V obou případech x není hraničním bodem M . Vzhledem k tomu, že x bylo zvoleno libovolně, je $\partial M = \emptyset$. ♣

10.3.19. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Označme $\overline{M} = M \cup \partial M$. Potom množinu \overline{M} nazýváme **uzávěrem** množiny M v prostoru (P, ϱ) .

10.3.20. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom zřejmě platí $M \subset \overline{M}$.

10.3.21. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je uzavřená právě tehdy, když $\partial M \subset M$, neboli $M = \overline{M}$.

Důkaz. ⇒ Předpokládejme, že M je uzavřená množina a $x \in \partial M$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$. Pak zřejmě platí $x_n \rightarrow x$. Z uzavřenosti M pak plyne, že $x \in M$.

← Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \rightarrow x$, kde $x \in P$. Jestliže $x \in \partial M$, potom dle předpokladu platí $x \in M$. Předpokládejme, že $x \notin \partial M$. Potom z definice hraničního bodu vyplývá, že existuje $r > 0$ takové, že buď $B(x, r) \cap M = \emptyset$ nebo $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. První možnost nemůže nastat, protože $x_n \rightarrow x$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in M$. Tudíž platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Speciálně tedy $x \in M$. Odtud plyne, že M je uzavřená. Tím je tvrzení dokázáno. ■

10.3.22. Příklad. Dokažte, že platí $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

Řešení. Podle Příkladu 10.3.32 platí $\partial(0, 1) = \{0, 1\}$. Odtud plyne, že $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$. ♣

10.3.23. Příklad. Dokažte, že množina \mathbb{Q} není otevřená ani uzavřená v \mathbb{R} a platí $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$ a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 10.3.33 víme, že $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, takže $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}}$, a tedy množina \mathbb{Q} není uzavřená v \mathbb{R} .

Necht $x \in \mathbb{Q}$ a $r > 0$. Potom podle Věty 1.5.29 existuje $y \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Tedy $B(x, r)$ není podmnožinou \mathbb{Q} , takže x není vnitřním bodem množiny \mathbb{Q} . Žádný bod \mathbb{Q} tedy není vnitřním bodem množiny \mathbb{Q} , a tedy \mathbb{Q} není otevřená v \mathbb{R} a $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$. ♣

10.3.24. Věta (vlastnosti uzávěru). Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí:

$$(a) \overline{\emptyset} = \emptyset \text{ a } \overline{P} = P,$$

- (b) jestliže $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$,
- (c) $\overline{A} = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}$,
- (d) množina \overline{A} je uzavřená,
- (e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- (f) $\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}$,
- (g) \overline{A} je nejmenší (vzhledem k inkluzi) uzavřená množina obsahující A .

Důkaz. (a) Zřejmě platí $\partial\emptyset = \emptyset$ a $\partial P = \emptyset$. Tvrzení pak okamžitě plynou z definice uzávěru.

(b) Předpokládejme, že $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in B$, pak $x \in \overline{B}$. Jestliže $x \in \overline{A} \setminus B$, potom speciálně $x \in \overline{A} \setminus A$, a tedy $x \in \partial A$. Zvolme $r > 0$. Potom $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$, neboť $A \subset B$. Z toho, že $x \notin B$, dále zřejmě plyne, že $B(x, r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset$. Tedy $x \in \partial B$. Protože $\partial B \subset \overline{B}$, dostáváme $x \in \overline{B}$.

(c) Označme

$$M = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}.$$

Předpokládejme, že $y \in P \setminus M$. Potom $\text{dist}(y, A) > 0$. Tedy existuje $r > 0$ takové, že $B(y, r) \cap A = \emptyset$. Necht' $a \in A$ a $z \in B(y, \frac{r}{2})$. Potom

$$\varrho(z, a) \geq \varrho(y, a) - \varrho(z, y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Tedy $B(y, \frac{r}{2}) \subset P \setminus M$, takže $P \setminus M$ je otevřená množina. Podle Věty 10.3.13 je množina M uzavřená. Zřejmě platí $A \subset M$, a tedy podle (b) také $\overline{A} \subset \overline{M}$. Protože M je uzavřená, máme podle Věty 10.3.21 $\overline{M} = M$, a tedy $\overline{A} \subset M$.

Dokážeme nyní opačnou inkluzi. Necht' $x \in P \setminus \overline{A}$. Pak $x \notin \partial A$. Poněvadž $x \in P \setminus A$, musí podle definice hranice existovat $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Pak platí $\text{dist}(x, A) \geq r > 0$, a tedy $x \notin M$. Tím je inkluze $M \subset \overline{A}$ dokázána.

(d) Z tvrzení (c) víme, že $\overline{A} = \{x \in P; \text{dist}(x, A) = 0\}$, přičemž v důkazu tvrzení (c) jsme ověřili, že množina na pravé straně rovnosti je uzavřená.

(e) Protože $A \subset A \cup B$, plyne z (b), že $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Obdobně dostaneme $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, a tedy $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Víme, že $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, a tedy podle (b) platí $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Podle (d) a Věty 10.3.5(c) je $\overline{A} \cup \overline{B}$ uzavřená množina, tedy $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Odtud plyne, že $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(f) Pokud $A = \emptyset$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $x, y \in \overline{A}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (d) existují $x', y' \in A$ takové, že $\varrho(x, x') < \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \varepsilon$. Potom

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 2\varepsilon + \text{diam } A.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\text{diam } \overline{A} \leq \text{diam } A$. Opačná nerovnost plyne z 10.3.20 a Příkladu 10.1.39(a).

(g) Předpokládejme, že F je uzavřená množina splňující $A \subset F$. Podle tvrzení (b) potom platí $\overline{A} \subset \overline{F}$. Protože F je uzavřená množina, platí $\overline{F} = F$, takže $\overline{A} \subset F$. Podle tvrzení (d) je množina \overline{A} uzavřená a navíc zřejmě platí $A \subset \overline{A}$. ■

10.3.25. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$, $0 < r < s$. Potom $\overline{B(x, r)} \subset B(x, s)$.

Řešení. Předpokládejme, že $y \in \overline{B(x, r)}$. Potom podle Věty 10.3.24(c) existuje $z \in B(x, r)$ splňující $\varrho(z, y) < s - r$. Potom máme $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < r + r - s$. Platí tedy $y \in B(y, s)$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

10.3.26 (relativita topologických pojmů). Vlastnosti, které v teorii metrických prostorů vypovídáme o množinách (např. otevřenost, uzavřenost), závisí na metrickém prostoru, vzhledem ke kterému tyto vlastnosti uvažujeme. Máme-li například metrický prostor (P, ϱ) a $A \subset Q \subset P$, pak je třeba brát v potaz, zda tvrzení o množině A vztahujeme k metrickému prostoru (P, ϱ) nebo (Q, ϱ) . Pokud hrozí nedorozumění, pak je třeba uvést, v kterém metrickém prostoru pracujeme. Například je-li (P, ϱ) metrický prostor a $A \subset P$, pak uzávěr množiny A v prostoru (P, ϱ) můžeme pro upřesnění označit $\overline{A}^{(P, \varrho)}$ nebo jen \overline{A}^P .

Věta 10.3.27 ukazuje vztah mezi uzávěrem množiny A v prostoru (P, ϱ) a v prostoru (Q, ϱ) . Vztah otevřených (respektive uzavřených) množin v (P, ϱ) a otevřených (respektive uzavřených) množin v (Q, ϱ) je zachycen ve Větě 10.3.28.

10.3.27. Věta (relativní uzávěr). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset Q \subset P$. Potom platí $\overline{A}^Q = \overline{A}^P \cap Q (= \overline{A} \cap Q)$.

Důkaz. Inkluze \subset . Předpokládejme, že $x \in \overline{A}^Q$. Potom $x \in Q$ a $\text{dist}_{(Q, \varrho)}(x, A) = 0$. Poněvadž $\text{dist}_{(Q, \varrho)}(x, A) = \text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A)$, máme $\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = 0$. Potom tedy platí $x \in \overline{A} \cap Q$.

Inkluze \supset . Předpokládejme, že $x \in \overline{A} \cap Q$. Bod x je prvkem Q , a tedy platí $\text{dist}_{(Q, \varrho)}(x, A) = \text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A)$. Poněvadž $x \in \overline{A}$, máme $\text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = \text{dist}_{(P, \varrho)}(x, A) = 0$, a tedy $x \in \overline{A}^Q$. ■

10.3.28. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset Q \subset P$. Potom A je otevřená (respektive uzavřená) v (Q, ϱ) právě tehdy, když existuje množina $B \subset P$ otevřená (respektive uzavřená) v (P, ϱ) splňující $A = B \cap Q$.

Důkaz. Příklad otevřených množin. \Rightarrow Necht A je otevřená množina v prostoru (Q, ϱ) . Podle Věty 10.3.16 je

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r); x \in Q, r > 0, B_Q(x, r) \subset A\},$$

kde $B_Q(x, r) = \{y \in Q; \varrho(x, y) < r\}$, neboli $B_Q(x, r)$ je koule o středu x a polooměru r v prostoru (Q, ϱ) . Označme

$$B = \bigcup \{B(x, r); x \in Q, r > 0, B_Q(x, r) \subset A\}.$$

Podle Věty 10.3.11(b) je B otevřená množina v prostoru (P, ϱ) . Navíc zřejmě platí $A = B \cap Q$.

⇐ Předpokládejme, že B je otevřená množina v (P, ϱ) splňující $A = B \cap Q$. Podle Věty 10.3.16 je

$$B = \bigcup \{B(x, r); x \in P, r > 0, B(x, r) \subset B\}.$$

Potom platí

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r); x \in Q, r > 0, B(x, r) \subset B\},$$

tedy

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r); x \in Q, r > 0, B_Q(x, r) \subset A\}.$$

Tedy opět podle Věty 10.3.11(b) je množina A otevřená v prostoru (Q, ϱ) . Tím je dokázáno tvrzení věty pro případ, kdy množina A je otevřená.

Případ uzavřených množin. ⇒ Předpokládejme, že $A \subset Q$ je uzavřená v (Q, ϱ) . Potom je množina $Q \setminus A$ otevřená v (Q, ϱ) (Věta 10.3.13). Podle již dokázaného tvrzení existuje otevřená množina H v (P, ϱ) splňující $H \cap Q = Q \setminus A$. Položíme $B = P \setminus H$. Pak je množina B uzavřená v (P, ϱ) podle Věty 10.3.13 a splňuje

$$B \cap Q = (P \setminus H) \cap Q = Q \setminus H = Q \setminus (Q \setminus A) = A,$$

čímž je tato implikace dokázána.

⇐ Nyní předpokládejme, že pro množinu $A \subset Q$ existuje $B \subset P$, která je uzavřená v (P, ϱ) a $A = B \cap Q$. Potom je množina $P \setminus B$ otevřená v (P, ϱ) a $Q \setminus A = (P \setminus B) \cap Q$. Podle již dokázaného tedy máme, že množina $Q \setminus A$ je otevřená v (Q, ϱ) . Podle Věty 10.3.13 je tak A uzavřená v (Q, ϱ) . ■

10.3.29. Příklad. Dokažte, že interval $[0, 1]$ je otevřenou množinou v prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ se zděděnou eukleidovskou metrikou v prostoru \mathbb{R} .

Řešení. Označme $P = \mathbb{R}$, $Q = [0, 1] \cup (2, 3)$, $A = [0, 1]$ a $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Potom je B otevřená v P a $A = B \cap Q$. Podle Věty 10.3.28 je pak A otevřená v Q . ♣

Hranice a uzávěr množiny. Pojem hranice geometrického objektu v rovině či prostoru jsme zvyklí běžně používat intuitivním způsobem. V následující definici zavedeme tento pojem přesně v libovolném metrickém prostoru.

10.3.30. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M , jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme ji ∂M .

10.3.31. Hraniční bod množiny v metrickém prostoru může a nemusí být prvkem této množiny. Přímo z definice vyplývá, že hranice libovolné množiny M v metrickém prostoru (P, ϱ) je rovna hranici množiny $P \setminus M$.

10.3.32. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} je hranicí intervalu $(0, 1)$ množina $\{0, 1\}$.

Řešení. Označme $M = (0, 1)$. Necht $r > 0$. Potom $B(0, r) = (-r, r)$, a tedy $B(0, r) \cap M = (0, \min\{r, 1\}) \neq \emptyset$ a $B(0, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = (-r, 0] \neq \emptyset$. Odtud plyne, že $0 \in \partial M$. Podobně lze dokázat, že $1 \in \partial M$.

Je-li $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap M = \emptyset$, a tedy $x \notin \partial M$. Je-li $x \in (0, 1)$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = \emptyset$, a tedy opět $x \notin \partial M$. Odtud již vyplývá platnost dokazovaného tvrzení. ♣

10.3.33. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru \mathbb{R} platí $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ a $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Podle Věty 1.5.29 existují $y \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{R}$ splňující $y \in B(x, r) \cap \mathbb{Q}$ a $z \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Odtud plyne, že $x \in \partial\mathbb{Q}$ a také $x \in \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. ♣

Husté množiny.

10.3.34. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **hustá** v (P, ϱ) , jestliže $\overline{A} = P$.

10.3.35. Bude užitečné si uvědomit, že množina $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každé $x \in P$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A splňující $\lim x_n = x$.

10.3.36. Příklad. Dokažte, že \mathbb{Q} a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v \mathbb{R} .

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom podle Věty 1.5.29 existuje racionální číslo $q \in B(x, \varepsilon)$. To znamená, že $\text{dist}(x, \mathbb{Q}) < \varepsilon$. Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme $\text{dist}(x, \mathbb{Q}) = 0$, a tedy $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Máme tak $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Hustotu $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ v \mathbb{R} lze dokázat obdobně, jenom Větu 1.5.29 nahradíme výsledkem z Příkladu 1.8.23. ♣

10.3.37. Lze ukázat, že množina všech polynomů na $[a, b]$, kde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, je hustá v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. Důkaz tohoto zajímavého tvrzení uvedeme až v Kapitole 12 (Věta 12.2.6).

10.3.38. Příklad. Necht P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že A je hustá v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když $A = P$.

Řešení. Pokud $A = P$, pak je A zřejmě hustá v P . Pokud $\overline{A} = P$, pak pro libovolné $x \in P$ platí $\text{dist}(x, A) = 0$. Existuje tedy $y \in A$ takové, že $\varrho_{\text{diskr}}(x, y) < 1$. Potom ale nutně $x = y$ a máme tak $x \in A$. Dokázali jsme tedy, že $A = P$. ♣

10.3.39. Věta (charakterizace hustých množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Množina $A \subset P$ je hustá v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu G v P platí $G \cap A \neq \emptyset$.

Důkaz. \Rightarrow Necht $G \subset P$ je neprázdna a otevřená v P . Potom existuje $x \in P$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Poněvadž $\overline{A} = P$ platí podle Věty 10.3.24(c), že $\text{dist}(x, A) = 0$. Potom tedy platí $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $G \cap A \neq \emptyset$.

\Leftarrow Předpokládejme, že $x \in P$. Potom je pro každé $r > 0$ množina $B(x, r)$ neprázdna a otevřená. Platí tedy $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. To znamená, že $\text{dist}(x, A) < r$,

a tedy musí být $\text{dist}(x, A) = 0$. Platí tedy $x \in \overline{A}$ (Věta 10.3.24(c)). Odvodili jsme $P = \overline{A}$, takže A je hustá v P . ■

10.3.40. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ je hustá a $G \subset P$. Množina $A \cap G$ nemusí být hustá v G , neboť $A \cap G$ může být prázdná a G neprázdná. Pokud ale G je navíc otevřená v P , pak je již $G \cap A$ hustá v G . Odvození není těžké. Zvolme otevřenou neprázdnou množinu $H \subset G$ v G . Podle Věty 10.3.28 existuje množina \tilde{H} , která je otevřená v P a splňuje $H = \tilde{H} \cap G$. Vzhledem k otevřenosti množin \tilde{H} a G v P je H otevřená v P . Pak platí $A \cap H = A \cap G \cap H \neq \emptyset$ podle Věty 10.3.39, neboť A je hustá v P . Podle téže věty je pak $A \cap G$ hustá v G .

Řídké množiny.

10.3.41. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **řídká** v (P, ϱ) , jestliže je množina $P \setminus \overline{A}$ hustá v P .

10.3.42. Příklad. Dokažte následující tvrzení.

- Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom je jednobodová množina $\{x\}$ řídká v \mathbb{R} .
- Množina přirozených čísel \mathbb{N} je řídká v \mathbb{R} .
- Množina racionálních čísel \mathbb{Q} není řídká v \mathbb{R} .

Řešení. (a) Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Nalezneme $y \in G$ a $r > 0$ takové, že $(y - r, y + r) \subset G$. Zřejmě platí $(y - r, y + r) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, a proto $G \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Podle Věty 10.3.39 je $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ hustá. Poněvadž $\mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathbb{R} \setminus \overline{\{x\}}$ podle Příkladu 10.3.3 dostáváme, že množina $\{x\}$ je řídká.

(b) Množina \mathbb{N} je uzavřená v \mathbb{R} , protože platí

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n + 1)$$

a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je tedy otevřená v \mathbb{R} podle Věty 10.3.17. Stačí tedy dokázat, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je hustá. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Potom G obsahuje neprázdný otevřený interval, a je tedy podle 3.8.10 nespočetná. Odtud plyne $G \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = G \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$. Podle Věty 10.3.39 je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hustá, což implikuje řídkost množiny \mathbb{N} .

(c) Podle Příkladu 10.3.36 je $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$, takže \mathbb{Q} není řídká v \mathbb{R} . ♣

10.3.43. Příklad. Necht P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že množina A je řídká v metrickém prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když je prázdná.

Řešení. \Rightarrow Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá, a tedy $P \setminus \overline{A} = P$ podle Příkladu 10.3.38. Máme tedy $\overline{A} = \emptyset$, takže $A = \emptyset$.

\Leftarrow Tato implikace je zřejmá a platí v jakémkoli metrickém prostoru. ♣

10.3.44. Věta (charakterizace řídkých množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Množina A je řídká v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje neprázdná otevřená množina $H \subset G$ taková, že $H \cap A = \emptyset$.

Důkaz. \Rightarrow Necht $G \subset P$ je otevřená neprázdná množina. Pak položíme $H = G \cap (P \setminus \bar{A})$. Potom je H otevřená, neboť je průnikem dvou otevřených množin. Zřejmě platí $H \subset G$. Množina H je navíc neprázdná, neboť množina $P \setminus \bar{A}$ je hustá a podle Věty 10.3.39 má tedy s G neprázdny průnik. Navíc přímo z definice množiny H plyne $H \cap A = \emptyset$.

\Leftarrow Necht $G \subset P$ je neprázdná otevřená množina v P . Podle předpokladu existuje neprázdná množina $H \subset G$ splňující $H \cap A = \emptyset$. Podle Věty 10.3.24(g) platí $H \cap \bar{A} = \emptyset$, takže $H \subset P \setminus \bar{A}$. Tedy $G \cap (P \setminus \bar{A}) \neq \emptyset$. Podle Věty 10.3.39 je tudíž množina $P \setminus \bar{A}$ hustá v P , což znamená, že A je řídká. ■

10.3.45. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme

$$A = \{f \in \mathcal{C}([a, b]); \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq 1\}.$$

Dokažte, že

- (a) A je řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$,
- (b) A není řídká v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$.

Řešení. (a) Nejprve dokážeme, že A je uzavřená v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. Necht $g \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že $|g(c)| > 1$. Předpokládejme, že $c \neq b$. Ze spojitosti funkce g pak plyne, že existuje $d \in (c, b)$ takové, že pro každé $x \in (c, d)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$. Potom pro každou funkci $f \in A$ a pro každé $x \in (c, d)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\geq \left| |f(x)| - |g(x)| \right| = |g(x)| - |f(x)| \\ &\geq \frac{|g(c)| + 1}{2} - 1 = \frac{|g(c)| - 1}{2}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geq \int_c^d |f(x) - g(x)| dx \\ &\geq \int_c^d \frac{|g(c)| - 1}{2} dx = (d - c) \frac{|g(c)| - 1}{2}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\varrho_{\text{int}}(g, A) \geq (d - c) \frac{|g(c)| - 1}{2} > 0$, a tedy podle Věty 10.3.24(c) platí $g \notin \bar{A}$. Z toho plyne, že $\bar{A} = A$, a tedy A je uzavřená v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. V případě, že $c = b$, nalezneme $d \in (a, c)$ takové, že pro každé $x \in (d, c)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$ a dále postupujeme obdobně, přičemž místo intervalu (c, d) pracujeme s intervalem (d, c) .

Díky uzavřenosti A platí $\bar{A} = A$, a proto $\mathcal{C}([a, b]) \setminus \bar{A} = \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$. K důkazu řídkosti množiny A v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ tedy stačí dokázat, že

$$\overline{\mathcal{C}([a, b]) \setminus A} = \mathcal{C}([a, b]).$$

Zvolme $h \in \mathcal{C}([a, b])$. Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{n_0} < b - a$. Pro $n \geq n_0$ položme

$$h_n(x) = \begin{cases} n(h(a + \frac{1}{n}) - 2) \cdot (x - a) + 2, & \text{pro } x \in [a, a + \frac{1}{n}), \\ h(x), & \text{pro } x \in (a + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Potom $h_n \in \mathcal{C}([a, b]) \setminus A$, neboť h_n je zřejmě spojitá na $[a, b]$ a $h_n(a) = 2$. Označme $M = \sup_{[a, b]} |h|$. Vzhledem ke spojitosti funkce h je M konečné číslo. Pak platí

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) &= \int_a^b |h_n(x) - h(x)| \, dx \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (|h_n(x)| + |h(x)|) \, dx \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (n(|h(a + \frac{1}{n})| + 2) \cdot \frac{1}{n} + 2 + M) \, dx \\ &\leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} (2M + 4) \, dx = \frac{2M + 4}{n}. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M+4}{n} = 0$, plyne odtud, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) = 0$, a tedy $h_n \xrightarrow{\varrho_{\text{int}}} h$. To znamená, že $h \in \overline{\mathcal{C}([a, b]) \setminus A}$, a tedy $\mathcal{C}([a, b]) \setminus A$ je hustá v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$, takže A je v tomto prostoru řídká.

(b) Označme f nulovou funkci na intervalu $[a, b]$. Potom otevřená koule $B(f, 1)$ tvoří otevřenou neprázdnou množinu v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$, která je obsažena v A . Podle Věty 10.3.44 pak A není řídká v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. \clubsuit

10.3.46. Věta (vlastnosti řídkých množin). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$.

- Je-li A řídká v P a $B \subset A$, pak také B je řídká v P .
- Jsou-li množiny A a B řídké v P , pak také $A \cup B$ je řídká v P .
- Množina A je řídká v P právě tehdy, když \overline{A} je řídká v P .

Důkaz. (a) Podle Věty 10.3.24(b) platí $\overline{B} \subset \overline{A}$, a tedy $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B}$. Množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá, a tedy podle Věty 10.3.39 je hustá i množina $P \setminus \overline{B}$. To znamená, že množina B je řídká v P .

(b) Podle Věty 10.3.24(e) a De Morganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B}). \quad (10.6)$$

Protože množiny A a B jsou řídké v (P, ϱ) , jsou obě množiny $P \setminus \overline{A}$ a $P \setminus \overline{B}$ v tomto prostoru husté. Navíc jsou podle Věty 10.3.13 obě otevřené. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$. Potom je množina $G \cap (P \setminus \overline{A})$ otevřená a díky hustotě $P \setminus \overline{A}$ je také neprázdná. Množina $P \setminus \overline{B}$ je hustá, a proto je množina $G \cap (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ neprázdná. Množina $(P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ je tedy hustá. Z (10.6) plyne, že množina $P \setminus \overline{A \cup B}$ je hustá v P , a tedy $A \cup B$ je řídká v P .

(c) Z Věty 10.3.24(d) vyplývá, že $P \setminus \overline{\overline{A}} = P \setminus \overline{A}$. Odtud již tvrzení snadno plyne. \blacksquare

10.3.47. Věta. Necht (P, ρ) je metrický prostor a $G \subset P$ je otevřená hustá množina v P . Potom je množina $P \setminus G$ řídká v P .

Důkaz. Podle Věty 10.3.13 je množina $P \setminus G$ uzavřená v P , a tedy $\overline{P \setminus G} = P \setminus G$. Protože G je hustá v P , dostáváme

$$\overline{P \setminus \overline{P \setminus G}} = \overline{P \setminus (P \setminus G)} = \overline{G} = P.$$

Množina $P \setminus G$ je tedy řídká v P . ■

Hromadné body.

10.3.48. Definice. Necht (P, ρ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem množiny** M , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$M \cap (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M' . Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M , jestliže $a \in M \setminus M'$.

10.3.49. Příklad. Uvažujte metrický prostor \mathbb{R} a množinu $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dokažte, že $M' = [0, 1]$.

Řešení. Zvolme $x \in [0, 1]$ a $r > 0$. Pak není těžké si rozmyslet, že platí

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset.$$

Odtud plyne inkluze $[0, 1] \subset M'$.

Nyní zvolme $x \notin [0, 1]$. Položme $r = \min\{|x|, |x - 1|\}$. Potom $r > 0$ a zřejmě platí $B(x, r) \cap M = \emptyset$. Odtud plyne inkluze $[0, 1] \subset M'$, a tedy celkem $M' \subset [0, 1]$. ♣

10.3.50. Příklad. Necht $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = \{0\}$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Položme $y = \frac{1}{n}$. Potom $y \neq 0$ a $y \in B(0, \varepsilon) \cap M$. Tedy $0 \in M'$.

Nyní zvolme $x \neq 0$. Položme

$$\varepsilon = \begin{cases} |x|, & \text{je-li } x \in (-\infty, 0), \\ \min\{|x - \frac{1}{n}|, |x - \frac{1}{n+1}|\}, & \text{je-li } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \\ |x - 1|, & \text{je-li } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Ve všech případech potom platí $\varepsilon > 0$ a $B(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$. Tedy $x \notin M'$. Odtud plyne, že $M' = \{0\}$. ♣

10.3.51. Příklad. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a $M = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = H(\{a_n\})$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in H(\{a_n\})$ a $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$. Z toho, že posloupnost $\{a_n\}$ je prostá, plyne, že existuje $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, takové, že $a_{n_k} \neq x$. Pak $a_{n_k} \in (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M$. Odtud plyne $x \in M'$. Tím je dokázaná inkluze $H(\{a_n\}) \subset M'$.

Nyní předpokládejme, že $x \in M'$. Budeme konstruovat vybranou posloupnost s limitou rovnou x . Podle definice hromadného bodu pro každé $\varepsilon > 0$ platí $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$. Lze tedy nalézt $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(x, 1) \setminus \{x\}$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ již máme určena přirozená čísla $n_1 < \dots < n_k$ splňující $a_{n_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \setminus \{x\}$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$. Množina $A = \{a_j; j \leq n_k\}$ je konečná, a proto existuje $\varepsilon \in (0, \frac{1}{k+1})$ takové, že $A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pak lze nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_{k+1}} \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$. Díky volbě ε máme $n_{k+1} > n_k$. Podle principu matematické indukce dostaneme touto konstrukcí rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, pro kterou navíc zřejmě platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Odtud plyne, že $x \in H(\{a_n\})$, a tedy $M' \subset H(\{a_n\})$. Tím je rovnost $M' = H(\{a_n\})$ dokázána. ♣

10.3.52. Příklad. Necht $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že $P' = \emptyset$.

Řešení. Pro každé $x \in P$ zřejmě platí $B(x, 1) = \{x\}$, a tedy $B(x, 1) \setminus \{x\} = \emptyset$. Tudíž $x \notin P'$. Protože x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $P' = \emptyset$. ♣

10.4. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

V Kapitole 4 jsme definovali pojmy limita a spojitost reálné funkce. V tomto oddílu zavedeme tyto pojmy i pro zobrazení mezi metrickými prostory.

Spojitost zobrazení.

10.4.1. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že zobrazení f je

(a) **spojité v bodě a vzhledem k množině M** , jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon), \quad (10.7)$$

(b) **spojité v bodě a** , jestliže je spojitě v a vzhledem k P ,

(c) **spojité na množině M** , jestliže je spojitě v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M ,

(d) **spojité**, jestliže je spojitě na P .

10.4.2 (komentář k Definici 10.4.1). (a) Pokud je zobrazení f spojitě v bodě a vzhledem k M , pak existuje $\eta > 0$ takové, že $B(a, \eta) \cap M \subset \mathcal{D}(f)$.

(b) Výrok (10.7) můžeme ekvivalentně zapsat takto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\rho(a, \delta) \cap M : f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

(c) Spojitost zobrazení f z P do Q závisí nejenom na tom, jak je f definováno, ale také na tom, jaké metriky uvažujeme na množinách P a Q .

(d) Je-li $P = Q = \mathbb{R}$, pak výše uvedená definice spojitosti souhlasí s definicí spojitosti reálné funkce jedné reálné proměnné.

10.4.3. Příklad. Necht $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, a $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem $\pi_i(x) = x_i$. Dokažte, že π_i je spojitý.

Řešení. Zvolme $a \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |\pi_i(x) - \pi_i(a)| &= |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \\ &= \rho_2(x, a) < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy π_i je spojitý v a . Bod $a \in \mathbb{R}^n$ byl zvolen libovolně, a proto je π_i spojitý na \mathbb{R}^n . ♣

10.4.4. Příklad. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Dokažte, že $x \mapsto \|x\|$ je spojitý zobrazení z X do \mathbb{R} .

Řešení. Podle vlastností z Definice 10.1.18 platí pro každé $x, y \in X$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{a} \quad \|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|. \quad (10.8)$$

Díky (10.8) platí pro každé $x, y \in X$

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|. \quad (10.9)$$

Nyní zvolme $x_0 \in X$. Ověříme definici spojitosti v bodě x_0 . Pro $\varepsilon > 0$ položíme $\delta = \varepsilon$. Pro každé $x \in B(x_0, \delta)$ platí podle (10.9)

$$\left| \|x_0\| - \|x\| \right| \leq \|x_0 - x\| < \delta = \varepsilon.$$

Tím je důkaz proveden. ♣

Spojitost zobrazení mezi metrickými prostory závisí zásadním způsobem na zvolených metrikách. Následující příklad tento fakt ilustruje.

10.4.5. Příklad. Necht (P, ρ_{diskr}) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Dokažte, že f je spojitý.

Řešení. Předpokládejme, že $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = 1$. Potom platí $B_{\rho_{\text{diskr}}}(a, \delta) = \{a\}$. Odtud plyne, že pro každé $x \in B_{\rho_{\text{diskr}}}(a, \delta)$ platí $f(x) = f(a)$, a tedy $f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. To znamená, že f je spojitý v a . Poněvadž a bylo zvoleno libovolně plyne odtud, že f je spojitý zobrazení. ♣

10.4.6. Věta (charakterizace spojitosti). Necht (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní.

- (i) Zobrazení f je spojité na P .
- (ii) Pro každou množinu G otevřenou v Q je množina $f^{-1}(G)$ otevřená v P .
- (iii) Pro každou množinu F uzavřenou v Q je množina $f^{-1}(F)$ uzavřená v P .

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Předpokládejme, že G je otevřená množina v Q a $x \in f^{-1}(G)$. Potom $f(x) \in G$. Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subset G$. Díky spojitosti zobrazení f nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f(B_\varrho(x, \delta)) \subset B_\sigma(f(x), \varepsilon)$. To znamená, že

$$B_\varrho(x, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

Bod x je tedy vnitřním bodem množiny $f^{-1}(G)$. Odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina v P .

(ii) \Rightarrow (i) Necht $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Množina $f^{-1}(B_\sigma(f(a), \varepsilon))$ obsahuje prvek a a podle předpokladu je otevřená. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že $B_\varrho(a, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(a), \varepsilon))$, neboli $f(B_\varrho(a, \delta)) \subset B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. Odtud plyne, že f je spojité v a . Bod a byl zvolen libovolně v P , a proto je f spojité.

(ii) \Rightarrow (iii) Necht F je uzavřená množina v Q . Potom $Q \setminus F$ je otevřená množina v Q , a tedy, podle (ii), je množina $f^{-1}(Q \setminus F)$ otevřená v P . Z Příkladu 1.8.21(d) plyne, že

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus F)) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(Q \setminus F) \\ &= P \setminus f^{-1}(Q \setminus F). \end{aligned}$$

Množina $f^{-1}(F)$ je tedy uzavřená v P .

(iii) \Rightarrow (ii) Necht G je otevřená množina v Q . Potom $Q \setminus G$ je uzavřená množina v Q , a tedy, podle (iii), je množina $f^{-1}(Q \setminus G)$ uzavřená v P . Množina $f^{-1}(G) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus G)$ je tudíž otevřená v P . ■

Limita zobrazení.

10.4.7. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$, $a \in A$ a $b \in Q$. Řekneme, že zobrazení f **má v bodě a limitu b vzhledem k množině A** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme, že f **má v bodě a limitu b** .

10.4.8. Věta (jednoznačnost limity). Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$, $A \subset P$ a $a \in A$. Potom f má v bodě a nejvýše jednu limitu vzhledem k množině A .

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $b_1, b_2 \in Q$, $b_1 \neq b_2$, jsou limitami zobrazení f vzhledem k množině A . Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}\sigma(b_1, b_2)$. Potom je $\varepsilon > 0$ a existuje k němu $\delta_1 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta_1 \Rightarrow \sigma(f(x), b_1) < \varepsilon).$$

Dále existuje $\delta_2 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta_2 \Rightarrow \sigma(f(x), b_2) < \varepsilon).$$

Díky tomu, že $a \in A'$, nalezneme $x \in A$ takové, že $0 < \varrho(x, a) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom platí

$$\sigma(b_1, b_2) \leq \sigma(b_1, f(x)) + \sigma(f(x), b_2) < 2\varepsilon < \sigma(b_1, b_2),$$

což je spor. ■

10.4.9. Limitu vzhledem k množině A počítáme pouze v bodech, které jsou hromadnými body množiny A . Pokud totiž a není hromadným bodem A , pak v jistém okolí bodu a již kromě bodu a nejsou žádné body z A a proměnná funkce f se nemůže blížit k bodu a v rámci množiny $A \setminus \{a\}$. V takovém bodě a by sice definice limity formálně dávala smysl, ale nebyla by určena jednoznačně.

10.4.10. Označení. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$ a $a \in A'$. Pokud existuje limita zobrazení f v bodě a vzhledem k množině A , označujeme tuto limitu symbolem $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$. Je-li $A = P$, píšeme jen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Věty Heineova typu.

10.4.11. Věta (Heine). Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b$.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $x_n \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $f(x_n) \in B(b, \varepsilon)$. Tím jsme ověřili, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

(ii) \Rightarrow (i) Provedeme nepřímý důkaz, tj. odvodíme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Předpokládejme tedy, že neplatí (i). Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \delta > 0 \exists x \in A: 0 < \varrho(x, a) < \delta \wedge f(x) \notin B(b, \varepsilon). \quad (10.10)$$

Necht $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta = \frac{1}{n}$. K tomuto δ nalezneme podle (10.10) prvek x_n splňující $x_n \in (B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap A$ a $f(x_n) \notin B(b, \varepsilon)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ale není pravda, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. Podmínka (ii) tedy není splněna. ■

10.4.12. Věta. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$ a $a \in P$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Zobrazení f je spojité v bodě a .
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P a $x \in P$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu pomocí (i) nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(y, a) < \delta$ platí $\sigma(f(y), f(a)) < \varepsilon$. K našemu δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, a) < \delta$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí $\sigma(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

(ii) \Rightarrow (i) Provedeme opět nepřímý důkaz. Předpokládejme, že (i) neplatí. To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in B(a, \delta)$ splňující $\sigma(f(y), f(a)) \geq \varepsilon$. Díky tomuto tvrzení nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$ splňující $\sigma(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak splňuje $\lim x_n = a$, ale neplatí $\lim f(x_n) = f(a)$. Neplatí tedy (i). ■

Z předchozí věty plyne okamžitě následující výsledek.

10.4.13. Věta. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Zobrazení f je spojitě.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků P a $x \in P$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

10.4.14. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ a $a \in A'$. Předpokládejme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

Potom

- (a) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$,
- (c) jestliže $\beta \neq 0$, pak $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim x_n = a$. Potom podle Věty 10.4.11 dostaneme $\lim f(x_n) = \alpha$ a $\lim g(x_n) = \beta$. Podle Věty 2.2.36(a) odvodíme $\lim (f(x_n) + g(x_n)) = \alpha + \beta$. Podle Věty 10.4.11 pak dostáváme $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$.

(b), (c) Postupujeme obdobně jako v (a), pouze Větu 2.2.36(a) nahradíme Větou 2.2.36(b), (c). ■

10.4.15. Věta (vztah mezi limitou a spojitostí v bodě). Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q , $A \subset P$ a $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom je f spojitě v a vzhledem k A právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$.

Důkaz. \Rightarrow Bod a patří do množiny A' , takže v něm můžeme počítat limitu vzhledem k A . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice spojitosti nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Potom tím spíše platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Tím jsme ověřili, že platí $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$.

← Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Poněvadž $a \in A$ a $\sigma(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$ máme

$$\forall x \in A: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Tím je ověřena spojitost zobrazení f v bodě a . ■

Spojitosť a limita složeného zobrazení.

10.4.16. Věta (spojitosť složeného zobrazení v bodě). Necht (X, ϱ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$. Necht $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ a platí:

- (a) existuje $\eta > 0$ takové, že $f(B_\varrho(a, \eta) \cap A) \subset B$,
- (b) f je spojitě v bodě a vzhledem k A ,
- (c) g je spojitě v bodě $f(a)$ vzhledem k B .

Potom zobrazení $g \circ f$ je spojitě v bodě a vzhledem k A .

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (c) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B_\sigma(f(a), \psi) \cap B: g(y) \in B_\tau(g(f(a)), \varepsilon). \quad (10.11)$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in B_\varrho(a, \zeta) \cap A: f(x) \in B_\sigma(f(a), \psi). \quad (10.12)$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \zeta\}$. Potom podle (a) platí

$$\forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap A: f(x) \in B.$$

Odtud a díky (10.11) a (10.12) obdržíme

$$\forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap A: g(f(x)) \in B_\tau(g(f(a)), \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť jsme k ε našli příslušné δ . ■

10.4.17. Věta (spojitosť složeného zobrazení). Necht (X, ϱ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $f: X \rightarrow Y$ je spojitě a $g: Y \rightarrow Z$ je spojitě. Potom zobrazení $g \circ f: X \rightarrow Z$ je spojitě.

Důkaz. Necht $G \subset Z$ je otevřená množina v prostoru (Z, τ) . Zobrazení g je spojitě, a tedy podle věty o charakterizaci spojitého zobrazení (Věta 10.4.6, (i) \Rightarrow (ii)), je $g^{-1}(G)$ otevřená množina v prostoru (Y, σ) . Zobrazení f je spojitě, takže podle téže věty je množina $f^{-1}(g^{-1}(G))$ otevřená v prostoru (X, ϱ) . Protože $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$, plyne odtud pomocí Věty 10.4.6, (ii) \Rightarrow (i), že zobrazení $g \circ f: X \rightarrow Z$ je spojitě. ■

10.4.18. Věta (limita složeného zobrazení). Necht (X, ϱ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z . Necht $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí

- (a) existuje $\lambda > 0$ takové, že $f(A \cap (B(a, \lambda) \setminus \{a\})) \subset B$,

- (b) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b$,
 (c) $\lim_{y \rightarrow b, y \in B} g(y) = c$.

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- (P) existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$,
 (S) zobrazení g je spojitě v bodě b vzhledem k množině B .

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

Důkaz. Varianta s podmínkou (P). Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (c) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B: (0 < \sigma(y, b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y), c) < \varepsilon). \quad (10.13)$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \psi). \quad (10.14)$$

Vezmeme λ z podmínky (a) a η z podmínky (P). Položíme $\delta = \min\{\lambda, \eta, \zeta\}$. Potom podle (a), (P) a (10.14) platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge 0 < \sigma(f(x), b) < \psi)).$$

Odtud a díky (10.13) obdržíme

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)), c) < \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť jsme k ε našli příslušné δ .

Varianta s podmínkou (S). Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky podmínce (S) nalezneme $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in B: (\sigma(y, b) < \psi \Rightarrow \tau(g(y), g(b)) < \varepsilon). \quad (10.15)$$

K nalezenému ψ díky podmínce (b) nalezneme $\zeta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \zeta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \psi). \quad (10.16)$$

Vezměme λ z podmínky (a) a položíme $\delta = \min\{\lambda, \zeta\}$. Potom podle (a) a (10.16) platí

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow (f(x) \in B \wedge \sigma(f(x), b) < \psi)).$$

Odtud a díky (10.15) obdržíme

$$\forall x \in A: (0 < \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \tau(g(f(x)), g(b)) < \varepsilon).$$

Tím je důkaz proveden, neboť $c = g(b)$ podle (a) a (S), a tak jsme k ε našli příslušné δ . ■

10.4.19. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f: P \rightarrow Q$ je **homeomorfismus** (prostoru P na prostor Q), jestliže je spojitě, bijektivní a zobrazení $f^{-1}: Q \rightarrow P$ je také spojitě. Řekneme, že prostory (P, ϱ) a (Q, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje homeomorfismus prostoru P na prostor Q .

10.4.20. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ukažte, že interval (a, b) je homeomorfní s \mathbb{R} .

Řešení. Definujme zobrazení $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{x-a}{b-a} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Zobrazení $x \mapsto \pi \frac{x-a}{b-a} - \frac{\pi}{2}$, $x \in (a, b)$, je prosté spojitě zobrazení definované na intervalu (a, b) , jehož obor hodnot je roven $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Odtud a z vlastností funkce tangens plyne, že f je prosté spojitě zobrazení definované na (a, b) , jehož obor hodnot je roven \mathbb{R} . Inverzní zobrazení f^{-1} má tvar

$$f^{-1}(y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b-a}{\pi}(y + \frac{\pi}{2}) + a\right).$$

Z tohoto vyjádření plyne, že zobrazení f^{-1} je spojitě. Tím jsme ověřili, že f je homeomorfismus prostoru (a, b) na prostor \mathbb{R} . ♣

10.4.21. V Příkladu 10.10.59 ukážeme, že čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ není homeomorfní s intervalem $[0, 1]$. Uveďme ještě, že v komplexní analýze, což je partie matematiky věnující se zobrazením z komplexních čísel do komplexních čísel, je používán výsledek, že „sféra bez severního pólu“ je homeomorfní s komplexní rovinou, jinými slovy prostor

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 1\}$$

s metrikou zděděnou z \mathbb{R}^3 je homeomorfní s \mathbb{C} . Důkaz není obtížný, ale uvádět jej zde nebudeme.

10.4.22. Poznámka. *Topologický prostor* je dvojice (X, \mathcal{G}) , kde X je množina a \mathcal{G} je systém podmnožin X , který splňuje následující podmínky:

- (a) Prázdná množina a X patří do \mathcal{G} .
- (b) Necht $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$, potom $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{G}$.
- (c) Necht $m \in \mathbb{N}$ a $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{G}$, potom $\bigcap_{i=1}^m G_i \in \mathcal{G}$.

Množinám z \mathcal{G} pak říkáme *otevřené množiny* v (X, \mathcal{G}) .

Pokud je (P, ϱ) metrický prostor a \mathcal{G} je systém všech otevřených množin v (P, ϱ) , pak je podle Věty 10.3.11 dvojice (P, \mathcal{G}) topologický prostor. V tomto smyslu je tedy každý metrický prostor i prostorem topologickým. Existují však topologické prostory, které nelze obdržet z žádného metrického prostoru popsáním způsobem.

Řadu pojmů, které jsme definovali pro metrické prostory, je možné definovat i v prostorech topologických, neboť v definici vystačíme s otevřenými množinami a nepotřebujeme pracovat s metrikou. Mezi takové pojmy patří např. uzavřené množiny, hranice, vnitřek, uzávěr množiny, ale i spojitě zobrazení (vizte Větu 10.4.6), a tedy i homeomorfismus.

Je-li $f: X \rightarrow Y$ homeomorfismus mezi topologickými prostory X a Y , pak zobrazení $A \mapsto f(A)$, kde $A \subset X$, je bijekcí systému otevřených množin v X na systém otevřených množin v Y . Vlastnosti prostoru, které se zachovávají homeomorfismem, se nazývají *topologické*.

10.5. Součin metrických prostorů

10.5.1. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory. Položme $P = P_1 \times \dots \times P_n$. Na množině P lze zavést novou metriku pomocí metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ různými způsoby, přičemž žádný z nich nemá výsadní postavení. Následující tři metriky jsou často používány a opírají se o definice metrik z Příkladů 10.1.7, 10.1.9 a 10.1.10. Ověření, že funkce $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_\infty$ jsou metriky na P , není o nic obtížnější než ověřování ve zmíněných příkladech.

Metriku $\sigma_1: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \varrho_i(x_i, y_i),$$

kde $x, y \in P$ mají tvar $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$. Metriku σ_1 nazýváme ℓ_1 -**součtem** metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Metriku $\sigma_2: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varrho_i(x_i, y_i)^2},$$

kde x, y jsou jako výše. Metriku σ_2 nazýváme ℓ_2 -**součtem** metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Metriku $\sigma_\infty: P \times P \rightarrow [0, \infty)$ definujeme předpisem

$$\sigma_\infty(x, y) = \max\{\varrho_i(x_i, y_i); i \in \{1, \dots, n\}\},$$

kde x, y jsou jako výše. Metriku σ_∞ nazýváme ℓ_∞ -**součtem** metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

10.5.2. Necht $n, m \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme na \mathbb{R} obvyklou eukleidovskou metriku. Potom ℓ_2 -součet n takových metrik na \mathbb{R}^n je roven eukleidovské metrice na \mathbb{R}^n . Podobně pokud budeme na prostorech \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m uvažovat eukleidovské metriky, pak jejich ℓ_2 -součet bude opět eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Obdobná tvrzení platí i pro ℓ_1 -metriku a ℓ_1 -součet metrik, resp. ℓ_∞ -metriku a ℓ_∞ -součet metrik.

Pokud nebude řečeno výslovně jinak, budeme na množině \mathbb{R}^n uvažovat vždy eukleidovskou metriku.

10.5.3. Věta. Necht $n \in \mathbb{N}$, $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ a τ je ℓ_2 -součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

- (a) Jestliže $G_i \subset P_i$ je otevřená v (P_i, ϱ_i) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, potom je $G = \prod_{i=1}^n G_i$ otevřená v (P, τ) .
- (b) Necht $i \in \{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\pi_i: P \rightarrow P_i$ definované předpisem $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ spojitě na (P, τ) .

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$. Necht $i \in \{1, \dots, n\}$. Díky otevřenosti G_i v (P_i, ϱ_i) nalezneme $r_i > 0$ takové, že $B_{\varrho_i}(x_i, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i; i \in \{1, \dots, n\}\}$. Pro $x' \in B_\tau(x, r)$ platí $\varrho_i(x_i, x'_i) \leq \tau(x, x') < r$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Máme tedy

$$B_\tau(x, r) \subset \prod_{i=1}^n B_{\varrho_i}(x_i, r) \subset \prod_{i=1}^n G_i = G.$$

Každý bod množiny G je tedy jejím vnitřním bodem, a proto je G otevřená v (P, τ) .

(b) Necht $H \subset P_i$ je otevřená množina. Potom platí

$$\pi_i^{-1}(H) = P_1 \times \cdots \times P_{i-1} \times H \times P_{i+1} \times \cdots \times P_n.$$

Množina $\pi_i^{-1}(H)$ je tedy podle již dokázaného tvrzení (a) otevřená v P , a proto je zobrazení π_i spojitě podle Věty 10.4.6. ■

10.5.4. Věta. Necht $n \in \mathbb{N}$, (Q, σ) , $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory, $P = \prod_{i=1}^n P_i$ a τ je ℓ_2 -součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Zobrazení $f = (f_1, \dots, f_n): Q \rightarrow P$ je spojitě právě tehdy, když je každé zobrazení $f_i: Q \rightarrow P_i$ spojitě, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Důkaz. \Rightarrow Necht $i \in \{1, \dots, n\}$. Zvolme $x \in Q$ a dále zvolme $\varepsilon > 0$. Díky spojitosti f v bodě x nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ platí $\tau(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Pak ale platí také $\varrho_i(f_i(x), f_i(y)) \leq \tau(f(x), f(y)) < \varepsilon$, a zobrazení f_i je tedy v bodě x spojitě.

\Leftarrow Necht $x \in Q$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ platí $\varrho_i(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Potom pro každé $y \in Q$ splňující $\sigma(x, y) < \delta$ pak platí

$$\tau(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varrho_i(f_i(x), f_i(y)))^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Tím je dokázána spojitost zobrazení f v bodě x . ■

10.5.5. Poslední dvě věty platí i v případě, že místo ℓ_2 -součtu metrik budeme uvažovat ℓ_1 -součet nebo ℓ_∞ -součet metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$.

10.5.6. Poznámka. V tomto oddílu jsme se zabývali součinem *konečně* mnoha metrických prostorů. Je možné uvažovat i součín nekonečné posloupnosti metrických prostorů, ale pak je příslušná teorie složitější a v tomto textu se jí věnovat nebudeme.

10.6. Kompaktní prostory

Další čtyři oddíly budou věnovány metrickým prostorům, které mají některé speciální vlastnosti. Začneme s kompaktními metrickými prostory.

Definice a základní vlastnosti kompaktních prostorů.

10.6.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků z P lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $K \subset P$ je **kompaktní** v P , jestliže je metrický prostor (K, ϱ) kompaktní, tedy jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat podposloupnost, která konverguje v P a jejíž limita je prvkem K .

10.6.2. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je konečná. Dokažte, že A je kompaktní.

Řešení. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z A . Potom existuje alespoň jeden prvek $x \in A$, který se v posloupnosti $\{x_n\}$ vyskytuje nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje podposloupnost, jejíž každý člen je roven x . Tato podposloupnost tedy konverguje k prvku x , který náleží do množiny A . ♣

10.6.3. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dokažte, že interval $[a, b]$ je kompaktní v \mathbb{R} .

Řešení. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $[a, b]$. Potom je $\{x_n\}$ omezená. Dle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (Věta 2.4.7) existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$. Protože $[a, b]$ je uzavřená množina, platí $x \in [a, b]$. Odtud plyne, že $[a, b]$ je kompaktní množina v \mathbb{R} . ♣

10.6.4. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a posloupnost $\{x_n\}$ prvků P splňuje

$$\exists \delta > 0 \forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq m: \varrho(x_n, x_m) \geq \delta.$$

Dokažte, že potom P není kompaktní.

Řešení. Předpokládejme, že P je kompaktní. Potom existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$. Nalezneme k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom

$$\delta \leq \varrho(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \leq \varrho(x_{k_0}, x) + \varrho(x, x_{k_0+1}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

což je spor. Prostor P tedy není kompaktní. ♣

10.6.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je kompaktní právě tehdy, když je P konečná.

Řešení. \Rightarrow Předpokládejme, že množina P je nekonečná. Potom P obsahuje prostou posloupnost $\{x_n\}$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$, platí $\varrho(x_m, x_n) = 1$. Posloupnost $\{x_n\}$ tedy splňuje podmínku z Příkladu 10.6.4. Podle této věty tedy prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ není kompaktní.

\Leftarrow Tato implikace plyne z Příkladu 10.6.2. ♣

10.6.6. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Potom je množina K uzavřená.

Důkaz. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny K taková, že $\lim x_n = y$, kde $y \in P$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in K$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti plyne, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Z věty o jednoznačnosti limity pak plyne, že $x = y$. Tedy platí $y \in K$. To podle definice znamená, že množina K je uzavřená. ■

10.6.7. Věta (uzavřená podmnožina kompaktu). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $F \subset P$ je uzavřená. Potom je F kompaktní.

Důkaz. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků F . Potom je $\{x_n\}$ také posloupnost prvků kompaktního prostoru P , takže existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Množina F je tedy kompaktní v P . ■

10.6.8. Věta (kompaktnost a omezenost). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. Předpokládejme, že prostor P není omezený. Potom je P neprázdný. Zvolme $x \in P$. Protože $\text{diam } P = \infty$, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in P$ takový, že $\varrho(x, x_n) \geq n$. Protože P je kompaktní prostor, existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $y \in P$ takový, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Tedy existuje k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(y, x_{n_k}) \leq 1$. Necht $k \geq k_0$ je takové, že $n_k > \varrho(x, y) + 1$. Potom

$$n_k \leq \varrho(x, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + 1 < n_k,$$

což je spor. Prostor P je tedy omezený. ■

Následující věta obsahuje důležitou charakterizaci kompaktních množin v prostoru \mathbb{R}^n .

10.6.9. Věta (kompaktnost v \mathbb{R}^n). Necht $n \in \mathbb{N}$ a $K \subset \mathbb{R}^n$. Potom K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Důkaz. \Rightarrow Tato implikace plyne z Vět 10.6.6 a 10.6.8.

\Leftarrow Použijeme matematickou indukci podle n . Necht $n = 1$ a $\{x_k\}$ je posloupnost prvků K . Množina K je omezená v \mathbb{R} , a tedy existují $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, splňující $K \subset [a, b]$. Podle Příkladu 10.6.3 je $[a, b]$ kompaktní. Protože K je podle předpokladu uzavřená v \mathbb{R} , je uzavřená i v $[a, b]$ (Věta 10.3.28), a je tedy podle Věty 10.6.7 kompaktní v \mathbb{R} .

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí v každém prostoru \mathbb{R}^d , kde $d \leq n$. Necht K je omezená a uzavřená množina v \mathbb{R}^{n+1} . Definujme zobrazení $\pi_1: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\pi_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisy

$$\pi_1([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x_1, \dots, x_n], \quad \pi_2([x_1, \dots, x_{n+1}]) = x_{n+1}.$$

Eukleidovské metriky v prostorech \mathbb{R} , \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^{n+1} označíme pro účely tohoto důkazu po řadě jako ϱ_2^1 , ϱ_2^n a ϱ_2^{n+1} . Pro každé $x, y \in K$ platí

$$\varrho_2^n(\pi_1(x), \pi_1(y)) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \text{diam } K$$

a

$$\varrho_2^1(\pi_2(x), \pi_2(y)) \leq \varrho_2^{n+1}(x, y) \leq \text{diam } K,$$

takže $\pi_1(K)$ je omezená v \mathbb{R}^n a $\pi_2(K)$ je omezená v \mathbb{R} . Podle Věty 10.3.24(f) jsou omezené také množiny $\overline{\pi_1(K)}$ a $\overline{\pi_2(K)}$. Tyto množiny jsou navíc podle Věty 10.3.24(d) uzavřené. Podle indukčního předpokladu jsou pak obě množiny kompaktní.

Necht $\{x^k\}$ je posloupnost prvků K . Označme $x^k = [a^k, b^k]$, kde $a^k \in \mathbb{R}^n$ a $b^k \in \mathbb{R}$. Díky kompaktnosti množiny $\overline{\pi_1(K)}$ existuje podposloupnost $\{a^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$

posloupnosti $\{a^k\}$ a prvek $a \in \overline{\pi_1(K)}$ takové, že $\lim_{j \rightarrow \infty} a^{k_j} = a$. Protože $\overline{\pi_2(K)}$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{b^{k_{j_\ell}}\}_{\ell=1}^\infty$ posloupnosti $\{b^{k_j}\}$ a prvek $b \in \overline{\pi_2(K)}$ takové, že $\lim_{\ell \rightarrow \infty} b^{k_{j_\ell}} = b$. Potom díky Příkladu 10.2.7 platí

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} x^{k_{j_\ell}} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} [a^{k_{j_\ell}}, b^{k_{j_\ell}}] = [a, b].$$

Množina K je podle předpokladu uzavřená, a tedy $[a, b] \in K$. Odtud plyne, že K je kompaktní v \mathbb{R}^{n+1} . ■

10.6.10. Tvrzení Věty 10.6.9 neplatí pro obecné metrické prostory. Například libovolná nekonečná množina v diskretním metrickém prostoru je omezená a uzavřená, avšak nikoli kompaktní. Následující příklad popisuje takovou situaci v případě důležitého prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}([0, 1])$ (vizte Příklad 10.1.23).

10.6.11. Příklad. Dokažte, že uzávěr otevřené koule $B(0, 1)$ v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ je omezená a uzavřená množina, avšak není kompaktní v prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$.

Řešení. Množina $\overline{B(0, 1)}$ je zřejmě omezená. Podle Věty 10.3.24(d) je také uzavřená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x, & x \in [0, \frac{1}{2^n}]; \\ 1, & x \in (\frac{1}{2^n}, 1]. \end{cases}$$

Zřejmě platí $f_n \in \overline{B(0, 1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Necht $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Potom $1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}$, a tedy

$$\varrho_{\text{sup}}(f_n, f_m) \geq |f_n(\frac{1}{2^n}) - f_m(\frac{1}{2^n})| = 1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}.$$

Z Příkladu 10.6.4 tedy plyne, že $\overline{B(0, 1)}$ není kompaktní. ♣

10.6.12. Věta (spojitý obraz kompaktu). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitý. Potom je $f(P)$ kompaktní v Q .

Důkaz. Necht $\{y_n\}$ je posloupnost prvků $f(P)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Protože P je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$ v P . Protože f je spojitý, plyne z Heineovy věty (Věta 10.4.13), že $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ v Q . Označíme-li $y = f(x)$, pak $y \in f(P)$ a platí $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$. Odtud plyne, že $f(P)$ je kompaktní v Q . ■

10.6.13. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Množinu \mathbb{C}^n opatříme metrikou σ , která je ℓ_2 -součtem metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ na \mathbb{C} , které jsou všechny rovny metrice ϱ uvedené v Příkladu 10.1.11. Dokažte, že množina $K \subset \mathbb{C}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Řešení. Definujme zobrazení $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ předpisem

$$f(x) = [x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}].$$

Zobrazení f je bijekce a navíc pro každé $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ platí $\rho_2(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$, což plyne z následujícího výpočtu. Platí

$$\begin{aligned}\sigma(f(x), f(y)) &= \sqrt{\sum_{j=1}^n |(x_{2j-1} + ix_{2j}) - (y_{2j-1} + iy_{2j})|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n ((x_{2j-1} - y_{2j-1})^2 + (x_{2j} - y_{2j})^2)} \\ &= \sqrt{\sum_{s=1}^{2n} (x_s - y_s)^2} = \rho_2(x, y).\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne, že zobrazení f je homeomorfismus. Navíc pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ platí, že A je omezená v \mathbb{R}^{2n} , právě když $f(A) \subset \mathbb{C}^n$ je omezená. Odtud a z Věty 10.6.9 plyne dokazované tvrzení. ♣

Extrémy funkcí.

10.6.14. Definice. Necht P je množina a $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f **nabývá svého maxima** na P , jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \geq f(y)$ pro každé $y \in P$. Obdobně řekneme, že f **nabývá svého minima** na P , jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \leq f(y)$ pro každé $y \in P$. Bod x nazýváme v prvním případě **bodem maxima** a ve druhém **bodem minima**.

Následující důležitá věta udává postačující podmínku pro existenci extrému.

10.6.15. Věta (extrémy spojitě funkce na kompaktu). Necht (P, ρ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě. Potom f nabývá na P svého maxima i minima.

Důkaz. Označme $y = \sup f(P)$. Podle Věty 10.6.12 je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy podle Vět 10.6.6 a 10.6.8 omezená a uzavřená. Z omezenosti $f(P)$ plyne, že $y \in \mathbb{R}$ a z uzavřenosti $f(P)$ plyne, že $y \in f(P)$. Tedy f nabývá na P svého maxima. Obdobně lze dokázat, že f nabývá na P svého minima. ■

10.6.16. Předpoklad spojitosti zobrazení i předpoklad kompaktnosti ve Větě 10.6.15 jsou důležité. Nespojitě zobrazení nemusí nabývat extrémů ani na kompaktní množině. Příkladem je funkce f definovaná na $[0, 1]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = 0, \text{ nebo } x = 1, \\ 2x - 1, & \text{pokud } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Spojitě zobrazení na nekompaktní množině rovněž nemusí nabývat svých extrémů. Příkladem je funkce f definovaná na $(0, 1)$ předpisem $f(x) = x$.

Stejněměrná spojitost. Podobně jako jsme zobecnili pojem spojitosti a limity pro zobrazení mezi metrickými prostory, tak můžeme zobecnit i pojem stejnoměrně spojitě funkce (vizte 9.2.16–9.2.19).

10.6.17. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f: P \rightarrow Q$ je **stejněměrně spojitě**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in P: (\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

10.6.18. Příklad. Necht (P, ϱ) , (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě. Potom je f spojitě.

Řešení. Předpokládejme, že $x_0 \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrně spojitosti pro ε . Tedy jsou-li $x, y \in P$ body splňující $\varrho(x, y) < \delta$, je $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in P$ a $\varrho(x_0, y) < \delta$, pak máme $\sigma(f(y), f(x_0)) < \varepsilon$. Zobrazení f je proto spojitě v bodě x_0 . Odtud plyne spojitost f . ♣

10.6.19. Věta (spojitost a stejnoměrná spojitost na kompaktu). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitě. Potom f je stejnoměrně spojitě.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že f není stejnoměrně spojitě. Potom existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ prvků P splňující $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pro každé n . Z kompaktnosti P plyne, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \rightarrow x$. Potom také $y_{n_k} \rightarrow x$, neboť

$$0 \leq \varrho(x, y_{n_k}) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})$$

a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})) = 0.$$

Ze spojitosti f a Heineovy věty tudíž plyne, že $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ a $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x)$. Nalezneme k takové, že $\sigma(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom

$$\varepsilon \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(x)) + \sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojitě. ■

Homeomorfní zobrazení.

10.6.20. Věta. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f: P \rightarrow Q$ je spojitá bijekce. Potom f je homeomorfismus.

Důkaz. Zobrazení f je bijekce, a tedy je zobrazení f^{-1} dobře definováno na Q . Předpokládejme, že $F \subset P$ je uzavřená množina. Podle Věty 10.6.7 je F kompaktní v P . Tudíž je podle Věty 10.6.12 také množina $f(F)$ kompaktní, a tedy dle Věty 10.6.6 uzavřená v Q . Podle Věty 10.4.6 je zobrazení f^{-1} spojitě z Q do P . Zobrazení f je tedy homeomorfismus. ■

Totální omezenost. Následující pojem je užitečný sám o sobě. My jej později použijeme k charakterizaci kompaktnosti.

10.6.21. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε -sít prostoru P , jestliže $P = \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon)$. Řekneme, že prostor P je **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε -sít prostoru P . Řekneme, že množina $A \subset P$ je **totálně omezená** v P , jestliže je prostor (A, ϱ) totálně omezený.

10.6.22. Příklad. Dokažte, že každý konečný metrický prostor je totálně omezený.

Řešení. Platnost tvrzení bezprostředně vyplývá z definice totální omezenosti. ♣

10.6.23. Věta. Necht (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. Z definice totální omezenosti plyne, že existuje konečná 1-sít H prostoru P . Díky konečnosti H máme $\text{diam } H < \infty$. Necht $x, y \in P$. Potom existují $x', y' \in H$ takové, že $\varrho(x, x') < 1$ a $\varrho(y, y') < 1$. Platí tedy

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 1 + \text{diam } H + 1 = \text{diam } H + 2,$$

takže $\text{diam } P \leq \text{diam } H + 2$. Prostor P je tedy omezený. ■

10.6.24. Příklad. Necht $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že P je totálně omezený právě tehdy, když je konečný.

Řešení. \Rightarrow Z totální omezenosti P plyne, že existuje konečná 1-sít $H \subset P$. Z Příkladu 10.1.31 plyne, že pro každé $x \in P$ je $B(x, 1) = \{x\}$. Tedy platí

$$P = \bigcup_{x \in H} B(x, 1) = \bigcup_{x \in H} \{x\} = H.$$

Odtud plyne, že prostor P je konečný.

\Leftarrow Tvrzení plyne z Příkladu 10.6.22. ♣

10.6.25. Z Příkladu 10.6.24 vyplývá, že opačná implikace k implikaci uvedené ve Větě 10.6.23 obecně neplatí, neboť každý nekonečný diskrétní metrický prostor je omezený (vizte Příklad 10.1.38), není však totálně omezený.

10.6.26. Věta. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.

Důkaz. Předpokládejme, že P není totálně omezený. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou množinu $C \subset P$ je

$$P \setminus \bigcup_{x \in C} B(x, \delta) \neq \emptyset.$$

Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Dále budeme pokračovat matematickou indukcí. Necht $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že máme zvoleny prvky x_1, \dots, x_n . Potom je množina $P \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta)$ neprázdná. Necht x_{n+1} je její libovolný prvek. Touto konstrukcí získáme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny P splňující $\varrho(x_n, x_m) \geq \delta$ pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Podle Příkladu 10.6.4 pak prostor P není kompaktní. ■

Charakterizace kompaktnosti. Nyní uvedeme dvě charakterizace kompaktnosti.

10.6.27. Definice. Necht P je metrický prostor a \mathcal{G} je systém jeho podmnožin. Řekneme, že \mathcal{G} **pokrývá** P , neboli je **pokrytím** P , jestliže $P = \bigcup \mathcal{G}$. Jestliže pokrytí \mathcal{G} prostoru P sestává z otevřených množin, říkáme, že jde o **otevřené pokrytí**. Jestliže \mathcal{G} obsahuje konečně mnoho množin, říkáme, že jde o **konečné pokrytí**.

10.6.28. Věta. Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každé otevřené pokrytí \mathcal{G} prostoru P existuje konečné pokrytí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ prostoru P .

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme, že \mathcal{G} je otevřené pokrytí prostoru P . Nejprve dokážeme, že platí následující výrok:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in P \exists G \in \mathcal{G} : B(x, \frac{1}{n}) \subset G. \quad (10.17)$$

Předpokládejme, že (10.17) neplatí, potom tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in P \forall G \in \mathcal{G} : B(x, \frac{1}{n}) \not\subset G.$$

Odtud získáváme posloupnost $\{x_n\}$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $G \in \mathcal{G}$ platí $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset G$. Díky kompaktnosti prostoru P můžeme nalézt podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. K prvku x nalezneme množinu $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$. Protože G je otevřená, můžeme nalézt $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \subset G$. K tomuto δ nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_k \geq \frac{2}{\delta}$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom pro každé $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n_k} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

takže

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

což je spor. Tím je dokázána platnost výroku (10.17).

Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že ke každému $x \in P$ tedy lze nalézt množinu $G_x \in \mathcal{G}$ splňující $B(x, \frac{1}{n}) \subset G_x$. Prostor P je kompaktní, a tedy podle Věty 10.6.26 také totálně omezený. To znamená, že v něm existuje konečná $\frac{1}{n}$ -sít H . Položme

$$\mathcal{G}^* = \{G_x; x \in H\}.$$

Potom platí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$, \mathcal{G}^* obsahuje konečně mnoho množin a

$$P \subset \bigcup_{x \in H} B(x, \frac{1}{n}) \subset \bigcup_{x \in H} G_x.$$

Systém \mathcal{G}^* je tedy konečné otevřené pokrytí prostoru P splňující $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$.

\Leftarrow Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Označme $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Předpokládejme, že existuje $y \in P$ takové, že pro všechna $r > 0$ je množina $B(y, r) \cap A$ nekonečná. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $x_{n_1} \in B(y, 1)$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < \dots < n_{k-1}$. Protože $B(y, \frac{1}{k}) \cap A$

je nekonečná množina, existuje $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$, splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$. Tímto způsobem dostaneme indukci rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom je ale $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$.

Nyní předpokládejme, že pro každé $y \in P$ existuje $r_y > 0$ takové, že $B(y, r_y) \cap A$ je konečná množina. Pro každé $y \in P$ je množina $B(y, r_y)$ otevřená a navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{y \in P} B(y, r_y)$. Systém $\{B(y, r_y)\}_{y \in P}$ tudíž představuje otevřené pokrytí prostoru P , a tedy podle předpokladu existuje konečná množina $F \subset P$ taková, že $P = \bigcup_{y \in F} B(y, r_y)$. Platí

$$A = A \cap P = A \cap \bigcup_{y \in F} B(y, r_y) = \bigcup_{y \in F} (A \cap B(y, r_y)),$$

takže A je konečná množina, neboť je rovna konečnému sjednocení konečných množin. Odtud vyplývá, že se alespoň jeden prvek množiny A vyskytuje v posloupnosti $\{x_n\}$ nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje konstantní, a tedy konvergentní podposloupnost. V obou případech jsme našli konvergentní podposloupnost libovolně zvolené posloupnosti prvků P , prostor P je tedy kompaktní. ■

10.6.29. Důsledek (Borel¹). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Necht \mathcal{J} je systém neprázdných otevřených intervalů splňující $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}$ takový, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}^*$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z Příkladu 10.6.3 a Věty 10.6.28. ■

10.6.30. Věta. Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin P , která pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňuje $F_{n+1} \subset F_n$, platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Důkaz. \Rightarrow Necht $\{F_n\}$ je posloupnost splňující příslušné předpoklady. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in F_n$. Protože P je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňující $n_k > n$ platí $x_{n_k} \in F_n$, neboť

$$x_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_n.$$

Protože F_n je uzavřená, vyplývá odtud, že také $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je tedy neprázdná.

\Leftarrow Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \overline{\{x_j; j \in \mathbb{N}, j \geq n\}}.$$

Potom je $\{F_n\}$ posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin P taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Podle předpokladu tedy existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Protože $x \in F_1$, plyne z definice množiny F_1 , že existuje index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že $\varrho(x_{n_1}, x) < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvoleny indexy $n_1 < \dots < n_k$. Protože $x \in F_{n_k+1}$, plyne z definice této množiny, že existuje index

¹Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956)

$n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} > n_k$ a $\varrho(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$. Takto získáme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Z posloupnosti $\{x_n\}$ jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. To znamená, že prostor P je kompaktní. ■

10.7. Úplné prostory

Z Kapitoly 2 víme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0: |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

V tomto oddíle budeme studovat otázku, ve kterých metrických prostorech platí analogie tohoto tvrzení. Nejprve zformulujeme Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro posloupnost bodů v metrickém prostoru.

10.7.1. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Řekneme, že $\{x_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku** (případně, že je **cauchyovská**), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0: \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (10.18)$$

10.7.2. Výrok (10.18) je ekvivalentní výroku

$$\exists K > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0: \varrho(x_m, x_n) < K\varepsilon.$$

Důkaz lze provést obdobně jako v případě limity posloupnosti reálných čísel (vizte Lemma 2.2.18).

10.7.3. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P . Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská.

Důkaz. Necht $x \in P$ splňuje $\lim x_n = x$. Necht $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) < \varepsilon$. Pak pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_m, x) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{x_n\}$ podle 10.7.2 splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. ■

10.7.4. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků metrického prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je cauchyovská právě tehdy, když existují $x \in P$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n = x$.

Řešení. \Rightarrow Položme $\varepsilon = 1$. Z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky plyne, že existuje n_0 takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ platí $\varrho(x_m, x_n) < 1$. Z definice diskrétní metriky vyplývá, že pro každá taková m, n platí $x_n = x_m$. Odtud již snadno plyne dokazovaná implikace.

\Leftarrow Z Věty 10.2.4(a) víme, že posloupnost $\{x_n\}$ je v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ konvergentní. Podle Věty 10.7.3 je tedy v tomto prostoru cauchyovská. ♣

10.7.5. V důkazu Věty 10.7.3 jsme viděli, že důkaz nutnosti Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupnosti reálných čísel, jak jej známe z Věty 2.4.26, je možné snadno zobecnit pro obecný metrický prostor. V důkazu opačné implikace Věty 2.4.26, tedy v důkazu toho, že Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnost reálných čísel implikuje její konvergenci, jsme však podstatným způsobem využili pojmů limes superior a limes inferior, které závisí na uspořádání reálných čísel, což je vlastnost, kterou v obecném metrickém prostoru nemáme k dispozici. Není tedy překvapivé, že výše zmíněná implikace pro obecný metrický prostor neplatí. Vzhledem k její důležitosti však stojí za to vymezit třídu prostorů, ve kterých zůstává v platnosti.

10.7.6. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků P je konvergentní.

Příklady úplných prostorů.

10.7.7. Příklad. Dokažte, že metrický prostor \mathbb{R} je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.4.26. ♣

10.7.8. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(0, 1)$ není úplný.

Řešení. Uvažujme posloupnost $\{x_n\} = \{\frac{1}{n+1}\}$ prvků intervalu $(0, 1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v $(0, 1)$. Dokážeme, že $\{x_n\}$ není konvergentní v $(0, 1)$. Předpokládejme, že $x \in (0, 1)$. Potom existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_1} < x$. Označme $\varepsilon = x - \frac{1}{n_1}$. Pak $\varepsilon > 0$ a pro každé $n \geq n_1$ platí

$$|x_n - x| = x - \frac{1}{n} \geq x - \frac{1}{n_1} = \varepsilon,$$

a tedy $\lim x_n \neq x$. Protože $x \in (0, 1)$ bylo zvoleno libovolně, posloupnost $\{x_n\}$ nemá v prostoru $(0, 1)$ limitu, a tedy v něm není konvergentní. Prostor $(0, 1)$ tedy není úplný. ♣

10.7.9. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že metrický prostor \mathbb{R}^n je úplný.

Řešení. Necht $\{x^k\}$ je cauchyovská posloupnost prvků prostoru \mathbb{R}^n . Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $k, l \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_i^k - x_i^l| \leq \varrho_2(x^k, x^l).$$

Z této nerovnosti plyne, že $\{x_i^k\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Podle Příkladu 10.7.7 jsou tedy tyto posloupnosti konvergentní. Označme $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^*$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$. Prvek $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ je pak limitou posloupnosti $\{x^k\}$ podle Příkladu 10.2.7. ♣

10.7.10. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Množinu \mathbb{C}^n opatříme metrikou σ , která je ℓ_2 -součtem metrik $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ na \mathbb{C} , které jsou všechny rovny metrice ϱ uvedené v Příkladu 10.1.11. Dokažte, že (\mathbb{C}^n, ϱ) je úplný metrický prostor.

Řešení. Dvojice (\mathbb{C}^n, ϱ) je metrický prostor podle 10.5.1. Předpokládejme, že $\{z^j\}$ je cauchyovská posloupnost v \mathbb{C}^n . Potom pro každé $j, m \in \mathbb{N}$ a $l \in \{1, \dots, n\}$ platí podle definice ℓ_2 -součtu metrik a podle definice metriky ϱ na \mathbb{C} následující nerovnosti

$$|\operatorname{Re} z_l^j - \operatorname{Re} z_l^m| \leq \sigma(z^j, z^m) \quad \text{a} \quad |\operatorname{Im} z_l^j - \operatorname{Im} z_l^m| \leq \sigma(z^j, z^m)$$

Odtud plyne, že posloupnosti reálných čísel $\{\operatorname{Re} z_l^j\}_{j=1}^\infty$ a $\{\operatorname{Im} z_l^j\}_{j=1}^\infty$ jsou cauchyovské pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$. Podle Věty 10.7.7 jsou uvedené posloupnosti konvergentní. Existují tedy komplexní čísla w^1, \dots, w^n taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_l^n = \operatorname{Re} w_l \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_l^n = \operatorname{Im} w_l$$

pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$. Z těchto limit pak plyne konvergence posloupnosti $\{z^j\}$ k prvku $w = (w_1, \dots, w_n)$. ♣

10.7.11. Příklad. Dokažte, že diskretní metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Příkladů 10.2.6 a 10.7.4. ♣

Úplnost metrického prostoru zásadním způsobem závisí na zvolené metrice. Tento fakt ilustrují následující dva příklady.

10.7.12. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ je úplný.

Řešení. Necht $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. Zvolme $x \in [a, b]$. Potom je posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}$ cauchyovská v \mathbb{R} , neboť pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varrho_{\text{sup}}(f_n, f_m)$. Podle Věty 2.4.26 má posloupnost $\{f_n(x)\}$ v \mathbb{R} vlastní limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$. Tím je definována funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Pozorování. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a $x \in [a, b]$ platí $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme díky cauchyovskosti posloupnosti $\{f_n\}$ přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ a $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varrho_{\text{sup}}(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Pak pro každé $n \geq n_0$ a $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Funkce f je spojitá na $[a, b]$. Předpokládejme, že $y \in [a, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme podle předchozího pozorování $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Funkce f_{n_0} je spojitá na $[a, b]$, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $z \in [a, b], |z - y| < \delta$, platí $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$. Potom pro každé $z \in [a, b], |z - y| < \delta$, platí

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě y . Protože bod y byl zvolen libovolně, je funkce f spojitá na $[a, b]$.

Platí $\lim_{\varrho_{\text{sup}}}(f_n, f) = 0$. Tento vztah plyne okamžitě z uvedeného pozorování. To znamená, že posloupnost $\{f_n\}$ je v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$ konvergentní, čímž jsme ověřili definici úplnosti pro prostor $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{sup}})$. ♣

10.7.13. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{int}})$ není úplný.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme funkci f_n na $[-1, 1]$ předpisem

$$f_n(x) = \text{sign}(x) \sqrt[n]{|x|}.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m < n$ platí

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f_n, f_m) &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = 2 \int_0^1 (f_n(x) - f_m(x)) dx \\ &= 2 \left(\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}. \end{aligned}$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí

$$\varrho_{\text{int}}(f_n, f_m) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)} \leq 2 \frac{n}{n+1} \frac{1}{m+1} \leq \frac{2}{n_0+1} < \varepsilon,$$

takže posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$. Dokážeme však, že tato posloupnost není v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$ konvergentní.

Nechť f je libovolná spojitá funkce na $[-1, 1]$ a označme $a = f(0)$. Předpokládejme nejprve, že $a \leq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [0, \delta]$ platí $f(y) < \frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_m(x) - f(x)) dx.$$

Potom $\gamma > 0$, neboť pro každé $x \in [2^{-m}, \delta]$ platí $f_m(x) > \frac{1}{2}$ a $f(x) \leq \frac{1}{2}$, takže $f_m(x) \geq f(x)$. Navíc pro každé $n \geq m$ platí

$$\begin{aligned} \varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_n(x) - f(x)) dx \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_m(x) - f(x)) dx \\ &= \gamma, \end{aligned}$$

takže funkce f není limitou posloupnosti $\{f_n\}$ v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$.

Nyní předpokládejme, že $a \geq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [-\delta, 0]$ platí $f(y) > -\frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_m(x)) dx.$$

Potom $\gamma > 0$ a pro každé $n \geq m$ platí

$$\begin{aligned} \varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_n(x)) dx \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_m(x)) dx \\ &= \gamma, \end{aligned}$$

a tedy funkce f opět není limitou posloupnosti $\{f_n\}$ v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$. Posloupnost $\{f_n\}$ tedy není v prostoru $(\mathcal{C}([-1, 1]), \varrho_{\text{int}})$ konvergentní. Z toho plyne, že tento metrický prostor není úplný. ♣

Banachovy prostory.

10.7.14. Definice. Banachovým prostorem nazýváme úplný normovaný lineární prostor.

S teorií Banachových prostorů, které tvoří velmi důležitou podtřídu úplných metrických prostorů, se lze seznámit v [9]. Zde a ve cvičení uvedeme jen několik základních příkladů. Podle Příkladů 10.7.9 a 10.7.10 víme, že prostory \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$, opatřené standardními operacemi sčítání vektorů a násobení skaláry, jsou Banachovy prostory. Následující příklad zobecňuje tyto výsledky.

10.7.15. Příklad. Necht X je normovaný lineární prostor, který má konečnou dimenzi. Potom je X Banachův.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že X je komplexní normovaný lineární prostor. Normu odpovídající metrice σ na \mathbb{C}^n z Příkladu 10.7.10 označíme symbolem $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n}$. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ tedy platí $\|\alpha - \beta\|_{\mathbb{C}^n} = \sigma(\alpha, \beta)$. Normu na X budeme značit $\|\cdot\|$.

Necht prvky x_1, \dots, x_n tvoří bázi B prostoru X . Definujme zobrazení $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow X$ předpisem

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j.$$

Zobrazení Φ je lineární a z vlastností báze B plyne, že zobrazení Φ je prosté a na. Inverzní zobrazení $\Phi^{-1}: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ je tedy dobře definováno. Navíc lze snadno ověřit, že Φ^{-1} je lineární. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)\| &= \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot x_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \beta_j| \cdot \|x_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\| \right) \cdot \|\alpha - \beta\|_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že zobrazení Φ je spojitě.

Ukážeme, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každé $\alpha \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\|\Phi(\alpha)\| \geq C \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}. \quad (10.19)$$

Položme $C = \inf\{\|\Phi(\alpha)\|; \alpha \in S\}$, kde

$$S = \{\alpha \in \mathbb{C}^n; \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} = 1\}.$$

Ze spojitosti Φ , Příkladu 10.4.4 a Věty 10.4.17 plyne spojitost zobrazení $\alpha \mapsto \|\Phi(\alpha)\|$. Množina S je kompaktní podle Příkladu 10.6.13. Podle Věty 10.6.15 existuje $\beta \in S$ takové, že $\|\Phi(\beta)\| = C$. Vztah (10.19) zřejmě platí pro $\alpha = 0 \in \mathbb{C}^n$. Předpokládejme, že $\alpha \in \mathbb{C}^n, \alpha \neq 0$. Potom máme $\alpha/\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \in S$ a

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha)\| &= \left\| \Phi\left(\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\right) \right\| \\ &= \left\| \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \Phi\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\right) \right\| && \text{(linearita } \Phi) \\ &= \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \left\| \Phi\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|_{\mathbb{C}^n}}\right) \right\| && \text{(vlastnost normy)} \\ &\geq \|\alpha\|_{\mathbb{C}^n} \cdot C. && \text{(definice množiny } S \text{ a konstanty } C) \end{aligned}$$

Tím je nerovnost (10.19) ověřena.

Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost prvků X . Označme $\alpha^k = \Phi^{-1}(x_k), k \in \mathbb{N}$. Díky nerovnosti (10.19) máme pro každé $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\alpha^k - \alpha^l\| &= \|\Phi^{-1}(x_k) - \Phi^{-1}(x_l)\| && \text{(definice prvků } \alpha^k, \alpha^l) \\ &= \|\Phi^{-1}(x_k - x_l)\| && \text{(linearita } \Phi^{-1}) \\ &\leq \frac{1}{C} \|\Phi(\Phi^{-1}(x_k - x_l))\| && \text{(nerovnost (10.19))} \\ &= \frac{1}{C} \|x_k - x_l\|. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že také posloupnost $\{\alpha^k\}$ je cauchyovská. Prostor \mathbb{C}^n je úplný (Příklad 10.7.10), existuje tedy $\alpha \in \mathbb{C}^n$ takové, že $\lim \alpha^k = \alpha$. Díky spojitosti zobrazení Φ máme

$$\lim x^k = \lim \Phi(\alpha^k) = \Phi(\alpha).$$

Posloupnost $\{x^k\}$ je tedy konvergentní, čímž je úplnost prostoru X dokázána. ♣

10.7.16. Příklad. Dokažte, že normovaný lineární prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je Banachův.

Řešení. V Příkladu 10.1.23 jsme ukázali, že $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je normovaný lineární prostor. Ptáme-li se, zda je tento prostor také úplný, ptáme se po úplnosti metrického prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$. Prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ je však úplný podle Příkladu 10.7.12. ♣

10.7.17. Příklad. Dokažte, že prostor ℓ_∞ je Banachův.

Řešení. Pro každé $x \in \ell_\infty$ budeme používat označení $x = \{x_m\}$, neboli x_m je m -tý člen posloupnosti x . Nechť $\{x^n\}$ je posloupnost prvků prostoru ℓ_∞ , která je cauchyovská. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí, že posloupnost $\{x_m^n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel, neboť pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ platí $|x_m^i - x_m^j| \leq \|x^i - x^j\|_\infty$. Prostor \mathbb{R} je

úplný, a proto je posloupnost $\{x_m^n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní pro každé $m \in \mathbb{N}$. Označme příslušnou limitu jako x_m^* .

Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme díky cauchyovskosti $\{x^n\}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $\|x^i - x^j\| < 1$. Máme pak

$$|x_m^n| \leq |x_m^{n_0}| + |x_m^{n_0} - x_m^n| \leq \|x^{n_0}\| + \|x^{n_0} - x^n\| < \|x^{n_0}\| + 1$$

pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $|x_m^*| \leq \|x^{n_0}\| + 1$, což dokazuje, že $x^* = \{x_m^*\} \in \ell_\infty$.

Zbývá ukázat, že $\{x^n\}$ konverguje k x^* . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme díky cauchyovskosti $\{x^n\}$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, j \geq n_0$ platí $\|x^i - x^j\| < \varepsilon$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j \geq n_0$ takové, že $|x_m^* - x_m^j| < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_m^* - x_m^n| \leq |x_m^* - x_m^j| + |x_m^j - x_m^n| < \varepsilon + \|x^j - x^n\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\|x^* - x^n\| \leq 2\varepsilon$. Posloupnost $\{x^n\}$ je tedy konvergentní v prostoru ℓ_∞ . ♣

Základní vlastnosti úplných prostorů.

10.7.18. Věta (úplnost a uzavřenost). Necht (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $M \subset P$. Potom je (M, ϱ) úplný právě tehdy, když M je uzavřená v (P, ϱ) .

Důkaz. \Rightarrow Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M , která v P konverguje k prvku $x \in P$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v P . Tím pádem je také cauchyovská v M . Metrický prostor M je úplný, takže existuje bod $y \in M$, ke kterému konverguje $\{x_n\}$ v M . Potom $\{x_n\}$ konverguje k y i v P . Z jednoznačnosti limity vyplývá $x = y$, a tedy $x \in M$. Množina M je tedy uzavřená.

\Leftarrow Necht $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost prvků M . Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská také v P , což je úplný metrický prostor, a tedy existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Protože M je uzavřená, platí $x \in M$. Tedy $\lim x_n = x$ také v M , takže (M, ϱ) je úplný. ■

10.7.19. Věta (Cantor). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Potom P je úplný právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin P splňujících $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ je $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ jednobodová množina.

Důkaz. \Rightarrow Necht $\{F_n\}$ je posloupnost množin splňujících předpoklady věty. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme libovolně prvek $x_n \in F_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme n_0 takové, že $\text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \geq n_0$ platí $x_m, x_n \in F_{n_0}$, a tedy $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská. Z úplnosti P plyne, že existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\{x_j\}_{j=n}^\infty$ posloupnost prvků F_n , která podle věty o limitě vybrané posloupnosti konverguje k x . Protože F_n je uzavřená, platí $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, dostáváme $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\text{diam}(\bigcap_{n=1}^\infty F_n) \leq \text{diam } F_m$, a tedy $\text{diam}(\bigcap_{n=1}^\infty F_n) = 0$. Odtud plyne, že $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \{x\}$.

\Leftarrow Necht $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = \{x_j; j \geq n\}$. Potom je $\{F_n\}$ posloupnost neprázdných uzavřených množin v P , která splňuje $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\text{diam } F_n \leq \text{diam } F_{n_0} \leq \varepsilon$ pro každé n , a tedy $\lim \text{diam } F_n = 0$. Podle předpokladu platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ pro nějaké $x \in P$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí $\varrho(x, x_n) \leq \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\lim x_n = x$. ■

10.7.20. Bez předpokladu $\lim \text{diam } F_n = 0$ Cantorova věta neplatí. Příkladem je posloupnost podmnožin $\{F_n\}$ v \mathbb{R} definovaná předpisem $F_n = [n, \infty)$, které jsou uzavřené (vizte Příklad 10.3.2(a)) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Nespĺňují však požadavek $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ a zřejmě platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

10.7.21. Věta. Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.

Důkaz. Postupně dokážeme následující tři implikace.

Kompaktnost \Rightarrow úplnost. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P . Potom z kompaktnosti P plyne, že existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x \in P$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Díky konvergenci posloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dále existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Protože $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k \geq k_0$ takové, že $n_k \geq n_0$. Potom pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$, takže $\{x_n\}$ je konvergentní. Prostor P je tedy úplný.

Kompaktnost \Rightarrow totální omezenost. Tato implikace vyplývá z Věty 10.6.26.

Úplnost a totální omezenost \Rightarrow kompaktnost. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P . Díky totální omezenosti P nalezneme pro každé $k \in \mathbb{N}$ konečnou $\frac{1}{k}$ -sít D_k . Dále zkonstruujeme posloupnost $\{d_k\}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ jsou splněny následující dvě podmínky:

- $d_k \in D_k$,
- množina $A_k \subset \mathbb{N}$ definovaná předpisem $A_k = \{j \in \mathbb{N}; x_j \in \bigcap_{l=1}^k B(d_l, \frac{1}{l})\}$ je nekonečná.

Platí $P = \bigcup_{d \in D_1} B(d, 1)$, a tedy

$$\mathbb{N} = \bigcup_{d \in D_1} \{j \in \mathbb{N}; x_j \in B(d, 1)\}.$$

Vyjádřili jsme množinu přirozených čísel jako sjednocení konečně mnoha množin. Alespoň jedna z nich tedy musí být nekonečná. To znamená, že existuje $d_1 \in D_1$ takové, že příslušná množina A_1 je nekonečná.

Nyní předpokládejme, že máme již zvoleny body d_1, \dots, d_k . Potom platí $P = \bigcup_{d \in D_{k+1}} B(d, \frac{1}{k+1})$, a tedy

$$A_k = \bigcup_{d \in D_{k+1}} \{j \in A_k; x_j \in B(d, \frac{1}{k+1})\}.$$

Opět jsme vyjádřili nekonečnou množinu A_k jako sjednocení konečně mnoha množin, a tedy alespoň jedna z nich musí být nekonečná. Tedy existuje $d_{k+1} \in D_{k+1}$ takové, že příslušná množina A_{k+1} je nekonečná.

Nyní nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \in A_k$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $k, k' \geq k_0$ platí

$$\varrho(x_k, x_{k'}) \leq \varrho(x_k, d_{k_0}) + \varrho(d_{k_0}, x_{k'}) < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{2}{k_0} < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská. Protože P je úplný, je tato posloupnost konvergentní. Z libovolně zvolené posloupnosti prvků z P jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. Jinými slovy, P je kompaktní. ■

10.7.22. Věta. Necht' (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $f: P \rightarrow Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Pak limita $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ existuje, právě když je splněna následující (Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A: \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Důkaz. \Rightarrow Označme $z = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A: \sigma(f(x), z) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Pro libovolná $x, y \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$ potom platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma(f(x), z) + \sigma(z, f(y)) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

\Leftarrow Protože $a \in A'$, existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ taková, že $x_n \rightarrow a$. Snadno ověříme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská: Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ díky Bolzanově-Cauchyově podmínce. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(a, \delta)$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ kdykoli $m, n \geq n_0$. Protože prostor Q je úplný, existuje $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in Q$. Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = y$.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $u, v \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(a, \delta)$ pro každé $n \geq n_0$, a $n_1 \geq n_0$ takové, že $\sigma(f(x_n), y) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $n \geq n_1$. Tedy $\sigma(f(x), y) \leq \sigma(f(x), f(x_{n_1})) + \sigma(f(x_{n_1}), y) < \varepsilon$ pro každé $x \in (B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. ■

Banachova věta o pevném bodě.

10.7.23. Definice. Necht X je množina, $T: X \rightarrow X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **pevným bodem** zobrazení T , jestliže $T(x) = x$.

10.7.24. Některé rovnice v pokročilejších partiích matematické analýzy lze řešit nalezením pevného bodu vhodného zobrazení. Banachova věta o kontrakci (Věta 10.7.28) udává poměrně obecné postačující podmínky pro existenci pevného bodu. V Kapitole 13 ukážeme její aplikaci v teorii diferenciálních rovnic.

10.7.25. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: P \rightarrow Q$ a $K \geq 0$. Řekneme, že zobrazení f je **K -lipschitzovské**, jestliže pro každé $x, y \in P$ platí $\sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y)$. Řekneme, že f je **lipschitzovské**, jestliže existuje $K \geq 0$ takové, že f je K -lipschitzovské. Řekneme, že zobrazení f je **kontrakce**, jestliže existuje $K \in [0, 1)$ takové, že f je K -lipschitzovské.

10.7.26. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je lipschitzovské zobrazení. Pak je snadné ověřit, že f je stejnoměrně spojitě, a tedy i spojitě. Nejprve nalezneme $K > 0$ takové, že f je K -lipschitzovské. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položíme $\delta = \varepsilon/K$. Potom pro každé $x, y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y) < K\delta = \varepsilon.$$

Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojitě.

10.7.27. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je neprázdná množina. Dokažte, že potom je funkce $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = \text{dist}(x, A)$ 1-lipschitzovská na P .

Řešení. Zvolme $x, y \in P$ a $\varepsilon > 0$. Pak nalezneme $x', y' \in A$ taková, že $\varrho(x, x') < \text{dist}(x, A) + \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \text{dist}(y, A) + \varepsilon$. Potom platí

$$\text{dist}(x, A) \leq \varrho(x, y') \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, y') \leq \varrho(x, y) + \text{dist}(y, A) + \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq \varrho(x, y) + \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Máme tedy

$$f(x) - f(y) = \text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq \varrho(x, y). \quad (10.20)$$

Záměnou rolí x, y obdržíme

$$f(y) - f(x) = \text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq \varrho(x, y). \quad (10.21)$$

Z (10.20), (10.21) a symetrie metriky plyne

$$|f(x) - f(y)| \leq \varrho(x, y),$$

a tedy f je 1-lipschitzovská funkce. ♣

10.7.28. Věta (Banach). Necht (P, ϱ) je úplný neprázdný metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je kontrakce. Potom existuje právě jeden pevný bod zobrazení T .

Důkaz. Existence pevného bodu. Rekurentně zdefinujeme posloupnost bodů $\{x_n\}$. Hledaný pevný bod pak obdržíme jako limitu této posloupnosti. Díky neprázdnosti P můžeme zvolit $x_1 \in P$ libovolně. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme již definovány body x_1, \dots, x_n . Potom definujeme $x_{n+1} = T(x_n)$. Dokážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v prostoru P .

Podle předpokladu existuje $\gamma \in (0, 1)$ takové, že T je γ -lipschitzovské. Předpokládejme, že dokazovaná nerovnost platí pro n . Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma^{n-1} \varrho(x_1, x_2)$. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Pak platí

$$\begin{aligned} \varrho(x_{n+1}, x_{n+2}) &= \varrho(T(x_n), T(x_{n+1})) && \text{(definice posloupnosti } \{x_n\}) \\ &\leq \gamma \cdot \varrho(x_n, x_{n+1}) && (\gamma\text{-lipschitzovskost } T) \\ &\leq \gamma \cdot \gamma^{n-1} \cdot \varrho(x_1, x_2) = \gamma^n \varrho(x_1, x_2). && \text{(indukční předpoklad)} \end{aligned}$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $m < n$ platí

$$\begin{aligned} \varrho(x_m, x_n) &\leq \varrho(x_m, x_{m+1}) + \varrho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + \varrho(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\gamma^{m-1} + \gamma^m + \dots + \gamma^{n-2}) \cdot \varrho(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{\gamma^{m-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž $\gamma \in [0, 1)$, platí $\lim \gamma^n = 0$. Lze tedy nalézt n_0 takové, že

$$\frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n > m \geq n_0$ platí

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \frac{\gamma^{m-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) \leq \frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma} \cdot \varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v P . Prostor P je úplný, takže existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$.

Dokážeme, že $T(x) = x$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 10.2.4(c)) platí $\lim x_{n+1} = x$, neboli $\lim T(x_n) = x$. Podle 10.7.26 je T spojitá, a tedy dle Heineovy věty platí $\lim T(x_n) = T(x)$. Z věty o jednoznačnosti limity (Věta 10.2.4(b)) plyne, že $T(x) = x$.

Jednoznačnost pevného bodu. Předpokládejme, že x a y jsou pevné body zobrazení T . Pak platí

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \cdot \varrho(x, y).$$

Protože $\gamma < 1$, musí platit $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$. Odtud plyne, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ■

10.7.29. Poznámka. V matematice existuje celá řada vět o pevném bodě. Pro ilustraci uvedme bez důkazu známou Brouwerovu² větu o pevném bodě. Necht K je

²Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

neprázdná konvexní kompaktní podmnožina \mathbb{R}^n a $f: K \rightarrow K$ je spojitý. Potom má f pevný bod. V tomto případě ale nemusí být pevný bod jednoznačně určen.

Baireova věta.

10.7.30. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že množina A je

- **první kategorie** v P , jestliže existuje posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ řídkých množin v P taková, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,
- **druhé kategorie** v P , jestliže není první kategorie,
- **residuální** v P , jestliže $P \setminus A$ je první kategorie v P .

10.7.31. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Množina A je první kategorie v P právě tehdy, když existuje spočetný systém \mathcal{A} řídkých množin v P takový, že $A = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud je totiž A množina první kategorie, pak stačí položit $\mathcal{A} = \{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, kde A_n jsou řídké množiny z předchozí definice. Obráceně, pokud \mathcal{A} je příslušný spočetný systém, můžeme jeho prvky uspořádat do posloupnosti (Lemma 1.6.18(b)) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud by byl \mathcal{A} konečný, pak popužijeme prázdnou množinu v roli některých A_n . Pak bude platit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

10.7.32. Příklady. Dokažte, že

- (a) prostor \mathbb{Q} je první kategorie v \mathbb{R} ,
- (b) množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je residuální v \mathbb{R} ,
- (c) množina $\mathcal{C}([a, b])$ je první kategorie v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$.

Řešení. (a) Pro každé $r \in \mathbb{Q}$ je jednobodová množina $\{r\}$ řídká v \mathbb{R} podle Příkladu 10.3.42(a). Navíc platí

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}.$$

Množina \mathbb{Q} je tedy spočetným sjednocením řídkých množin, tudíž je první kategorie v \mathbb{R} .

- (b) Tvrzení je přímým důsledkem již dokázaného tvrzení (a).
- (c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$A_n = \{f \in \mathcal{C}([a, b]); \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq n\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina A_n řídká v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. Důkaz lze provést obdobně jako v Příkladu 10.3.45(a). Necht $g \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom podle Věty 4.3.11 je g omezená na $[a, b]$. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $g \in A_n$. Odtud vyplývá, že $\mathcal{C}([a, b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Množina $\mathcal{C}([a, b])$ je tudíž první kategorie v $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\text{int}})$. ♣

10.7.33. Věta (vlastnosti množin první kategorie). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- (a) Jestliže množina $A_n \subset P$ je první kategorie v P pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ první kategorie v P .
- (b) Jestliže je $A \subset P$ první kategorie v P a $B \subset A$, potom je B první kategorie v P .

Důkaz. (a) Podle předpokladu a 10.7.31 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ spočetný systém \mathcal{A}_n , jehož prvky jsou řídké množiny v P a který splňuje $A_n = \bigcup \mathcal{A}_n$. Položme $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Potom je systém \mathcal{A} spočetným sjednocením spočetných systémů, a tedy je podle Věty 1.6.19(b) také spočetný. Navíc \mathcal{A} obsahuje zřejmě pouze řídké množiny v P a platí $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Podle 10.7.31 je množina A první kategorie.

(b) Podle předpokladu existují množiny A_n , $n \in \mathbb{N}$, řídké v P , které splňují $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $B_n = A_n \cap B$. Potom je podle Věty 10.3.46(a) množina B_n řídká v P pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Množina B je tedy první kategorie v P . ■

10.7.34. Věta (Baire³). Necht (P, ρ) je úplný metrický prostor a $G \subset P$ je neprázdňá otevřená množina. Potom je G druhé kategorie v (P, ρ) .

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že G je první kategorie v P . Existují tedy množiny A_n , $n \in \mathbb{N}$, které jsou řídké v P a platí $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zkonstruujeme otevřené koule $B(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $B(x_1, r_1) \subset G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

- $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \setminus A_n$,
- $r_n \in (0, \frac{1}{n})$.

Konstrukce. Množina G je neprázdňá, a proto můžeme zvolit $x_1 \in G$. Potom díky otevřenosti G existuje $r_1 \in (0, 1)$ takové, že $B(x_1, r_1) \subset G$. Nyní předpokládejme, že jsme již zkonstruovali koule $B(x_n, r_n)$. Podle Věty 10.3.44 nalezneme neprázdňou otevřenou množinu $H \subset B(x_n, r_n)$ takovou, že $H \cap A_n = \emptyset$. Zvolme $x_{n+1} \in H$. Potom existuje $r_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset H$. Pak platí $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1})$ podle Příkladu 10.3.25. Máme tedy také $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n)$. Tím je konstrukce hledané posloupnosti koulí provedena.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\text{diam } \overline{B(x_n, r_n)} \leq \frac{2}{n}$. Odtud plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \overline{B(x_n, r_n)} = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}$. Podle Věty 10.7.19 existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)}$. Potom $x \in G$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x \notin A_n$, což je spor. ■

10.7.35 (malé množiny). V matematice je často užitečné mít možnost rozlišovat mezi malými a velkými množinami. Pro takové rozlišení je vhodné použít pojem σ -ideálu.

Necht X je množina a $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ je systém podmnožin X . Řekneme, že systém \mathfrak{F} je (**množinový**) σ -ideál, jestliže platí

- (a) pro každou posloupnost $\{A_n\}$ množin z \mathfrak{F} platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$,
- (b) pro každou množinu $A \in \mathfrak{F}$ a množinu $B \subset A$ platí $B \in \mathfrak{F}$.

³René-Louis Baire (1874-1932)

Na množiny, které patří do daného σ -ideálu \mathfrak{F} , pak pohlížíme jako na malé množiny. Podle předchozí definice pak vidíme, že *spočetné* sjednocení malých množin je také malá množina a podmnožina malé množiny je opět malá. To, zda je množina A malá, nebo ne, záleží na použitém σ -ideálu. Důležitým příkladem σ -ideálu je systém spočetných podmnožin dané množiny X (vizte Větu 1.6.19(a),(b)). Dalším důležitým příkladem jsou lebesgueovsky nulové množiny v prostoru \mathbb{R}^n a konečně i množiny první kategorie v daném metrickém prostoru tvoří podle Věty 10.7.33 σ -ideál.

Pokud je σ -ideál $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ netriviální v tom smyslu, že $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ a $X \notin \mathfrak{F}$, pak lze \mathfrak{F} použít k existenčním důkazům. Chceme-li ukázat, že v množině X existuje prvek, který má jistou vlastnost V , stačí ukázat, že množina

$$A = \{x \in X; x \text{ nesplňuje } V\}$$

patří do \mathfrak{F} . Pak je totiž $X \setminus A$ neprázdná. V některých situacích je existenční důkaz tohoto typu jednodušší než přímá konstrukce hledaného prvku. V následujícím paragrafu se podíváme podrobněji na tuto metodu v případě množin první kategorie.

10.7.36 (metoda kategorií). Necht X je množina a $V(x)$, $x \in X$ je nějaká výroková forma na X . Chceme-li nalézt $x \in X$ takové, že platí $V(x)$, stačí na X nalézt metriku ϱ takovou, že metrický prostor (X, ϱ) je úplný a dokázat, že vzhledem k této metrice je množina $Z = \{y \in X; \neg V(y)\}$ první kategorie. Podle Baireovy věty pak neplatí $X = Z$, protože úplný prostor není první kategorie. Existuje tedy prvek $x \in X$ splňující $V(x)$. Množina všech takových x je dokonce residuální v X .

Metodu kategorií ilustrujme následujícím příkladem.

10.7.37. Příklad. Dokažte, že existuje spojitá funkce na $[0, 1]$, která nemá v žádném bodě intervalu $[0, 1]$ vlastní derivaci.

Řešení. Množinu funkcí z $\mathcal{C}([0, 1])$, které mají alespoň v jednom bodě vlastní derivaci, označme A . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme pomocnou množinu následujícím způsobem

$$A_n = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \forall h \in (0, \frac{1}{n}): |f(x+h) - f(x)| \leq nh\}.$$

Ukážeme, že množiny A_n jsou řídké a platí $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Odtud plyne, že A je první kategorie. Poněvadž $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ je úplný metrický prostor (Příklad 10.7.12), dostáváme podle Baireovy věty (Věta 10.7.34), že existuje funkce $f \in \mathcal{C}([0, 1]) \setminus A$.

Inkluze $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Předpokládejme, že $f \in A$. Potom existuje $x \in (0, 1)$ takové, že $f'(x)$ je vlastní. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $(x, x + \delta) \subset [0, 1]$ a pro každé $h \in (0, \delta)$ a platí

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < 1.$$

Nyní nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > \max\{\frac{1}{\delta}, |f'(x)| + 1\}$. Potom $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ a pro každé $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \cdot h < (|f'(x)| + 1) \cdot h \leq nh.$$

Odtud plyne, že $f \in A_n$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina A_n uzavřená v $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$. Předpokládejme, že $\{f_k\}$ je posloupnost funkcí z množiny A_n , která v metrice ϱ_{sup} konverguje k funkci $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ takové, že pro každé $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí $|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leq nh$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (Věta 2.4.7) existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_j}\}$ z posloupnosti $\{x_k\}$ s limitou $x^* \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Pro zjednodušení zápisu položme $g_j = f_{k_j}$ a $y_j = x_{k_j}$ pro $j \in \mathbb{N}$. Zvolme nyní $h \in (0, \frac{1}{n})$ a $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\{g_j\}$ konverguje k f v supremové metrice, můžeme nalézt j_0 takové, že platí

$$\forall x \in [0, 1]: |g_{j_0}(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (10.22)$$

Ze spojitosti f a vztahu $\lim y_j = x^*$ můžeme po j_0 navíc požadovat

$$\begin{aligned} |f(x^* + h) - f(y_{j_0} + h)| &< \varepsilon, \\ |f(x^*) - f(y_{j_0})| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Z definice množiny A_n plyne

$$|g_{j_0}(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0})| \leq nh.$$

Použitím (10.22) dostaneme

$$\begin{aligned} |g_{j_0}(y_{j_0}) - f(y_{j_0})| &< \varepsilon, \\ |g_{j_0}(y_{j_0} + h) - f(y_{j_0} + h)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Potom pomocí trojúhelníkové nerovnosti a výše uvedených odhadů obdržíme

$$\begin{aligned} |f(x^* + h) - f(x^*)| &\leq |f(x^* + h) - f(y_{j_0} + h)| + |f(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0} + h)| \\ &\quad + |g_{j_0}(y_{j_0} + h) - g_{j_0}(y_{j_0})| + |g_{j_0}(y_{j_0}) - f(y_{j_0})| \\ &\quad + |f(y_{j_0}) - f(x^*)| < nh + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, platí $|f(x^* + h) - f(x^*)| \leq nh$. Odtud plyne, že f patří do množiny A_n . Tím je důkaz uzavřenosti A_n proveden.

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak je množina A_n řídká v $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$. Podle předchozího je množina A_n uzavřená, a proto k důkazu její řídkosti stačí ukázat, že množina $\mathcal{C}([0, 1]) \setminus A_n$ je hustá. Zvolme funkci neprázdnou otevřenou množinu G v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$. Zvolme $f \in G$ a k ní nalezneme $\varepsilon > 0$ splňující $B(f, \varepsilon) \subset G$. Nyní stačí nalézt funkci $g \in B(f, \varepsilon) \setminus A_n$.

K funkci f nalezneme nejprve funkci \tilde{f} , která bude po částech afinní a bude blízko k funkci f v supremové metrice. K funkci \tilde{f} pak přičteme funkci, která bude velmi rychle oscilovat, ale přitom bude nabývat malých hodnot. Tak dostaneme hledanou funkci g . Ukažme si tento postup podrobně.

Funkce f je stejnoměrně spojitá podle Věty 10.6.19. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \delta: |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (10.23)$$

Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[0, 1]$ takové, že $v(D) < \delta$. (Norma dělení $v(D)$ byla zavedena v Definicí 9.2.1.) Definujme funkci $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby $f(x_i) = \tilde{f}(x_i)$ pro každé $i \in \{0, \dots, m\}$ a pokud $x \in (x_{i-1}, x_i)$, kde $i \in \{1, \dots, m\}$, pak

$$\tilde{f}(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Funkce \tilde{f} je spojitá, neboť je spojitá na každém z intervalů $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Pokud $x \in [0, 1]$, pak existuje $i \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a s použitím (10.23) můžeme počítat

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{f}(x)| &= \left| f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \right| \\ &\leq |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Označme

$$K = \max \left\{ \left| \frac{\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right|; i \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ platí

$$|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| = \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(y - x) \right| \leq K|y - x|. \quad (10.24)$$

Potom pro každé $x, y \in [0, 1]$, platí $|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| \leq K|y - x|$. Skutečně, zvolme $x, y \in [0, 1]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \leq y$. Nalezneme $i, j \in \{1, \dots, m\}$ taková, že $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a $y \in [x_{j-1}, x_j]$. Potom máme $i \leq j$ a

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| &\leq |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x_{j-1})| + \sum_{l=i}^{j-1} |\tilde{f}(x_l) - \tilde{f}(x_{l-1})| + |\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x)| \\ &\leq K|y - x_{j-1}| + \sum_{l=i}^{j-1} K|x_l - x_{l-1}| + K|x_i - x| = K|y - x|. \end{aligned}$$

Zvolme konstantu L tak, aby platilo

$$L > \max \left\{ \frac{4\pi(K+n)}{\varepsilon}, \pi n \right\}. \quad (10.25)$$

Funkci $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definujme předpisem

$$g(x) = \tilde{f}(x) + \frac{\varepsilon}{4} \sin(Lx).$$

Potom je g spojitá a pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - \tilde{f}(x)| + |\tilde{f}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Máme tedy $g \in B(f, \varepsilon)$. Zbývá ukázat, že $g \notin A_n$. Zvolme libovolně $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Pro $h \in (0, \frac{1}{n})$ platí

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(Lx + Lh) - \sin(Lx)| - |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(Lx + Lh) - \sin(Lx)| - Kh \\ &= \frac{\varepsilon}{2} |\sin(\frac{1}{2}Lh)| \cdot |\cos(Lx + \frac{1}{2}Lh)| - Kh. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Díky (10.25) platí $\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}L\frac{1}{n}$, a proto můžeme nelézt $h^* \in (0, \frac{1}{n})$ takové, že $\frac{1}{2}Lh^* \leq \frac{\pi}{2}$ a $Lx + \frac{1}{2}Lh^* = k\pi - \frac{\pi}{4}$ nebo $Lx + \frac{1}{2}Lh^* = k\pi + \frac{\pi}{4}$ pro vhodné $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak platí $|\cos(Lx + \frac{1}{2}Lh^*)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a

$$\begin{aligned} |g(x+h^*) - g(x)| &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\sin(\frac{1}{2}Lh^*)| - Kh^* \quad (\text{volba } h^*) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} \frac{2}{\pi} \frac{1}{2}Lh^* - Kh^* \quad (\text{Příklad 5.4.16}) \\ &= \left(\frac{\varepsilon L}{4\pi} - K\right)h^* > nh^*. \quad (\text{volba } L \text{ podle (10.25)}) \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $g \notin A_n$. ♣

10.7.33. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a množina A_n je residuální v P pro každé $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Potom je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ residuální v P .
- (b) Je-li navíc P druhé kategorie, pak je $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdná.

Důkaz. (a) Platí $P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus A_n)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $P \setminus A_n$ první kategorie. Podle Věty 10.7.33 je tedy množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus A_n)$ první kategorie. Odtud plyne residualita množiny $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(b) Podle (a) je množina $P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ první kategorie. Poněvadž je P druhé kategorie, musí být $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdná. ■

Množiny typu F-sigma a G-delta.

10.7.39. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je

- **typu F_σ** v P , jestliže existují množiny $F_n, n \in \mathbb{N}$, uzavřené v P takové, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$,
- **typu G_δ** v P , jestliže existují množiny $G_n, n \in \mathbb{N}$, otevřené v P takové, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

10.7.40. Věta (vztah množin typu G_δ a F_σ). Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom A je typu G_δ v P právě tehdy, když $P \setminus A$ je typu F_σ v P .

Důkaz. \Rightarrow Pro A typu G_δ nalezneme posloupnost množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v P splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = P \setminus G_n$. Podle Věty 10.3.13

je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n uzavřená v P . Podle De Morganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

takže množina $P \setminus A$ je typu F_σ v P .

← Důkaz této implikace je obdobný. ■

10.7.41. Příklady. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte, že je-li $A \subset P$ uzavřená (resp. otevřená) v P , potom je zároveň typu G_δ i F_σ v P .

Řešení. Množina A je uzavřená v P . Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $F_n = A$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě množina F_n uzavřená v P a platí $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina A je tedy typu F_σ .

Dokážeme nyní, že množina A je také typu G_δ . Pokud je A prázdná, potom je zřejmě typu G_δ . Předpokládejme tedy, že A je neprázdná. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$G_n = \{x \in P; \text{dist}(x, A) < \frac{1}{n}\}.$$

Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená v P podle Věty 10.4.6, neboť funkce $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ je spojitá, jak plyne z Příkladu 10.7.27. Navíc zřejmě platí $A \subset G_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a podle Věty 10.3.24(c) je $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Množina A je tedy typu G_δ v P .

Množina A je otevřená v P . Tvrzení plyne z předchozího a Vět 10.3.13 a 10.7.40. ♣

10.7.42. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je hustá množina typu G_δ . Potom je A residuální v P .

Důkaz. Pro množinu A existuje posloupnost $\{G_n\}$ otevřených množin v P splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Protože je množina A hustá v P , plyne z Věty 10.3.39, že množina G_n , $n \in \mathbb{N}$, která A obsahuje, je také hustá v P . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je podle Věty 10.3.47 množina $P \setminus G_n$ řídká v P . Navíc platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n),$$

takže $P \setminus A$ je první kategorie v P , neboli A je v tomto prostoru residuální. ■

10.7.43. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a Q je G_δ podmnožina P . Potom je (Q, ϱ) prostor druhé kategorie v sobě.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že (Q, ϱ) je první kategorie v (Q, ϱ) . Je-li množina $H \subset Q$ řídká v (Q, ϱ) , pak lze s pomocí Věty 10.3.44 snadno nahlédnout, že je H řídká i v prostoru (\overline{Q}, ϱ) . Odtud plyne, že Q je první kategorie i v prostoru (\overline{Q}, ϱ) . Podle Věty 10.7.42 je Q residuální v (\overline{Q}, ϱ) , a tedy $\overline{Q} \setminus Q$ je první kategorie v (\overline{Q}, ϱ) . Odtud plyne, že (\overline{Q}, ϱ) je sjednocením dvou množin první kategorie v (\overline{Q}, ϱ) , a tedy jde o množinu první kategorie v (\overline{Q}, ϱ) . Prostor (Q, ϱ) je však úplný podle Věty 10.7.18, a je tedy druhé kategorie podle Věty 10.7.34, což je spor. ■

10.7.44. Věta. Necht (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $A \subset P$ je množina typu F_σ v P , která je druhé kategorie v P . Potom má A neprázdný vnitřek.

Důkaz. Podle předpokladu existují uzavřené množiny $F_n \subset P, n \in \mathbb{N}$, takové, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina A není první kategorie, a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} není řídká. To znamená, že množina $P \setminus \overline{F_{n_0}} = P \setminus F_{n_0}$ není hustá. Existuje tedy neprázdná otevřená množina, která je obsažena v F_{n_0} . Vnitřek množiny F_{n_0} , a tedy i množiny A , je tak neprázdný. ■

10.7.45. Věta (charakterizace množin druhé kategorie). Metrický prostor (P, ϱ) je druhé kategorie právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených hustých množin v (P, ϱ) platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Důkaz. \Rightarrow Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že existuje posloupnost otevřených hustých množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle Věty 10.3.47 množina $P \setminus G_n$ řídká v (P, ϱ) . Navíc platí

$$P = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Odtud plyne, že prostor (P, ϱ) je první kategorie, a tedy není druhé kategorie.

\Leftarrow I tuto implikaci dokážeme nepřímým důkazem. Předpokládejme, že prostor (P, ϱ) je první kategorie. Potom existuje posloupnost jeho řídkých podmnožin $\{A_n\}$ splňující $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Podle Věty 10.3.46(c) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $\overline{A_n}$ řídká v (P, ϱ) . Navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $G_n = P \setminus \overline{A_n}$. Pak je Věty 10.3.13 a Definice 10.3.41 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená a hustá v (P, ϱ) . Dále platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_n}) = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = P \setminus P = \emptyset.$$

■

10.7.46. Jestliže $\{G_n\}$ je posloupnost množin typu G_δ v metrickém prostoru (P, ϱ) , pak množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ nemusí být v tomto prostoru typu G_δ . Množiny tohoto tvaru nazýváme **typu** $G_{\delta\sigma}$. Všimněme si, že každá množina typu G_δ je také typu $G_{\delta\sigma}$. Obdobně definujeme množiny **typu** $F_{\sigma\delta}$ jako množiny tvaru $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $\{F_n\}$ je posloupnost množin typu F_σ v P . Takto můžeme postupovat dále a definovat množiny typu $G_{\delta\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta\sigma}, F_{\sigma\delta\sigma\delta}, \dots$. Opakovaným používáním operací spočetného průniku a spočetného sjednocení vytváříme stále větší systémy podmnožin P . Studium těchto systémů množin se zabývá *deskriptivní teorie množin*, jejíž základy jsou vyloženy například v [15].

10.8. Separabilní prostory

10.8.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **separabilní**, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

10.8.2. V separabilním metrickém prostoru P existuje podle definice spočetná hustá množina D . Prvky prostoru P , kterých může být nespočetně mnoho, lze tedy s libovolnou přesností aproximovat prvky z množiny D , která je spočetná. To je v některých konstrukcích podstatné. Ačkoliv v našem textu využijeme separabilitu jen několikrát, jde o důležitou a často používanou vlastnost.

Příklady separabilních prostorů.

10.8.3. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že prostor \mathbb{R}^n je separabilní.

Řešení. Množina \mathbb{Q} je spočetná a podle Příkladu 10.3.36 hustá v \mathbb{R} . Množina bodů z \mathbb{R}^n s racionálními souřadnicemi, tj. množina \mathbb{Q}^n , je spočetná podle Věty 1.6.19(c). Ukážeme, že množina \mathbb{Q}^n je hustá v \mathbb{R}^n . Zvolme $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme díky hustotě \mathbb{Q} v \mathbb{R} prvek $y_i \in \mathbb{Q}$ takový, že $|y_i - x_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Pro $y = [y_1, \dots, y_n]$, pak platí $y \in \mathbb{Q}^n$ a

$$\varrho_2(y, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon.$$

Tím je hustota \mathbb{Q}^n v \mathbb{R}^n ověřena. ♣

10.8.4. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že prostor \mathbb{C}^n je separabilní.

Řešení. Množina $A = \{x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{Q}\}$ je obrazem množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $(x, y) \mapsto x + iy$, které je definováno na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s hodnotami v \mathbb{C} . Podle Věty 1.6.19(d) je pak množina A spočetná. Pak i kartézský součin $A^n \subset \mathbb{C}^n$ je podle Věty 1.6.19(c) spočetná množina. Snadno lze ukázat, že množina A je hustá v \mathbb{C} a pak také že množina A^n je hustá v \mathbb{C}^n . Obě ověření lze provést podobně jako Příkladu 10.8.3. ♣

10.8.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ je separabilní.

Řešení. Necht $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Funkci $f_a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme jako funkci, která je na každém intervalu $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, afinní, tj. tvaru $x \mapsto ax + b$, a splňuje $f(\frac{i}{n}) = a_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$. Jinými slovy pro $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ platí

$$f_a(x) = a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{\frac{1}{n}} \left(x - \frac{i-1}{n}\right).$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ je funkce f_a spojitá na $[0, 1]$, a tedy podle Věty 10.6.19 je i stejnoměrně spojitá na intervalu $[0, 1]$. Množina funkcí $A_n = \{f_a; a \in \mathbb{Q}^{n+1}\}$ je spočetná pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 1.6.19 je spočetná i množina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ukážeme, že A je hustá v $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$.

Nechť $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu díky stejnoměrné spojitosti f nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \frac{1}{n} : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{5}\varepsilon. \quad (10.27)$$

Pro každé $i \in \{0, \dots, n\}$ nalezneme podle Příkladu 10.3.36 $a_i \in \mathbb{Q}$ takové, že $|f(\frac{i}{n}) - a_{i+1}| < \frac{1}{5}\varepsilon$. Označme $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$. Pro $x \in [0, 1]$ nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$. Potom pomocí (10.27) a volby $a_i, i = 1, \dots, n+1$, odhadneme

$$\begin{aligned} |f(x) - f_a(x)| &\leq |f(x) - f(\frac{j-1}{n})| + |f(\frac{j-1}{n}) - a_j| + |a_j - f_a(x)| \\ &\leq \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon + |a_j - f_a(x)| \\ &= \frac{2}{5}\varepsilon + |a_j - a_j - \frac{a_{j+1} - a_j}{\frac{1}{n}}(x - \frac{j-1}{n})| \\ &\leq \frac{2}{5}\varepsilon + |a_{j+1} - a_j| \\ &\leq \frac{2}{5}\varepsilon + |a_{j+1} - f(\frac{j}{n})| + |f(\frac{j}{n}) - f(\frac{j-1}{n})| + |f(\frac{j-1}{n}) - a_j| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\varrho_{\text{sup}}(f, f_a) \leq \varepsilon$. Množina A je tedy hustá, a tedy je prostor $(\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{sup}})$ separabilní. ♣

10.8.6. Příklad. Dokažte, že diskretní metrický prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

Řešení. Necht P je množina a ϱ je diskretní metrika na P . Podle Příkladu 10.3.38 je jedinou hustou podmnožinou prostoru (P, ϱ) množina P . Odtud ihned plyne tvrzení. ♣

10.8.7. Příklad. Dokažte, že Banachův prostor c_0 je separabilní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu D_n jako množinu posloupností $\{x_j\}$, které mají všechny členy racionální a pro každé $j > n$ platí $x_j = 0$. Množina $D_n, n \in \mathbb{N}$, je podmnožinou c_0 a je prostým obrazem spočetné množiny \mathbb{Q}^n při zobrazení

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots),$$

a tedy je spočetná podle Věty 1.6.19(d). Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Množina D je spočetná podle Věty 1.6.19(b). Dokážeme, že D je hustá v c_0 .

Nechť $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je prvek z c_0 . Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|y_j| < \varepsilon$ pro každé $j > n_0$. Dále pro každé $j \in \{1, \dots, n_0\}$ nalezneme $r_j \in \mathbb{Q}$ splňující $|r_j - y_j| < \varepsilon$. Definujme posloupnost $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ předpisem

$$x_j = \begin{cases} r_j & \text{pro } j \in \{1, \dots, n_0\}, \\ 0 & \text{pro } j > n_0. \end{cases}$$

Potom platí $x \in D_{n_0}$, a tedy $x \in D$. Dále platí

$$\begin{aligned} \|x - y\|_\infty &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j| \\ &= \max\left\{\sup_{j \leq n_0} |x_j - y_j|, \sup_{j > n_0} |0 - y_j|\right\} \\ &< \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Množina D je tedy hustá v c_0 . Odtud vyplývá, že prostor c_0 je separabilní. ♣

Základní vlastnosti separabilních prostorů.

10.8.8. Věta. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $A \subset P$ je nespočetná množina taková, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \varepsilon$. Potom P není separabilní.

Důkaz. Předpokládejme, že D je libovolná hustá množina v P . Potom pro každé $x \in A$ existuje $d_x \in D \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Necht $x, y \in A$, $x \neq y$. Potom platí $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$, neboť kdyby existoval prvek $z \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2})$, pak bychom dostali

$$\varepsilon \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Odtud plyne, že $d_x \neq d_y$. To znamená, že zobrazení $F: A \rightarrow D$, které každému $x \in A$ přiřazuje prvek $d_x \in D$, je prosté. Tedy množina A má stejnou mohutnost jako množina $F(A)$. Protože A je nespočetná množina, je nespočetná i množina $F(A)$. Dále víme, že $F(A) \subset D$. Odtud vyplývá, že i D je nespočetná množina. Dokázali jsme, že prostor P neobsahuje žádnou spočetnou hustou množinu. Tudíž prostor P není separabilní. ■

10.8.9. Příklad. Dokažte, že Banachův prostor ℓ_∞ není separabilní.

Řešení. Pro $A \subset \mathbb{N}$ uvažujme charakteristickou funkci $\chi_A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zavedenou v 1.4.20. Funkce χ_A je tedy posloupnost, jejíž členy nabývají hodnoty 0 nebo 1. Pokud $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \neq B$, pak zřejmě platí $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$. Množina všech podmnožin \mathbb{N} je nespočetná (Věta 1.6.7), a z Věty 10.8.8 tedy vyplývá, že prostor ℓ_∞ není separabilní. ♣

10.8.10. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a \mathcal{B} je systém obsahující otevřené podmnožiny P . Řekneme, že \mathcal{B} je **báze otevřených množin** prostoru P , jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ takový, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

10.8.11. Každou otevřenou množinu můžeme obdržet jako sjednocení množin báze, přičemž systém báze může být podstatně menší než systém všech otevřených množin. Prázdná množina je rovna sjednocení prázdného systému množin, a proto báze nemusí, ale může, obsahovat prázdnou množinu.

10.8.12. Věta (charakterizace separabilních prostorů). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Potom je P separabilní právě tehdy, když má spočetnou bázi otevřených množin.

Důkaz. \Rightarrow Necht D je spočetná hustá podmnožina P . Položme

$$\mathcal{B} = \{B(x, r); x \in D, r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}.$$

Množina $D \times \mathbb{Q}$ je spočetná podle Věty 1.6.19(c). Systém \mathcal{B} je obrazem množiny $D \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $F: (x, r) \mapsto B(x, r)$, a tedy je podle Věty 1.6.19(d) také spočetný.

Dokážeme, že \mathcal{B} je bázi otevřených množin P . Množiny v \mathcal{B} jsou otevřené koule, a tedy otevřené množiny. Necht $G \subset P$ je otevřená množina. Položme $\mathcal{B}^* = \{H \in \mathcal{B}; H \subset G\}$. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{B}^* \subset G$. Dokážeme opačnou inkluzi. Předpokládejme, že $x \in G$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset G$. Nalezneme $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap D$ a $r \in (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$. Potom $\varrho(x, y) < r$, takže $x \in B(y, r)$. Dále pro každé $z \in B(y, r)$ platí

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy $B(y, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset G$. Odtud vyplývá, že $B(y, r) \in \mathcal{B}^*$. Protože $x \in B(y, r)$, plyne odtud, že $x \in \bigcup \mathcal{B}^*$. Platí tedy $G = \bigcup \mathcal{B}^*$.

\Leftarrow Necht $\mathcal{B} = \{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná báze neprázdných otevřených množin metrického prostoru (P, ϱ) . Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in B_n$ a položíme $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Množina D je zřejmě spočetná. Předpokládejme, že G je neprázdna otevřená množina. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $B_n \subset G$. Potom máme $x_n \in G$, a tedy $G \cap D \neq \emptyset$. Podle Věty 10.3.39 je tudíž množina D hustá v P . Odtud plyne, že prostor P je separabilní. ■

10.8.13. Věta. Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $Q \subset P$. Potom je metrický prostor (Q, ϱ) separabilní.

Důkaz. Podle Věty 10.8.12 existuje spočetná báze \mathcal{B} otevřených množin prostoru P . Definujme systém $\mathcal{B}_Q = \{Q \cap B; B \in \mathcal{B}\}$. Systém \mathcal{B}_Q spočetný, neboť systém \mathcal{B} je spočetný. Každá množina z \mathcal{B}_Q je otevřená v Q podle Věty 10.3.28. Dokážeme, že \mathcal{B}_Q je bázi otevřených množin prostoru Q .

Předpokládejme, že $G \subset Q$ je otevřená množina v Q . Podle Věty 10.3.28 existuje množina $\tilde{G} \subset P$ otevřená v P splňující $G = \tilde{G} \cap Q$. Pro množinu \tilde{G} nalezneme systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ splňující $\tilde{G} = \bigcup \mathcal{B}^*$. Položme $\mathcal{B}_Q^* = \{Q \cap B; B \in \mathcal{B}^*\}$. Potom zřejmě $\mathcal{B}_Q^* \subset \mathcal{B}_Q$ a $\bigcup \mathcal{B}_Q^* = Q \cap \bigcup \mathcal{B}^* = Q \cap \tilde{G} = G$.

Prostor (Q, ϱ) je separabilní podle Věty 10.8.12, neboť má spočetnou bázi otevřených množin. ■

10.8.14. Věta (totální omezenost a separabilita). Necht (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Podle definice totální omezenosti existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná $\frac{1}{n}$ -sít D_n prostoru P . Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Podle Věty 1.6.19(b) je potom množina D spočetná. Zvolme $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Poněvadž D_n je $\frac{1}{n}$ -sít, existuje $y \in D_n$ takové, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{n}$. Potom $y \in D$ a platí $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Odtud plyne, že D je hustá v P . Prostor P je tedy separabilní. ■

10.8.15. Důsledek. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 10.6.26 a Věty 10.8.14. ■

10.8.16. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) má **Lindelöfovou vlastnost**⁴, jestliže pro každý systém \mathcal{G} otevřených podmnožin P splňující $P = \bigcup \mathcal{G}$ existuje spočetný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

10.8.17. Z Věty 10.6.28 plyne, že každý kompaktní metrický prostor má Lindelöfovou vlastnost.

10.8.18. Věta. Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor. Potom P má Lindelöfovou vlastnost.

Důkaz. Necht \mathcal{G} je otevřené pokrytí P . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že systém \mathcal{G} je neprázdný. Zvolme $G_0 \in \mathcal{G}$. Necht $D = \{d_n; n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá podmnožina P . Necht $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{Q}, q > 0$. Jestliže existuje $G \in \mathcal{G}$ splňující $B(d_n, q) \subset G$, potom zvolme jednu z množin G s touto vlastností a označme ji $G_{n,q}$. Jestliže taková množina neexistuje, položme $G_{n,q} = G_0$. Definujme systém \mathcal{G}^* předpisem

$$\mathcal{G}^* = \{G_{n,q}; n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}, q > 0\}.$$

Potom je \mathcal{G}^* zřejmě spočetný a platí $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$. Dokážeme, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

Necht $x \in P$. Protože $P = \bigcup \mathcal{G}$, můžeme nalézt $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$. Díky otevřenosti množiny G nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Díky tomu, že D je hustá množina, nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $d_n \in B(x, \frac{r}{2})$. Nyní nalezneme $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $\varrho(x, d_n) < q < \frac{r}{2}$. Potom $x \in B(d_n, q)$ a pro každé $y \in B(d_n, q)$ platí díky trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(y, x) \leq \varrho(y, d_n) + \varrho(d_n, x) < q + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

takže $B(d_n, q) \subset B(x, r)$. Protože $B(x, r) \subset G$, platí $B(d_n, q) \subset G_{n,q}$. To znamená, že $x \in G_{n,q}$. Protože $G_{n,q} \in \mathcal{G}^*$ a x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$. Prostor P má tedy Lindelöfovou vlastnost. ■

10.9. Souvislé prostory

10.9.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **souvislý**, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **souvislá**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

⁴Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946)

Příklady souvislých prostorů.

10.9.2. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $x \in P$. Potom je množina $\{x\}$ souvislá v P .

Řešení. Prostor P , který je jednobodový, nemůže obsahovat dvě disjunktní neprázdné množiny, a tedy je souvislý. ♣

10.9.3. Příklad. Dokažte, že metrický prostor \mathbb{R} je souvislý.

Řešení. Předpokládejme pro spor, že $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny splňující $G_1 \cup G_2 = \mathbb{R}$. Podle věty o struktuře otevřených množin v \mathbb{R} (Věta 10.3.17) je množina G_1 spočetným sjednocením disjunktních otevřených intervalů. Protože $G_2 \neq \emptyset$, neplatí $G_1 = \mathbb{R}$, a tedy alespoň jeden z krajních bodů alespoň jednoho z těchto intervalů je prvkem \mathbb{R} . Označme tento bod jako a . Potom $a \notin G_1$, a tedy $a \in G_2$. Protože G_2 je otevřená v \mathbb{R} , existuje $r > 0$ takové, že $(a - r, a + r) \subset G_2$. Protože a je krajním bodem některého intervalu ležícího v G_1 , musí platit $(a - r, a + r) \cap G_1 \neq \emptyset$. To je však spor s tím, že množiny G_1 a G_2 jsou disjunktní. ♣

10.9.4. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $P = [0, 1] \cup (2, 3)$ není souvislý.

Řešení. Množina $[0, 1]$ je otevřená v P podle Příkladu 10.3.29. Množina $(2, 3)$ je otevřená v P podle Věty 10.3.28. Metrický prostor P je tedy sjednocením těchto dvou neprázdných disjunktních otevřených množin, a není tedy souvislý. ♣

10.9.5. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je souvislý právě tehdy, když je množina P jednobodová nebo prázdná.

Řešení. \Rightarrow Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že množina P není ani jednobodová ani prázdná, a obsahuje tedy alespoň dva prvky. Necht $x \in P$. Potom jsou množiny $\{x\}$ a $P \setminus \{x\}$ otevřené (Příklad 10.3.14), neprázdné a disjunktní. Množina P je jejich sjednocením, a proto není P souvislý.

\Leftarrow Souvislost prázdného prostoru plyne ihned z definice. Souvislost jednobodového prostoru plyne z Příkladu 10.9.2. ♣

10.9.6. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $H \subset P$. Řekneme, že H je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

10.9.7. V každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou prázdná množina a množina P obojetné. V metrickém prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ jsou množiny $[0, 1]$ a $(2, 3)$ obojetné, což plyne z Příkladu 10.3.29. Každá podmnožina metrického prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je obojetná podle Příkladu 10.3.14.

10.9.8. Věta (charakterizace souvislých prostorů). Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující čtyři výroky ekvivalentní.

- (i) Prostor P není souvislý.
- (ii) Existují dvě neprázdné uzavřené disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset P$ splňující $P = F_1 \cup F_2$.

- (iii) Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq P$.
- (iv) Existuje spojitě surjektivní zobrazení $f : (P, \varrho) \rightarrow (\{0, 1\}, \varrho_{\text{diskr}})$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii) Nalezneme neprázdné disjunktí otevřené množiny G_1 a G_2 splňující $P = G_1 \cup G_2$. Položme $F_1 = G_1$ a $F_2 = G_2$. Podle Věty 10.3.13 jsou množiny F_1 a F_2 uzavřené. Navíc jsou zřejmě disjunktí a neprázdné a platí $P = F_1 \cup F_2$.

(ii) \Rightarrow (iii) Položme $H = F_1$. Potom H je neprázdná, uzavřená a různá od P . Protože F_2 je uzavřená, je H také otevřená, a tedy obojetná.

(iii) \Rightarrow (iv) Položme $f = \chi_H$. Protože $H \neq \emptyset$ a $H \neq P$, je f surjektivní zobrazení. Dokážeme, že f je spojitě. V prostoru $\{0, 1\}$ existují pouze čtyři otevřené množiny, a sice \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$ a $\{0, 1\}$. Podle předpokladu jsou množiny $f^{-1}(\{0\}) = P \setminus H$ i $f^{-1}(\{1\}) = H$ otevřené. Množiny $f^{-1}(\{0, 1\}) = P$ a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ jsou také otevřené. Podle Věty 10.4.6 je tedy f spojitě.

(iv) \Rightarrow (i) Podle Příkladu 10.3.14 jsou množiny $\{0\}$ a $\{1\}$ otevřené. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 10.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(\{0\})$ a $f^{-1}(\{1\})$ jsou otevřené P . Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě neprázdné a disjunktí a platí $P = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. Prostor P tedy není souvislý. ■

10.9.9. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **komponenta**, jestliže A je souvislá a každá množina $B \subset P$ splňující $A \subset B$ a $A \neq B$ je nesouvislá.

10.9.10. Věta (vlastnosti souvislých prostorů). Necht (P, ϱ) je metrický prostor.

- (a) Necht (Q, σ) je metrický prostor a $f : P \rightarrow Q$ je spojitě zobrazení. Necht $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru P . Pak $f(A)$ je souvislá množina v Q .
- (b) Necht $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru P a $A \subset B \subset \bar{A}$. Pak je množina B souvislá v prostoru P . Speciálně, množina \bar{A} je souvislá v P .
- (c) Necht $I \neq \emptyset$ a pro každé $\alpha \in I$ je A_α souvislá množina v P . Necht platí

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Potom je $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ souvislá množina v P .

Důkaz. (a) Předpokládejme pro spor, že množina $f(A)$ není souvislá v Q . Existují tedy neprázdné disjunktí množiny $G_1, G_2 \subset Q$ otevřené v $f(A)$ splňující $f(A) = G_1 \cup G_2$. Ze spojitosti zobrazení $f|_A$ a z Věty 10.4.6 plyne, že množiny $(f|_A)^{-1}(G_1)$ a $(f|_A)^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru (A, ϱ) . Navíc jsou zřejmě neprázdné a disjunktí a platí $A = (f|_A)^{-1}(G_1) \cup (f|_A)^{-1}(G_2)$. Množina A tudíž není souvislá, což je spor s předpokladem.

(b) Předpokládejme pro spor, že $B = F_1 \cup F_2$, přičemž F_1, F_2 jsou neprázdné, disjunktí a uzavřené v B . Podle Věty 10.3.28 jsou množiny $A \cap F_1$ a $A \cap F_2$ uzavřené v A . Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě disjunktí a platí $A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2)$. Množina A je souvislá, a proto je jedna z uvedených množin rovna A . Bez újmy na

obecnosti můžeme předpokládat, že $A \cap F_1 = A$. Platí tedy $A \subset F_1$. Potom podle Věty 10.3.27 máme

$$B = \overline{A} \cap B = \overline{A}^B \subset \overline{F_1}^B = F_1,$$

přičemž poslední rovnost plyne z uzavřenosti množiny F_1 v B . Odtud plyne $B = F_1$, a tedy $F_2 = \emptyset$, což je spor.

(c) Označme $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pro spor předpokládejme, že existují neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2 , které jsou otevřené v X a platí $X = G_1 \cup G_2$. Pak pro každé $\alpha \in I$ máme $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$, přičemž množiny $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ jsou disjunktní a podle Věty 10.3.28 otevřené v metrickém prostoru A_α . Tento metrický prostor je ale souvislý, takže alespoň jedna z množin $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ musí být prázdná a druhá musí být rovna A_α . Dokázali jsme, že pro každé $\alpha \in I$ platí buď $A_\alpha \subset G_1$ nebo $A_\alpha \subset G_2$. Protože ale průnik všech A_α je neprázdný, plyne odtud, že buď pro každé $\alpha \in I$ platí $A_\alpha \subset G_1$ nebo pro každé $\alpha \in I$ platí $A_\alpha \subset G_2$. Množina G_1 nebo G_2 je tudíž prázdná, což je spor. ■

10.9.11. Věta (charakterizace souvislých množin v \mathbb{R}). Necht $A \subset \mathbb{R}$. Pak A je souvislá v \mathbb{R} právě tehdy, když A je interval.

Důkaz. \Rightarrow Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že A není interval. Podle Věty 1.5.23 existují body $x, y \in A$ a $z \in \mathbb{R}$, $z \notin A$, takové, že $x < z < y$. Potom

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, \infty)).$$

Množiny $A \cap (-\infty, z)$ a $A \cap (z, \infty)$ jsou zřejmě neprázdné a disjunktní. Podle Věty 10.3.28 jsou navíc otevřené v A . Množina A tedy není souvislá.

\Leftarrow Pro spor předpokládejme, že interval A není souvislá množina. Existují tedy disjunktní neprázdné množiny F_1, F_2 , které jsou uzavřené v A a $F_1 \cup F_2 = A$. Existují tedy body $a \in F_1$ a $b \in F_2$. Platí $a \neq b$, neboť F_1 a F_2 jsou disjunktní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b$. Označme $\sigma = \sup([a, b] \cap F_1)$. Z definice suprema vyplývá, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in F_1$ s vlastností $\sigma - \varepsilon < x \leq \sigma$. Poněvadž F_1 je uzavřená v A , platí $\sigma \in F_1$. Odtud plyne, že $\sigma < b$. Potom musí platit $(\sigma, b] \subset F_2$. Množina F_2 je uzavřená v A , a proto odtud plyne, že platí $\sigma \in F_2$. Máme tedy $\sigma \in F_1 \cap F_2$, což je spor. ■

Komponenta.

10.9.12. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset P$ je **komponenta** (P, ϱ) , jestliže M je maximální souvislá množina. **Komponentou** množiny $A \subset P$ rozumíme komponentu prostoru (A, ϱ) .

10.9.13. Maximalitu z předchozí definice uvažujeme vzhledem k uspořádání inkluzí. Množina M je tedy komponentou prostoru P , jestliže je souvislá a pro každou souvislou množinu $B \subset P$ splňující $A \subset B$ platí $A = B$.

10.9.14. Věta. Necht (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor a \mathcal{S} je množina všech komponent P . Potom \mathcal{S} obsahuje pouze neprázdné uzavřené množiny, je disjunktní a $\bigcup \mathcal{S} = P$.

Důkaz. Jestliže $S \in \mathfrak{S}$, potom je S neprázdná. Jinak bychom totiž obdrželi spor s maximalitou, protože P je neprázdný, existuje $x \in P$ a množina $\{x\}$ je souvislá.

Uzavřenost. Pokud $S \in \mathfrak{S}$, potom \overline{S} je souvislá podle Věty 10.9.10(b) a $S \subset \overline{S}$. Vzhledem k maximalitě musí být $S = \overline{S}$, a tedy je S uzavřená.

Disjunktnost. Předpokládejme pro spor, že existují $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$, $S_1 \neq S_2$, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Potom je podle Věty 10.9.10(c) množina $S_1 \cup S_2$ souvislá. Dále platí $S_1 \subsetneq S_1 \cup S_2$ nebo $S_2 \subsetneq S_1 \cup S_2$. V prvním případě dostáváme spor s maximalitou komponenty S_1 a ve druhém s maximalitou komponenty S_2 .

Rovnost $\bigcup \mathfrak{S} = P$. Zvolme $x \in P$. Definujme pomocný systém

$$\mathcal{A} = \{A \subset P; A \text{ je souvislá a } x \in A\}.$$

Platí $\{x\} \in \mathcal{A}$, a tedy množina $\bigcup \mathcal{A}$ je neprázdná. Množina $\bigcup \mathcal{A}$ je souvislá podle Věty 10.9.10(c) a je zřejmě maximální. Platí tedy $\bigcup \mathcal{A} \in \mathfrak{S}$, a tedy $x \in \bigcup \mathfrak{S}$. ■

10.9.15. Věta. Necht X je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom komponenty G jsou otevřené v X .

Důkaz. Necht $S \subset X$ je komponentou množiny S . Zvolme $x \in S$. Díky otevřenosti G nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset G$. Množina $B(x, \varepsilon)$ je souvislá podle Příkladu 10.9.21, a tedy $S \cup B(x, \varepsilon)$ je souvislá podle Věty 10.9.10(c). Z maximality S ovšem vyplývá $B(x, \varepsilon) \subset S$. To znamená, že bod x je vnitřním bodem S . Bod x byl zvolen libovolně v množině S , a tedy S je otevřená. ■

Křivková souvislost.

10.9.16. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $\gamma: [a, b] \rightarrow P$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojitě.

10.9.17. Křivkou intuitivně rozumíme čáru v rovině nebo prostoru, případně v nějakém obecnějším prostoru. Matematicky by se tedy mělo jednat o podmnožinu metrického prostoru s jistými vlastnostmi. V předchozí definici však křivkou rozumíme spojitě zobrazení. Tento přístup má své výhody, jak bude vidět později, zejména pak v Kapitole ??.

10.9.18. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že P je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $a, b \in P$ existuje křivka $\gamma: [0, 1] \rightarrow P$ taková, že $\gamma(0) = a$ a $\gamma(1) = b$. Množina $A \subset P$ je **křivkově souvislá** v P , jestliže metrický prostor (A, ϱ) je křivkově souvislý.

10.9.19. Věta. Necht (P, ϱ) je křivkově souvislý metrický prostor. Potom je P souvislý.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že P není souvislý. Potom existují neprázdne disjunktní množiny G_1, G_2 otevřené v P splňující $P = G_1 \cup G_2$. Zvolme body $a \in G_1$ a $b \in G_2$. Pak existuje spojitě zobrazení $f: [0, 1] \rightarrow P$ taková, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Potom ale $[0, 1] = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 10.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(G_1)$ a $f^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru $[0, 1]$.

Zároveň jsou zřejmě disjunktní a neprázdné. Interval $[0, 1]$ je tedy nesouvislý. To je ale spor s Větou 10.9.11. ■

10.9.20. Věta. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom je G souvislá právě tehdy, když je křivkově souvislá.

Důkaz. \Rightarrow Pokud je G prázdná, pak implikace zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $G \neq \emptyset$. Zvolme $x \in G$ libovolně a definujme množinu A jako množinu všech bodů $y \in G$, pro které existuje spojitě zobrazení $f: [0, 1] \rightarrow X$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = y$.

Množina A je otevřená v G . Předpokládejme $y \in A$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(y, r) \subset G$. Necht $z \in B(y, r)$. Definujme zobrazení $g: [0, 1] \rightarrow X$ předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ y + (2t - 1)(z - y) & \text{pro } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné zkontrolovat, že zobrazení g je spojitě. Platí také $g([0, \frac{1}{2}]) = f([0, 1]) \subset G$ a $g((\frac{1}{2}, 1]) \subset B(y, r)$. Máme tedy $g([0, 1]) \subset G$. Protože platí $g(0) = f(0) = x$ a $g(1) = z$, dostáváme $z \in A$. Ukázali jsme tak $B(y, r) \subset A$, a tedy A je otevřená v X , takže je také otevřená v G .

Množina A je uzavřená v G . Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A , která konverguje k prvku $x \in G$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Poněvadž $\lim x_n = x$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in B(x, r)$. Díky podmínce $x_n \in A$ nalezneme spojitě zobrazení $f: [0, 1] \rightarrow X$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = x_n$. Definujme zobrazení $g: [0, 1] \rightarrow X$ předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_n + (2t - 1)(x - x_n) & \text{pro } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné zkontrolovat, že zobrazení g je spojitě a že platí $g([0, \frac{1}{2}]) = f([0, 1]) \subset G$ a $g((\frac{1}{2}, 1]) \subset B(x, r)$. Odtud plyne $x \in A$, čímž je ověřena uzavřenost A v G .

Množina A je neprázdná, neboť $x \in A$, o čemž svědčí konstantní zobrazení $f(t) = x, t \in [0, 1]$. To znamená, že A je neprázdná obojetná množina v G . Množina G je souvislá, takže musí platit $A = G$. Tím je ověřena definice křivkové souvislosti pro G .

\Leftarrow Tato implikace plyne z Věty 10.9.19. ■

10.9.21. Příklad. Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je konvexní. Potom je A křivkově souvislá, a tedy i souvislá.

Řešení. Zvolme $a, b \in A$. Potom zobrazení $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ definované předpisem $\varphi(t) = (1 - t)a + tb$ má díky konvexitě množiny A hodnoty obsažené v A . Dále platí $\varphi(0) = a$ a $\varphi(1) = b$. Zbývá ukázat, že φ je spojitě. Zvolme $t_0 \in [0, 1]$. Potom

pro každé $t \in [0, 1]$ platí

$$\begin{aligned}\|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| &= \|(1-t)a + tb - (1-t_0)a - t_0b\| \\ &= \|(t-t_0)(b-a)\| = |t-t_0| \cdot \|b-a\|.\end{aligned}$$

Odtud již plyne spojitost zobrazení φ . ♣

10.9.22. Příklad. Dokažte, že množina A , která je definována jako graf funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0], \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

je souvislou podmnožinou prostoru \mathbb{R}^2 , která ale není křivkově souvislá.

Řešení. Souvislost. Položme $A_1 = \{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2; x \in (0, \infty)\}$. Definujme zobrazení $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem $g(x) = [x, f(x)]$. Potom je zobrazení g spojitě a $g((0, \infty)) = A_1$. Množina A_1 je tedy souvislá, neboť je spojitým obrazem souvislé množiny (Věta 10.9.10(a)).

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $[x_n, 0] \in A_1$ a $\lim x_n = 0$. Odtud plyne, že $[0, 0] \in \overline{A_1}$. Označíme-li tedy $A_2 = A_1 \cup \{[0, 0]\}$, pak dostaneme $A_1 \subset A_2 \subset \overline{A_1}$. Podle Věty 10.9.10(b) je tudíž A_2 souvislá v prostoru \mathbb{R}^2 .

Konečně označme $A_3 = (-\infty, 0] \times \{0\}$. Potom je A_3 zřejmě souvislá množina v \mathbb{R}^2 a navíc platí $A_2 \cap A_3 = \{[0, 0]\}$, takže $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$. Podle Věty 10.9.10(c) je tedy také množina $A = A_2 \cup A_3$ souvislá v \mathbb{R}^2 .

Nepřítomnost křivkové souvislosti. Předpokládejme pro spor, že množina A je navíc křivkově souvislá v \mathbb{R}^2 . Položme $a = [0, 0]$ a $b = [\frac{1}{\pi}, 0]$. Pak $a, b \in A$ a existuje tedy spojitě zobrazení $h: [0, 1] \rightarrow A$ takové, že $h(0) = a$ a $h(1) = b$.

Tvrdíme, že pro každé $x \in [0, \frac{1}{\pi}]$ existuje $t \in [0, 1]$ takové, že $h(t) = [x, f(x)]$. Kdyby tomu tak nebylo, pak by platilo $h: [0, 1] \rightarrow A_4$, kde $A_4 = A \setminus \{[x, f(x)]\}$. Protože množiny $(-\infty, x) \times \mathbb{R}$ a $(x, \infty) \times \mathbb{R}$ jsou otevřené v \mathbb{R}^2 , jsou podle Věty 10.3.28 množiny $A_4 \cap ((-\infty, x) \times \mathbb{R})$ a $A_4 \cap ((x, \infty) \times \mathbb{R})$ otevřené v A_4 a díky spojitosti zobrazení h a Větě 10.4.6 jsou také množiny $h^{-1}(A_4 \cap ((-\infty, x) \times \mathbb{R}))$ a $h^{-1}(A_4 \cap ((x, \infty) \times \mathbb{R}))$ otevřené v $[0, 1]$. Protože jsou také zřejmě neprázdné a disjunktní a interval $[0, 1]$ je jejich sjednocením, plyne odtud, že interval $[0, 1]$ je nesouvislý, což je spor s Větou 10.9.11. Tím je dokázáno naše tvrzení.

Speciálně tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $t_n \in [0, 1]$ takové, že

$$h(t_n) = \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}, 1\right].$$

Zřejmě platí $\lim h(t_n) = [0, 1] \in \mathbb{R}^2$. Podle Vět 10.6.12 a 10.6.3 je množina $h([0, 1])$ kompaktní v \mathbb{R}^2 . Podle Věty 10.6.6 je tato množina uzavřená v \mathbb{R}^2 . Podle již dokázaného tvrzení obsahuje množina $h([0, 1])$ posloupnost $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}, 1\right\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud plyne $[0, 1] \in A$, což je spor. ♣

10.10. Teoretické příklady k metrickým prostorům

Teoretické příklady jsou rozděleny do následujících pododdílů:

- základní pojmy,
- spojitost,
- úplné prostory,
- kompaktní prostory,
- Cantorův prostor a Cantorovo diskontinuum,
- souvislé a křivkově souvislé prostory.

Základní pojmy.

10.10.1. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $x, y, u, v \in P$. Dokažte, že platí

$$|\varrho(x, y) - \varrho(u, v)| \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Řešení. Díky trojúhelníkové nerovnosti (10.1.1(c)) a symetrii (10.1.1(b)) platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(v, y) = \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(y, v),$$

takže platí

$$\varrho(x, y) - \varrho(u, v) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Podobně obdržíme nerovnost

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y, v) = \varrho(x, u) + \varrho(x, y) + \varrho(y, v),$$

takže také platí

$$\varrho(u, v) - \varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Tvrzení plyne z kombinace předcházejících dvou odhadů. ♣

10.10.2. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $x \in P$ a $\{y_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $y \in P$. Dokažte, že $\varrho(x_n, y_n) \rightarrow \varrho(x, y)$.

Řešení. Podle Příkladu 10.10.1 platí

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x, y)| \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(y_n, y).$$

Podle předpokladu konverguje pravá strana k nule, a tedy i levá. Odtud plyne tvrzení. ♣

10.10.3. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Množinu $\overline{B}(x, r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in P; \varrho(x, y) \leq r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r** .

10.10.4. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že uzavřená koule $\overline{B}(x, r)$ je uzavřená množina.

Řešení. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost bodů $\overline{B}(x, r)$ konvergující k $z \in P$. Potom $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, z) \leq r + \varrho(x_n, z)$. Pravá strana nerovnosti konverguje k r , a proto $\varrho(x, z) \leq r$, neboli $x \in \overline{B}(x, r)$. Množina $\overline{B}(x, r)$ je tedy uzavřená. ♣

10.10.5. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že platí $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r)$. Ukažte, že opačná inkluze obecně neplatí.

Řešení. Platnost inkluze. Protože platí $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$ a $\overline{B}(x, r)$ je uzavřená množina podle Příkladu 10.10.4, vyplývá dokazovaná inkluze z Věty 10.3.24(g).

Protipříklad na opačnou inkluzi. Necht P je diskretní metrický prostor obsahující alespoň dva různé body. Zvolme $x \in P$. Potom $B(x, 1) = \overline{B}(x, 1) = \{x\}$, ale $\overline{B}(x, 1) = P$. Protože P má alespoň dva různé body, inkluze $\overline{B}(x, 1) \subset B(x, 1)$ neplatí. ♣

10.10.6. Příklad. Definujme zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = -\infty, \\ \operatorname{arctg} x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \infty \end{cases}$$

a funkci $\tau: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow [0, \infty)$ předpisem $\varrho(u, v) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$.

- (a) Dokažte, že (\mathbb{R}^*, τ) je metrický prostor.
 (b) Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Dokažte, že platí $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ v obvyklém smyslu právě tehdy, když $a_n \xrightarrow{\tau} A$.

Řešení. (a) Zřejmě pro každá $x, y \in \mathbb{R}^*$ platí $\tau(x, y) \in [0, \infty)$. Dále platí $\tau(x, y) = 0$ právě tehdy, když $\varphi(x) = \varphi(y)$. Zobrazení φ je prosté, což dává platnost podmínky (a) v Definicí 10.1.1. Podmínka (b) v Definicí 10.1.1 je zřejmě splněna. Ověřme ještě trojúhelníkovou nerovnost. Necht $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Potom s pomocí trojúhelníkové nerovnosti pro reálná čísla dostaneme

$$\begin{aligned} \tau(x, z) &= |\varphi(x) - \varphi(z)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi(z)| \\ &\leq \tau(x, y) + \tau(y, z). \end{aligned}$$

Tím je ověřeno, že (\mathbb{R}^*, τ) tvoří metrický prostor.

(b) \Rightarrow Platí $\lim \varphi(a_n) = \varphi(A)$ díky spojitosti funkce arctg v případě, že $A \in \mathbb{R}$, a díky $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$ v případě $A = \pm\infty$. Potom $\lim \tau(a_n, A) = 0$, a tedy $a_n \xrightarrow{\tau} A$.

\Leftarrow Protože $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, platí $\operatorname{tg}(\varphi(a_n)) = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž $\lim \varphi(a_n) = \varphi(A)$, platí $\lim a_n = A$ díky spojitosti funkce tg v případě, že $A \in \mathbb{R}$, a díky $\lim_{x \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \pm\infty$ v případě $A = \pm\infty$. ♣

10.10.7. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\{a_n\}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že x je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

10.10.8. Uvedme předchozí definici do souvislosti s Definicí 2.4.16. V druhé zmíněné pracujeme s posloupnostmi reálných čísel a jako hromadné hodnoty připouštíme i $\pm\infty$, tedy prvky, které nepatří do \mathbb{R} . Symbol $H(\{a_n\})$ má pro posloupnosti reálných čísel tedy dva různé významy podle toho, zda hromadné hodnoty uvažujeme pouze v \mathbb{R} (Definice 10.10.7) nebo v \mathbb{R}^* (Definice 2.4.16). Je tedy třeba vědět v jakém smyslu uvedený symbol používáme. V Příkladech 10.10.9, 10.10.10 to bude Definice 10.10.7, v Příkladu 10.10.11 se pak na vztah těchto definic podíváme ještě jednou.

10.10.9. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}$ je posloupnost prvků z P . Dokažte, že množina všech hromadných hodnot $H(\{a_n\})$ je uzavřená v P .

Řešení. Předpokládejme, že $\{x^n\}$ je posloupnost prvků z $H(\{a_n\})$ splňující $\lim x^n = x \in P$. Pro každé n existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{m_j^n\}_{j=1}^\infty$ taková, že $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{m_j^n} = x^n$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ takovou, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(a_{k_i}, x^i) < \frac{1}{i}$. Postupujeme následovně. Prvek $k_1 \in \mathbb{N}$ zvolme tak, aby platilo $\varrho(a_{k_1}, x^1) < 1$. To je možné, neboť $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{m_j^1} = x^1$. Máme-li již zkonstruován prvek k_i , potom k_{i+1} nalezneme tak, že použijeme $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{m_j^{i+1}} = x^{i+1}$ a nalezneme $l \in \mathbb{N}$ splňující $m_l^{i+1} > k_i$ a $\varrho(a_{m_l^{i+1}}, x^{i+1}) < \frac{1}{i+1}$. Položíme $k_{i+1} = m_l^{i+1}$, čímž je konstrukce hledané posloupnosti provedena. Pak platí

$$\varrho(a_{k_i}, x) \leq \varrho(a_{k_i}, x^i) + \varrho(x^i, x) \leq \frac{1}{i} + \varrho(x^i, x).$$

Poněvadž $\lim x^i = x$, dostáváme $\lim a_{k_i} = x$. Máme tedy $x \in H(\{a_n\})$. Tím je důkaz proveden. ♣

10.10.10. Příklad. Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $M \subset P$ je neprázdná a uzavřená. Potom existuje posloupnost $\{a_n\}$ prvků P taková, že $H(\{a_n\}) = M$.

Řešení. Podle Věty 10.8.13 je separabilní i prostor (M, ϱ) . Nalezneme neprázdnou spočetnou množinu $D \subset M$, která je hustá v (M, ϱ) . Dále nalezneme posloupnost $\{y_n\}$, která splňuje $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} = D$. Definujme novou posloupnost

$$y_1, \quad y_1, y_2, \quad y_1, y_2, y_3, \quad y_1, y_2, y_3, y_4, \quad \dots,$$

a označme ji $\{a_n\}$. V této posloupnosti se každý prvek množiny D vyskytuje nekonečněkrát. Předpokládejme, že $z \in D$. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} = z$. Potom zřejmě $z \in H(\{a_n\})$. Platí tedy $D \subset H(\{a_n\})$. Díky uzavřenosti množiny M platí $H(\{a_n\}) \subset M$. Potom máme

$$M = \overline{D} \subset \overline{H(\{a_n\})} \subset \overline{M} = M.$$

Množina $H(\{a_n\})$ je podle Příkladu 10.10.9 uzavřená, takže dostáváme $H(\{a_n\}) = M$. ♣

10.10.11. Příklad. Necht $M \subset \mathbb{R}^*$ je neprázdná uzavřená množina v prostoru (\mathbb{R}^*, τ) , kde τ je metrika zavedená v Příkladu 10.10.6. Dokažte, že pak existuje posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ taková, že množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ zavedená v Definicí 2.4.16 je rovna množině M .

Řešení. Prostor (\mathbb{R}^*, τ) je separabilní, neboť množina racionálních čísel je hustá v (\mathbb{R}^*, τ) . Podle Příkladu 10.10.10 tedy existuje posloupnost $\{b_n\}$ prvků \mathbb{R}^* splňující $H(\{b_n\}) = M$. Naším úkolem je však nalézt posloupnost reálných čísel s uvedenou vlastností, takže příklad ještě není dořešen, protože posloupnost $\{b_n\}$ může obsahovat prvky ∞ a $-\infty$. Hledanou posloupnost zkonstruujeme následovně. Množina \mathbb{R} je hustá v prostoru (\mathbb{R}^*, τ) . Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme reálné číslo a_n splňující $\tau(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$. Nyní stačí ukázat, že $H(\{a_n\}) = H(\{b_n\})$.

Předpokládejme, že $z \in H(\{a_n\})$. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $a_{n_k} \xrightarrow{\tau} z$. Potom

$$\tau(z, b_{n_k}) = \tau(z, a_{n_k}) + \tau(a_{n_k}, b_{n_k}) < \tau(z, a_{n_k}) + \frac{1}{n_k}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $b_{n_k} \xrightarrow{\tau} z$, takže $b_{n_k} \rightarrow z$, a proto $z \in H(\{b_n\})$. Opačnou inkluzi lze dokázat obdobně. ♣

10.10.12. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{F_n\}$ je nerostoucí posloupnost uzavřených množin v P . Necht pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in F_n$, přičemž posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nějakému bodu $x \in P$. Dokažte, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Řešení. Necht $k \in \mathbb{N}$ je dáno. Pak $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost bodů v F_k konvergující k x . Protože množiny F_k jsou uzavřené, platí $x \in F_k$. Tedy $x \in F_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a proto $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. ♣

10.10.13. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a E, F jsou jeho podmnožiny. Potom nezáporný prvek $\text{dist}(E, F)$ množiny \mathbb{R}^* definovaný předpisem

$$\text{dist}(E, F) = \inf\{\varrho(x, y); x \in E, y \in F\}$$

nazýváme **vzdáleností množin E a F** . Zde \inf uvažujeme na množině $[0, \infty) \cup \{\infty\}$, a proto $\inf \emptyset = 0$.

10.10.14. Příklad. Nalezněte uzavřené disjunktní množiny $E, F \subset \mathbb{R}$ takové, že $\text{dist}(E, F) = 0$.

Řešení. Položme $E = \mathbb{N}$ a $F = \{n + \frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$. Potom E a F jsou disjunktní množiny v \mathbb{R} a zřejmě platí $\text{dist}(E, F) = 0$. Dále platí

$$\mathbb{R} \setminus E = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

a navíc podle Příkladu 10.3.8 je každý z intervalů $(-\infty, 1)$ a $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, otevřenou množinou v \mathbb{R} . Podle Věty 10.3.11(b) je tedy také $\mathbb{R} \setminus E$ otevřená množina v \mathbb{R} , takže podle Věty 10.3.13 je množina E uzavřená v \mathbb{R} . Obdobně lze dokázat, že také F je uzavřená množina v \mathbb{R} . ♣

Příklad 10.10.14 ukazuje, že dvě disjunktní uzavřené množiny mohou mít nulovou vzdálenost. Tato situace nemůže nastat, jestliže je alespoň jedna z množin kompaktní. Tento fakt bude podrobně dokázán v Příkladu 10.10.16.

10.10.15. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $K, L \subset P$ jsou kompaktní neprázdné podmnožiny P . Dokažte, že existují $x \in K$ a $y \in L$ splňující $\text{dist}(K, L) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Necht $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti v K , respektive v L , takové, že

$$\lim \varrho(x_n, y_n) = \text{dist}(K, L).$$

Díky kompaktnosti K vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in K$. Dále využijeme kompaktnost L k nalezení podposloupnosti $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in L$. Pak ale $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} \rightarrow x$, a tedy díky Příkladu 10.10.2 máme

$$\text{dist}(K, L) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

10.10.16. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $K \subset P$ je kompaktní, $F \subset P$ je uzavřená a $\text{dist}(K, F) = 0$. Dokažte, že potom $K \cap F \neq \emptyset$.

Řešení. Nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ prvků F a posloupnost $\{y_n\}$ prvků K takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, y_n) = \text{dist}(K, F) = 0.$$

Protože K je kompaktní, lze z $\{y_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ s limitou $y \in K$. Potom

$$0 \leq \varrho(x_{n_k}, y) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y)$$

a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y)) = 0.$$

Pak platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$. Protože F je uzavřená, platí $y \in F$. Tedy $y \in K \cap F$. ♣

10.10.17. Příklad. Nalezněte metrický prostor (P, ϱ) , kompaktní množinu $K \subset P$ a uzavřenou podmnožinu $F \subset P$, jejichž vzdálenost není realizována, tedy neexistují $x \in K$ a $y \in F$ takové, že $\text{dist}(K, F) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Uvažujme Banachův prostor $P = \ell_2$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme e^n n -tý kanonický vektor v ℓ_2 , tj. $e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, kde 1 je na n -tém místě. Položme $F = \{(1 + \frac{1}{n})e^n; n \in \mathbb{N}\}$ a $K = \{0\}$. Pak pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, platí

$$\|(1 + \frac{1}{n})e^n - (1 + \frac{1}{m})e^m\|^2 = (1 + \frac{1}{n})^2 + (1 + \frac{1}{m})^2 \geq 2,$$

a tedy

$$\|(1 + \frac{1}{n})e^n - (1 + \frac{1}{m})e^m\| \geq \sqrt{2}.$$

Odtud plyne, že každá posloupnost prvků množiny F je od nějakého indexu konstantní, a má tedy limitu v F . Množina F je tedy uzavřená v ℓ_2 . Dále platí

$$\begin{aligned} \text{dist}(K, F) &= \text{dist}(0, F) = \inf\{\|(1 + \frac{1}{n})e^n\|; n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} = 1, \end{aligned}$$

ale $\|0 - (1 + \frac{1}{n})e^n\| = 1 + \frac{1}{n} > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Neexistuje tedy $x \in F$ splňující $\|0 - x\| = \text{dist}(0, F) = 1$. ♣

10.10.18. Příklad. Necht $K \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená množina. Dokažte, že existují body $x \in A$ a $y \in B$ splňující $\text{dist}(A, B) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z K a $\{y_n\}$ je posloupnost z F , které splňují $\lim \varrho(x_n, y_n) = \text{dist}(K, F)$. Díky kompaktnosti K existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému $x \in K$.

Dále platí, že $\{y_{n_k}\}$ je omezená. To plyne z následující úvahy. Necht $k_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \text{dist}(A, B) + 1$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < 1$. Pak pro každé $k \geq k_0$ platí

$$\varrho(y_{n_k}, x) \leq \varrho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \text{dist}(A, B) + 1 + 1.$$

Z tohoto odhadu již plyne omezenost $\{y_{n_k}\}$.

Díky Větě 10.6.9 lze z posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ vybrat podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in \mathbb{R}^n$. Z uzavřenosti B dostáváme $y \in B$. Proto díky Příkladu 10.10.2 máme

$$\text{dist}(A, B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

10.10.19. Příklad. Necht (P, ϱ) je kompaktní neprázdný metrický prostor. Dokažte, že existují $x, y \in K$ splňující $\text{diam } P = \varrho(x, y)$.

Řešení. Prostor P je omezený (Věta 10.6.8), a tedy $\text{diam } P < \infty$. Nalezneme posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ v P splňující $\lim \varrho(x_n, y_n) = \text{diam } P$. Díky kompaktnosti P lze z $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in P$. Podobně vybereme podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ konvergující k bodu $y \in P$. Pak máme díky Příkladu 10.10.2

$$\text{diam } P = \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

10.10.20. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je neprázdná. Potom funkce $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = \text{dist}(x, A)$ je 1-lipschitzovská.

Řešení. Necht $x, y \in A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $y' \in A$ splňující $\text{dist}(y, A) + \varepsilon > \varrho(y, y')$. Potom platí

$$\text{dist}(x, A) \leq \varrho(x, y') \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, y') \leq \varrho(x, y) + \text{dist}(y, A) + \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně dostáváme

$$\text{dist}(x, A) \leq \varrho(x, y) + \text{dist}(y, A).$$

Záměnou rolí x a y dostaneme také

$$\text{dist}(y, A) \leq \varrho(x, y) + \text{dist}(x, A).$$

Odtud pak plyne nerovnost

$$|f(x) - f(y)| = |\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq \varrho(x, y).$$

Tím je 1-lipschitzovskost funkce f dokázána. ♣

10.10.21. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Dokažte, že potom platí $\text{Int } A = P \setminus \overline{P \setminus A}$.

Řešení. Protože $A = P \setminus (P \setminus A) \supset P \setminus \overline{P \setminus A}$ a poslední množina je otevřená, dostáváme podle Věty 10.3.15 inkluzi $\text{Int } A \supset P \setminus \overline{P \setminus A}$. Dále platí $P \setminus A \subset P \setminus \text{Int } A$ a množina $P \setminus \text{Int } A$ je uzavřená. Platí tedy $\overline{P \setminus A} \subset P \setminus \text{Int } A$. Odtud plyne inkluze $\text{Int } A \subset P \setminus \overline{P \setminus A}$, čímž je rovnost dokázána. ♣

10.10.22. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Dokažte, že uzávěr množiny (a, b) v prostoru \mathbb{R} má tvar

$$\overline{(a, b)} = \begin{cases} [a, b], & \text{pokud } a, b \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, b], & \text{pokud } a = -\infty, b \in \mathbb{R}, \\ [a, \infty), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, b = \infty, \\ \mathbb{R}, & \text{pokud } a = -\infty, b = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, pak obdobným postupem jako v řešení Příkladu 10.3.32 lze dokázat, že $\partial(a, b) = \{a, b\}$. Odtud plyne $\overline{(a, b)} = [a, b]$.

Předpokládejme, že $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$. Množiny $(-\infty, b)$ a (b, ∞) jsou otevřené, a proto pouze bod b může být hraničním bodem množiny $(-\infty, b)$. Pro každé $r > 0$ zřejmě platí $(b-r, b+r) \cap (-\infty, b) \neq \emptyset$ a $(b-r, b+r) \cap (b, \infty) \neq \emptyset$. Tak dostáváme $\partial(-\infty, b) = \{b\}$. Jestliže $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, pak obdobně dostaneme $\partial(a, \infty) = \{a\}$. Tak obdržíme druhou a třetí rovnost úlohy.

Jestliže $a = -\infty$ a $b = \infty$ je tvrzení zřejmé. ♣

10.10.23. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, přičemž tato inkluze může být vlastní.

Řešení. Podle Věty 10.3.24(b) platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ a $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, takže $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dokážeme, že inkluze může být vlastní pomocí následujícího příkladu. Necht $P = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ a $B = (1, 2)$. Potom $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} = [0, 1]$ a $\overline{B} = [1, 2]$, takže $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \emptyset$. ♣

10.10.24. Příklad (Cantor–Bendixson⁵). Necht (P, ϱ) je separabilní metrický prostor. Potom existuje spočetná otevřená množina $U \subset P$ a uzavřená množina $F \subset P$ bez izolovaných bodů takové, že $P = F \cup U$.

Řešení. Prostor P je separabilní, takže podle Věty ?? existuje spočetná báze otevřených množin \mathcal{B} . Položme

$$U = \bigcup \{B \in \mathcal{B}; B \text{ je spočetná}\} \quad \text{a} \quad F = P \setminus U.$$

Množina U je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. Je také spočetná, neboť je spočetným sjednocením spočetných množin. Množina F je uzavřená, neboť je doplňkem otevřené množiny. Zbývá dokázat, že F nemá izolovaný bod. Pro spor předpokládejme, že $x \in F$ je izolovaným bodem množiny F . Existuje tedy $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap (F \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pak existuje $B \in \mathcal{B}$ taková, že $x \in B \subset B(x, \varepsilon)$. Pro množinu B platí

$$B = (B \cap U) \cup (B \setminus U)$$

♣

Spojitosť.

10.10.25. Příklad. Dokažte, že spojitý obraz uzavřené množiny nemusí být uzavřená množina a spojitý obraz otevřené množiny nemusí být otevřená množina.

Řešení. Funkce $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující uzavřenou množinu \mathbb{R} na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, což není uzavřená množina v \mathbb{R} . Funkce $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující otevřenou množinu \mathbb{R} na $[-1, 1]$, což není otevřená množina v \mathbb{R} . ♣

10.10.26. Příklad. Necht (P, ϱ) , (Q, σ) jsou metrické prostory, $D \subset P$ je hustá a $f, g: P \rightarrow Q$ jsou spojitá zobrazení splňující $f(x) = g(x)$ pro $x \in D$. Dokažte, že $f = g$ na P .

Řešení. Definujme funkci $h: P \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $h(x) = \sigma(f(x), g(x))$, $x \in P$. Díky Příkladu 10.10.1 platí pro každé $x, y \in P$

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |\sigma(f(x), g(x)) - \sigma(f(y), g(y))| \\ &\leq \sigma(f(x), f(y)) + \sigma(g(x), g(y)). \end{aligned}$$

Odtud díky spojitosti zobrazení f a g dostáváme spojitost funkce h . Označme $X = \{x \in P; f(x) = g(x)\}$. Platí $X = h^{-1}(\{0\})$. Podle Věty 10.4.6 je množina X uzavřená. Poněvadž platí $D \subset X$ a D je hustá v P , obdržíme $X = P$. Máme tedy $f = g$. ♣

10.10.27. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f: M \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě zobrazení. Pak existuje spojitě rozšíření f na celé P . Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojitě na P .

⁵Ivar Otto Bendixson (1861–1935)

Řešení. Zobrazení f zřejmě splňuje v každém bodě $a \in P \setminus M$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku z Věty 10.7.22. Můžeme tedy položit

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in M, \\ \lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) & \text{pro } a \in P \setminus M. \end{cases}$$

Ukážeme, že takto definované zobrazení $g: P \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě na P . Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u, v \in M$ a $\varrho(u, v) < \delta$. Necht' nyní $x, y \in P$, $\varrho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Pro x nalezneme bod $x_1 \in M$ takový, že $\varrho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\varrho(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Je-li totiž $x \in M$, položíme $x_1 = x$. Pokud $x \in P \setminus M$, pak existuje $0 < \delta_1 \leq \frac{\delta}{3}$ takové, že $\sigma(g(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u \in B(x, \delta_1) \cap M$. Z hustoty M tedy plyne existence $x_1 \in M$ splňujícího $\varrho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Obdobně obdržíme $y_1 \in M$ splňující $\varrho(y, y_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(y), f(y_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\varrho(x_1, y_1) \leq \varrho(x_1, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y, y_1) < \delta.$$

Dohromady tedy máme

$$\sigma(g(x), g(y)) \leq \sigma(g(x), f(x_1)) + \sigma(f(x_1), f(y_1)) + \sigma(f(y_1), g(y)) < \varepsilon.$$

Jednoznačnost rozšíření plyne z Příkladu 10.10.26. ♣

10.10.28. Příklad. Necht' (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je lipschitzovské. Dokažte, že pak je f stejnoměrně spojitě. Ukažte, že opačná implikace neplatí.

Řešení. Podle předpokladu existuje $K > 0$ takové, že f je K -lipschitzovské. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Potom pro každé $x, y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y) < K\delta = \varepsilon.$$

Odtud plyne, že zobrazení f je stejnoměrně spojitě.

Protipříklad. Položíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Funkce f je zřejmě spojitá, a tedy podle Věty 9.2.19 také stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$. Předpokládejme, že f je lipschitzovská na $[0, 1]$, tedy že existuje K takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1]: |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|.$$

Tento vztah platí speciálně pro $x = 0, y \in (0, 1]$, takže máme

$$\forall y \in (0, 1]: \sqrt{y} \leq Ky,$$

to jest

$$\forall y \in (0, 1]: \frac{1}{\sqrt{y}} \leq K.$$

Tento odhad ale zřejmě neplatí, takže dostáváme spor. Odtud plyne, že funkce f není lipschitzovská na $[0, 1]$. ♣

10.10.29. Příklad. Necht' $A \subset \mathbb{R}$ je typu F_σ . Dokažte, že existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že A je množinou bodů nespojitosti f .

Řešení. Pišme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n jsou uzavřené množiny v \mathbb{R} . Použijeme separabilitu \mathbb{R} a Větu 10.8.13 a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme spočetnou množinu $D_n \subset F_n$, která je hustá v F_n . Definujme $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{D_n}$. Pak f je dobře definovaná funkce na \mathbb{R} . Označme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Množina D je spočetná. Odtud plyne, že množina $\mathbb{R} \setminus D$ je hustá. Pro každé $x \in D$ platí $f(x) > 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus D$ platí $f(x) = 0$.
Spojitosť v bodech $\mathbb{R} \setminus A$. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Potom platí $f(x) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Protože $x \notin \bigcup_{j=1}^{n_0} F_{n_0}$ a uvedená množina je uzavřená, existuje $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \cap \bigcup_{j=1}^{n_0} F_{n_0} = \emptyset$. Potom pro každé $y \in B(x, \delta)$ platí

$$0 \leq f(y) - f(x) = f(y) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{D_n}(y) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Tedy f je spojitá v x .

Nespojitost v bodech A . Necht $x \in A$. Předpokládejme nejprve, že $x \notin D$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in F_{n_0}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2^{n_0}}$. Pro každé $\delta > 0$ existuje díky hustotě D_{n_0} v F_{n_0} bod $y \in D_{n_0} \cap B(x, \delta)$ a platí

$$f(y) - f(x) = f(y) \geq \frac{1}{2^{n_0}} = \varepsilon.$$

Odtud plyne, že f není spojitá v x .

Nyní předpokládejme, že $x \in D$. Potom $f(x) > 0$. Položme $\varepsilon = f(x)$. Potom pro každé $\delta > 0$ existuje $y \in B(x, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus D)$ a platí

$$f(x) - f(y) = f(x) = \varepsilon.$$

Odtud plyne, že f není spojitá v x . ♣

10.10.30. Definice. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f: (P, \varrho) \rightarrow (Q, \sigma)$ je zobrazení a $x \in P$. Potom **oscilací** funkce f v bodě x nazýváme nezáporný prvek $\text{osc}_f(x)$ množiny \mathbb{R}^* definovaný předpisem

$$\text{osc}_f(x) = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{diam}_{\sigma} f(B_{\varrho}(x, \delta)), & \text{pokud existuje } \delta_0 > 0 \\ & \text{takové, že } \text{diam}_{\sigma} f(B_{\varrho}(x, \delta_0)) < \infty, \\ \infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznamenejme, že právě uvedená limita vždy existuje, neboť funkce $\delta \mapsto \text{diam}_{\sigma} f(B_{\varrho}(x, \delta))$ je dobře definovaná neklesající reálná funkce na intervalu $(0, \delta_0)$.

10.10.31. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$. Označme symbolem C_f množinu těch bodů $x \in P$, v nichž je funkce f spojitá. Dokažte, že potom platí $C_f = \{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\}$.

Řešení. Označme $A = \{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\}$.

Inkluze $C_f \subset A$. Necht $x \in C_f$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in B(x, \delta)$ platí $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$. Necht $y_1, y_2 \in B(x, \delta)$. Potom

$$\sigma(f(y_1), f(y_2)) \leq \sigma(f(y_1), f(x)) + \sigma(f(x), f(y_2)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že platí $\text{diam}_\sigma f(B(x, \delta)) \leq 2\varepsilon$. To znamená, že $\text{osc}_f(x) = 0$, a tedy $x \in A$.

Inkluze $A \subset C_f$. Necht $x \in A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\text{diam}_\sigma f(B(x, \delta)) < \varepsilon$. Tedy pro každé $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\sigma(f(y), f(x)) \leq \text{diam} f(B(x, \delta)) < \varepsilon.$$

To znamená, že funkce f je v bodě x spojitá, takže $x \in C_f$. ♣

10.10.32. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: (P, \varrho) \rightarrow (Q, \sigma)$ je funkce. Necht C_f je množina bodů spojitosti funkce f . Potom C_f je typu G_δ .

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$B_n = \{x \in P; \text{osc}_f(x) < \frac{1}{n}\}.$$

Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina B_n otevřená. Zvolme tedy $n \in \mathbb{N}$ a $x \in B_n$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že $\text{diam} f(B(x, \delta)) < \frac{1}{n}$. Pokud $y \in B(x, \delta)$, pak pro $r \in (0, \delta - \varrho(x, y))$ platí $B(y, r) \subset B(x, \delta)$, a tedy

$$\text{osc}_f(y) \leq \text{diam} f(B(y, \delta)) \leq \text{diam} f(B(x, \delta)) < \frac{1}{n}.$$

Odtud plyne $B(x, \delta) \subset B_n$. Množina B_n je tedy otevřená.

Množina C_f podle Věty 10.10.31 splňuje

$$C_f = \{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\}$$

a navíc zřejmě platí

$$\{x \in P; \text{osc}_f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Odtud vyplývá, že množina C_f je průnikem spočetně mnoha otevřených množin, tedy je typu G_δ . ♣

Riemannova funkce je spojitá právě ve všech iracionálních bodech množiny \mathbb{R} (Příklad 4.4.9). Na otázku, zda existuje reálná funkce, která by byla spojitá naopak právě ve všech racionálních bodech, dostáváme z dokázaných tvrzení možná trochu překvapivě zápornou odpověď.

10.10.33. Příklad. Neexistuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou by platilo $C_f = \mathbb{Q}$.

Řešení. Podle Příkladu 10.10.32 musí být C_f typu G_δ , avšak podle Příkladu 10.10.40 množina \mathbb{Q} není typu G_δ . Odtud plyne tvrzení. ♣

Úplné prostory.

10.10.34. Příklad. Dokažte, že prostor c_0 je Banachův.

Řešení. Prostor c_0 je lineárním podprostorem prostoru ℓ_∞ a navíc je také jeho metrickým podprostorem. Prostor ℓ_∞ je podle Příkladu 10.7.17 úplný. Díky Větě 10.7.18 stačí ukázat, že c_0 je uzavřená množina v ℓ_∞ . Vezměme posloupnost $\{x^n\}$ prvků c_0 , která konverguje k prvku $x \in \ell_\infty$. Naším cílem je ukázat, že $x \in c_0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x^{m_0} - x\|_\infty < \varepsilon$. Poněvadž $x^{m_0} \in c_0$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{m_0} = 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|x_n^{m_0}| < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n| \leq |x_n - x_n^{m_0}| + |x_n^{m_0}| \leq \|x - x^{m_0}\|_\infty + |x_n^{m_0}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim x_n = 0$, a tedy $x \in c_0$. ♣

10.10.35. Příklad (prostor ℓ_p). Necht $p \in [1, \infty)$. Definujme ℓ_p jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňujících $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Sčítání prvků z ℓ_p je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_p reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in \ell_p$, $y = \{y_n\} \in \ell_p$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_p$ položme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokažte, že prostor ℓ_p je Banachův.

Řešení. Postupně ověříme, že ℓ_p je vektorový prostor, který je normovaný a který je úplný.

Vektorový prostor. Necht $x, y \in \ell_p$. Ověříme, že $x + y \in \ell_p$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Podle Minkovského nerovnosti (Příklad 5.5.26) platí

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p < \infty.$$

Odtud pak dostáváme, že

$$\left(\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Platí tedy $x + y \in \ell_p$ a navíc jsme odvodili nerovnost $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Pokud $x \in \ell_p$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \|x\|_p < \infty.$$

Platí tedy $\alpha x \in \ell_p$ a navíc jsme ověřili $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \cdot \|x\|_p$.

Normovaný prostor. Z vlastností normy, které jsou uvedené v Definicí 10.1.18, jsme již ověřili všechny vyjma vlastnosti (a). Ta ovšem pro zobrazení $x \mapsto \|x\|_p$ na ℓ_p zřejmě platí.

Úplnost. Necht $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost prvků ℓ_p . Existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \geq k_0: \|x^k - x^{k_0}\|_p < 1.$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\forall k \geq k_0: \|x^k\|_p < \|x^{k_0}\|_p + 1.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x^k\|_p \leq \max\{\|x^1\|_p, \dots, \|x^{k_0-1}\|_p, \|x^{k_0}\|_p + 1\}. \quad (10.28)$$

Odtud plyne, že množina $\{x^k; k \in \mathbb{N}\}$ je omezená v ℓ_p . Konstantu na pravé straně předchozí nerovnosti označme K .

Zvolme nyní $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k - x_n^l| \leq \|x^k - x^l\|_p$. Odtud plyne, že posloupnost reálných čísel $\{x_n^k\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská, a tedy konvergentní. Limitu této posloupnosti označme x_n . O posloupnosti $x = \{x_n\}$ nejprve ukážeme, že patří do ℓ_p a pak že je hledanou limitou naší cauchyovské posloupnosti.

Pro každé $m, k \in \mathbb{N}$ díky (10.28) platí

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k\|_p \leq K.$$

Spočteme limitu levé strany pro $k \rightarrow \infty$ a obdržíme pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$

Odtud již plyne

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$

Dokázali jsme tedy $x \in \ell_p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Znovu použijeme cauchyovskost naší posloupnosti a nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k, l \geq k_0$ platí $\|x^k - x^l\|_p < \varepsilon$. Pro $m \in \mathbb{N}$ a $k, l \geq k_0$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i^k - x_i^l|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k - x^l\|_p < \varepsilon.$$

Pro pevné k a m vypočteme limitu levé strany pro $l \rightarrow \infty$. Obdržíme

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i^k - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že uvedená nerovnost platí pro každé $m \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$\|x^k - x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i^k - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Odtud již plyne, že posloupnost $\{x^k\}$ konverguje k x . ♣

10.10.36. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a necht pro každou posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}$ v P splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$$

a takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$, je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodovou množinou. Dokažte, že potom je prostor P úplný.

Řešení. Necht $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v (P, ϱ) . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojíme množinu

$$F_n = \overline{\{x_j; j \geq n\}}.$$

Podle Věty 10.3.24(b) a (d) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n uzavřená v (P, ϱ) a platí

$$F_{n+1} \subset F_n.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky speciálně vyplývá, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Odtud a z konstrukce množiny F_n plyne, že $\lim \text{diam } F_n = 0$. Podle předpokladu je tedy množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová. Označme symbolem x její jediný prvek. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\varrho(x, x_n) \leq \text{diam } F_{n_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$. ♣

10.10.37. Příklad. Nalezněte příklad metrického prostoru a posloupnosti jeho prvků $\{x_n\}$ splňující

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \varrho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon,$$

která ale není cauchyovská.

Řešení. Položme například $x_n = \log n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\lim |x_{n+1} - x_n| = \lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

ale posloupnost $\{x_n\}$ zřejmě není cauchyovská v \mathbb{R} . ♣

10.10.38. Příklad. Definujme na \mathbb{R} metriku $\sigma(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$. Nalezněte posloupnost, která je cauchyovská vzhledem k σ , ale nikoliv vzhledem k obvyklé metrice. Dokažte, že prostor (\mathbb{R}, σ) není úplný.

Řešení. Uvažujme posloupnost $\{n\}$. Tato posloupnost není zřejmě cauchyovská vzhledem k obvyklé metrice na \mathbb{R} . Ukážeme, že je cauchyovská vzhledem k metrice σ . Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pro každé $n \geq m \geq n_0$, potom platí

$$\begin{aligned} \sigma(n, m) &= |\arctg n - \arctg m| = \int_m^n \frac{1}{1+x^2} dx \\ &\leq \frac{n-m}{1+m^2} < \frac{n_0}{1+n_0^2} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Uvedená posloupnost není v prostoru (\mathbb{R}, σ) konvergentní. Kdyby totiž existovala její limita $x \in \mathbb{R}$, pak by platilo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x, n) = 0$. Což znamená

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\arctg n - \arctg x| = \left| \frac{\pi}{2} - \arctg x \right| \neq 0,$$

což je spor. ♣

10.10.39. Příklad. Necht (P, ϱ) je neprázdný úplný metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je zobrazení. Necht existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že T^n je kontrakce na (P, ϱ) , kde $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$ je n -krát složené zobrazení T . Dokažte, že potom má T na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Existence pevného bodu. Podle Banachovy věty o kontrakci (Věta 10.7.28) má T^n v P právě jeden pevný bod, označme jej x_0 . Potom

$$T^n(T(x_0)) = T(T^n(x_0)) = T(x_0),$$

takže $T(x_0)$ je také pevným bodem zobrazení T^n . Takový bod však existuje právě jeden, a tedy musí nutně platit $T(x_0) = x_0$. Bod x_0 je tedy pevným bodem zobrazení T .

Jednoznačnost. Necht y je pevný bod zobrazení T . Dokážeme matematickou indukcí, že potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k . Pro $k = 1$ tvrzení platí. Necht pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k . Potom

$$T^{k+1}(y) = T(T^k(y)) = T(y) = y.$$

Tím je naše tvrzení dokázáno. Speciálně je tedy y pevným bodem zobrazení T^n . Zobrazení T^n má však právě jeden pevný bod, a to x_0 , tedy platí $y = x_0$. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

10.10.40. Příklad. Dokažte, že množina \mathbb{Q} není typu G_δ .

Řešení. Tvrzení dokážeme sporem. Díky Příkladu 10.3.36 víme, že množina \mathbb{Q} je hustá v metrickém prostoru \mathbb{R} . Kdyby byla navíc ještě typu G_δ , musela by být podle Věty 10.7.42 residuální v \mathbb{R} . Podle Příkladu 10.7.32(b) je také množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ residuální v \mathbb{R} . Metrický prostor \mathbb{R} je podle Příkladu 10.7.7 a Věty 10.7.34 druhé kategorie. Podle Věty 10.7.38 tedy platí $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, což je ale spor. ♣

10.10.41. Příklad. Necht X je Banachův prostor, který je nekonečně dimenzionální. Dokažte, že potom každá báze vektorového prostoru X je nespočetná.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že vektorový prostor X má spočetnou bázi B tvořenou vektory x_n , $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme symbolem E_n lineární obal množiny $\{x_i; i \leq n\}$. Dokážeme následující dvě pozorování.

Množina E_n je uzavřená. Množina E_n tvoří konečně dimenzionální podprostor prostoru X , a proto jde podle Příkladu 10.7.15 o Banachův prostor. Podle Věty 10.7.18 je pak E_n uzavřená v X .

Množina E_n je řídká. Díky předchozímu pozorování stačí ukázat, že vnitřek E_n je prázdný. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není a existují $x \in X$ a $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset E_n$. Potom platí také $B(0, r) \subset E_n$, neboť E_n je lineární podprostor. Pak platí

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB(0, r) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} kE_n = E_n,$$

což je spor, neboť nekonečně dimenzionální prostor X nemůže být obsažen v konečně dimenzionálním prostoru E_n .

Díky tomu, že B je báze dostáváme $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Prostor X je tedy podle předchozího první kategorie v sobě, což je ale podle Věty 10.7.34 spor s úplností prostoru X . ♣

Kompaktní prostory.

10.10.42. Příklad. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru P splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in P$. Dokažte, že množina $K = \{x_n : x \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní.

Řešení. Necht \mathcal{G} je nějaký systém otevřených podmnožin pokrývajících K . Potom existuje $G \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože $x_n \rightarrow x$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \in G$. Pro každé $k \in \{1, \dots, n_0\}$ existuje $G_k \in \mathcal{G}$ splňující $x_k \in G_k$. Potom soubor množin $\mathcal{G}^* = \{G, G_1, \dots, G_{n_0}\}$ tvoří konečný podsystém systému \mathcal{G} , který zřejmě pokrývá K . Podle Věty 10.6.28 je tedy množina K kompaktní. ♣

10.10.43. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $A \subset P$ je nekonečná množina taková, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \varepsilon$. Dokažte, že pak prostor P není kompaktní.

Řešení. Ukážeme, že v prostoru P neexistuje konečná $\varepsilon/2$ -sít. Pro spor předpokládejme, že $D \subset P$ je konečná $\varepsilon/2$ -sít. Potom $A \subset \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon/2)$. Množina A je nekonečná, množina D je konečná, a proto existuje $x \in D$ takové, že koule $B(x, \varepsilon)$ obsahuje alespoň dva různé body z množiny A . Tyto body však mají vzdálenost menší než ε , což je spor s předpokládanou vlastností množiny A . Prostor P tedy není totálně omezený, a proto podle Věty 10.7.21 není kompaktní. ♣

Předchozí výsledek porovnejte s Větou 10.8.8.

10.10.44. Příklad. Dokažte, že množina

$$A = \left\{ \{x_n\} \in \ell_2; \forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

je kompaktní v ℓ_2 .

Řešení. Podle Věty 10.7.21 stačí dokázat, že A je úplný a totálně omezený prostor.

Úplnost množiny A . Prostor ℓ_2 je úplný, a proto podle Věty 10.7.18 stačí ukázat, že A je uzavřená v ℓ_2 . Vezměme tedy posloupnost $\{x^k\}$ prvků množiny A , která konverguje

k prvku $x \in \ell_2$. Ukážeme, že $x \in A$. Pro každé $n, k \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k - x_n| \leq \|x^k - x\|_2$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n$. Navíc pro každé $n, k \in \mathbb{N}$ platí $|x_n^k| \leq \frac{1}{n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $|x_n| \leq \frac{1}{n}$. Platí tedy $x \in \ell_2$.

Totální omezenost množiny A. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < (\frac{\varepsilon}{2})^2$. Položme

$$B = \{[x_1, \dots, x_m] \in \mathbb{R}^m; \forall n \in \{1, \dots, m\}: |x_n| \leq \frac{1}{n}\}.$$

Množina B je omezená a uzavřená v \mathbb{R}^m . Podle Věty 10.6.9 je B kompaktní a podle Věty 10.6.26 je totálně omezená. Existuje tedy konečná $\frac{\varepsilon}{2}$ -sít C množiny B . Definujeme množinu $D \subset \ell_2$, která obsahuje právě všechny prvky tvaru $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$, kde $(x_1, \dots, x_m) \in C$. Množina D je konečná, neboť C je konečná a zřejmě $D \subset A$. Ukážeme, že D je ε -sít množiny A . Zvolme $y \in A$. Potom $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_m) \in B$ a existuje $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m) \in C$ splňující $\|\tilde{y} - \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Prvek $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$ patří do množiny D a platí

$$\begin{aligned} \|y - x\|_2^2 &= \sum_{n=1}^m (y_n - x_n)^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} (y_n - x_n)^2 = \|\tilde{y} - \tilde{x}\|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} y_n^2 \\ &\leq (\frac{\varepsilon}{2})^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < (\frac{\varepsilon}{2})^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2 = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

K prvku $y \in \ell_2$ jsme tedy našli prvek $x \in D$ splňující $\|y - x\|_2 < \varepsilon$. Tím jsme ověřili, že C je ε -sít. Tedy A je totálně omezená. ♣

10.10.45. Příklad. Dokažte, že množina

$$B = \{x \in c_0; \|x_n\|_{\infty} \leq 1\}$$

není kompaktní v c_0 .

Řešení. Uvažujme vektory $e^n \in c_0, n \in \mathbb{N}$, kde e^n je n -tý kanonický vektor v c_0 , tj.

$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

kde pouze n -tý člen je roven 1. Pak pro každé $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, platí $\|e^n - e^m\|_{\infty} = 1$. Množina $A = \{e^n; n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná a díky předchozímu splňuje předpoklady Příkladu 10.10.43 pro $\varepsilon = 1$. Pak podle Příkladu 10.10.43 není B kompaktní. ♣

10.10.46. Příklad. Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $f: P \rightarrow P$ je **izometrie**, tj. zobrazení splňující

$$\forall x, y \in P: \varrho(f(x), f(y)) = \varrho(x, y).$$

Dokažte, že $f(P) = P$.

Řešení. Předpokládejme pro spor $f(P) \subsetneq P$. Vezmeme $x_0 \in P \setminus f(P)$ a označíme $d = \text{dist}(x_0, f(P))$. Protože je f spojitý, je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy $d > 0$. Položme $x_n = f^n(x_0)$. Pak jsou členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsaženy v $f(P)$, a tedy $\varrho(x_0, x_n) \geq d$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky kompaktnosti vybereme podposloupnost

$\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in f(P)$. Tedy existují indexy $n < m$ takové, že $\varrho(x_n, x_m) < d$. Protože je f izometrie, platí

$$\begin{aligned} d &> \varrho(f^n(x_0), f^m(x_0)) = \varrho(f^{n-1}(x_0), f^{m-1}(x_0)) = \dots \\ &= \varrho(x_0, f^{m-n}(x_0)) \geq d, \end{aligned}$$

což je spor. \clubsuit

10.10.47. Příklad. Necht (K_1, ϱ_1) a (K_2, ϱ_2) jsou kompaktní metrické prostory. Ukažte, že součin $K_1 \times K_2$ opatřený ℓ_2 -součtem metrik ϱ_1 a ϱ_2 je kompaktní metrický prostor.

Řešení. Uvažujme posloupnost bodů $\{(x_1^n, x_2^n)\}_{n=1}^\infty$ prostoru $K_1 \times K_2$. Metrický prostor (K_1, ϱ_1) je kompaktní, a proto lze z posloupnosti $\{x_1^n\}_{n=1}^\infty$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_1^{n_k}\}_{k=1}^\infty$ s limitou $z_1 \in K_1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $y_1^k = x_1^{n_k}$ a $y_2^k = x_2^{n_k}$. Prostor (K_2, ϱ_2) je kompaktní, a proto lze z posloupnosti $\{y_2^k\}_{k=1}^\infty$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_2^{k_j}\}_{j=1}^\infty$ s limitou $z_2 \in K_2$. Posloupnost $\{y_1^k\}_{k=1}^\infty$ konverguje k z_1 , a tedy i posloupnost $\{y_1^{k_j}\}_{j=1}^\infty$ konverguje k z_1 (Věta 10.2.4). Platí tedy

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_1(y_1^{k_j}, z_1) &= 0, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_2(y_2^{k_j}, z_2) &= 0. \end{aligned}$$

Pak ale podle věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{\varrho_1(y_1^{k_j}, z_1)^2 + \varrho_2(y_2^{k_j}, z_2)^2} = 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{(y_1^{k_j}, y_2^{k_j})\}_{j=1}^\infty$ konverguje k bodu (z_1, z_2) v metrice, která je ℓ_2 -součtem metrik ϱ_1 a ϱ_2 . posloupnost $\{(y_1^{k_j}, y_2^{k_j})\}_{j=1}^\infty$ je navíc vybraná z posloupnosti $\{(x_1^n, x_2^n)\}_{n=1}^\infty$. Tím je důkaz proveden. \clubsuit

10.10.48. Definice. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je zobrazení splňující

$$\forall x, y \in P, x \neq y: \varrho(T(x), T(y)) < \varrho(x, y).$$

Pak zobrazení T nazýváme **neexpanzivní**.

10.10.49. Příklad. Necht (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $T: P \rightarrow P$ je neexpanzivní. Dokažte, že potom T má na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Existence pevného bodu. Definujme funkci $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \varrho(x, T(x))$. Podle Příkladu 10.10.1 pro $x, y \in P$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\varrho(x, T(x)) - \varrho(y, T(y))| \leq \varrho(x, y) + \varrho(T(x), T(y)) \\ &\leq 2\varrho(x, y). \end{aligned}$$

Nechť $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\varrho(x, y) < 2\delta = \varepsilon,$$

takže f je spojitě v bodě x . Protože bod x byl zvolen libovolně, je f spojitě na P .

Funkce f tedy nabývá na kompaktním metrickém prostoru (P, ϱ) svého minima. Existuje tudíž bod $x_0 \in P$ takový, že pro všechna $y \in P$ platí $f(x_0) \leq f(y)$. Předpokládejme, že $f(x_0) > 0$. Potom z neexpanzivnosti zobrazení f vyplývá, že

$$f(T(x_0)) = \varrho(T(x_0), T^2(x_0)) < \varrho(x_0, T(x_0)),$$

což je spor. Platí tedy $f(x_0) = 0$. To znamená, že $\varrho(x_0, T(x_0)) = 0$, neboli že x_0 je pevným bodem zobrazení T .

Jednoznačnost. Necht $x, y \in P$ jsou dva různé pevné body zobrazení T . Potom

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) < \varrho(x, y),$$

což je spor. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

Cantorův prostor a Cantorovo diskontinuum.

10.10.50. Označení. (a) Množinu všech konečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, budeme značit \mathcal{S} . Do množiny \mathcal{S} zahrnujeme i prázdnou posloupnost, kterou ztotožňujeme s prázdnou množinou a značíme ji tedy \emptyset . Platí proto

$$\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}^n.$$

(b) Je-li $s \in \mathcal{S}$ a $i \in \{0, 1\}$, značí $s^{\wedge}i$ posloupnost s prodlouženou o prvek i . Délku posloupnosti $s \in \mathcal{S}$ značíme $|s|$, přičemž délka prázdné posloupnosti je 0.

(c) Množinu všech nekonečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1, budeme značit \mathcal{C} . Platí tedy $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pro $x \in \mathcal{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ značíme $x|n = (x_1, \dots, x_n)$. Pro $s \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathcal{C}$ značíme symbolem $s < x$ skutečnost, že x prodlužuje s , neboli nekonečná posloupnost x začíná konečnou posloupností s , ještě jinak řečeno platí $s = x| |s|$.

(d) Indexovanému systému (vizte 1.4.28) množin $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ říkáme **Cantorovo schéma**.

10.10.51. Necht \mathcal{S} je systém otevřených množin v metrickém prostoru (\mathcal{C}, ϱ) , kde ϱ je metrika z Příkladu 10.1.16. Dvojici $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ nazýváme **Cantorovým prostorem**. Cantorův prostor je prostor topologický (vizte Poznámku 10.4.22), ale v dalším výkladu se na něj budeme dívat jako na metrický prostor s metrikou ϱ .

10.10.52. Příklad. Necht $s \in \mathcal{S}$. Označme

$$N_s = \{x \in \mathcal{C}; s < x\}.$$

Množina N_s tedy obsahuje ty nekonečné posloupnosti, které začínají posloupností s . Ukažte, že systém $\{N_s; s \in \mathcal{S}\}$ tvoří otevřenou bázi prostoru \mathcal{C} .

Řešení. Pro $s \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathcal{C}$ splňující $s \prec x$ dokážeme následující rovnost

$$B(x, \frac{2}{2^{|s|+1}}) = N_s. \quad (10.29)$$

Pokud $y \in B(x, \frac{2}{2^{|s|+1}})$ a $y \neq x$, pak nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq y_k$, splňuje $\frac{1}{k} < \frac{2}{2^{|s|+1}}$. Máme tedy $k > |s|$, a proto $x||s| = y||s| = s$. Platí tedy $y \in N_s$. Pokud $y = x$, pak zřejmě $y \in N_s$.

Pokud $y \in N_s$, $y \neq x$, pak nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq y_k$, splňuje $k > |s|$, a tedy $\varrho(x, y) = \frac{1}{k} < \frac{2}{2^{|s|+1}}$. Pokud $y \in N_s$, $y = x$, pak zřejmě $y \in B(x, \frac{2}{2^{|s|+1}})$.

Z (10.29) plyne, že množina N_s je otevřená pro každé $s \in \mathcal{S}$. Necht' $G \subset \mathcal{C}$ je neprázdná otevřená množina. Dokážeme rovnost

$$G = \bigcup \{N_t; t \in \mathcal{S}, N_t \subset G\}. \quad (10.30)$$

Inkluze \supset zřejmě platí. Pro důkaz opačné inkluze zvolme libovolně $x \in G$. Pak díky otevřenosti G existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $B(x, \frac{2}{2^{k+1}}) \subset G$. Odtud plyne

$$x \in B(x, \frac{2}{2^{|s|+1}}) = N_s \subset G.$$

Platí tedy rovnost (10.30). Odtud již plyne, že uvažovaný systém množin tvoří bázi prostoru \mathcal{C} . \clubsuit

10.10.53. Definujme Cantorovo schéma $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ sestávající z neprázdných uzavřených intervalů v $[0, 1]$ následujícím způsobem. Položme $B_\emptyset = [0, 1]$. Předpokládejme, že již máme zkonstruovány intervaly B_s , kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathcal{S}$ a $|s| \leq n$. Necht' $s \in \{0, 1\}^n$ a $B_s = [a, b]$. Pak položíme

$$B_{s \wedge 0} = [a, a + \frac{1}{3}(b - a)], \quad B_{s \wedge 1} = [b - \frac{1}{3}(b - a), b].$$

Množinu

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0, 1\}^n} B_s.$$

nazýváme **Cantorovým diskontinuem**.

Popišme ještě konstrukci Cantorova diskontinua méně formálně, ale možná názorněji. Z intervalu $B_\emptyset = [0, 1]$ vyjmeme interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a obdržíme intervaly $B_0 = [0, \frac{1}{3}]$ a $B_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Z těchto intervalů opět obdobně vyjmeme prostřední třetiny a dostaneme čtveřici nových intervalů $B_{00}, B_{01}, B_{10}, B_{11}$. Z nich opět vyjmeme prostřední třetiny a tento postup stále opakujeme. Body z intervalu $[0, 1]$, které nebudou nikdy vyjmuty, pak tvoří Cantorovo diskontinuum C . Začátek tohoto procesu je znázorněn na následující sérii obrázků.



OBRÁZEK 1.

Všimněme si, že Cantorovo schéma $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ má následující vlastnosti. Pro každé $s \in \mathcal{S}$ platí

- (a) $B_{s \wedge 0} \cup B_{s \wedge 1} \subset B_s$,
- (b) $B_{s \wedge 0} \cap B_{s \wedge 1} = \emptyset$,
- (c) $\text{diam } B_\emptyset = 1$, $\text{diam } B_{s \wedge 0} = \text{diam } B_{s \wedge 1} = \frac{1}{3} B_s$, a tedy $\text{diam } B_s = 3^{-|s|}$.

Všimněme si ještě, že pro Cantorovo diskontinuum platí

$$C = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{C}} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}. \quad (10.31)$$

Ověření inkluze \supset je snadné. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme $x \in C$. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje $s^n \in \{0, 1\}^n$ takové, že $x \in B_{s^n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je systém intervalů $\{B_s; s \in \mathcal{S}, |s| = n\}$ podle vlastností (a) a (b) disjunktní. Odtud plyne, že $s^{n-1} < s^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje $\alpha \in \mathcal{C}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s^n < \alpha$. Potom $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{s^n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$.

10.10.54. Příklad. [vlastnosti Cantorova diskontinua] Ukažte, že C má následující vlastnosti.

- (a) Cantorovo diskontinuum C je homeomorfní s Cantorovým prostorem \mathcal{C} .
- (b) Množina C je kompaktní a řídká podmnožina \mathbb{R} bez izolovaných bodů.
- (c) Množina C má mohutnost kontinua.

Řešení. (a) Necht $(B_s)_{s \in \mathcal{S}}$ je Cantorovo schéma z 10.10.53. Definujme zobrazení $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow C$ následujícím způsobem. Zvolme $\alpha \in \mathcal{C}$ pevné a položme $\varphi(\alpha) = y$, kde $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$. Má-li být $\varphi(\alpha)$ dobře a jednoznačně definováno, je třeba, aby množina $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$ byla jednoprvková. To však plyne z Věty 10.7.19, neboť posloupnost množin $\{B_{\alpha|n}\}_{n=0}^{\infty}$ je tvořena uzavřenými množinami v úplném prostoru \mathbb{R} , platí $B_{\alpha|n} \subset B_{\alpha|(n-1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } B_{\alpha|n} = 0$. Poslední fakt plyne podle vlastnosti (c). Přímou z definice φ plyne, že $\varphi(\mathcal{C}) \subset C$.

Spojitost φ . Necht $\alpha \in \mathcal{C}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $\varphi(\alpha) \in B_s$ a $\text{diam } B_s = 3^{-|s|} < \varepsilon$. Potom $\varphi(N_s) \subset B_s \subset B(\varphi(\alpha), \varepsilon)$. Tím je dokázána spojitost φ .

Prostota φ . Vezměme $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\alpha \neq \beta$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha|n \neq \beta|n$, a tedy $\varphi(\alpha) \in B_{\alpha|n}$, $\varphi(\beta) \in B_{\beta|n}$ a $B_{\alpha|n} \cap B_{\beta|n} = \emptyset$. Odtud plyne $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$.

Surjektivita φ . Pro $x \in C$ existuje podle (10.31) $\alpha \in \mathcal{C}$ takové, že $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\alpha|n}$. Máme tedy $\varphi(\alpha) = x$. Tím je surjektivita ověřena. Navíc díky vlastnosti (b) z 10.10.53 a inkluzi $\varphi(N_s) \subset B_s$, $s \in \mathcal{S}$, dostáváme rovnost $\varphi(N_s) = B_s \cap C$ platnou pro každé $s \in \mathcal{S}$.

Spojitost φ^{-1} . Necht $x \in C$. Označme $\varphi^{-1}(x) = \alpha$. Zvolme $\varepsilon > 0$. S pomocí Příkladu 10.10.52 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $N_{\alpha|n} \subset B(\alpha, \varepsilon)$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \cap C \subset B_{\alpha|n}$. Potom podle předchozího odstavce

$$\varphi^{-1}(B(x, \delta) \cap C) \subset \varphi^{-1}(C \cap B_{\alpha|n}) = N_{\alpha|n} \subset B(\alpha, \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost φ^{-1} .

(b) Množina C je uzavřená, neboť je definována jako průnik uzavřených množin. Množina C je zřejmě omezená. Podle Věty 10.6.9 je tedy C kompaktní.

Řídkost C ověříme podle Věty 10.3.44. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$. Pokud $G \cap C = \emptyset$, pak položíme $H = G$ a máme $H \cap C = \emptyset$. Pokud $H \cap C \neq \emptyset$, pak vezmeme $x \in H \cap C$ a nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $B_s \subset H$. Zde využíváme otevřenost H a vlastnost (c) z 10.10.53. Množina B_s je uzavřený netriviální interval. Označme $B_s = [a, b]$. Potom položíme $H = (a + \frac{1}{3}(b-a), b - \frac{1}{3}(b-a))$ a podle konstrukce Cantorova diskontinua dostáváme $H \cap C = \emptyset$. Tím je řídkost množiny C dokázána.

Zvolme $x \in C$. Ukážeme, že nejde o izolovaný bod C . K tomuto cíli zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $s \in \mathcal{S}$ takové, že $x \in B_s \subset B(x, \varepsilon)$. Pak zvolíme $i \in \{0, 1\}$ takové, že $x \notin B_{s \wedge i}$. Množina $B_{s \wedge i} \cap C$ je neprázdná. Zvolme tedy y z této množiny. Potom máme $y \in C \cap B(x, \varepsilon)$ a $y \neq x$. Bod x tedy není izolovaný.

(c) Výsledek plyne z Příkladu 3.8.27. ♣

10.10.55. Příklad. Cantorův prostor \mathcal{C} je kompaktní, nemá izolované body a má mohutnost kontinua.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 10.10.54, neboť Cantorovo diskontinuum je homeomorfní s Cantorovým prostorem. ♣

10.10.56. Příklad. Necht (P, ϱ) je nespočetný separabilní úplný metrický prostor. Pak existuje množina $K \subset P$, která je homeomorfní s Cantorovým prostorem.

Řešení. Podle Příkladu 10.10.24 lze P psát jako $P = F \cup U$, kde U je spočetná otevřená a F uzavřená perfektní. Pak F je též úplný metrický prostor (Věta 10.7.18). Protože je P nespočetný, je F neprázdný. Nalezneme zobrazení $\varphi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow F$, které bude spojitě a prostě. Potom podle Věty 10.6.20 bude φ homeomorfismus mezi $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a $\varphi(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ a $K = \varphi(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ bude hledanou množinou.

Nejprve induktivně zkonstruujeme Cantorovo schéma $(U_s)_{s \in \mathfrak{S}}$ sestávající z otevřených množin v F , které pro každé $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ splňují

- $U_{s \wedge 0} \cap U_{s \wedge 1} = \emptyset$,
- $\overline{U_{s \wedge i}} \subset U_s, i \in \{0, 1\}$,
- $\text{diam } U_s \leq 2^{-|s|}$.

Konstrukce schématu. Nejprve položíme $U_\emptyset = B(x, \frac{1}{2}) \cap F$, kde $x \in F$. Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a máme zkonstruovány množiny U_s pro $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, |s| \leq n$. Mějme nyní množinu U_s , kde $s \in \{0, 1\}^n$. Protože je F perfektní, je U_s nekonečná. Lze tedy nalézt dva různé body $x, y \in U_s$. Nyní zvolíme takové $r \in (0, 2^{-|s|-2})$, že

- $\overline{B(x, r)} \cap \overline{B(y, r)} = \emptyset$,
- $B(x, r) \cup B(y, r) \subset U_s$.

a položíme $U_{s \wedge 0} = B(x, r), U_{s \wedge 1} = B(y, r)$. Tím je konstrukce provedena.

Konstrukce homeomorfismu φ . Definujeme $\varphi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow F$ jako $\varphi(x) = y$, kde

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x|n}} \quad x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Díky vlastnostem Cantorova schématu je φ dobře definováno, což v tomto případě znamená, že množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x|n}}$ je jednoprvková (vizte Větu 10.7.19).

Spojitosť φ . Necht $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Potom platí $x \in N_{x|n}, \varphi(x) \in \overline{U_{x|n}}$ a

$$\varphi(N_{x|n}) \subset \overline{U_{x|n}} \subset B(\varphi(x), \varepsilon).$$

Tedy φ je spojitě v x .

Injektivita φ . Zvolme $x, z \in \mathfrak{C}, x \neq z$. Nalezneme nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x|n \neq y|n$. Potom $\varphi(x) \in \overline{U_{x|n}}, \varphi(y) \in \overline{U_{y|n}}$ a $\overline{U_{x|n}} \cap \overline{U_{y|n}} = \emptyset$. Odtud plyne $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, a φ je tedy prosté. ♣

Souvislé a křivkově souvislé prostory.

10.10.57. Příklad. Necht (P, ϱ) je souvislý metrický prostor obsahující alespoň dva body. Potom je P nespočetný.

Řešení. Necht $x, y \in P, x \neq y$. Předpokládejme, že P je spočetný. Pro $r > 0$ označme $A(r) = \{z \in P; \varrho(x, z) = r\}$. Potom existuje $r \in (0, \varrho(x, y))$ takové, že množina $A(r)$ je prázdná, neboť systém množin $\{A(s); s \in (0, \varrho(x, y))\}$ je disjunktivní a interval $(0, \varrho(x, y))$ je nespočetný. Položme $H = B(x, r)$. Potom H je zřejmě neprázdná (neboť $x \in H$) a otevřená. Podle Příkladu 10.10.4 je $\overline{B(x, r)}$ uzavřená množina, a tedy podle Věty 10.3.24(g) platí $\overline{H} \subset \overline{B(x, r)}$. Celkem tedy podle Příkladu 10.10.5(a) máme

$$\overline{H} \subset \overline{B(x, r)} = B(x, r) \cup A(r) = B(x, r) = H,$$

takže H je uzavřená, a tedy obojetná. Protože $r < \varrho(x, y)$, platí $y \in P \setminus H$, takže $P \setminus H$ je neprázdná. To je podle Věty 10.9.8 spor s tím, že P je souvislý. Odtud plyne tvrzení. ♣

10.10.58. Příklad. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: P \rightarrow Q$ je spojitě zobrazení. Necht $A \subset P$ je křivkově souvislá množina v prostoru P . Pak $f(A)$ je křivkově souvislá množina v prostoru Q .

Řešení. Zvolme body $a, b \in f(A)$. Potom existují body $x, y \in A$ takové, že $f(x) = a$ a $f(y) = b$. Množina A je křivkově souvislá, a proto existuje spojitě zobrazení $h: [0, 1] \rightarrow A$ takové, že $h(0) = x$ a $h(1) = y$. Zobrazení $f \circ h$ je spojitě zobrazení z $[0, 1]$ do Q a platí $f \circ h(0) = a$ a $f \circ h(1) = b$. Tím je nalezena příslušná křivka pro body a a b , a je tak ověřena křivková souvislost množiny $f(A)$. ♣

10.10.59. Příklad. Dokažte, že prostor $[0, 1]^2$ s metrikou zděděnou z \mathbb{R}^2 není homeomorfní s intervalem $[0, 1]$.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ je homeomorfismus prostoru $[0, 1]$ na prostor $[0, 1]^2$. Zobrazení f je bijekce, a proto musí existovat $a \in (0, 1)$ takové, že $f(a) \in (0, 1)^2$. Potom je zobrazení $f|_{[0,1] \setminus \{a\}}$ homeomorfismus prostoru $A = [0, 1] \setminus \{a\}$ a prostoru $B = [0, 1]^2 \setminus \{f(a)\}$.

Prostor B je křivkově souvislý. Stačí ukázat, že pro každý bod $[x, y] \in B$ existuje křivka $\gamma: [0, 1] \rightarrow B$ splňující $\gamma(0) = [0, 0]$ a $\gamma(1) = [x, y]$. Předpokládejme tedy, že $[x, y] \in B$. Definujme křivku γ předpisem

$$\gamma(t) = \begin{cases} [t(x+y), 0], & t \in [0, \frac{x}{x+y}], \\ [x, t(x+y) - x], & t \in (\frac{x}{x+y}, 1]. \end{cases}$$

Je snadné ověřit, že γ je spojitě zobrazení splňující $\gamma(0) = [0, 0]$, $\gamma(1) = [x, y]$ a $\gamma([0, 1]) \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Pokud navíc $f(a) \notin \gamma([0, 1])$, pak jsme hotovi. Pokud ale $f(a) \in \gamma([0, 1])$, použijeme místo γ křivku η definovanou předpisem

$$\eta(t) = \begin{cases} [0, t(x+y)], & t \in [0, \frac{y}{x+y}], \\ [t(x+y) - y, y], & t \in (\frac{y}{x+y}, 1]. \end{cases}$$

Opět je snadné ověřit, že η je spojitě zobrazení splňující $\eta(0) = [0, 0]$, $\eta(1) = [x, y]$ a $\eta([0, 1]) \subset [0, 1]^2$. Vzhledem k tomu, že $f(a) \in (0, 1)^2 \cap \gamma([0, 1])$, musí být $x > 0$ a $y > 0$. Potom $\gamma((0, 1)) \cap \eta((0, 1)) = \emptyset$, a tedy $f(a) \notin \eta([0, 1])$. Máme tak $\eta([0, 1]) \subset B$.

Prostor B je křivkově souvislý, a proto je i prostor A křivkově souvislý podle Příkladu 10.10.58. To znamená, že A je také souvislý podle Věty 10.9.19, což je ovšem spor s Větou 10.9.11. ♣

10.10.60. Příklad. Dokažte, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.

Řešení. Položme $B = \{[x, \sin(\frac{1}{x})]; x \in (0, 1]\}$. Interval $(0, 1]$ je zřejmě křivkově souvislá množina. Množina B je pak křivkově souvislá podle Příkladu 10.10.58, neboť je obrazem intervalu $(0, 1]$ při spojitým zobrazení $x \mapsto [x, \sin(\frac{1}{x})]$. Množina \overline{B} však není křivkově souvislá, neboť pro body $[0, 0]$ a $[\frac{1}{\pi}, 0]$, které leží v \overline{B} , neexistuje příslušná křivka, což lze nahlédnout obdobně jako v Příkladu 10.9.22. ♣

10.10.61. Příklad. Necht (P, ρ) je metrický prostor, $I \neq \emptyset$ a pro každé $\alpha \in I$ je A_α křivkově souvislá množina v P . Necht platí

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset. \quad (10.32)$$

Potom je $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ křivkově souvislá množina v P .

Řešení. Zvolme body $a, b \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Potom existují $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ takové, že $a \in A_{\alpha_1}$ a $b \in A_{\alpha_2}$. Dále díky 10.32 existuje $c \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$. Množina A_{α_1} je křivkově souvislá, a proto existuje křivka $h_1: [0, 1] \rightarrow A_{\alpha_1}$ splňující $h_1(0) = a$, $h_1(1) = c$. Podobně díky křivkové souvislosti množiny A_{α_2} nalezneme křivku $h_2: [0, 1] \rightarrow A_{\alpha_2}$ splňující $h_2(0) = c$ a $h_2(1) = b$. Pomocí křivek h_1, h_2 sestrojíme příslušnou křivku h pro dvojici bodů a, b následujícím způsobem:

$$h(t) = \begin{cases} h_1(2t) & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ h_2(2t - \frac{1}{2}) & \text{pro } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ověření spojitosti zobrazení h není těžké a snadno vidíme, že $h([0, 1]) \subset A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $h(0) = a$, $h(1) = b$. Tím je křivková souvislost uvažované množiny dokázána. ♣

Funkce více proměnných

V této kapitole zavedeme a prozkoumáme základní pojmy diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Při výkladu budeme potřebovat některé pojmy a výsledky z teorie vektorových prostorů. Podrobný výklad této teorie je obsažen například v [3].

11.1. Parciální derivace a totální diferenciál

11.1.1 (\mathbb{R}^n jako vektorový prostor). Připomeňme, že množina \mathbb{R}^n , kde $n \in \mathbb{N}$, je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel, neboť jde o kartézský součin o n faktorech:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}.$$

Je-li $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, potom jeho i -tou souřadnici značíme x_i , a můžeme tedy psát $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$. Množina \mathbb{R}^n obsahuje některé významné prvky. Je to především **počátek**, to jest prvek, jehož všechny souřadnice jsou nulové. Značíme jej \mathbf{o} . Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a definujme prvek $\mathbf{e}^i \in \mathbb{R}^n$ takto:

$$\mathbf{e}^i = [0, \dots, 0, \underset{\substack{i\text{-tá sou-} \\ \text{-řadnice}}}{1}, 0, \dots, 0].$$

I tyto prvky budou pro nás později důležité.

Prvky \mathbb{R}^n můžeme mezi sebou sčítat a můžeme je násobit reálným číslem. Je-li $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n],$$

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n].$$

Trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde $+$ a \cdot jsou výše uvedené operace, tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} . Množina $B = \{\mathbf{e}^i; i \in \{1, \dots, n\}\}$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^n , tj. jde o lineárně nezávislou množinu a každý prvek $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ můžeme psát jako lineární kombinaci vektorů z množiny B . Zde konkrétně máme $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}^i$.

O množině \mathbb{R}^n s operacemi sčítání a násobení reálným číslem budeme mluvit jako o prostoru \mathbb{R}^n a o prvcích z \mathbb{R}^n jako o bodech tohoto prostoru. Někdy je ovšem užitečné pohlížet na daný prvek \mathbf{x} z \mathbb{R}^n jako na *vektor*, tj. orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku a koncovým v bodě \mathbf{x} .

Použijeme-li v dalším textu symbol \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^k , \mathbb{R}^m a podobně, budou n, m, k vždy přirozená čísla.

11.1.2. V průběhu celé kapitoly budeme na \mathbb{R}^n uvažovat eukleidovskou normu

$$\|\mathbf{x}\| = \|[x_1, \dots, x_n]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

a eukleidovskou metriku $\varrho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Vizte Příklad 10.1.21.

11.1.3. Podrobné pojednání o skalárních součinech naleznete v [3, kapitola 26]. Zde pouze připomeneme několik základních faktů. **Skalární součin** prvků $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Skalární součin má následující vlastnosti

- (a) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0$,
- (b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n: \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$,
- (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$,
- (d) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou **navzájem ortogonální (kolmé)**, jestliže platí $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Necht $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **ortogonální (kolmý)** na množinu M , jestliže je ortogonální na každý vektor množiny M . Symbol M^\perp značí množinu těch vektorů, které jsou ortogonální na množinu M .

11.1.4 (lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m). Řekneme, že zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

- (a) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n: L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$,
- (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n: L(\alpha \mathbf{u}) = \alpha L(\mathbf{u})$.

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m budeme značit symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $A = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ o m řádkách a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vizte [3, kapitola 11].

11.1.5. Úmluva. V souladu s definicí \mathbb{R}^n budeme prvky $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ chápat jako řádkové vektory. Pokud budeme ale pracovat s maticovou reprezentací lineárních zobrazení, tak budeme \mathbf{x} uvažovat jako sloupcový vektor neboli matici typu $n \times 1$. Potom bude součin $A\mathbf{x}$ z předchozího paragrafu dobře definován.

11.1.6. Termínem **reálná funkce n proměnných** budeme rozumět funkci z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} .

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Chování f v blízkosti bodu \mathbf{a} můžeme zkoumat následujícím způsobem. Zvolíme jednu souřadnici, například první, a budeme se dívat, jak se mění hodnoty funkce f , měníme-li pouze tuto souřadnici nezávisle proměnné funkce f a ostatní souřadnice zůstávají rovny příslušným souřadnicím bodu \mathbf{a} . Velikost změny funkční hodnoty pak porovnáme se změnou velikosti první souřadnice, tj. zkoumáme výraz

$$\frac{f(x_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_1 - a_1},$$

který lze pomocí vektorového zápisu zapsat jako

$$\frac{f(\mathbf{a} + (x_1 - a_1)\mathbf{e}^1) - f(\mathbf{a})}{x_1 - a_1},$$

Při tomto přístupu je ale uvedený výraz funkcí jedné proměnné, totiž proměnné x_1 , a je tedy možné jej vyšetřovat pomocí metod Kapitoly 4. Tyto úvahy nás vedou k následující důležité definici.

11.1.7. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě \mathbf{a} podle i -té proměnné** definujeme předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}^i) - f(\mathbf{a})}{t}. \quad (11.1)$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i -té proměnné, tj. funkci z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

V některých případech se používá místo symbolu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ i značení $\partial_i f(\mathbf{a})$, $D_i f(\mathbf{a})$ a podobně.

11.1.8. Nechť f , \mathbf{a} a i jsou jako v předchozí definici.

(a) Pokud jde o vztah (11.1), můžeme rozlišit následující možnosti:

$$\text{limita v (11.1)} \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} \end{cases} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty \\ -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

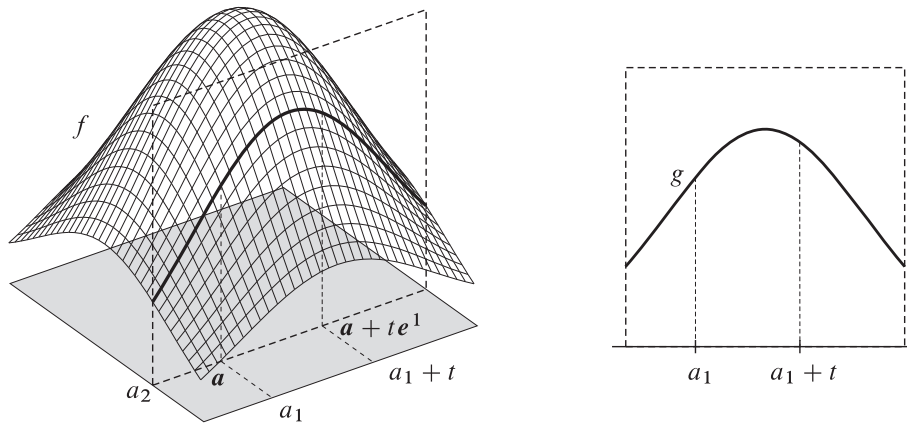
(b) Pokud parciální derivace podle i -té proměnné v bodě \mathbf{a} existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{\mathbf{a} + t\mathbf{e}^i; |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat usečku, která prochází bodem \mathbf{a} .

11.1.9 (derivace parciální funkce). Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Položíme-li

$$g(y) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

pak $g'(a_j)$ existuje, právě když existuje $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$, neboť výpočet vede v obou případech na stejnou limitu. Pokud obě derivace existují, pak jsou si rovny.

Na následujícím obrázku je pro jistou funkci f dvou proměnných vidět geometrický význam funkce g , které říkáme parciální.



OBRÁZEK 1.

11.1.10 (aritmetika parciálních derivací). Z předchozího paragrafu plynou některá pravidla pro výpočet parciálních derivací, neboť lze použít větu o aritmetice derivací pro funkce jedné proměnné (Věta 5.1.17). Pro reálné funkce f a h z \mathbb{R}^n , bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ tak dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f+h)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \\ \frac{\partial(fh)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})h(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}),\end{aligned}$$

pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ existují vlastní.

11.1.11. Úmluva. V dalším textu bude výrok „parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje *vlastní*.

11.1.12. Příklad. Pro funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$ spočítejte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Řešení. Podle 11.1.10 v každém bodě $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} 2x_1 x_2.$$

♣

11.1.13. Necht $n, m \in \mathbb{N}$. Množinu všech reálných matic typu $n \times m$ budeme značit $M(n \times m)$. Tyto matice jednoznačně reprezentují lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m .

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Existují-li derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \dots, n$, pak nám poskytují informaci o chování funkce f blízko bodu \mathbf{a} na úsečkách, které jsou určeny pomocí vektorů $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$. O chování funkce f například na úsečce tvaru $\{\mathbf{a} + t(\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2); t \in (-\delta, \delta)\}$, kde $\delta > 0$, však žádnou informaci nemáme. Funkce f dokonce nemusí být definována v žádném bodě takové úsečky vyjma bodu \mathbf{a} . Abychom mohli zkoumat chování funkce f v malých okolích bodu \mathbf{a} a ne pouze na některých úsečkách, zavedeme v následující definici nový pojem, který nám to umožní.

11.1.14. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě \mathbf{a}** , pokud platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (11.2)$$

11.1.15. Nechť f a \mathbf{a} jsou jako v předchozí definici.

(a) Výrok (11.2) je ekvivalentní výroku

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0. \quad (11.3)$$

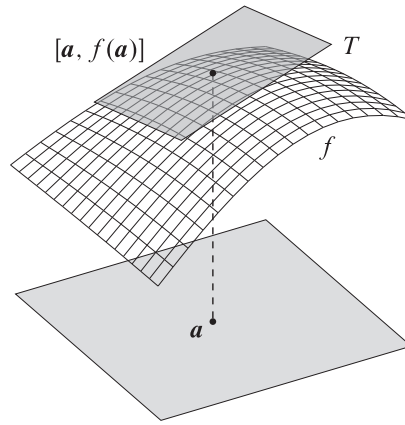
(b) Z existence totálního diferenciálu v bodě \mathbf{a} plyne, že funkce f je definována na nějakém okolí bodu \mathbf{a} .

11.1.16 (geometrický význam totálního diferenciálu). Předpokládejme, že f je reálná funkce n proměnných, která má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L . Definujme funkci $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Podle (11.3) platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Tento vztah - neformálně řečeno - ukazuje, že funkce T aproximuje velmi dobře funkci f v blízkosti bodu \mathbf{a} . Rozdíl funkčních hodnot $f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})$ je ve srovnání se vzdáleností $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ malý.

Grafem funkce T je afinní podprostor prostoru \mathbb{R}^{n+1} . V uvedené situaci jej nazýváme **tečnou rovinou**, pokud $n = 2$, nebo **tečnou nadrovinou**, pokud $n > 2$, ke grafu funkce f v bodě $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$. Graf totálního diferenciálu je potom afinní (dokonce vektorový) podprostor \mathbb{R}^{n+1} , který obsahuje počátek prostoru \mathbb{R}^{n+1} a je rovnoběžný s tečnou (nad)rovinou.



OBRÁZEK 2.

11.1.17. Věta (vztah totálního diferenciálu a parciálních derivací). Necht f je funkce n proměnných, která má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L . Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})$ a pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární, a proto existují reálná čísla A_1, \dots, A_n taková, že pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\mathbf{h}) = L(h_1, \dots, h_n) = A_1h_1 + \dots + A_nh_n.$$

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $\varphi: t \mapsto te^i$ je spojitě a $\varphi(t) \neq \mathbf{o}$ pro $t \neq 0$. Tedy dle Věty 10.4.18 platí

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + \varphi(t)) - f(\mathbf{a}) - L(\varphi(t))}{\|\varphi(t)\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + te^i) - f(\mathbf{a}) - A_it}{|t|}.$$

Odtud

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(\mathbf{a} + te^i) - f(\mathbf{a})}{t} - A_i \right| = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + te^i) - f(\mathbf{a})}{t} = A_i.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

11.1.18. Z Věty 11.1.17 plyne, že existuje-li totální diferenciál, je určen jednoznačně, protože je reprezentován maticí $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}))$, která je určena jednoznačně. To nás opravňuje k zavedení následujícího značení. Existuje-li tedy totální diferenciál funkce f v bodě \mathbf{a} , pak jej značíme symbolem $f'(\mathbf{a})$. Hodnotu lineárního zobrazení $f'(\mathbf{a})$ v bodě $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ pak značíme $f'(\mathbf{a})(\mathbf{h})$.

Upozorníme, že v případě $n = 1$ zde, bohužel, vzniká kolize ve značení. Symbol $f'(a)$ pak totiž jednak označuje derivaci funkce f v bodě a , tedy reálné číslo, a jednak totální diferenciál funkce f v bodě a , tedy lineární zobrazení. Toto lineární zobrazení je však reprezentováno maticí 1×1 , jejímž jediným prvkem je právě hodnota derivace. Z kontextu však bude vždy zřejmé, který význam máme na mysli.

11.1.19. Věta. Necht f je funkce n proměnných, která má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom je funkce f v bodě \mathbf{a} spojitá.

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ a $\mathbf{h} \mapsto f'(\mathbf{a})(\mathbf{h})$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left(\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \right. \\ &\quad \left. + f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right) \\ &= 0 \cdot 0 + f(\mathbf{a}) + 0 = f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v \mathbf{a} . ■

11.1.20. Z pouhé existence parciálních derivací v daném bodě ještě spojitost funkce v tomto bodě nevyplývá, jak ukazuje následující příklad. Definujme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{o}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{o}) = 0$, ale f není v \mathbf{o} spojitá. Tedy ani $f'(\mathbf{o})$ neexistuje. Uvědomme si, že v tomto případě lze definovat lineární zobrazení, které je reprezentováno maticí parciálních derivací, ale toto zobrazení není totálním diferenciálem funkce f v bodě \mathbf{o} , protože nespĺňuje vztah s limitou z definice totálního diferenciálu.

Pokud ale předpoklad ohledně existence parciálních derivací vhodně zesílíme, pak je možné existenci totálního diferenciálu odvodit. Tento výsledek je obsahem Věty 11.1.22, v jejímž důkazu využijeme následující lemma, které je vícedimenzionální variantou Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

11.1.21. Lemma. Necht f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I$. Necht v každém bodě I existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f . Potom existují body $\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^n \in I$ takové, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}^i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^0 &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = \mathbf{a}, \\ \mathbf{p}^1 &= (b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n), \\ \mathbf{p}^2 &= (b_1, b_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n), \\ &\vdots \\ \mathbf{p}^{n-1} &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, a_n), \\ \mathbf{p}^n &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n) = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Potom platí

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (f(\mathbf{p}^i) - f(\mathbf{p}^{i-1})). \quad (11.4)$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ položme

$$g_i(x) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Funkce g_i má v (α_i, β_i) vlastní derivaci rovnou

$$g'_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, a_n). \quad (11.5)$$

Pokud $a_i \neq b_i$, existuje podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) bod z_i v intervalu s krajními body a_i a b_i takový, že

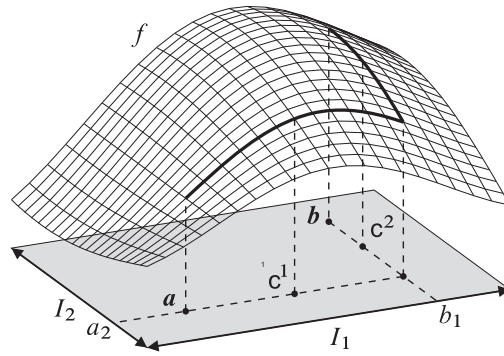
$$f(\mathbf{p}^i) - f(\mathbf{p}^{i-1}) = g_i(b_i) - g_i(a_i) = g'_i(z_i) \cdot (b_i - a_i) \quad (11.6)$$

V případě, že $a_i = b_i$, volme $z_i = a_i$. Pak (11.6) platí i v tomto případě. Položme

$$\mathbf{c}^i = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, z_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom podle (11.5) a (11.6) platí $f(\mathbf{p}^i) - f(\mathbf{p}^{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}^i)(b_i - a_i)$. Odtud a z (11.4) dostáváme dokazovaný vztah.

Následující obrázek ilustruje základní myšlenku důkazu pro $n = 2$.



OBRÁZEK 3.

■

11.1.22. Věta. Necht f je reálná funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě \mathbf{a} . Pak má funkce f v bodě \mathbf{a} totální diferenciál.

Důkaz. Ukážeme, že lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})h_i, \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

je totálním diferenciálem funkce f v bodě \mathbf{a} .

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \tilde{\delta}): \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$ a označme

$$I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \dots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Potom platí $B(\mathbf{a}, \delta) \subset I \subset B(\mathbf{a}, \tilde{\delta})$. Necht $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$ je libovolné. Pak podle Lemmatu 11.1.21 existují body $\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^n \in I$ takové, že

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}^i)(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}^i)(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right) (x_i - a_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right| |x_i - a_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \\ &\leq \varepsilon n \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|. \end{aligned}$$

Tedy pro $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}$ máme

$$\frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \leq n\varepsilon,$$

čímž je důkaz proveden. ■

V definici parciální derivace jsme pracovali s kanonickými vektory $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$. Stejný přístup použijeme i v následující definici, kde ale budeme uvažovat libovolný vektor z \mathbb{R}^n .

11.1.23. Definice. Necht f je funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě \mathbf{a} podle vektoru \mathbf{v}** rozumíme limitu

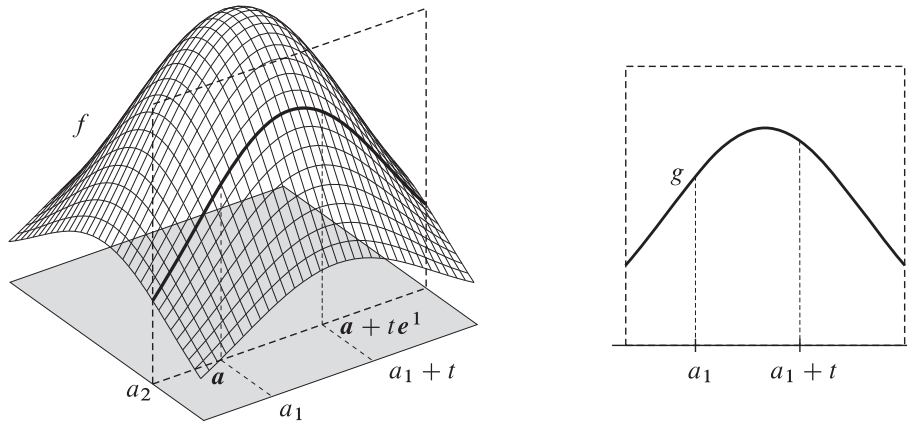
$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t},$$

pokud existuje *vlastní*.

11.1.24. (a) Jestliže je f funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, potom zřejmě platí $D_{\mathbf{e}^i}f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$.

(b) Pokud parciální derivace podle vektoru \mathbf{v} v bodě \mathbf{a} existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{\mathbf{a} + t\mathbf{v}; |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat úsečku, která prochází bodem \mathbf{a} .

(c) Necht f je reálná funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Položíme-li $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ pro t splňující $\mathbf{a} + t\mathbf{v} \in \mathcal{D}(f)$, pak $g'(0)$ existuje, právě když existuje $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$, neboť výpočet vede v obou případech na stejnou limitu. Pokud obě derivace existují, pak jsou si rovny. Na následujícím obrázku je pro jistou funkci f dvou proměnných vidět geometrický význam funkce g .



OBRÁZEK 4.

(d) Podobně jako v případě parciálních derivací plynou z předchozího výkladu některá pravidla pro počítání s derivacemi podle vektoru. Pro reálné funkce f a h z \mathbb{R}^n , bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tak dostáváme

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}(f + h)(\mathbf{a}) &= D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{v}}h(\mathbf{a}), \\ D_{\mathbf{v}}(fh)(\mathbf{a}) &= D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \cdot h(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot D_{\mathbf{v}}h(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

pokud $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$, $D_{\mathbf{v}}h(\mathbf{a})$ existují.

11.1.25. Definice. Necht f je funkce n proměnných, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\mathbf{a})$ existuje. Pak definujeme vektor $\nabla f(\mathbf{a})$ z \mathbb{R}^n předpisem

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

a nazýváme jej **gradient funkce f v bodě \mathbf{a}** .

11.1.26. Necht f a \mathbf{a} jsou jako v předchozí definici. Chápeme-li $\nabla f(\mathbf{a})$ jako matici typu $1 \times n$, pak jde o reprezentující matici totálního diferenciálu $f'(\mathbf{a})$. Pokud se na $\nabla f(\mathbf{a})$ díváme jako na vektor, pak můžeme pomocí skalárního součinu psát $f'(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle$ pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.

Souvislost totálního diferenciálu, derivace podle vektoru a gradientu zachycuje následující věta.

11.1.27. Věta. Necht f je reálná funkce n proměnných, $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(\mathbf{a})$. Potom platí:

- $f'(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$,
- $\max\{D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}); \|\mathbf{v}\| = 1\} = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$.

Důkaz. (a) Pokud $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ potom dokazovaná rovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Potom platí

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a})(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|} \cdot \frac{\|t\mathbf{v}\|}{t} + f'(\mathbf{a})(\mathbf{v}) \right). \end{aligned}$$

Funkce $t \mapsto \frac{\|t\mathbf{v}\|}{t}$ je omezená na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a})(t\mathbf{v})}{t} = 0.$$

Odtud plyne $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = 0 + f'(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{v})$.

(b) Z Cauchyovy nerovnosti (Věta ??) máme

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})v_i \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{v}\|. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Pokud $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, pak dokazovaná rovnost platí, neboť obě strany jsou rovny nule. Předpokládejme, že platí $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{o}$. Položme

$$\mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{a}).$$

Pak podle již dokázané části (a) platí $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{v})$ a můžeme psát

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\|.$$

Odtud a z (11.7) již plyne (b). ■

11.1.28. (a) Pokud $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{o}$, pak se v (b) nabývá maxima právě pro $\mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{a})$.

(b) Necht $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\mathbf{a})$ existuje. Jestliže vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a $\nabla f(\mathbf{a})$ svírají úhel menší než $\frac{\pi}{2}$, neboli $\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{v} \rangle > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ platí $f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) > f(\mathbf{a})$ a pro každé $t \in (-\delta, 0)$ platí $f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) < f(\mathbf{a})$. Uvažujme funkci g z \mathbb{R} do \mathbb{R} definovanou předpisem $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$, pokud $\mathbf{a} + t\mathbf{v} \in G$. Potom platí

$$g'(0) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{v} \rangle > 0$$

a podle Věty 5.4.3 dostáváme uvedené tvrzení.

11.1.29. Příklad. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá a otevřená množina a $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každé $x \in G$ platí $f'(x) = 0$. Dokažte, že potom f je konstantní na G .

Řešení. ♣

11.2. Derivace vektorových funkcí

Pojem totálního diferenciálu pro funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} je možné zobecnit i pro **vektorové funkce**, tj. funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . To je provedeno v následující definici.

11.2.1. Definice. Necht F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení F v bodě \mathbf{a}** , pokud platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{o}. \quad (11.8)$$

11.2.2. Ve vztahu (11.8) se vyskytuje dvakrát symbol označující nulový vektor. V případě výrazu $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}$ jde o vektor z \mathbb{R}^n , ve druhém případě jde o vektor z \mathbb{R}^m . Vzhledem k tomu, že je z kontextu jasné, z kterých prostorů jsou uvedené vektory, používáme jeden symbol v obou případech, ačkoliv jde o rozdílné vektory, pokud $n \neq m$.

Vztah (11.8) je splněn, právě když platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{\|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (11.9)$$

Ve výrazu (11.9) se dvakrát vyskytuje symbol normy. Podobně jako pro nulový vektor vyplývá z kontextu, že norma v čitateli je normou na prostoru \mathbb{R}^m a norma ve jmenovateli je normou na prostoru \mathbb{R}^n .

11.2.3. Zobrazení F z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci právě tehdy, když každá jeho složka, tedy každé zobrazení F_i z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $i \in \{1, \dots, m\}$, má v bodě \mathbf{a} totální diferenciál. Podívejme se postupně na obě implikace v předchozím tvrzení.

\Rightarrow Podle Věty ?? platí (11.8), právě když každá složka funkce, jejíž limitu počítáme, má limitu rovnou nule, tj. pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \left(\frac{F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \right)_i = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{F_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F_i(\mathbf{a}) - L_i(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (11.10)$$

Z druhé rovnosti plyne, že funkce F_i má v bodě \mathbf{a} totální diferenciál rovný lineárnímu zobrazení L_i .

\Leftarrow Definujme zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem $L(\mathbf{h}) = (F'_1(\mathbf{a})(\mathbf{h}), \dots, F'_m(\mathbf{a})(\mathbf{h}))$. Zobrazení L je lineární, neboť $F'_1(\mathbf{a}), \dots, F'_m(\mathbf{a})$ jsou lineární. Z definice totálního diferenciálu platí pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{F_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F_i(\mathbf{a}) - F'_i(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Podle Věty ?? dostáváme

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \left[\frac{F_1(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F_1(\mathbf{a}) - F'_1(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}, \dots, \frac{F_m(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F_m(\mathbf{a}) - F'_m(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \right] \\ &= \underbrace{[0, \dots, 0]}_{m\text{-krát}} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Lineární zobrazení L je tedy derivace zobrazení F v bodě \mathbf{a} .

11.2.4. Označení. (a) Z 11.2.3 je vidět, že má-li F v bodě \mathbf{a} derivaci $L = (L_1, \dots, L_m)$, pak je L_i totálním diferenciálem F_i v bodě \mathbf{a} pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Totální diferenciál je určen jednoznačně, pokud existuje, a tedy derivace zobrazení F v bodě \mathbf{a} je určena jednoznačně, pokud existuje. Tato úvaha nás opravňuje označit lineární zobrazení, které je derivací funkce F v bodě \mathbf{a} , symbolem $F'(\mathbf{a})$.

(b) Pokud v Definici 11.2.1 derivace $m = 1$, pak je vztah (11.8) ekvivalentní s (11.2). V tomto případě tedy znovu definujeme pojem totálního diferenciálu. V dalším textu již nebudeme termín totální diferenciál používat a dáme přednost termínu derivace.

11.2.5. (a) Necht $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je zobrazení, které je konstantní na jistém okolí bodu \mathbf{a} . Pak $F'(\mathbf{a})$ je lineární zobrazení, které libovolnému vektoru $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje nulový vektor v prostoru \mathbb{R}^m . Stačí nalézt $\eta > 0$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ takové, že $F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ pro každé $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \eta)$. Potom pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{h}\| < \eta$, platí

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - F'(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} - \mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

Odtud okamžitě plyne naše tvrzení.

(b) Je-li $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, pak v každém bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ platí $L'(\mathbf{a}) = L$, neboť pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - L(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})\| = \|\mathbf{o}\| = 0.$$

11.2.6 (geometrický význam derivace). Předpokládejme, že F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , které má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Na zobrazení F se můžeme podívat jako na m -tici funkcí F_1, \dots, F_m a pro každou z těchto funkcí uvažovat její derivaci, pomocí které můžeme aproximovat její chování v okolí bodu \mathbf{a} ve smyslu 11.1.16. Pomocí derivace $F'(\mathbf{a})$, která má složky $F'_1(\mathbf{a}), \dots, F'_m(\mathbf{a})$, pak můžeme aproximovat chování funkce F v okolí bodu \mathbf{a} , neboť můžeme aproximovat chování jednotlivých složek. Jinými slovy, definujeme-li funkci $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, pak podle definice platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{F(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = \mathbf{o}.$$

Afinní funkce T , která je obecně jednodušší objekt než F , aproximuje velmi dobře funkci F v blízkosti bodu \mathbf{a} . Vektor $F(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})$ je totiž ve srovnání s velikostí vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ malý.

11.2.7. Věta. Necht' F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , které má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je $F'(\mathbf{a})$ reprezentována maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}. \quad (11.11)$$

Důkaz. Podle 11.2.3 víme, že derivace $F'_j(\mathbf{a})$, $j \in \{1, \dots, m\}$, existuje a je podle 11.1.18 reprezentována maticí $(\frac{\partial F_j}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(\mathbf{a}))$. Lineární zobrazení $F'(\mathbf{a})$ má složky $F'_j(\mathbf{a})$, $j = 1, \dots, m$, takže je reprezentováno maticí (11.11). ■

11.2.8. Označení. Matice reprezentující $F'(\mathbf{a})$ se nazývá **Jacobiho matice**. Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **jacobián** a značíme ho $J_F(\mathbf{a})$, případně

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a}).$$

11.2.9. Věta. Necht' F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , které má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak je F spojité v \mathbf{a} .

Důkaz. Podle 11.2.3 existují derivace $F'_i(\mathbf{a})$, $i = 1, \dots, m$, takže všechny funkce F_i jsou spojité v \mathbf{a} podle Věty 11.1.19. Odtud plyne podle Věty ?? spojitost F v \mathbf{a} . ■

11.2.10. Věta. Necht' F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ jsou spojité v \mathbf{a} pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Pak $F'(\mathbf{a})$ existuje.

Důkaz. Podle Věty 11.1.22 existují derivace $F'_1(\mathbf{a}), \dots, F'_m(\mathbf{a})$. Z 11.2.3 dostáváme existenci $F'(\mathbf{a})$. ■

11.2.11. Lemma. Necht' $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \|L\mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}\|.$$

Důkaz. Necht' matice $A = (a_{ji})_{\substack{j=1..m \\ i=1..n}} \in M(m \times n)$ reprezentuje L . Pak máme z Cauchyovy nerovnosti (Věta ??)

$$\begin{aligned} \|L\mathbf{x}\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^m (L(\mathbf{x}))_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji}^2} \cdot \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Položíme-li

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji}^2},$$

dostáváme požadovaný výsledek. ■

11.2.12. Definice. Na množině $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zavedeme operace sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem takto

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)(\mathbf{x}) &= L_1(\mathbf{x}) + L_2(\mathbf{x}), & L_1, L_2 &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ (cL)(\mathbf{x}) &= cL(\mathbf{x}), & L &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), c \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Vzhledem k těmto operacím tvoří $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektorový prostor nad reálnými čísly. Definujeme pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normu

$$\|L\| = \sup \left\{ \frac{\|L(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \right\}.$$

11.2.13. Lemma. Vektorový prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je s výše definovanou normou normovaný lineární prostor.

Důkaz. Musíme ověřit, že zobrazení $L \mapsto \|L\|$ je norma na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zjevně je norma nulového zobrazení rovna nule a $\|L\| = 0$ právě tehdy, když $\|L(\mathbf{x})\| = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tj. když $L = 0$.

Snadno též odvodíme pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $c \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned}\|cL\| &= \sup \left\{ \frac{\|cL(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \right\} \\ &= |c| \sup \left\{ \frac{\|L(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \right\} \\ &= |c| \|L\|.\end{aligned}$$

Zbývá ověřit trojúhelníkovou nerovnost. Pro $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}\|L_1 + L_2\| &= \sup \left\{ \frac{\|L_1(\mathbf{x}) + L_2(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|L_1(\mathbf{x})\| + \|L_2(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|L_1(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \right\} + \sup \left\{ \frac{\|L_2(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o} \right\} \\ &= \|L_1\| + \|L_2\|.\end{aligned}$$

■

11.2.14. Poznámka. Povšimněme si, že pro každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|L(\mathbf{x})\| \leq \|L\| \|\mathbf{x}\|$. Mějme totiž $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ v \mathbb{R}^n dáno. Pak

$$\frac{\|L(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|L\|,$$

a tedy

$$\|L(\mathbf{x})\| \leq \|L\| \|\mathbf{x}\|.$$

Pro $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ platí nerovnost triviálně.

11.2.15. Lemma. Necht F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m mající derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Pak existují $C > 0$ a $\delta > 0$ taková, že

$$\forall \mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta): \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})\| \leq C \|\mathbf{h}\|.$$

Důkaz. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta)$ platí

$$\|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \leq \|\mathbf{h}\|.$$

Potom pro $\mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})\| &\leq \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| + \|F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \\ &\leq \|\mathbf{h}\| + \|F'(\mathbf{a})\| \|\mathbf{h}\| = (1 + \|F'(\mathbf{a})\|) \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Číslo $C = 1 + \|F'(\mathbf{a})\|$ tedy vyhovuje požadované nerovnosti. \blacksquare

11.2.16. Věta (derivace složeného zobrazení). Necht F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , G je zobrazení z \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^s , F má derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ a G má derivaci v bodě $b = F(a) \in \mathbb{R}^k$. Pak existuje derivace $(G \circ F)'(a)$ a platí

$$(G \circ F)'(a) = G'(b) \circ F'(a).$$

Důkaz. Díky Lemmatu 11.2.15 nalezneme $C \in \mathbb{R}$ a $\delta_0 > 0$, takové, že

$$\forall \mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta_0): \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})\| \leq C \|\mathbf{h}\|. \quad (11.12)$$

Ukážeme, že lineární zobrazení $G'(b) \circ F'(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ je derivací zobrazení $G \circ F$ v bodě \mathbf{a} . Necht $\varepsilon > 0$. Poněvadž existuje derivace $G'(b)$, můžeme nalézt $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall \mathbf{u} \in B(\mathbf{o}, \eta): \|G(\mathbf{b} + \mathbf{u}) - G(\mathbf{b}) - G'(\mathbf{b})(\mathbf{u})\| \leq \varepsilon \|\mathbf{u}\|. \quad (11.13)$$

Dále díky existenci derivace $F'(a)$ nalezneme $\delta \in (0, \frac{\eta}{C})$ takové, že platí

$$\forall \mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta): \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \leq \varepsilon \|\mathbf{h}\|. \quad (11.14)$$

Navíc dostáváme

$$\forall \mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta): \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})\| \leq C \|\mathbf{h}\| < \eta. \quad (11.15)$$

Pak pro $\mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta)$ máme díky (11.13) a (11.15) odhad

$$\begin{aligned} &\|G(\mathbf{b} + (F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}))) - G(\mathbf{b}) - G'(\mathbf{b})(F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}))\| \\ &\leq \varepsilon \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})\| \leq C\varepsilon \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Dále pro $\mathbf{h} \in B(\mathbf{o}, \delta)$ platí z (11.14)

$$\begin{aligned} &\|G'(\mathbf{b})(F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})) - G'(\mathbf{b}) \circ F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \\ &\leq \|G'(\mathbf{b})\| \|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \\ &\leq \varepsilon \|G'(\mathbf{b})\| \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Kombinací předcházejících dvou odhadů dostaneme

$$\begin{aligned} & \|G(F(\mathbf{a} + \mathbf{h})) - G(F(\mathbf{a})) - G'(\mathbf{b}) \circ F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \\ & \leq \|G(\mathbf{b} + (F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}))) - G(\mathbf{b}) - G'(\mathbf{b})(F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}))\| \\ & \quad \cdot \|G'(\mathbf{b})(F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})) - G'(\mathbf{b}) \circ F'(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \\ & \leq (C + \|G'(\mathbf{b})\|)\varepsilon \|\mathbf{h}\|, \end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

11.2.17. Poznámka. Diferenciál $(G \circ F)'(\mathbf{a})$ je reprezentován součinem matic, které reprezentují $F'(\mathbf{a})$ a $G'(\mathbf{b})$. Tedy $(G \circ F)'(\mathbf{a})$ je reprezentován maticí

$$\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j} \right)_{\substack{l=1..s \\ j=1..k}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{\substack{j=1..k \\ i=1..n}}.$$

11.2.18. Věta (řetízkové pravidlo). Necht funkce f_1, \dots, f_k z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} mají v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci a funkce g z \mathbb{R}^k do \mathbb{R} má v bodě $\mathbf{b} = (f_1(\mathbf{a}), \dots, f_k(\mathbf{a}))$ derivaci. Definujme funkci h z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} předpisem

$$h(\mathbf{x}) = g(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})).$$

Pak má funkce h v bodě \mathbf{a} derivaci a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial y_j}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}). \quad (11.16)$$

Důkaz. Existence derivace plyne z Věty 11.2.16. Dle Poznámky 11.2.17 platí (11.16), jelikož

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{b}), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{b}) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

11.2.19. Příklad. Necht $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci v každém bodě. Definujme $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r, t) = f(r \cos t, r \sin t), \quad (r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Potom pro $(r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t), \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right) \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) \cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \sin t, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t)(-r \sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t)(r \cos t).\end{aligned}$$

11.2.20. Poznámka. Necht' f_1, f_2 jsou funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , které mají v $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak platí

- (a) $(f_1 + f_2)'(\mathbf{a}) = f_1'(\mathbf{a}) + f_2'(\mathbf{a})$,
- (b) $(f_1 f_2)'(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{a})f_1'(\mathbf{a}) + f_1(\mathbf{a})f_2'(\mathbf{a})$,
- (c) $(f_1/f_2)'(\mathbf{a}) = f_2^{-2}(\mathbf{a})(f_2(\mathbf{a})f_1'(\mathbf{a}) - f_1(\mathbf{a})f_2'(\mathbf{a}))$, pokud $f_2(\mathbf{a}) \neq 0$.

K důkazu (a) uvažujme $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované jako

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$$

a $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pak $(g \circ f)(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})$ a $g'(\mathbf{b}) = (1, 1)$ pro každý bod $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. V bodě \mathbf{a} tedy platí

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)'(\mathbf{a}) &= (g \circ f)'(\mathbf{a}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \\ &= f_1'(\mathbf{a}) + f_2'(\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Podobně postupujeme v případech (b) a (c) za pomoci funkcí $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$, respektive $g(y_1, y_2) = y_1/y_2$.

11.2.21. Věta (o přírůstku funkce). Necht' f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$. Necht' $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ a úsečka L spojující body \mathbf{a}, \mathbf{b} je obsažena v G , tj. $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}; t \in [0, 1]\} \subset G$. Pak existuje $\mathbf{c} \in L$ takové, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Důkaz. Definujme funkci $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}), \quad t \in [0, 1].$$

Zobrazení $t \mapsto (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ má spojitou derivaci, takže g je spojitě na $[0, 1]$ a v každém bodě $(0, 1)$ má derivaci. Potom podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) existuje $t_0 \in (0, 1)$ takové, že

$$g(1) - g(0) = g'(t_0),$$

neboli pro $\mathbf{c} = (1 - t_0)\mathbf{a} + t_0\mathbf{b}$ máme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= g(1) - g(0) = g'(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c})(b_i - a_i) \\ &= f'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

■

11.2.22. Definice. Necht A je množina v \mathbb{R}^n . Řekneme, že je **konvexní**, pokud pro každé dva body z A platí, že úsečka je spojující je obsažena v A .

11.2.23. Příklad. Pro zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m nemusí analogie Věty 11.2.21 platit. Uvažujme zobrazení $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = (\cos t, \sin t)$$

Pak $F'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq \mathbf{o}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$,

$$F(2\pi) - F(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0),$$

ale

$$F'(c)(2\pi - 0) = 2\pi(-\sin c, \cos c) \neq (0, 0), \quad c \in (0, 1).$$

11.2.24. Věta. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f: G \rightarrow \mathbb{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G . Potom platí

$$\forall a, b \in G: \|f(b) - f(a)\| \leq \sup\{\|f'(x)\|; x \in G\} \cdot \|b - a\|.$$

Důkaz. Mějme dány body $a, b \in G$. Pokud $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$, tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$ a položme

$$\mathbf{v} = \frac{f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})}{\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|}.$$

Definujeme-li funkci $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^k f_j(\mathbf{x})v_j,$$

platí

$$|\varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a})| = |\langle f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}), \mathbf{v} \rangle| = \|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|.$$

Dále máme

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k v_j f'_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G,$$

a pro libovolné $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{h}\| \leq 1$, platí

$$\begin{aligned} |\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{h})| &= \left| \sum_{j=1}^k v_j f'_j(\mathbf{x})(\mathbf{h}) \right| = |\langle f'(\mathbf{x})(\mathbf{h}), \mathbf{v} \rangle| \\ &\leq \|f'(\mathbf{x})(\mathbf{h})\| \cdot \|\mathbf{v}\| \leq \|f'(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{v}\| \\ &\leq \|f'(\mathbf{x})\| \leq K. \end{aligned}$$

Tedy

$$\|\varphi'(\mathbf{x})\| = \sup \{ |\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{h})|; \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{h}\| \leq 1 \} \leq \sup \{ \|f'(\mathbf{x})\|; \mathbf{x} \in G \}.$$

Podle Věty 11.2.21 existuje $\mathbf{c} \in G$ splňující

$$\varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}) = \varphi'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Tedy

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| &= |\varphi'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a})| \leq \|\varphi'(\mathbf{c})\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \\ &\leq \sup \{ \|f'(\mathbf{x})\|; \mathbf{x} \in G \} \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|. \end{aligned}$$

■

11.3. Derivace vyšších řádů

11.3.1. Definice. Necht f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j -té proměnné v bodě \mathbf{a} značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{a})$, pokud $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

11.3.2. Poznámka. Všimněte si pořadí symbolů

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

11.3.3. Definice. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f je **třídy** C^k , pokud jsou všechny parciální derivace funkce f až do řádu k včetně spojité na G . Množinu všech funkcí $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^k označujeme $C^k(G)$ a klademe $C^\infty(G) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(G)$.

O funkci g řekneme, že je **třídy** C^k na G ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), pokud $g|_G \in C^k(G)$.

11.3.4. Příklad. Dokažte, že funkce $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, leží v množině $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Řešení.

♣

11.3.5. Poznámky. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

- (a) Jestliže $f \in C^1(G)$, pak má dle Věty 11.1.22 derivaci v každém bodě G .
 (b) Zřejmě platí

$$C^0(G) \supset C^1(G) \supset C^2(G) \supset \dots,$$

přičemž funkcemi třídy $C^0(G)$ se rozumí spojité funkce na G .

(c) Necht $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pokud $f, g \in C^k(G)$, pak i $f + g$, fg a cf , $c \in \mathbb{R}$, leží v $C^k(G)$. Je-li navíc g nenulová na G , tak i $f/g \in C^k(G)$. K ověření těchto tvrzení stačí použít vzorce pro výpočet derivace součtu, součinu, podílu a matematickou indukci dle k .

11.3.6. Definice. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . Řekneme, že F je zobrazení **třídy** C^k , pokud jeho složky f_1, \dots, f_m jsou třídy C^k .

11.3.7. Poznámka. Zobrazení třídy C^1 na otevřené množině G má derivaci v každém bodě množiny G .

11.3.8. Věta (skládání zobrazení třídy \mathcal{C}^k). Necht $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m, n, s \in \mathbb{N}$ a $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Necht $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: H \rightarrow \mathbb{R}^s$ jsou po řadě tříd $\mathcal{C}^k(G)$ a $\mathcal{C}^k(H)$ a platí $f(G) \subset H$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Důkaz. Označme $h = (h_1, \dots, h_s) = g \circ f$. Protože $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: H \rightarrow \mathbb{R}^s$ a $f(G) \subset H$, je zobrazení h definované na G . Dále budeme postupovat pomocí matematické indukce podle k . Předpokládejme nejprve, že $k = 1$. Pro každé $\mathbf{x} \in G$ existují podle Věty 14.4 derivace $f'(\mathbf{x})$ a $g'(f(\mathbf{x}))$. Podle Věty 14.11 pak platí pro každé $\mathbf{x} \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah

$$\frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}). \quad (11.17)$$

Funkce $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ jsou spojité, a proto je funkce $\frac{\partial h_l}{\partial x_i}$ podle (11.17) spojitá. Odtud vyplývá, že zobrazení $g \circ f$ je třídy \mathcal{C}^1 na G .

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Stejně jako v předchozím případě platí pro každé $\mathbf{x} \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah (11.17).

Necht $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Funkce $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ je třídy \mathcal{C}^{k-1} na G . Funkce $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(\mathbf{x}))$ je dle indukčního předpokladu třídy \mathcal{C}^{k-1} na G , neboť funkce $\mathbf{y} \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(\mathbf{y})$ je třídy \mathcal{C}^{k-1} na H a $f \in \mathcal{C}^k(G) \subset \mathcal{C}^{k-1}(G)$. Podle výše uvedených poznámek (c) je funkce $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ též třídy \mathcal{C}^{k-1} na G . Tedy je funkce h třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Je-li $k = \infty$, tvrzení plyne přímo z definice podle předchozího. ■

11.3.9. Věta (záměnnost parciálních derivací). Necht' f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v \mathbf{a} , potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $n = 2$. Necht' $\mathbf{a} = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$ a $\delta > 0$, je takové, že

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \subset \mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cap \mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Položme

$$W(t) = \frac{f(a_1 + t, a_2 + t) - f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2 + t) + f(a_1, a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0, \delta).$$

Zvolme $t \in P_+(0, \delta)$. Položme

$$\varphi(x) = f(x, a_2 + t) - f(x, a_2) \quad \text{pro } x \in [a_1, a_1 + \delta].$$

Potom

$$W(t) = \frac{1}{t^2}(\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1))$$

a

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2) \quad \text{pro každé } x \in [a_1, a_1 + \delta].$$

Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi(t) \in (a_1, a_1 + t)$ takové, že

$$\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1) = \varphi'(\xi(t)) \cdot t.$$

Pak

$$W(t) = \frac{\varphi'(\xi(t))}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2) \right). \quad (11.18)$$

Protože $\frac{\partial f}{\partial x}$ má v bodě \mathbf{a} totální diferenciál, existuje funkce $z_1: (-\delta, \delta)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \alpha, a_2 + \beta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a})\beta + z_1(\alpha, \beta) \quad \text{pro každé } [\alpha, \beta] \in (-\delta, \delta)^2 \quad (11.19)$$

a

$$\lim_{[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{0}} \frac{z_1(\alpha, \beta)}{\|[\alpha, \beta]\|} = 0. \quad (11.20)$$

Dosadme do (11.19) postupně $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, t]$ a $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, 0]$. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a})t + z_1(\xi(t) - a_1, t),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) \cdot 0 + z_1(\xi(t) - a_1, 0).$$

Díky tomu, že t bylo zvoleno libovolně, obdržíme kombinací posledních dvou rovností s (11.18) vztah

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) + \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t) - z_1(\xi(t) - a_1, 0)}{t} \quad \text{pro každé } t \in (0, \delta).$$

Pro každé $t \in (0, \delta)$ platí

$$\frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} \cdot \frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t}$$

a

$$\frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t} \leq \frac{\sqrt{(\xi(t) - a_1)^2 + t^2}}{t} \leq \frac{\sqrt{t^2 + t^2}}{t} = \sqrt{2}.$$

Z (11.20) plyne, že

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} = 0,$$

a tedy celkem

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = 0.$$

Podobně odvodíme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, 0)}{t} = 0.$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}).$$

Nyní vyjádříme funkci W jiným způsobem. Zvolme $t \in (0, \delta)$ a definujme

$$\psi(y) = f(a_1 + t, y) - f(a_1, y) \quad \text{pro } y \in [a_2, a_2 + \delta].$$

Potom

$$W(t) = \frac{\psi(a_2 + t) - \psi(a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0, \delta).$$

Obdobně jako v první části důkazu odvodíme

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) + \frac{z_2(t, \eta(t) - a_2) - z_2(0, \eta(t) - a_2)}{t}$$

pro nějaké $\eta(t) \in (a_2, a_2 + t)$, kde z_2 je funkce splňující

$$\lim_{[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{o}} \frac{z_2(\alpha, \beta)}{\|[\alpha, \beta]\|} = 0.$$

Odtud plyne podobně jako v předchozím případě

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}).$$

Platí tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}).$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$. Definujme funkci $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x, y) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Položme dále

$$\gamma(x, y) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(x, y)), & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\gamma(x, y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(x, y)), & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(x, y)). \end{aligned}$$

Zobrazení $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ má derivaci v každém bodě \mathbb{R}^2 , a tedy $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ mají totální diferenciál v (a_i, a_j) . Odtud plyne tvrzení. ■

11.3.10. Parciální derivace nejsou obecně záměnné, jak ukazuje následující příklad.

11.3.11. Příklad. Dokažte, že funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

splňuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Řešení. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Dále pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x,$$

takže

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

Odtud plyne tvrzení. ♣

11.3.12. Důsledek. Necht $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

11.3.13. Důsledek. Necht $k, n \in \mathbb{N}$, f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$, $a \in G$, $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ je permutace a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(a).$$

Důkaz. Je-li $k = 1$, tvrzení zřejmě platí. Pro $k > 1$ stačí tvrzení dokázat pro permutaci ve formě „sousední transpozice“, neboť každá permutace je konečnou kombinací sousedních transpozic. Necht $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Položme

$$\pi(\ell) = \begin{cases} j+1, & \text{jestliže } \ell = j, \\ j, & \text{jestliže } \ell = j+1, \\ \ell, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro } \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

Označme

$$g = \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_{j-1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Potom $g \in \mathcal{C}^2(G)$, a tedy podle předcházejícího důsledku Věty 11.3.9 platí

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j+1} \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_{j+1}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\pi(j+1)} \partial x_{\pi(j)}}(a).$$

Odtud plyne tvrzení. ■

11.3.14. Definice. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $L: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazývá **k -lineární**, jestliže

$$u \mapsto L(v^1, \dots, v^{i-1}, u, v^{i+1}, \dots, v^k)$$

je lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$, $v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$. Množinu všech k -lineárních zobrazení z $(\mathbb{R}^n)^k$ do \mathbb{R}^m značíme $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

11.3.15. Poznámka. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$. Pro $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ platí

$$B(u, v) = B\left(\sum_{i=1}^n u_i e^i, \sum_{j=1}^n v_j e^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j B(e^i, e^j).$$

Obdobně pro $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dostaneme

$$L(u^1, \dots, u^k) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n u_{i_1}^1 \cdots u_{i_k}^k L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k}). \quad (11.21)$$

Je-li $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $h \in \mathbb{R}^n$, potom zobrazení $(u^2, u^3, \dots, u^k) \mapsto L(h, u^2, \dots, u^k)$ patří do $\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

11.3.16. Lemma (norma obrazu při k -lineárním zobrazení). Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Potom existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \cdots \|u^k\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Důkaz. Položme

$$K = \max \left\{ \|L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})\|; i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Pak dle (11.21) pro každá $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned} \|L(u^1, \dots, u^k)\| &\leq \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n |u_{i_1}^1 \cdots u_{i_k}^k| \|L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})\| \leq K \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \|u^1\| \cdots \|u^k\| \\ &\leq Kn^k \|u^1\| \cdots \|u^k\|. \end{aligned}$$

Tedy stačí položit $C = Kn^k$. ■

11.3.17. Definice. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pak **normou** zobrazení L rozumíme číslo

$$\|L\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \sup \left\{ \|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m}, \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1, \dots, \|u^k\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1 \right\}.$$

11.3.18. Poznámka. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$. Potom $(\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)})$ tvoří normovaný lineární prostor.

11.3.19. Definice. Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m a $a \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací k -tého řádu zobrazení f v bodě a** nazýváme k -lineární zobrazení L z $(\mathbb{R}^n)^k$ do \mathbb{R}^m splňující

$$\lim_{h \rightarrow o} \frac{\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

značíme $L = f^{(k)}(a)$.

11.3.20. Poznámky. (a) Pověsimně si, že přecházející definice má induktivní charakter, tj. k -tá derivace je definována na základě znalosti definice $(k-1)$ -ní derivace.

(b) Navíc je definice korektní, jelikož pro $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f^{(k-1)}(a+h), f^{(k-1)}(a), L(h, \cdot, \dots, \cdot) \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

a tedy

$$\|f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}, \dots, \dots)\|$$

je dobře definovaný výraz.

11.3.21. Věta (derivace vyššího řádu a totální diferenciál). Necht' $n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je k -tá derivace f v \mathbf{a} . Potom mají všechny parciální derivace f řádu $(k-1)$ totální diferenciál v \mathbf{a} a pro každé $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$L(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}).$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí dle k . Pro $k = 1$ tvrzení plyne z definice.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a tvrzení platí pro $k-1$. Zvolme $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je k -tá derivace f v \mathbf{a} . Nalezneme $\delta > 0$ takové, že všechny parciální derivace f řádu $(k-1)$ existují na $B(\mathbf{a}, \delta)$. Podle indukčního předpokladu pro $x \in B(\mathbf{a}, \delta)$ a $[\mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k] \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}$ platí

$$f^{(k-1)}(x)(\mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k) = \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x) u_{j_2}^2 \dots u_{j_k}^k,$$

a tedy zobrazení $g: B(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$g(x) = f^{(k-1)}(x)(e^{i_2}, \dots, e^{i_k})$$

splňuje

$$g(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(x) \quad \text{pro } x \in B(\mathbf{a}, \delta).$$

Označme

$$\mathbf{w} = (e^{i_2}, \dots, e^{i_k}).$$

Pak pro $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$, $\|\mathbf{h}\| < \delta$, platí

$$\begin{aligned} & \frac{|f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h})(\mathbf{w}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a})(\mathbf{w}) - L(\mathbf{h}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{h}\|} \\ & \leq \frac{\|f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}, \dots, \dots)\|}{\|\mathbf{h}\|}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{|f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h})(\mathbf{w}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a})(\mathbf{w}) - L(\mathbf{h}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \frac{|g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Tudíž pro $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{g(\mathbf{a} + te^{i_1}) - g(\mathbf{a})}{t} - L(e^{i_1}, w) \right| = 0,$$

a tedy

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial g}{\partial x_{i_1}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{a} + te^{i_1}) - g(\mathbf{a})}{t} = L(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_k}).$$

■

11.3.22. Poznámky. (a) Z předchozí věty plyne jednoznačnost $f^k(\mathbf{a})$, a tedy zpětně i korektnost tohoto značení.

(b) Je-li f funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, pak $f^k(\mathbf{a})$ existuje právě tehdy, když existují $f_j^k(\mathbf{a})$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$.

11.3.23. Věta (symetrie derivace). Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(\mathbf{a})$ existuje. Potom je $f^{(k)}(\mathbf{a})$ symetrické zobrazení, tj. je-li $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ permutace, pak

$$f^{(k)}(\mathbf{a})(u^1, \dots, u^k) = f^{(k)}(\mathbf{a})(u^{\pi(1)}, \dots, u^{\pi(k)})$$

pro každá $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Necht $f = (f_1, \dots, f_m)$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Stačí dokázat tvrzení pro f_j .

Díky Větě 11.3.21 stačí dokázat, že pro $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ a permutaci $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ platí

$$\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(\mathbf{a}). \quad (11.22)$$

Uvedený vztah stačí dokázat pouze pro sousední transpozice. Necht tedy $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$ a

$$\pi(s) = \begin{cases} \ell + 1, & s = \ell, \\ \ell, & s = \ell + 1, \quad s \in \{1, \dots, k\}. \\ s & \text{jinak,} \end{cases}$$

Potom funkce

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\ell-1}} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x})$$

splňuje

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\pi(\ell-1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(\mathbf{x})$$

na okolí bodu \mathbf{a} . Funkce f má derivaci $(\ell + 1)$ -ního řádu v \mathbf{a} . Z Věty 11.3.21 tedy plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x}), \quad x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_{\ell+1}}}(\mathbf{x})$$

mají derivaci v \mathbf{a} . Podle Věty 11.3.9 tedy platí

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\ell+1}} \partial x_{i_{\ell}}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\ell}} \partial x_{i_{\ell+1}}}(\mathbf{a}).$$

Odtud plyne (11.22). ■

11.3.24. Věta (postačující podmínka pro existenci derivace vyššího řádu). Necht $m, n, k \in \mathbb{N}$, f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$ a $\mathbf{a} \in G$. Potom $f^{(k)}(\mathbf{a})$ existuje.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $m = 1$. Použijeme matematickou indukci podle k . Pro $k = 1$ tvrzení platí díky Větě 14.4.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a že tvrzení platí pro $k - 1$. Označme $A = \{1, \dots, n\}^{k-1}$. Potom A je konečná množina, označme $\#A$ počet jejích prvků. Položme

$$g_{\alpha} = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \quad \text{pro } \alpha = (i_1, \dots, i_{k-1}) \in A.$$

Potom pro každé $\alpha \in A$ je g_{α} třídy $\mathcal{C}^1(G)$, a tedy g_{α} má na G totální diferenciál. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky tomu, že A je konečná, nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall \alpha \in A \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{h}\| < \delta : |g_{\alpha}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g_{\alpha}(\mathbf{a}) - g'_{\alpha}(\mathbf{a})(\mathbf{h})| < \varepsilon \|\mathbf{h}\|.$$

Položme

$$L(\mathbf{h}, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{k-1}) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i v_{\alpha_1}^1 \dots v_{\alpha_{k-1}}^{k-1} \quad \text{pro } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \text{ a } (v^1, \dots, v^{k-1}) \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}.$$

Potom $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a

$$L(\mathbf{h}, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{k-1}) = \sum_{\alpha \in A} g'_{\alpha}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) v_{\alpha_1}^1 \dots v_{\alpha_{k-1}}^{k-1}.$$

Zvolme $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{k-1} \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|\mathbf{u}^j\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1$ pro každé $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Označme $\mathbf{w} = (\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{k-1})$. Potom pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{h}\| < \delta$, platí podle indukčního předpokladu a Věty 11.3.21

$$\begin{aligned} & f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h})(\mathbf{w}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a})(\mathbf{w}) - L(\mathbf{h}, \mathbf{w}) \\ &= \sum_{\alpha \in A} g_{\alpha}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1} - \sum_{\alpha \in A} g_{\alpha}(\mathbf{a}) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1} - \sum_{\alpha \in A} g'_{\alpha}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1} \\ &= \sum_{\alpha \in A} (g_{\alpha}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g_{\alpha}(\mathbf{a}) - g'_{\alpha}(\mathbf{a})(\mathbf{h})) u_{\alpha_1}^1 \dots u_{\alpha_{k-1}}^{k-1}. \end{aligned}$$

Odtud a z definice normy $(k-1)$ -lineárního zobrazení vyplývá, že

$$\begin{aligned} \|f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} &\leq \sum_{\alpha \in A} |g_{\alpha}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g_{\alpha}(\mathbf{a}) - g'_{\alpha}(\mathbf{a})(\mathbf{h})| \\ &< (\#A) \varepsilon \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

a tudíž $L = f^{(k)}(\mathbf{a})$.

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ nalezneme podle z již dokázaného zobrazení $L_j \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ splňující

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f_j^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f_j^{(k-1)}(\mathbf{a}) - L_j(\mathbf{h}, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Položme $L = (L_1, \dots, L_m)$. Potom $L \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f^{(k-1)}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f^{(k-1)}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

takže $L = f^{(k)}(\mathbf{a})$. ■

11.3.25. Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom je $f''(a)$ bilineární zobrazení reprezentované maticí

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ & \dots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

ve smyslu

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : f''(a)(u, v) = u^T \mathbb{H} v.$$

Matrice \mathbb{H} je symetrická.

11.3.26. Definice. Nechť f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom matici \mathbb{H} nazýváme **Hessovou maticí**.

11.3.27. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Potom **Taylorovým polynomem k -tého řádu** funkce f v bodě a rozumíme polynom n proměnných

$$T_k^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x - a, \dots, x - a),$$

přičemž vektor $(x - a, \dots, x - a)$ má j složek.

11.3.28. Věta (Lagrangeův tvar zbytku). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(G)$ a $a, x \in G$. Potom existuje ξ ležící na úsečce spojující body a a x takové, že

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x - a, \dots, x - a)$$

(přičemž vektor $(x - a, \dots, x - a)$ má $k + 1$ složek).

Důkaz. Díky konvexitě a otevřenosti G nalezneme interval (α, β) splňující $[0, 1] \subset (\alpha, \beta)$ a takový, že

$$a + t(x - a) \in G \quad \text{pro každé } t \in (\alpha, \beta).$$

Položme

$$\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Zobrazení $t \mapsto \mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ je třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, a tedy podle Věty 11.3.8 je φ třídy $\mathcal{C}^k(\alpha, \beta)$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku pro funkci jedné proměnné (Věta 6.4) existuje $\eta \in (0, 1)$ takové, že

$$\varphi(1) - T_k^{\varphi, 0}(1) = \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!},$$

tedy

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}. \quad (11.23)$$

Použitím řetězového pravidla dostaneme pro každé $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_{i_1} - a_{i_1}) = f'(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x - a),$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) = f''(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x - a, x - a),$$

⋮

Pro každé $j \in \{1, \dots, k+1\}$ a $t \in (\alpha, \beta)$ platí

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}(t) &= \sum_{i_j=1}^n \dots \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \dots \partial x_{i_1}}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_j} - a_{i_j}) \\ &= f^{(j)}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x - a, \dots, x - a). \end{aligned}$$

Dosažením do (11.23) dostaneme podle definice Taylorova polynomu

$$f(x) = T_k^{f, a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\mathbf{a} + \eta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x - a, \dots, x - a).$$

Položme $\xi = \mathbf{a} + \eta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Potom ξ leží na úsečce spojující body \mathbf{a} a \mathbf{x} a splňuje požadované tvrzení. ■

11.3.29. Věta (Peanův tvar zbytku). Necht $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a f je třídy \mathcal{C}^k na jistém okolí \mathbf{a} . Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_k^{f, a}(x)}{\|x - a\|^k} = 0.$$

Důkaz. Pro $k = 0$ tvrzení triviálně platí. Předpokládejme, že $k \geq 1$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f \in \mathcal{C}^k(B(\mathbf{a}, \delta))$. Zvolme $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$. Protože množina $B(\mathbf{a}, \delta)$ je otevřená a konvexní, můžeme podle Věty 11.3.28 nalézt $\xi(\mathbf{x})$ ležící na úsečce spojující \mathbf{a} a \mathbf{x} takové, že

$$f(\mathbf{x}) = T_{k-1}^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - T_k^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{k!} \left(f^{(k)}(\xi(\mathbf{x})) - f^{(k)}(\mathbf{a}) \right) (\mathbf{x} - \mathbf{a}, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\xi(\mathbf{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) \right) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} & \left| f(\mathbf{x}) - T_k^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\xi(\mathbf{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) \right) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}) \right| \\ & \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\xi(\mathbf{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) \right| \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^k. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}$ platí

$$0 \leq \frac{|f(\mathbf{x}) - T_k^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^k} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\xi(\mathbf{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) \right|.$$

Všechny parciální derivace až do řádu k včetně jsou spojité v \mathbf{a} , a tedy

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\xi(\mathbf{x})) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) \right| = 0,$$

neboť $\|\xi(\mathbf{x}) - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$. Odtud plyne tvrzení. \blacksquare

11.3.30. Poznámka. Symbol o můžeme zřejmým způsobem definovat i pro funkce více proměnných. Pak lze tvrzení předcházející věty psát ve tvaru

$$f(\mathbf{x}) = T_k^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^k), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}.$$

11.4. Věty o implicitně zadaných funkcích

Před formulací hlavních výsledků této části připomeňme, že symbol $\exists!$ znamená „existuje právě jeden“ (vizte Definicí 1.1.20).

11.4.1. Věta (o implicitně zadané funkci). Necht $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a necht platí:

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
- (b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
- (c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu \tilde{y} tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \text{kde } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a } x \in U.$$

Důkaz. Existence φ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. Díky spojitosti funkce $\frac{\partial F}{\partial y}$ v bodě $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\xi_1 > 0$ taková, že

$$\forall [x, y] \in B(\tilde{x}, \delta_1) \times [\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]: \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Funkce $t \mapsto F(\tilde{x}, t)$ je rostoucí na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$. Máme proto

$$F(\tilde{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \text{a} \quad F(\tilde{x}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Díky spojitosti F nalezneme $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ takové, že

$$\forall x \in B(\tilde{x}, \delta_2): \quad F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \& \quad F(x, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Položme $U = B(\tilde{x}, \delta_2)$ a $V = (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$. Zvolme $x \in U$. Funkce $t \mapsto F(x, t)$ je na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$ rostoucí, spojitá a splňuje $F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0$ a $F(x, \tilde{y} + \xi_1) > 0$. To znamená, že existuje právě jedno $y \in (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$ takové, že $F(x, y) = 0$.

Spojitosť φ . Zvolme $x^* \in U$. Budeme dokazovat, že φ je spojitá v x^* . Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme

$$G^* = U \times ((\varphi(x^*) - \varepsilon, \varphi(x^*) + \varepsilon) \cap V)$$

a $F^* = F|_{G^*}$. Potom je G^* otevřená a platí

$$F^* \in \mathcal{C}^k(G^*), \quad F^*(x^*, \varphi(x^*)) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F^*}{\partial y}(x^*, \varphi(x^*)) > 0.$$

Podle již dokázaného existují okolí $U^* \subset \mathbb{R}^n$ bodu x^* a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\varphi(x^*)$ taková, že $U^* \times V^* \subset G^*$ a

$$\forall x \in U^* \exists! y \in V^*: F^*(x, y) = 0.$$

Odtud plyne

$$\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\varphi(x^*) - \varepsilon, \varphi(x^*) + \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost φ v bodě x^* .

Platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x^* \in U$. Nalezneme $\delta > 0$ a $\eta > 0$ taková, že $B(x^*, \delta) \subset U$, $\varphi(B(x^*, \delta)) \subset V$ a

$$B(x^*, \delta) \times \varphi(B(x^*, \delta)) \subset B([x^*, \varphi(x^*)], \eta) \subset G.$$

Zvolme $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. K němu nalezneme $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ležící na úsečce spojující body $[\mathbf{x}^*, \varphi(\mathbf{x}^*)]$ a $[\mathbf{x}^* + te^i, \varphi(\mathbf{x}^* + te^i)]$ takové, že

$$0 = F(\mathbf{x}^* + te^i, \varphi(\mathbf{x}^* + te^i)) - F(\mathbf{x}^*, \varphi(\mathbf{x}^*)) = F'(\xi(t))(te^i, \varphi(\mathbf{x}^* + te^i) - \varphi(\mathbf{x}^*)).$$

Tedy platí

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t)) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))(\varphi(\mathbf{x}^* + te^i) - \varphi(\mathbf{x}^*)).$$

Odtud vyplývá, že

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}^* + te^i) - \varphi(\mathbf{x}^*)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))}.$$

Platí $\lim_{t \rightarrow 0} \xi(t) = [\mathbf{x}^*, \varphi(\mathbf{x}^*)]$, neboť

$$\|\xi(t) - [\mathbf{x}^*, \varphi(\mathbf{x}^*)]\| \leq |t| + |\varphi(\mathbf{x}^* + te^i) - \varphi(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*, \varphi(\mathbf{x}^*))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}^*, \varphi(\mathbf{x}^*))}. \quad (11.24)$$

Platí $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$. Pro $k = 1$ jsme tvrzení již dokázali. Předpokládejme, že platí pro nějaké $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Zobrazení $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})]$ je tedy třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Funkce $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jsou třídy $\mathcal{C}^{k-1}(G)$, a tedy podle Věty 11.3.8 a (11.24) jsou také funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Proto je φ třídy $\mathcal{C}^k(U)$. ■

11.4.2. Příklad. Uvažujme množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Ukažte, že v jistém okolí bodu $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lze množinu M popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x . Spočítejte též $\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Řešení. Položme ve Větě 11.4.1

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) \quad \text{a} \quad [\tilde{x}, \tilde{y}] = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}].$$

Pak

- (i) $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,
- (ii) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (2(x^2 + y^2)2y + 4y)_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 4 \neq 0$.

Tedy dle Věty 11.4.1 existuje na nějakém okolí bodu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ funkce φ třídy C^∞ , která splňuje $F(x, \varphi(x)) = 0$. Dále platí

$$\begin{aligned}\varphi'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)} \\ &= \left(-\frac{(2(x^2 + y^2)2y + 4y)}{2(x^2 + y^2)2x - 4x}\right)\Big|_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]} = 0.\end{aligned}$$

◆

11.4.3. Věta (o implicitně zadaných funkcích). Necht $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a necht platí:

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
- (b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o}$,
- (c)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu \tilde{y} tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = \mathbf{o}$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle m . Je-li $m = 1$, platí tvrzení podle Věty 11.4.1.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $m + 1$. Necht F a $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ splňují předpoklady věty, kde m je nahrazeno $(m + 1)$. Matice

$$A_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix}$$

je regulární dle předpokladu.

Ukážeme, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $A_F = I$, kde I označuje jednotkovou matici typu $M((m + 1) \times (m + 1))$. Uvažujme zobrazení $L: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $L(y) = (A_F)^{-1}y$. Toto zobrazení je lineární bijekce \mathbb{R}^{m+1} na \mathbb{R}^{m+1} a je třídy \mathcal{C}^∞ na \mathbb{R}^{m+1} . Dále uvažujme zobrazení $T: G \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $T = L \circ F$. Zobrazení T má následující vlastnosti:

- $T \in \mathcal{C}^k(G)$,
- $\forall [x, y] \in G: T(x, y) = \mathbf{o} \Leftrightarrow F(x, y) = \mathbf{o}$,
- $A_T = A_F^{-1} \circ A_F = I$.

První dvě vlastnosti jsou zřejmě splněny. Ověříme třetí vlastnost. Zobrazení $y \mapsto F(\tilde{x}, y)$ má derivaci v bodě \tilde{y} reprezentovanou maticí A_F . Zobrazení $y \mapsto T(\tilde{x}, y) = L \circ F(\tilde{x}, y)$ má podle věty o derivaci složeného zobrazení (Věta 14.10) v bodě \tilde{y} derivaci reprezentovanou maticí $(A_F)^{-1}A_F = I$. Protože

$$F_{m+1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 \neq 0,$$

existuje dle Věty 11.4.1 okolí $U^* \subset \mathbb{R}^{n+m}$ bodu $[\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu \tilde{y}_{m+1} takové, že

$$\forall [x, y_1, \dots, y_m] \in U^* \exists! y_{m+1} \in V^* : F_{m+1}(x, y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = 0.$$

Označme tento bod symbolem $\psi(x, y_1, \dots, y_m)$. Pak $\psi \in \mathcal{C}^k(U^*)$. Definujme $H: U^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem

$$H_i(x, y_1, \dots, y_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_m, \psi(x, y_1, \dots, y_m)), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Pak $H \in \mathcal{C}^k(U^*)$ podle Věty 11.3.8 a platí $H(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = \mathbf{o}$. Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) &= \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) + \frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \\ &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

neboť

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Můžeme tedy aplikovat indukční předpoklad na H v bodě $[\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$. Nalezneme okolí $S \subset \mathbb{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $T \subset \mathbb{R}^m$ bodu $[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ taková, že $S \times T \subset U^*$ a

$$\forall x \in S \exists! [y_1, \dots, y_m] \in T : H(x, y_1, \dots, y_m) = \mathbf{o}$$

Označme $\varphi_i(x) = y_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, a $\varphi_{m+1}(x) = \psi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$. Potom $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1})$ je třídy \mathcal{C}^k na S a pro každé $x \in S$ platí

$$\begin{aligned} F_i(x, \varphi(x)) &= F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x)) \\ &= F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \psi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))) \\ &= \begin{cases} H_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) = 0, & i \in \{1, \dots, m\}, \\ 0, & i = m + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nalezneme okolí $V \subset T \times V^* \subset \mathbb{R}^{m+1}$ bodu \tilde{y} a okolí $U \subset \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ bodu \tilde{x} . Jestliže $[x, y] \in U \times V$ splňuje $F(x, y) = \mathbf{o}$, pak $x \in S$ a $y \in T \times V^*$, a tedy $[x, y_1, \dots, y_m] \in S \times T \subset U^*$. Potom $y_{m+1} = \psi(x, y_1, \dots, y_m)$, neboť $y_{m+1} \in V^*$. Dále $y_i = \varphi_i(x)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, takže $y_{m+1} = \varphi_{m+1}(x)$. Odtud plyne tvrzení. ■

11.4.4 (vzorec pro výpočet parciálních derivací). I v případě věty o implicitních funkcích je možné odvodit analogii vzorce (11.24), tj. explicitní vzorec pro hodnotu parciálních derivací vypočtených funkcí. Necht $n, m, p, G, \tilde{x}, \tilde{y}$ a F jsou jako ve

znění Věty 11.4.3, podle které existuje okolí U bodu \tilde{x} a okolí V bodu \tilde{y} taková, že platí

$$\forall x \in U \exists! y \in V: F(x, y) = o.$$

Označme toto y jako $\varphi(x)$. Pak víme, že platí $\varphi \in C^p(U)$. Ukážeme, jak lze vypočítat parciální derivace složek funkce φ . Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ (číslo proměnné podle které budeme derivovat). Potom pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ má parciální derivace funkce $x \mapsto F_j(x, \varphi(x))$ podle proměnné x_i tvar

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x)$$

pro každé $x \in U$. Protože platí $F_j(x, \varphi(x)) = 0$ pro každé $x \in U$, musí být právě uvedená derivace rovna nule. Za x dosadíme \tilde{x} , potom $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$ a dostáváme tedy soustavu m rovnic

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

kde neznámými jsou hodnoty $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x})$, $k = 1, \dots, m$. Soustavu můžeme přepsat tedy jako

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) &= -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})). \end{aligned}$$

Hodnotu $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x})$ můžeme vypočítat pomocí Cramerova pravidla takto

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{x}) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \end{vmatrix}}.$$

Matice ve výše uvedeném vzorci se liší pouze ve vyznačeném k -tém sloupci.

11.4.5. Příklad. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}\exp(u/x) \cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ \exp(u/x) \sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $[x, y] \mapsto u(x, y), [x, y] \mapsto v(x, y)$ třídy C^∞ . Spočítejte partiální derivace u a v v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Definujme $F: \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ jako $F = (F_1, F_2)$, kde

$$\begin{aligned}F_1(x, y, u, v) &= \exp(u/x) \cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ F_2(x, y, u, v) &= \exp(u/x) \sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Pak F je třídy C^∞ na $(0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $F(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) = [0, 0]$. Dále máme

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \exp(u/x) \cos(v/y) & -\frac{1}{y} \exp(u/x) \cos(v/y) \\ \frac{1}{x} \exp(u/x) \sin(v/y) & \frac{1}{y} \exp(u/x) \cos(v/y) \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Díky Větě 11.4.3 tedy existují na nějakém okolí U bodu $[1, 1]$ funkce $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^∞ splňující

$$F_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) = F_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0.$$

Derivováním těchto vztahů podle x dostáváme

$$\begin{aligned}\exp(u/x) \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2} \cos(v/y) + \exp(u/x) (-\sin(v/y)) \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0, \\ \exp(u/x) \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2} \sin(v/y) + \exp(u/x) \cos(v/y) \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Dosazením $x = y = 1, u(1, 1) = 0$ a $v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

Výpočet parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 1)$ a $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1)$ by proběhl obdobně. ♣

11.5. Lokální extrémy funkce více proměnných

11.5.1. Definice. Necht (P, ρ) je metrický prostor, $M \subset P$, $a \in M$ a f je funkce z P do \mathbb{R} splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima (minima) na M** , jestliže platí

$$\forall x \in M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima (lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima (ostrého lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \cap M) \setminus \{a\} : f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

11.5.2. Poznámka. Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + th \in G$ pro $|t| < \delta$ a definujeme funkci $g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + th)$. Potom $g'(0) = f'(a)(h)$ a $g''(0) = f''(a)(h, h)$.

11.5.3. Věta (nutná podmínka existence lokálního extrému). Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Necht funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz. Položme $g(t) = f(a + te^j)$. Pak má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy $g'(0)$ buď neexistuje nebo je rovna 0. Odtud plyne tvrzení. ■

11.5.4. Věta (elipticita pozitivně definitní kvadratické formy). Necht $n \in \mathbb{N}$ a $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \forall h \in \mathbb{R}^n : Q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Důkaz. Jest

$$Q(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,$$

pro vhodná $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy je zobrazení Q spojitě na \mathbb{R}^n . Označme

$$S = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{h}\| = 1\}$$

a

$$\varepsilon = \inf\{Q(\mathbf{h}); \mathbf{h} \in S\}.$$

Množina S je omezená a uzavřená, a tedy je podle Věty 10.6.9 kompaktní. Podle Věty 10.6.15 tedy existuje $h_0 \in S$ takové, že $Q(h_0) = \varepsilon$. Odtud a z pozitivní definitnosti Q vyplývá, že $\varepsilon > 0$. Tvrzení věty zřejmě platí pro $\mathbf{h} = \mathbf{o}$. Zvolme $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$. Potom

$$Q(\mathbf{h}) = Q\left(\|\mathbf{h}\| \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) = \|\mathbf{h}\|^2 Q\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) \geq \varepsilon \|\mathbf{h}\|^2.$$

■

11.5.5. Věta (podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému). Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\mathbf{a} \in G$ a $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Potom platí:

(a) je-li kvadratická forma $\mathbf{h} \mapsto f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ pozitivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě \mathbf{a} svého ostrého lokálního minima;

(b) je-li kvadratická forma $\mathbf{h} \mapsto f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě \mathbf{a} svého ostrého lokálního maxima;

(c) je-li kvadratická forma $\mathbf{h} \mapsto f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě \mathbf{a} lokálního extrému.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $\mathbf{h} \mapsto f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ je pozitivně definitní. Podle Věty 11.5.4 nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n: f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) \geq \varepsilon \|\mathbf{h}\|^2.$$

Označme

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}) - T_2^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{x} \in G \setminus \{\mathbf{a}\}.$$

Podle Věty 11.3.29 platí $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \omega(\mathbf{x}) = 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall \mathbf{x} \in P(\mathbf{a}, \delta): \omega(\mathbf{x}) > -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Potom pro každé $\mathbf{x} \in P(\mathbf{a}, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \frac{1}{2} f''(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \frac{1}{2} f''(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &> -\frac{\varepsilon}{4} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $\mathbf{x} \in P(\mathbf{a}, \delta)$ platí

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > \frac{1}{2} f''(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) - \frac{1}{4} \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \geq \frac{1}{4} \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 > 0.$$

Tedy f nabývá v bodě \mathbf{a} svého ostrého lokálního minima.

Obdobně lze dokázat tvrzení (b).

(c) Díky tomu, že kvadratická forma $\mathbf{h} \mapsto f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ je indefinitní, nalezneme $\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2 \in \mathbb{R}^n$ taková, že

$$f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1) > 0 \quad \text{a} \quad f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}^2, \mathbf{h}^2) < 0.$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (-\delta, \delta)$ platí $\mathbf{a} + t\mathbf{h}^1 \in G$ a $\mathbf{a} + t\mathbf{h}^2 \in G$.

Pro $t \in (-\delta, \delta)$ položme $g_1(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}^1)$ a $g_2(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}^2)$. Potom

$$g_1'(0) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{h}^1) = 0, \quad g_1''(0) = f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^1) > 0.$$

Tedy g_1 má v 0 ostré lokální minimum. Obdobně lze dokázat, že g_2 má v 0 ostré lokální maximum. Odtud plyne, že f nemá v a lokální extrém. ■

11.5.6. Poznámka. Je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ semidefinitní, pak pouze na základě této informace nelze rozhodnout, zda má f v a extrém, případně jakého typu, jak ilustrují příklady $f(x, y) = \pm x^4 \pm y^4$.

11.5.7. Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y - y^2.$$

Řešení. Z rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2x - 2y \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 2x - 2y \end{aligned}$$

dostáváme, že $x = y$. Tedy máme rovnici

$$4x^3 - 4x = 0.$$

Body splňující nutnou podmínku extrému jsou tedy $[-1, -1]$, $[0, 0]$, $[1, 1]$. Protože

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 2 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2,$$

máme

$$f''([1, 1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad f''([0, 0]) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad f''([-1, -1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$ je druhá derivace f pozitivně definitní, má v těchto bodech f lokální minimum. V bodě $[0, 0]$ lze pomocí vektorů $(1, 1)$ a $(1, -1)$ odvodit indefinitnost $f''(0, 0)$. Tedy f nemá extrém v $[0, 0]$. ♣

11.5.8. Věta (Lagrangeova věta o multiplikátorech). Necht' $m, n \in \mathbb{R}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \dots, g_m: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,

$$M = \{z \in G; g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a bod \tilde{z} je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- (a) vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ jsou lineárně závislé;
- (b) existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňující

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{z}) = \mathbf{o}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že výrok (a) neplatí. Označme $s = n - m$ a $g = (g_1, \dots, g_m)$. Pišme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m$, přičemž proměnné prostoru \mathbb{R}^s značíme \mathbf{x} a proměnné prostoru \mathbb{R}^m značíme \mathbf{y} . Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\tilde{\mathbf{z}}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\tilde{\mathbf{z}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\tilde{\mathbf{z}}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\tilde{\mathbf{z}}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

a tedy dle Věty 11.4.3 existují okolí $U \subset \mathbb{R}^s$ bodu $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_s]$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{z}_{s+1}, \dots, \tilde{z}_n]$ taková, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje právě jedno $\mathbf{y} \in V$ (označme jej $\varphi(\mathbf{x})$) splňující

$$g(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0.$$

Definujme funkci $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})).$$

Protože $\varphi \in C^1(U)$, platí $\psi \in C^1(U)$. Funkce ψ má v bodě $\tilde{\mathbf{x}}$ zřejmě lokální extrém. Podle Věty 11.5.3 tedy platí $\nabla \psi(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$. Zvolme $j \in \{1, \dots, s\}$. Potom

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{z}}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i}(\tilde{\mathbf{z}}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (11.25)$$

Funkce $x \mapsto g(x, \varphi(x))$ je konstantní na U , a tedy

$$\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{z}}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\tilde{\mathbf{z}}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, \quad l \in \{1, \dots, m\}, \quad j \in \{1, \dots, s\}. \quad (11.26)$$

Označme

$$\mathbf{u}^j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}})) \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

a

$$H = \text{Lin}[\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^s].$$

Zřejmě platí $\dim H = s$. Tedy $\dim H^\perp = m$. Podle (11.26) máme

$$\nabla g_l(\tilde{\mathbf{z}}) \in H^\perp, \quad l \in \{1, \dots, m\},$$

takže vektory $\nabla g_1(\tilde{\mathbf{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\mathbf{z}})$ tvoří bázi H^\perp . Z (11.25) vyplývá, že $\nabla f(\tilde{\mathbf{z}}) \in H^\perp$. Odtud plyne, že $\nabla f(\tilde{\mathbf{z}})$ je lineární kombinací vektorů $\nabla g_1(\tilde{\mathbf{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\mathbf{z}})$, takže platí výrok (b). ■

11.6. Regulární zobrazení

11.6.1. Definice. Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ a f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n . Řekneme, že f je **difeomorfismus** na G , jestliže je prosté na G , $f(G)$ je otevřená množina v \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$.

11.6.2. Věta (o lokálním difeomorfismu). Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a f je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n , které je třídy \mathcal{C}^1 na jistém okolí V bodu a . Jestliže $J_f(a) \neq 0$, pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu a takové, že $f|_U$ je difeomorfismus na U .

Důkaz. Položme $G = \mathbb{R}^n \times V$, $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ a definujme funkci $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}.$$

Potom $F \in \mathcal{C}^1(G)$, $F(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{o}$ a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podle Věty 11.4.3 existují okolí $U_1 \subset V$ bodu \mathbf{a} a okolí $W \subset \mathbb{R}^n$ bodu \mathbf{b} taková, že pro každé $\mathbf{y} \in W$ existuje právě jedno $\mathbf{x} \in U_1$ (označme $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$) takové, že $F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{o}$. Navíc platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a

$$\mathbf{o} = F(\mathbf{y}, \varphi(\mathbf{y})) = f(\varphi(\mathbf{y})) - \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in W.$$

Tedy

$$f(\varphi(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{pro každé } \mathbf{y} \in W.$$

Zobrazení f je tudíž prosté na množině $U_1 \cap f^{-1}(W)$. Položme $U = U_1 \cap f^{-1}(W)$. Pak U je otevřená množina, $\mathbf{a} \in U \subset V$ a $(f|_U)^{-1} = \varphi \in \mathcal{C}^1(W)$. ■

11.6.3. Definice. Necht $n \in \mathbb{N}$, a $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je **regulární**, jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

11.6.4. Věta (vztah difeomorfismu a regulárního zobrazení). Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pak f je difeomorfismus na G právě když je regulární a prosté.

Důkaz. \Rightarrow Předpokládejme, že f je na G difeomorfismus. Potom f je zřejmě prosté a třídy \mathcal{C}^1 na G . Pro $\mathbf{a} \in G$ platí

$$\text{Id}(\mathbf{a}) = \text{Id}'(\mathbf{a}) = (f^{-1} \circ f)'(\mathbf{a}) = (f^{-1})'(f(\mathbf{a})) \circ f'(\mathbf{a}),$$

a proto je $f'(\mathbf{a})$ regulární v každém bodě $\mathbf{a} \in G$. Tedy je jacobíán $f'(\mathbf{a})$ nenulový v každém bodě $\mathbf{a} \in G$.

\Leftarrow Nyní předpokládejme, že f regulární a prosté na G . Potom $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Zvolme $\mathbf{y} \in f(G)$. K němu nalezneme $\mathbf{x} \in G$ splňující $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Podle Věty 11.6.2 existuje otevřená množina $U \subset G$ obsahující \mathbf{x} taková, že $f|_U$ je difeomorfismus. Tedy $f(U)$ je otevřená a $\mathbf{y} \in f(U) \subset f(G)$. Tudíž je $f(G)$ otevřená. Navíc je $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(U))$. Protože \mathbf{y} bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$. ■

11.7. Teoretické příklady

11.7.1. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

a

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}y}{e^{-\frac{1}{x^2}}+y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- Funkce f je spojitá v počátku vzhledem k ose x i y , ale není v počátku spojitá.
- Funkce g je spojitá v počátku vzhledem ke každé přímce počátkem procházející, ale není v počátku spojitá.
- Funkce h je spojitá v počátku vzhledem ke každé křivce tvaru $y = c|x|^d$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in (0, \infty)$, ale h není spojitá v počátku.
- Funkce f , g , i h mají v počátku obě parciální derivace.

Řešení. (a) Položme

$$\varphi(x) = f(x, 0), \quad x \in \mathbb{R},$$

tj. $\varphi(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Zjevně existuje $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ a rovná se 0. Obdobně odvodíme, že $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$. Blížíme-li se však k počátku po přímce $y = x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ tedy neexistuje.

(b) Zjevně platí, že

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(0, y) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0).$$

Pro přímku tvaru $y = cx$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, cx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^2x^3}{x^4 + c^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^2x}{x^2 + c^2} = 0.$$

Ale

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ tedy neexistuje.

(c) Zřejmě máme $\lim_{y \rightarrow 0} h(0, y) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x, 0)$. Necht $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $d \in (0, \infty)$. Pak pro křivku $y = c|x|^d$ dle Příkladu ?? platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, c|x|^d) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ce^{-\frac{1}{x^2}} |x|^d}{e^{-\frac{2}{x^2}} + c^2 |x|^{2d}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ce^{-\frac{1}{x^2}} |x|^{-d}}{e^{-\frac{2}{x^2}} |x|^{-2d} + c^2} = 0. \end{aligned}$$

Funkce h však není spojitá v počátku, neboť vzhledem ke křivce $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, e^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{2}{x^2}} + e^{-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ tedy neexistuje.

(d) Tvrzení je zřejmé z faktu, že všechny tři funkce jsou nulové na osách x a y . ♣

11.7.2. Příklad. Necht $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ a f je reálná funkce definována $\mathbb{R}^2 \setminus [a, b]$ mající vlastní limitu v $[a, b]$. Necht pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ a pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. Pak

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y).$$

Řešení. Označme pro $x \in \mathbb{R}$ funkci $\varphi_x(y) = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$, a pro $y \in \mathbb{R}$ necht $\psi_y(x) = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Dle předpokladu existují pro $x, y \in \mathbb{R}$ limity $\lim_{y \rightarrow b} \varphi_x(y)$ a $\lim_{x \rightarrow a} \psi_y(x)$. Označme je symboly $\varphi_x(b)$ a $\psi_y(a)$.

Necht $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Najdeme $r \in (0, \infty)$ takové, že $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ pro $(x, y) \in B((a, b), r) \setminus \{(a, b)\}$. Vezměme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že $(a - \delta, a + \delta) \times (b - \delta, b + \delta) \subset B((a, b), r)$. Necht $x \in P^\delta(a)$ je pevné. Najdeme $r_x \in (0, \infty)$ takové, že $B((x, b), r_x) \subset B((a, b), r)$. Pak pro $y \in \mathbb{R}$ splňující $(x, y) \in B((x, b), r_x)$ platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Tedy pro hodnotu $\varphi_x(b)$ máme odhad

$$L - \varepsilon \leq \varphi_x(b) \leq L + \varepsilon.$$

Tedy pro $x \in P^\delta(a)$ platí

$$|\varphi_x(b) - L| \leq \varepsilon,$$

tj.

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \varphi_x(b) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y).$$

Obdobně odvodíme, že $L = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. ♣

11.7.3. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{y}) + y \sin(\frac{1}{x}), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

a

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- (a) Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ neexistují.
 (b) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ neexistují.
 (c) Limita $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ neexistují.

Řešení. (a) Jelikož

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y|, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

máme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Na druhou stranu však pro x, y nenulové limity $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ neexistují.

(b) Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} g(0, y).$$

Na druhou stranu však platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ proto neexistuje.Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ však existuje limita

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$.Zřejmě však pro žádné $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$.(c) Důkaz tvrzení je analogický důkazu tvrzení (b). ♣**11.7.4. Příklad.** Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

a

$$h(x, y) = \begin{cases} x + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- (a) Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existují a rovnají se.
 (b) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ existují a rovnají se.
 (c) Limita $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y)$ a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ existují a rovnají se.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z Příkladu 11.7.1(a).

Tvrzení (b) a (c) se dokáží obdobně jako v Příkladu 11.7.3. ♣

11.7.5. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

- (a) Limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existují a nerovnají se. Navíc neexistuje $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
 (b) Limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$ existují a rovnají se, ale $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ neexistuje.

Řešení. (a) Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ neexistuje dle Příkladu 11.7.2.

(b) Zřejmě platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y),$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ tedy neexistuje dle Heineovy věty pro metrické prostory (Věta 10.4.11) a Příkladu 11.7.2. ♣

11.7.6. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f existují $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, ale nerovnají se.

Řešení. Zřejmě $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Spočtěme dále pro body (x, y) mimo počátek derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xy \frac{-4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1.\end{aligned}$$

♣

11.7.7. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ukažte, že f je má ostré lokální minimum v počátku vzhledem ke každé přímce procházející počátkem, ale nemá v počátku lokální minimum.

Řešení. Pro přímku $x = 0$ platí $f(0, y) = y^2$, což je funkce mající v počátku ostré minimum. Pro přímku $y = 0$ platí $f(x, 0) = 3x^4$, což je opět funkce mající v počátku ostré minimum. Je-li přímka $y = cx$ pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dána, platí

$$g(x) = f(x, cx) = (cx - x^2)(cx - x^3) = c^2x^2 - 4cx^3 + 3x^4.$$

Protože $g'(0) = 0$ a $g''(0) = 2c^2 > 0$, má funkce g v počátku ostré lokální minimum.

Funkce f však nemá v počátku lokální minimum, neboť pro křivku $y = 2x^2$ platí

$$g(x) = f(x, 2x^2) = -x^2,$$

tj. g má v počátku ostré maximum.

♣

11.7.8. parciální diferenciál

11.8. Početní příklady k funkcím více proměnných

11.8.1. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \mathbb{N}, \quad A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Řešení. (a) Pokud $A = \mathbb{N}$, pak $\text{Int } A = \emptyset$. Zjevně totiž dle Věty 1.5.29 vidíme, že žádný interval v \mathbb{R} není obsažen v A . Dále si uvědomíme, že A je uzavřená. Vezmeme totiž libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ bodů v A konvergující k nějakému $x \in \mathbb{R}$. Jelikož je $\{x_n\}$ cauchyovská a vzdálenost libovolných dvou různých prvků

A je alespoň 1, musí být $\{x_n\}$ od jistého indexu konstantní. Tedy zřejmě $x \in A$. To podle definice znamená, že A je uzavřená. Konečně $\partial A = A$, neboť

$$\partial A \subset \partial A \cup A = \bar{A} = A$$

a obrácená inkluze $A \subset \partial A$ plyne z faktu $\text{Int } A = \emptyset$.

(b) Necht $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Stejně jako výše odvodíme z Věty 1.5.29, že $\text{Int } A = \emptyset$. Dále platí $\partial A = \{0\} \cup A$. Vskutku, posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ konverguje k 0 a je obsažena v A a $0 \notin A$, a proto $0 \in \partial A$. Na druhou stranu máme z faktu $\text{Int } A = \emptyset$, že $A \subset \partial A$. Proto $\{0\} \cup A \subset \partial A$. Pro důkaz druhé inkluze uvažujme bod $x \notin \{0\} \cup A$. Pokud $x < 0$, pak interval $B(x, \frac{|x|}{2})$ neprotíná A , a tedy $x \notin \partial A$. Pokud $x > 0$, vezmeme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ splňující $\frac{1}{n_0} < x - \delta < x$. Pak interval $(x - \delta, x + \delta)$ protíná A v konečné množině, a tedy existuje $\eta \in (0, \delta)$ takové, že $(x - \eta, x + \eta) \cap A = \emptyset$. Proto $x \notin \partial A$. Tím je druhá inkluze ukázána. Uzávěr A je tedy roven $\bar{A} = A \cup \partial A = \{0\} \cup A$. ♣

11.8.2. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}^2$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}, \quad A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}, \\ A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}.$$

Řešení. (a) V prvním případě platí

$$\text{Int } A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}.$$

Vskutku, označme $G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$. Pak pro kanonické projekce $\pi_x, \pi_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$G = \pi_x^{-1}((0, \infty)) \cap \pi_y^{-1}((-\infty, 0)),$$

a tedy je díky Příkladu 10.4.3 a Větě 10.4.6 množina G otevřená. Jelikož $G \subset A$, dle Věty 10.3.15 plyne $\text{Int } A \supset G$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $\mathbf{a} = [x, y] \in \text{Int } A \setminus G \subset A \setminus G$. Pak $x > 0$ a $y = 0$. Posloupnost bodů $\{[x, \frac{1}{n}]\}$ pak neleží v A a konverguje k \mathbf{a} , tedy $\mathbf{a} \notin \text{Int } A$, což je spor. Proto $\text{Int } A = G$.

Dále máme

$$\bar{A} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 0\}.$$

Vskutku, označme $F = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 0\}$. Pak jako výš odvodíme, že F je uzavřená, a jelikož obsahuje A , platí $\bar{A} \subset F$ (vizte Větu 10.3.24(g)). Necht nyní $\mathbf{a} \in F$ je dáno. Pak body $[x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k \mathbf{a} . Tedy $\mathbf{a} \in \bar{A}$.

Konečně určíme ∂A . Pokud $\mathbf{a} = [x, y] \in \partial A$, pak $\mathbf{a} \in \bar{A} \setminus \text{Int } A = F \setminus G$, a tedy $x \geq 0$, $y \leq 0$ a alespoň jedno z čísel x , y je nulové. Obráceně, necht $\mathbf{a} = [x, y]$, kde $x \geq 0$, $y \leq 0$ a $xy = 0$. Necht například $x = 0$. Pak body $[\frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k \mathbf{a} . Dále body $[-\frac{1}{n}, y]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v doplňku A konvergují k \mathbf{a} . Tedy $\mathbf{a} \in \partial A$. Podobně se ověří, že $\mathbf{a} \in \partial A$ v případě $y = 0$. Tedy

$$\partial A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 0, xy = 0\}.$$

(b) Necht

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}.$$

Jelikož je funkce $f: [x, y] \mapsto x^2 + e^y$ spojitá, je množina

$$A = f^{-1}((17, \infty))$$

otevřená (vizte Větu 10.4.6). Proto $\text{Int } A = A$.

Označme

$$F = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y \geq 17\}.$$

Pak $\bar{A} = F$. Vskutku, množina F je uzavřená (to opět plyne z Věty 10.4.6), obsahuje A , a tedy $\bar{A} \subset F$. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme $\mathbf{a} = [x, y] \in F$. Pokud $\mathbf{a} \in A$, je zjevně $\mathbf{a} \in \bar{A}$. Necht tedy $\mathbf{a} \in F \setminus A$, tj. $x^2 + e^y = 17$. Pak body $[x, y + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, splňují

$$17 = x^2 + e^y < x^2 + e^{y + \frac{1}{n}},$$

tj. leží v A . Jelikož tyto body konvergují k \mathbf{a} , leží \mathbf{a} v \bar{A} .

Hranice A je pak rovna množině

$$H = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y = 17\}.$$

Vskutku,

$$\partial A \subset \bar{A} \setminus \text{Int } A = F \setminus A = H.$$

Na druhou stranu, je-li $\mathbf{a} = [x, y] \in H$ dáno, dle předchozího již víme, že $\mathbf{a} \in \bar{A}$. Jelikož $\mathbf{a} \notin A$, je i v $\bar{\mathbb{R}^2} \setminus A$. Tedy $\mathbf{a} \in \partial A$ a $H = \partial A$.

(c) Necht

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}.$$

Postupem analogickým k přechodnému odvodíme, že A je uzavřená. Dokážeme, že $\partial A = A$. Vskutku, je-li $[x, y] \in A$ dáno, body $[x, y + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, splňují

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{n}\right)^2 + 2x\left(y + \frac{1}{n}\right) = 5 + \frac{1}{n}\left(2x + 2y + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy všechny až nejvýše na jeden leží mimo množinu A . Jelikož konvergují k \mathbf{a} , je $\mathbf{a} \in \partial A$.

Na závěr si uvědomme, že vztah $\bar{A} = A = \partial A$ implikuje $\text{Int } A = \emptyset$. ♣

11.8.3. Příklad. U množiny

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y > 0, z \geq 0, x + y = 2\}$$

určete vnitřek, uzávěr a hranici.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že $\text{Int } A = \emptyset$. Vskutku, pokud $\mathbf{a} = [x, y, z] \in A$, pak body $[x + \frac{1}{n}, y, z]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v doplňku A a konvergují k \mathbf{a} . Tedy $\mathbf{a} \notin \text{Int } A$ a $\mathbf{a} \in \partial A$. Dále označme

$$F = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 2\}.$$

Pak platí $\partial A = \bar{A} = F$. Vskutku, F je uzavřená množina, neboť obsahuje A a pro spojitou funkci $f: [x, y, z] \mapsto x + y$ platí

$$F = \pi_x^{-1}([0, \infty)) \cap \pi_y^{-1}([0, \infty)) \cap \pi_z^{-1}([0, \infty)) \cap f^{-1}(\{2\}).$$

Tedy

$$\partial A \subset \bar{A} \subset F.$$

Mějme $\mathbf{a} = [x, y, z] \in F$ dáno. Pomocí bodů $[x + \frac{1}{n}, y, z]$, $n \in \mathbb{N}$, jako výše odvodíme, že $\mathbf{a} \in \bar{\mathbb{R}^3} \setminus A$. Pokud $\mathbf{a} \in A$, je dle přechozího prvkem ∂A . Pokud $\mathbf{a} \in F \setminus A$, pak $z \geq 0$, $x \geq 0$, $y = 0$ a $x + y = 2$, tj. $x = 2$. Body $[x - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, z]$, $n \in \mathbb{N}$, pak leží v A a konvergují k \mathbf{a} . Proto $\mathbf{a} \in \bar{A}$. Jelikož $\partial A = \bar{A} \cap \bar{\mathbb{R}^3} \setminus A$, máme $F \subset \partial A$. ♣

11.8.4. Příklad. Nechtě $[a, b] \in \mathbb{R}^2$. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Funkce $f: [x, y] \mapsto x$ a $g: [x, y] \mapsto y$ jsou spojitá na \mathbb{R}^2 dle Příkladu 10.4.3. Tedy dle Věty 10.4.17 máme

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} \sqrt{x^2 + y^2} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} \sqrt{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} f(x, y) \right)^2 + \left(\lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} g(x, y) \right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

♣

11.8.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Položíme-li ve funkci $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $y = 0$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Obdobně pro $x = 0$ máme

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Dle Heineovy věty 10.4.11 tedy limita neexistuje. ♣

11.8.6. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$, kde

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Řešení. Jelikož

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} |y| = 0$$

a platí

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| \leq |y|,$$

dostáváme $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 0$. ♣

11.8.7. Příklad. Spočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$, kde

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Řešení. Povšimneme si, že k bodu $[0, 0]$ se můžeme blížit po ose y zprava a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 1.$$

K bodu $[0, 0]$ se však můžeme blížit i po přímce $y = x$ a pak dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \sqrt{2}.$$

Podle Věty 10.4.11 tedy limita neexistuje. ♣

11.8.8. Příklad. Spočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$, kde

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Řešení. Zadanou funkci můžeme odhadnout

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Jelikož $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, je zadaná limita rovna 0. ♣

11.8.9. Příklad. Spočítejte

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{\sqrt{x^6 + y^6}}}.$$

Řešení. Nejprve si rozmyslíme, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $[x, y] \in P(\mathbf{o}, \delta)$ platí odhad

$$\log(1 + x^2 y^2) \leq 2x^2 y^2. \quad (11.27)$$

Vskutku, díky platnosti vztahu $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ lze nalézt $\eta > 0$ takové, že $\log(1 + t) \leq 2t$ pro libovolné $t \in P(0, \eta)$. Jelikož $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} x^2 y^2 = 0$, existuje $\delta > 0$ splňující $x^2 y^2 \in B(0, \eta)$ kdykoliv $[x, y] \in B(\mathbf{o}, \delta)$. To je však již hledané δ , neboť pokud $[x, y] \in P(\mathbf{o}, \delta)$ splňuje $xy = 0$, pak nerovnost (11.27) zjevně platí. Pokud $xy \neq 0$, je $x^2 y^2 \in P(0, \eta)$, a tedy (11.27) platí díky volbě η .

Nyní můžeme pro $[x, y] \in P(\theta, \delta)$ odhadnout

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{x^6 + y^6}} \log(1 + x^2 y^2) \leq \frac{2x^2 y^2}{\sqrt{x^6 + y^6}} \leq \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}} \\ &\leq \frac{x^4}{\sqrt{x^6}} + \frac{y^4}{\sqrt{y^6}} \leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Jelikož limita posledního výrazu v bodě $[0, 0]$ je 0, dostáváme z Věty 10.4.18 rovnost $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = e^0 = 1$.

(Poznamenejme, že výpočet je možno zjednodušit použitím odhadu $\log(1 + t) \leq t$, $t \in (0, \infty)$.) ♣

11.8.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Pišme $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \varphi(t)$, kde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$. Pak

$$\frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2}.$$

Jelikož

$$0 \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2} \right|$$

a pravá strana konverguje k 0 pro x jdoucí k 0, máme $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} = 0$. Obdobně odvodíme nulovost limity druhého členu.

Celkem tedy vyjde

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

♣

11.8.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}}.$$

Řešení. Nejprve si všimneme rovnosti

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} \right| = \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} = \sqrt{\frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6}}.$$

Dále platí

$$\left| \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6} \right| = \frac{x^2 |y|^3}{x^4 + y^6} \cdot |y| = \frac{x^2 |y|^3}{(x^2)^2 + (|y|^3)^2} \cdot |y| \leq |y|,$$

neboť

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1, \quad a, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0).$$

Tedy

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} = 0.$$

♣

11.8.12. Příklad. Rozhodněte, zda lze funkci $\frac{\sin xy}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu \mathbb{R}^2 .

Řešení. Uvažujme spojitou funkci $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou jako

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Pak je funkce

$$f(x, y) = g(xy) \cdot y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

spojitá dle Věty 10.4.17 a pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$, platí

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \frac{\sin xy}{x}, & y \neq 0, \\ 0 = \frac{\sin xy}{x}, & y = 0. \end{cases}$$

Funkce f je tak spojitě rozšíření zadaná funkce na \mathbb{R}^2 .

♣

11.8.13. Příklad. Spočítejte parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 \sin y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

v každém bodě roviny \mathbb{R}^2 .

Řešení. Necht $\mathbf{a} = (a, b)$ je daný bod v \mathbb{R}^2 . Spočteme nejprve $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$. Podle 11.1.9 platí pro funkci

$$g_1(t) = f(t, b) = t^2 \sin b, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g_1'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = g_1'(a) = [t \mapsto t^2 \sin b]'_{t=a} = [t \mapsto 2t \sin b]_{t=a} = 2a \sin b.$$

Analogicky máme pro funkci

$$g_2(t) = f(a, t) = a^2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g_2'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) = g_2'(b) = [t \mapsto a^2 \sin t]'_{t=b} = [t \mapsto a^2 \cos t]_{t=b} = a^2 \cos b.$$

♣

11.8.14. Příklad. Spočítejte parciální derivace funkce

$$f(x, y, z) = x^{y^z}, \quad [x, y, z] \in (0, \infty)^3,$$

a najděte rovnici tečné nadroviny ke grafu f v bodě $[2, 1, 2]$.

Řešení. Funkci f vyjádříme jako

$$f(x, y, z) = e^{y^z \log x} = e^{e^{z \log y} \log x}.$$

Tedy pro $[x, y, z] \in (0, \infty)^3$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}([x, y, z]) &= e^{e^{z \log y} \log x} \cdot e^{z \log y} \cdot \frac{1}{x} = y^z \cdot x^{y^z-1} \\ \frac{\partial f}{\partial y}([x, y, z]) &= e^{e^{z \log y} \log x} \cdot \log x \cdot e^{z \log y} \cdot \frac{z}{y} = x^{y^z} y^z \frac{z \log x}{y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}([x, y, z]) &= e^{e^{z \log y} \log x} \cdot \log x \cdot e^{z \log y} \cdot \log y = x^{y^z} y^z \log x \log y. \end{aligned}$$

Parciální derivace jsou zjevně spojité na $(0, \infty)^3$, a tedy v každém bodě definičního oboru existuje derivace (Věta 11.1.22). Z právě provedených výpočtů plyne, že

$$\nabla f([2, 1, 2]) = [1, 4 \log 2, 0].$$

Dle 11.1.16 je tedy rovnice tečné nadroviny rovna

$$\begin{aligned} t(x, y, z) &= 2 + 1(x - 2) + 4 \log 2(y - 1) + 0(z - 2) \\ &= 2 + (x - 2) + 4 \log 2(y - 1), \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

♣

11.8.15. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a derivace funkce

$$f(x, y) = |x| |y|, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. Pro body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ mimo souřadnicové osy platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]) = (\text{sign } x) |y|, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x, y]) = |x| \text{sign } y.$$

Tyto funkce jsou spojité v každém bodě mimo souřadnicové osy, a tedy v nich existuje derivace. Dle Věty 11.1.17 platí

$$\begin{aligned} f'(x, y): (h_1, h_2) &\mapsto \langle \nabla f(x, y), h \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}([x, y])h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}([x, y])h_2 \\ &= ((\text{sign } x)y |y|)h_1 + (|x| \text{sign } y)h_2, \quad ([h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na body ležící na ose x , tj. na body tvaru $[x, 0]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, 0]) = [t \mapsto f(t, 0)]'_{t=x} = [t \mapsto 0]'_{t=x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Naproti tomu pro $x \neq 0$ parciální derivace podle y v bodě $[x, 0]$ neexistuje, neboť pro funkci

$$g(t) = f(x, t) = |x| |t|, \quad t \in \mathbb{R},$$

platí

$$g'_+(0) = |x|, \quad g'_-(0) = -|x|,$$

což implikuje neexistenci

$$\frac{\partial f}{\partial y}([x, 0]) = g'(0).$$

V bodech $[x, 0]$, $x \neq 0$, tak neexistuje ani derivace.

Pro body tvaru $[0, y]$, $y \in \mathbb{R}$, podobně jako výše odvodíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}([0, y]) = 0$ a že $\frac{\partial f}{\partial x}([0, y])$ neexistuje, pokud $y \neq 0$. To opět implikuje neexistenci derivace v bodech $[0, y]$, $y \neq 0$.

Zbývá nám vyšetřit bod $[0, 0]$. Z předchozího víme, že parciální derivace f v $[0, 0]$ jsou nulové. Dle Věty 11.1.17 je tak jediným kandidátem na derivaci nulové zobrazení. Dle definice tak derivace existuje právě tehdy, když

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{f([0, 0] + [x, y]) - f([0, 0]) - \langle [0, 0], [x, y] \rangle}{\|[x, y]\|} = 0.$$

Tedy zkoumáme výraz

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|.$$

Ten má však dle Příkladu 11.8.8 limitu rovnou nule. Tedy derivace f v bodě $[0, 0]$ je rovne $[0, 0]$. ♣

11.8.16. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a derivace funkce

$$f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. V bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ mimo přímku $y = -x$ máme spojité parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]) = \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5 + y^5)^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x, y]) = \frac{y^4}{\sqrt[5]{(x^5 + y^5)^4}},$$

a tedy v těchto bodech existuje derivace a je roven $\nabla f([x, y])$.

Uvažujme nyní bod $\mathbf{a} = (a, -a)$, kde $a \neq 0$. Pak pro funkci

$$g(x) = \sqrt[5]{x^5 - a^5}$$

platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = [x \mapsto f(x, -a)]'_{x=a} = g'(a).$$

Derivace $g'(a)$ je však nevlastní, neboť díky spojitosti g lze odvodit

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5 - a^5)^4}} = \infty.$$

Obdobně obdržíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{o})$ neexistuje.

Zbývá vyšetřit bod $[0, 0]$. Pro něj platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([0, 0]) = [x \mapsto f(x, 0)]'_{x=0} = [x \mapsto \sqrt[5]{x^5}]'_{x=0} = 1$$

a podobně $\frac{\partial f}{\partial y}([0, 0]) = 1$. Pokud tedy existuje derivace, je reprezentován vektorem $[1, 1]$. Nutnou a postačující podmínkou pro jeho existenci je nulovost limity

$$\begin{aligned} & \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{f([0,0] + [x, y]) - f([0,0]) - \langle [1, 1], [x, y] \rangle}{\|[x, y]\|} \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^5 + y^5} - (x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Uvažujeme-li přímku $y = x$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^5 + x^5} - (x + x)}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x^5} - 2x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Dle Věty 10.4.11 tak derivace v $[0, 0]$ neexistuje. ♣

11.8.17. Příklad. Zjistěte, zdali má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^4}{x^4 + y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

totální diferenciál v $[0, 0]$.

Řešení. Jelikož

$$x \mapsto f(x, 0) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

a

$$y \mapsto f(0, y) = y^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

máme $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{o}) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{o}) = 0$. Existence totálního diferenciálu tak odvisí od nulovosti limity

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\frac{x^5 + y^4}{x^4 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{y^4 - xy^2}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Uvažujeme-li přímku $y = x$, obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - x^3}{(x^4 + x^2)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{\sqrt{2}(x^2 + 1)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Tedy totální $f'(\mathbf{o})$ neexistuje. ♣

11.8.18. Příklad. Spočítejte parciální derivace a totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Ukažte navíc, že parciální derivace f nejsou spojité v počátku.

Řešení. Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2x$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}([x, y]) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} 2y.$$

Obě parciální derivace jsou spojité funkce na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$, a proto podle Věty 11.1.22 existuje totální diferenciál pro všechna $[x, y] \neq [0, 0]$. Ten má tvar

$$f'([x, y]): [h_1, h_2] \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}([x, y]), \frac{\partial f}{\partial y}([x, y]), [h_1, h_2]\right), \quad [h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2.$$

V bodě $[0, 0]$ spočteme parciální derivace dle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{o}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

a analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{o}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - 0}{t} = 0.$$

Ukažme nyní, že $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v počátku. Již však její restrikce na přímku $y = 0$ není spojitá, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}([x, 0]) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - x^2 \left(\cos \frac{1}{x^2}\right) \frac{2x}{x^4}\right)$$

neexistuje vlastní. (K tomu stačí uvažovat body $[\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0]$, $n \in \mathbb{N}$.)

Přesto v bodě \mathbf{o} existuje totální diferenciál

$$f'(0, 0)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{o})h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{o})h_2 = 0h_1 + 0h_2.$$

Vskutku, pro nulové lineární zobrazení máme totiž

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Jelikož

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

je limita nulová. Tím je existence totálního diferenciálu ověřena. ♣

11.8.19. Příklad. Ukažte, že funkci

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2 + xy}}$$

lze spojitě rozšířit do bodu $[0, 0]$ a že má v tomto bodě totální diferenciál.

Řešení. Nejprve ukážeme, že $x^2 + y^2 + xy > 0$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Vyjádříme totiž bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$ v polárních souřadnicích jako

$$[x, y] = [r \cos \alpha, r \sin \alpha], \quad r > 0, \alpha \in [0, 2\pi).$$

Pak

$$x^2 + y^2 + xy = r^2 + r^2 \cos \alpha \sin \alpha = r^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) > 0$$

(Mohli bychom též použít odhad $x^2 + y^2 + xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.)

Dále odhadneme

$$x^2 + y^2 + xy \leq x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq 2(x^2 + y^2),$$

a tedy

$$0 \leq e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}} \leq e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}}.$$

Jelikož

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} = 0,$$

existuje $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \in P([0, 0], \delta)$ platí

$$0 \leq e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}} \leq e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}} \leq (x^2 + y^2).$$

Tedy vidíme, že danou funkci lze spojitě dodefinovat v bodě $[0, 0]$ hodnotou 0.

Parciální derivace v počátku spočteme z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{o}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0$$

a analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{o}) = 0$.

Existence totálního diferenciálu je pak ekvivalentní s nulovostí limity

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'(0, 0)(x, y)}{\|[x, y]\|} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jelikož pro $[x, y] \in P(\mathbf{o}, \delta)$ platí

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

je daná limita nulová. Tedy totální diferenciál funkce f v počátku existuje. ♣

11.8.20. Příklad. Ukažte, že totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y (|x| + |y|)}{x^4 + y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

v počátku neexistuje.

Řešení. Jelikož je funkce f nulová na osách, jsou parciální derivace f v počátku nulové. Totální diferenciál v \mathbf{o} tak existuje právě tehdy, když je limita

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{f(x,y)}{\|[x,y]\|} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y (|x| + |y|)}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

nulová. Uvažujeme-li však parabolu $y = x^2$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 x^2 (|x| + |x^2|)}{(x^4 + x^4) \sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x^2}{2x \sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Totální diferenciál v počátku proto neexistuje. ♣

11.8.21. Příklad. Spočítejte totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + y} \log(x^2 + y^2), & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

všude, kde existuje.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že f je spojitá na \mathbb{R}^2 . K tomu je třeba ověřit, že $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x,y) = 0$. To však plyne z odhadu

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \sqrt[3]{|x^2| + |y|} \log(x^2 + y^2) \leq \sqrt[3]{|x| + |y|} \log(x^2 + y^2) \\ &\leq \sqrt[6]{2(x^2 + y^2)} \log(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

platného pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\}$ splňující $|x| \leq 1$ a z faktu $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{\frac{1}{6}} \log r = 0$.

V každém bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $y \neq -x^2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) &= \frac{1}{3} (x^2 + y)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + y^2) + \sqrt[3]{x^2 + y} \frac{2x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) &= \frac{1}{3} (x^2 + y)^{-\frac{2}{3}} \log(x^2 + y^2) + \sqrt[3]{x^2 + y} \frac{2y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní bod $\mathbf{a} = (a, -a^2)$, kde $a \neq 0$ a $a^2 + a^4 \neq 1$. Protože

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}([x, -a^2]) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{3} (x^2 - a^2)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) + \sqrt[3]{x^2 - a^2} \frac{2x}{x^2 + a^4} \right)$$

neexistuje vlastní, neexistuje ani

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}([x, -a^2]).$$

Podobně neexistuje $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$, protože

$$\lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{\partial f}{\partial y}([a, y]) = \lim_{y \rightarrow -a^2} \left(\frac{1}{3} (a^2 + y)^{-\frac{2}{3}} 2a \log(a^2 + y^2) + \sqrt[3]{a^2 + y} \frac{2a}{a^2 + y^2} \right)$$

neexistuje vlastní.

Uvažujme nyní bod \mathbf{o} . Pak $x \mapsto f(x, 0) = \sqrt[3]{x^2} \log x^2$, a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{o}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2} \log t^2}{t}$$

neexistuje vlastní. Podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{o}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t} \log t^2}{t}$$

neexistuje.

Konečně vezměme do úvahy bod $\mathbf{a} = (a, -a^2)$, kde $a^2 + a^4 = 1$. Počítejme $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$ jako limitu parciálních derivací. Pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}([x, -a^2]) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{3} (x^2 - a^2)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) + \sqrt[3]{x^2 - a^2} \frac{2x}{x^2 + a^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{3} (x^2 - a^2)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x \log(x^2 + a^4)}{3} \cdot \frac{x^2 + a^4 - 1}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = 0, \end{aligned}$$

neboť dle Věty 5.3.1(a) platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + a^4 - 1}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x}{\frac{2}{3} 2x (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Podobně pro $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) &= \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{\partial f}{\partial y}([a, y]) = \lim_{y \rightarrow -a^2} \left(\frac{1}{3} (a^2 + y)^{-\frac{2}{3}} \log(a^2 + y^2) + \sqrt[3]{a^2 + y} \frac{2y}{a^2 + y^2} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{1}{3} (a^2 + y)^{-\frac{2}{3}} \log(a^2 + y^2) \\ &= \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{1}{3} \frac{\log(a^2 + y^2)}{a^2 + y^2 - 1} \cdot \frac{a^2 + y^2 - 1}{(a^2 + y)^{\frac{2}{3}}} = 0, \end{aligned}$$

jelikož

$$\lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{a^2 + y^2 - 1}{(a^2 + y)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{y \rightarrow -a^2} \frac{2y}{\frac{2}{3} (a^2 + y)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Zbývá vyšetřit existenci totálního diferenciálu v bodě $\mathbf{a}(a) = (a, -a^2)$, kde $a^2 + a^4 = 1$. Dle předchozího výpočtu je kandidát na $f'(\mathbf{a})$ roven 0. Vyšetřujeme

tedy výraz

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f([a, -a^2] + [x, y]) - f([a, -a^2])}{\|[x, y]\|} \right| \\
 &= \left| \frac{\sqrt[3]{(a+x)^2 + (-a^2+y)^2} \log((a+x)^2 + (-a^2+y)^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
 &= \left| \frac{\sqrt[3]{x^2+2ax+y} \log(x^2+y^2+2ax-2a^2y+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
 &\leq \frac{\sqrt[3]{x^2+2ax+y} |x^2+y^2+2ax-2a^2y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\sqrt[3]{x^2+2ax+y} ((x^2+y^2) + 2|a|(|x|+|a||y|)) \right) \\
 &\leq \sqrt[3]{x^2+2ax+y} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt[3]{x^2+2ax+y} \frac{|2a| \max\{1, |a|\} (|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}},
 \end{aligned}$$

přičemž jsme použili odhad $\log(t+1) \leq t$, $t \in (-1, \infty)$. Poslední výraz však konverguje k 0 pro $[x, y] \rightarrow [0, 0]$, neboť

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \sqrt[3]{x^2+2ax+y} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2}.$$

Tím je existence totálního diferenciálu v bodě \mathbf{a} dokázána. ♣

11.8.22. Příklad. Vypočtete derivaci $D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 2)$ funkce

$$f(x, y, z) = x^y + y^z, \quad [x, y, z] \in (0, \infty)^3,$$

kde $\mathbf{v} = [1, 1, 1]$.

Řešení. Funkce f má zřejmě všechny parciální derivace na svém definičním oboru, a tedy existuje $\nabla f(1, 1, 2) = f'(1, 1, 2)$. Jelikož $f'(1, 1, 2)(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 2)$ (vizte Větu 11.1.27), stačí nalézt $\nabla f(1, 1, 2)$. Protože na $\mathcal{D}(f)$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x + zy^{z-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^z \log y,$$

máme

$$\nabla f(1, 1, 2) = [1, 2, 0].$$

Proto

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 2) = \langle [1, 2, 0], [1, 1, 1] \rangle = 3. \quad \text{♣}$$

11.8.23. Příklad. Necht $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R})$. Vyjádřete parciální derivace funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pomocí parciálních derivací funkce g , pokud

$$f(x, y) = g(x+y, x-y), \quad f(x, y) = g(\sin x, xy), \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. (a) Uvažujme zobrazení $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované jako $h(x, y) = [x+y, x-y]$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. To má složky $h_1(x, y) = x + y$ a $h_2(x, y) = x - y$. Funkce h je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, a tak dle řetízkového pravidla (Věta 11.2.18) platí

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_1 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(x + y, x - y) \cdot 1 + \partial_2 g(x + y, x - y) \cdot 1\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_2 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(x + y, x - y) \cdot 1 + \partial_2 g(x + y, x - y) \cdot (-1).\end{aligned}$$

(b) Podobně jako výše počítáme pro $h(x, y) = [\sin x, xy]$, $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_1 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(\sin x, xy) \cdot \cos x + \partial_2 g(\sin x, xy) \cdot y\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j g(h(x, y)) \partial_2 h_j(x, y) \\ &= \partial_1 g(\sin x, xy) \cdot 0 + \partial_2 g(\sin x, xy) \cdot x.\end{aligned}$$

♣

11.8.24. Příklad. Necht $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Vyjádřete parciální derivace funkce $g(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)}$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, pomocí parciálních derivací f a hodnot f .

Řešení. Uvažujme zobrazení $h(x, y) = [f(x, y), f(y, x)]$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, a funkci $u(x, y) = x^y$, $[x, y] \in (0, \infty)^2$. Pak $f(x, y) = (u \circ h)(x, y)$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Dle Věty 11.2.16 platí $f'(x, y) = u'(h(x, y)) \circ h'(x, y)$. Máme

$$u'(a, b) = [ba^{b-1}, a^b \log a], \quad [a, b] \in (0, \infty)^2,$$

$$h'_1(x, y) = [\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)]$$

a

$$\partial_1 h_2(x, y) = \partial_1 f(y, x) \cdot 0 + \partial_2 f(y, x) \cdot 1 = \partial_2 f(y, x),$$

$$\partial_2 h_2(x, y) = \partial_1 f(y, x) \cdot 1 + \partial_2 f(y, x) \cdot 0 = \partial_1 f(y, x),$$

tj.

$$h'_2(x, y) = [\partial_2 f(y, x), \partial_1 f(y, x)].$$

Tedy

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} ba^{b-1} & a^b \log a \end{pmatrix}_{[a, b]=[f(x, y), f(y, x)]} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) & \partial_2 f(x, y) \\ \partial_2 f(y, x) & \partial_1 f(y, x) \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f(y, x)f(x, y)^{f(y, x)-1}\partial_1 f(x, y) \\ &\quad + f(x, y)^{f(y, x)}\log f(x, y)\partial_2 f(y, x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f(y, x)f(x, y)^{f(y, x)-1}\partial_2 f(x, y) \\ &\quad + f(x, y)^{f(y, x)}\log f(x, y)\partial_1 f(y, x).\end{aligned}$$

♣

11.8.25. Příklad. Necht' existuje $f'(1, 1)$ a $g(x, y) = f(f(y, x), f(x, y))$. Určete $g'(1, 1)$, pokud $f(1, 1) = \partial_1 f(1, 1) = 1$ a $\partial_2 f(1, 1) = 2$.

Řešení. Zobrazení $h(x, y) = [f(y, x), f(x, y)]$ splňuje $h(1, 1) = [1, 1]$, přičemž dle Věty 11.2.16 existuje i $h'(1, 1)$ a $g'(1, 1)$. Dále platí

$$g'(1, 1) = (f \circ h)'(1, 1) = f'(h(1, 1)) \circ h'(1, 1) = f'(1, 1) \circ h'(1, 1).$$

Jelikož

$$f'(1, 1) = [\partial_1 f(1, 1), \partial_2 f(1, 1)] = [1, 2]$$

a

$$\begin{aligned}\partial_1 h_1(x, y) &= \partial_1 f(y, x) \cdot 0 + \partial_2 f(y, x) \cdot 1 = \partial_2 f(y, x), \\ \partial_2 h_1(x, y) &= \partial_1 f(y, x) \cdot 1 + \partial_2 f(y, x) \cdot 0 = \partial_1 f(y, x), \\ h'_2(x, y) &= [\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)],\end{aligned}$$

tj.

$$h'(x, y) = \begin{pmatrix} h'_1(x, y) \\ h'_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f(y, x) & \partial_1 f(y, x) \\ \partial_1 f(x, y) & \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Proto

$$g'(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

♣

11.8.26. Příklad. Vypočítejte $g'(1, 1)$, pokud pro $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derivace $g'(1, 1)$ existuje a funkce $f(r, \alpha) = g(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ splňuje $f'(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = [0, 4]$.

Řešení. Zobrazení $h(r, \alpha) = [r \cos \alpha, r \sin \alpha]$ splňuje $h(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = [1, 1]$ a

$$h'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix},$$

tj.

$$h'(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Z Věty 11.2.16 tak máme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} &= f' \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right) = g'(1, 1) \circ h' \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\partial_1 g(1, 1) \quad \partial_2 g(1, 1) \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \partial_1 g(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \partial_2 g(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \\ -\partial_1 g(1, 1) + \partial_2 g(1, 1) &= 4, \end{aligned}$$

jejímž řešením je dvojice

$$g'(1, 1) = [-2, 2].$$

♣

11.8.27. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(xy) = \pi$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x . Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě π a nalezněte tečnou přímku ke grafu této funkce v bodě $[\pi, 0]$.

Řešení. Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Funkce F je zjevně třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a platí $F(\pi, 0) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = [\cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x]_{[x,y]=[\pi,0]} = \pi \neq 0.$$

Dle Věty 11.4.1 tak existuje interval $(\pi - \delta, \pi + \delta)$ a interval $(-\delta, \delta)$ tak, že pro každé $x \in B(\pi, \delta)$ existuje právě jedno $y \in B(0, \delta)$ splňující $F(x, y) = 0$. Označme tuto funkci definovanou na $B(\pi, \delta)$ jako φ . Dle Věty 11.4.1 je φ třídy $C^\infty(B(\pi, \delta))$, $\varphi(\pi) = 0$ a splňuje vztah

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) - 1 = 0, \quad x \in B(\pi, \delta).$$

Dvojnásobným derivováním této rovnice obdržíme postupně pro $x \in B(\pi, \delta)$ rovnosti

$$\begin{aligned} \cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') - \sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') &= 0, \\ -\sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 + \cos(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') & \\ -\cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 - \sin(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') &= 0, \end{aligned}$$

kde píšeme $\varphi, \varphi', \varphi''$ místo $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$. Dosadíme-li bod $x = \pi$, dostáváme $\varphi'(\pi) = \varphi''(\pi) = 0$. Tedy tečná přímka ke grafu φ v bodě π má tvar

$$t(x) = \varphi(\pi) + \varphi'(\pi)(x - \pi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

11.8.28. Příklad. Dokažte, že množina

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; e^y + \log x + xy = 0\}$$

je grafem nějaké funkce f třídy C^2 na $(0, \infty)$.

- Najděte nulový bod x_0 funkce f a $f'(x_0)$.
- Vypočítejte $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Dokažte, že f nabývá absolutního minima právě v jednom bodě.

Řešení. Pro pevné $x \in (0, \infty)$ uvažujme funkci $f_x(y) = e^y + \log x + xy$, $y \in \mathbb{R}$. Jelikož $f'_x(y) = e^y + x$, je f_x rostoucí na \mathbb{R} . Dále platí $\lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y) = -\infty$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jedno $y(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ takové, že $f_x(y(x)) = 0$. Množina A je tedy grafem funkce f . Jelikož pro funkci $F(x, y) = e^y + \log x + xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^y + x > 0$, popisuje rovnice $F(x, y) = 0$ lokálně funkci třídy C^∞ . Tedy f je nekonečně diferencovatelná funkce na $(0, \infty)$.

- Pokud $f(x) = 0$, pak z rovnice

$$e^{f(x)} + \log x + xf(x) = 0 \quad (11.28)$$

vidíme, že $x = e^{-1}$. Derivováním této rovnice obdržíme

$$e^{f(x)} f'(x) + \frac{1}{x} + f(x) + xf'(x) = 0, \quad (11.29)$$

což po dosazení $x = e^{-1}$ dává $f'(e^{-1}) = -\frac{e^2}{e+1}$. Funkce f je tak kladná na $(0, e^{-1})$ a záporná na (e^{-1}, ∞) .

- Jelikož

$$|f(x)| = \left| \frac{-e^{f(x)} - \log x}{x} \right| \leq \frac{e^{f(x)}}{x} + \frac{|\log x|}{x} \leq \frac{1}{x} + \frac{|\log x|}{x}, \quad x \in (e^{-1}, \infty),$$

je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$. Vskutku, pokud by tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0 taková, že $\{f(x_n)\}$ je omezená. Limitním přechodem v (11.28) pak dostaneme $-\infty = 0$, což je spor. Proto $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$.

- Jelikož $f(e^{-1}) = 0$, $f(x) < 0$ pro $x \in (e^{-1}, \infty)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, existuje alespoň jeden bod, kde funkce nabývá svého absolutního minima. Předpokládejme, že existují dva takové body $x_1 < x_2$. Pak $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ a $f(x_1) = f(x_2)$. Z rovnice (11.29) nyní plyne

$$\frac{1}{x_1} + f(x_1) = 0 = \frac{1}{x_2} + f(x_2),$$

tedy $x_1 = x_2$. To je však spor s naším předpokladem. ♣

11.8.29. Příklad. Uvažujte množinu

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0\}.$$

- (a) Ukažte, že $A \cap \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$ je grafem funkce f , která je třídy $C^\infty((0, \infty))$.
- (b) Ukažte, že f je klesající a $\mathcal{H} f = (0, \infty)$.
- (c) Existuje $a > 0$ a funkce $f_1: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, $f_2, f_3: [0, a] \rightarrow [0, \infty)$ takové, že množina $A \cap \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ je sjednocením grafů f_1, f_2, f_3 a $f_1 < 0$ na $(0, \infty)$ a $0 < f_2 < f_3$ na $(0, a)$.
- (d) Funkce f_1, f_2, f_3 jsou třídy C^∞ na vnitřku svého definičního oboru.
- (e) Ukažte, že jsou funkce f_1, f_2, f_3 spojité a vyšetřete jejich supremum a infimum.

Řešení. (a) Pro pevné $x < 0$ uvažujeme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pak $f'_x(y) = 3y^2 - 2x > 0$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} f_x(y) = x^3 < 0$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jeden bod $y(x) = f(x) \in (0, \infty)$ splňující

$$x^3 + f(x)^3 - 2xf(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0). \quad (11.30)$$

(b) Ukažme, že $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující k 0 zleva taková, že $f(x_n) \rightarrow M \in (0, \infty]$. Pak ale z rovnice

$$f(x) (f(x)^2 - 2x) = -x^3$$

plyne $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Jinak by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující do $-\infty$ taková, že $f(x_n) \rightarrow M \in [0, \infty)$. Pak ale z (11.30) máme

$$f(x_n) = \frac{-x_n^3}{f(x_n)^2 - 2x_n} = \frac{x_n^2}{2 - \frac{f(x_n)}{x_n}},$$

což v limitním přechodu dá rovnost $M = \infty$.

Dále si uvědomme, že z Věty 11.4.1 plyne, že $f \in C^\infty((-\infty, 0))$. Vskutku, funkce $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a splňuje $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2x > 0$ kdykoliv $x < 0$. Tedy rovnice $F(x, y) = 0$ lokálně určuje nekonečně diferencovatelnou funkci. Proto je f třídy C^∞ .

Vzhledem k vypočteným limitám funkce f musí existovat bod, kde je její derivace záporná. Předpokládejme, že v nějakém bodě $a < 0$ platí $f'(a) = 0$. Pak derivováním rovnice (11.30) dostáváme

$$3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0),$$

což po dosazení $x = a$ implikuje rovnost $2f(a) = 3a^2$. Další dosazení do (11.30) dává rovnici,

$$x^3 + \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 - 2x \frac{3}{2}x^2 = 0$$

jež nemá řešení v intervalu $(-\infty, 0)$. Proto $f'(x) \neq 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$. Z Darbouxovy vlastnosti derivace (vizte Větu ??) nyní plyne, že f' je záporná na $(-\infty, 0)$. Z výše uvedených vlastností nyní plyne, že f je klesající $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$.

(c) Pro pevné $x \geq 0$ opět uvažujme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pokud $x = 0$, má funkce $f_x(y)$ jediný kořen, a to 0. Necht' tedy $x > 0$. Pak $\lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y) = 0$ a $\lim_{y \rightarrow \infty} f_x(y) = \infty$. Dále $f'_x(y) = 0$ právě tehdy, když $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x}$. Označme $y_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}x}$ a $y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}x}$. Pak f_x má v y_1 lokální maximum, y_2 lokální minimum, f_x roste na $(-\infty, y_1]$ a $[y_2, \infty)$ a klesá na $[y_1, y_2]$. Dále platí $f_x(y_1) > f_x(0) > 0$. Položme $a = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Pokud $x < a$, je $f_x(y_2) < 0$, pokud $x = a$, platí $f_x(y_2) = 0$ a pokud $x > a$, platí $f_x(y_2) > 0$. Z těchto informací nyní plyne, že pro interval $(0, a)$ má rovnice $f_x(y) = 0$ tři kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) < f_3(x)$, pro $x = a$ má dva kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) = f_3(x)$ a pro $x > a$ má pouze jeden kořen $f_1(x) < 0$.

(d) Nekonečná diferencovatelnost funkcí f_1, f_2, f_3 nyní plyne z Věty 11.4.1, neboť pro funkci $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x = 0$ v nějakém bodě $[x, y] \in A$ právě tehdy, když $[x, y] = [a, \sqrt{\frac{2}{3}a}]$.

(e) Uvažujme libovolnou funkci f_i . Pak pro její derivaci platí

$$3x^2 + 3f_i(x)^2 f'_i(x) - 2f_i(x) - 2x f'_i(x) = 0, \quad x \in \text{Int } \mathcal{D}(f_i).$$

Pokud $f'_i(x) = 0$ pro nějaké x , pak x splňuje $f_i(x) = \frac{3}{2}x^2$. Po dosazení do rovnice $x^3 + f_i^3(x) - 2x f_i(x) = 0$ pak dostáváme $x = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$ a $f_i(x) = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Přímým výpočtem vidíme, že $\frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$ je největší z tří kořenů funkce $f_{\frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}}(y)$, a proto pouze funkce f_3 má v nějakém bodě nulovou derivaci (konkrétně v bodě $b = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$).

Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_i(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, pro nějaké $i \in \{1, 2, 3\}$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0, pro niž $f(x_n) \rightarrow M \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$. Z rovnice $x_n^3 + f_i(x_n)(f_i^2(x_n) - 2x_n) = 0$ pak ale plyne limitním přechodem $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = -\infty$. Kdyby tomu tak nebylo, nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ konvergující do ∞ , pro niž $f_1(x_n) \rightarrow M \in (-\infty, 0]$. Pak z rovnosti

$$f_1(x) = \frac{-x^3}{f_1^2(x) - 2x} = \frac{-x^2}{\frac{f_1(x)}{x} - 2}$$

plyne limitním přechodem $M = \infty$, tj. spor.

Z výše uvedených faktů nyní máme, že $f'_1 < 0$ na $(-\infty, 0)$, $f'_2 > 0$ na $(0, a)$ a $f'_3 > 0$ na $(0, b)$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow a^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$. K tomuto účelu nejdříve dokážeme omezenost množiny A v prvním kvadrantu. Necht' tedy $[x, y] \in A$ splňuje $x \geq 0$, $y \geq 0$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $\max\{x, y\} > 0$. Pak máme

$$0 = x^3 + y^3 - 2xy \geq (\max\{x, y\})^3 - 2(\max\{x, y\})^2,$$

neboli

$$2(\max\{x, y\})^2 \geq (\max\{x, y\})^3.$$

To implikuje $\max\{x, y\} \leq 2$. Dostáváme tedy, že funkce f_2 i f_3 jsou omezené. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v $[0, a)$ konvergující k a . Pokud $f_2(x_n) \not\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}a}$, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $M \neq \sqrt{\frac{2}{3}a}$ takové, že $f_2(x_{n_k}) \rightarrow M$. Limitním přechodem v rovnosti $x^3 + f_2^3(x) - 2xf(x) = 0$ pak máme, že M je nezáporným kořenem funkce f_a různým od $\sqrt{\frac{2}{3}a}$. To je však spor s úvahami v (c). Tedy $f(x_n) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}a}$. Podobně se ukáže, že $\lim_{x \rightarrow a^-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$.

Nyní již můžeme učinit závěr. Funkce f_1 je klesající a $\mathcal{H}(f_1) = (-\infty, 0]$, $\mathcal{H}(f_2) = [0, \sqrt{\frac{2}{3}a}]$ a $\mathcal{H}(f_3) = [0, f_3(b)] = [0, \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}]$. ♣

11.8.30. Příklad. Dokažte, že existuje okolí V bodu $[3, -2, 2]$ takové, že množina $\{[x, y, z] \in V; z^3 - xz + y = 0\}$ je grafem funkce $z = z(x, y)$. Vypočítejte tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě $[3, -2, 2]$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}([3, -2])$.

Řešení. Použijeme Větu 11.4.1 pro funkci $F(x, y, z) = z^3 - xz + y$ a bod $[3, -2, 2]$. Zjevně je F třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(3, -2, 2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(3, -2, 2) = [3z^2 - x]_{[x,y,z]=[3,-2,2]} = 9 \neq 0.$$

Předpoklady Věty 11.4.1 jsou tak splněny, a tedy máme existenci požadovaného okolí V . Tedy $z = z(x, y): U \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce třídy C^∞ definovaná na nějakém okolí U obsahujícím bod $[3, -2]$ a splňující $F(x, y, z(x, y)) = 0$ splou s podmínkou $z(3, -2) = 2$.

Derivujme rovnost $z^3 - xz + y = 0$ podle x a podle y na U . Dostáváme tak

$$0 = 3z^2 z_x - z - xz_x \quad \text{a} \quad 3z^2 z_y - xz_y + 1 = 0. \quad (11.31)$$

Po dosazení $[x, y, z] = [3, -2, 2]$ máme $z_x(3, -2) = \frac{2}{9}$ a $z_y(3, -2) = -\frac{1}{9}$. Tedy tečná nadrovina t k funkci z v bodě $[3, -2, 2]$ je

$$t(x, y, z) = 2 + \frac{2}{9}(x - 3) - \frac{1}{9}(y + 2), \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Derivujme-li druhou rovnici v (11.31) podle y , dostáváme

$$6z(z_y)^2 + 3z^2 z_{yy} - xz_{yy} = 0.$$

Po dosazení $[x, y, z] = [3, -2, 2]$ a $z_y = -\frac{1}{9}$ vyjde $z_{yy}(3, -2) = -\frac{4}{243}$. ♣

11.8.31. Příklad. Necht' je funkce $z = z(x, y)$ třídy C^1 na nějakém okolí U bodu $[a, b]$ a splňuje na něm rovnici $z = x + \arctg \frac{y}{z-x}$.

- Vyjádřete z_x pomocí x, y a $z(x, y)$ na U .
- Ukažte, že pro každý bod $[a, b]$, kde $b > 0$, existuje U a $z(x, y)$ s výše uvedenými vlastnostmi.

Řešení. (a) Necht $[x, y, z]$ splňuje rovnici $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pokud $y = 0$, $z = x$ a pravá strana rovnosti není definována. Tedy $y \neq 0$. Jelikož $z - x = \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$, je $z - x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Proto

$$y = (z - x) \operatorname{tg}(z - x) > 0$$

(funkce $u \operatorname{tg} u$ je kladná na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Derivujeme-li rovnost $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ podle x , dostáváme

$$z_x = 1 - \frac{y(z_x - 1)}{(z - x)^2 + y^2}.$$

Úpravou obdržíme

$$z_x((z - x)^2 + y^2 + y) = (z - x)^2 + y^2 + y,$$

tj. $z_x = 1$ (díky předchozím úvahám víme, že $(z - x)^2 + y^2 + y > 0$).

(b) Necht $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ splňující $b > 0$ je dáno. Uvažujme funkci $f(z) = -z + a + \operatorname{arctg} \frac{b}{z-a}$. Pak f je spojitá na (a, ∞) a splňuje $\lim_{z \rightarrow a^+} f(z) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = -\infty$. Existuje tedy $c \in (a, \infty)$ splňující $f(c) = 0$. Uvažujme nyní bod $[a, b, c]$ a funkci $F(x, y, z) = -z + x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pak $F(a, b, c) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $[a, b, c]$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}([a, b, c]) = -1 - \frac{b}{(c-a)^2 + b^2} < 0.$$

Dle Věty 11.4.1 existuje požadované okolí bodu $[a, b, c]$ a příslušná funkce z . ♣

11.8.32. Příklad. Ukažte, že existují funkce $u = u(x, y)$ a $v(x, u)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1 , splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Dále vypočtete $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

Řešení. Uvažujme bod $\mathbf{a} = [1, 2, 0, 0]$ a funkci

$$F: [x, y, u, v] \mapsto \left[xe^{u+v} + 2uv - 2, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x \right].$$

Pak $F(\mathbf{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí \mathbf{a} a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\mathbf{a}) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,2,0,0]} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, 2]$ a V obsahující $[0, 0]$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje právě jedno $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in$

V splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x, y)$ a $v(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Derivujeme-li nyní vztahy

$$\begin{aligned}xe^{u+v} + 2uv - 2 &= 0 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x &= 0\end{aligned}\tag{11.32}$$

podle x , dostáváme

$$\begin{aligned}e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_xv + 2uv_x &= 0 \\ ye^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_x(1+v) - uv_x) &= 0.\end{aligned}$$

Po dosazení $[x, y, u, v] = [1, 2, 0, 0]$ máme systém

$$\begin{aligned}u_x + v_x &= -1 \\ u_x - 2v_x &= 2,\end{aligned}$$

jehož řešením je $u_x(1, 2) = 0$ a $v_x(1, 2) = -1$.

Zderivováním (11.32) podle y dostaneme

$$\begin{aligned}xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_yv + 2uv_y &= 0 \\ e^{u-v} + ye^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_y(1+v) - uv_y) &= 0.\end{aligned}$$

Po dosazení máme rovnice

$$\begin{aligned}u_y + v_y &= 0 \\ y_y - 2v_y &= -1.\end{aligned}$$

Řešení je $u_y(1, 2) = -\frac{1}{3}$ a $v_y(1, 2) = \frac{1}{3}$.

Proto $u'(1, 2) = [0, -\frac{1}{3}]$ a $v'(1, 2) = [-1, \frac{1}{3}]$. ♣

11.8.33. Příklad. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$, $t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1, -1) = 2$, $t(1, -1) = 0$.

Spočtěte $z''(1, -1)$.

Řešení. Uvažujme bod $\mathbf{a} = [1, -1, 2, 0]$ a funkci

$$F: [x, y, z, t] \mapsto \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3, x + y + z - t - 2 \right].$$

Pak $F(\mathbf{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na \mathbb{R}^4 a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(\mathbf{a}) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Big|_{[x,y,z,t]=[1,-1,2,0]} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, -1]$ a V obsahující $[2, 0]$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje právě jedno $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in V$ splňující $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $z(x, y)$ a $t(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Derivujeme-li nyní rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0 \end{aligned}$$

podle x , máme

$$\begin{aligned} 2x - z z_x - 3t^2 t_x &= 0 \\ 1 + z_x - t_x &= 0. \end{aligned} \tag{11.33}$$

Po dosazení $[x, y, z, t] = [1, -1, 2, 0]$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2z_z &= 0 \\ z_x - t_x &= -1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $z_x(1, -1) = 1$ a $t_x(1, -1) = 2$.

Zderivováním podle y dostáváme

$$\begin{aligned} 2y - z z_y - 3t^2 t_y &= 0 \\ 1 + z_y - t_y &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme $z_y(1, -1) = -1$, $t_y(1, -1) = 0$.

Obdržené vztahy znovu zderivujeme podle x , y a (11.33) podle y a dostaneme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - z z_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0 \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - z z_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0 \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} -z_y z_x - z z_{xy} - 6t t_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení vyjde $z_{xx}(1, -1) = t_{xx}(1, -1) = \frac{1}{2}$, $z_{yy}(1, -1) = t_{yy}(1, -1) = \frac{1}{2}$ a $z_{xy}(1, -1) = t_{xy}(1, -1) = \frac{1}{2}$. Tedy

$$z''(1, -1): [h_1, h_2] \mapsto \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2.$$

♣

11.8.34. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3$$

definují na jistém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ třídy C^∞ , které splňují $u(3, 3) = 2$, $v(3, 3) = 1$. Spočítej $z_{xy}(3, 3)$, pokud $z = 2uv$.

Řešení. Uvažujme bod $\mathbf{a} = [3, 3, 2, 1]$ a funkci

$$F: [x, y, u, v] \mapsto [x - y - v^2, y - u^2 + v^3].$$

Pak $F(\mathbf{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na \mathbb{R}^4 a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\mathbf{a}) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[3,3,2,1]} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[3, 3]$ a V obsahující $[2, 1]$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje právě jedno $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in V$ splňující $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x, y)$ a $v(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Vzhledem k tomu, že

$$z_{xy} = 2(u_{xy}v + u_xv_y + u_yv_x + uv_{xy}), \quad (11.34)$$

potřebujeme vypočítat jednotlivé derivace u a v . K tomuto účelu derivujeme rovnice

$$\begin{aligned} u + v^2 &= x \\ u^2 - v^3 &= y \end{aligned}$$

podle x a podle y . Dostaneme tak systémy

$$\begin{aligned} u_x + 2vv_x &= 1 \\ 2uu_x - 3v^2v_x &= 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} u_y + 2vv_y &= 0 \\ 2uu_y - 3v^2v_y &= 1. \end{aligned}$$

Po dosazení máme

$$u_x(3, 3) = \frac{3}{11}, v_x(3, 3) = \frac{4}{11}, u_y(3, 3) = \frac{2}{11}, v_y(3, 3) = -\frac{1}{11}.$$

Dalším derivováním obdržíme soustavu

$$\begin{aligned}u_{yx} + 2v_x v_y + 2v v_{yx} &= 0 \\ 2u_x u_y + 2u u_{yx} - 6v v_x v_y - 3v^2 v_{yx} &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením po dosazení je

$$u_{yx}(3, 3) = \frac{224}{11^3}, \quad v_{yx}(3, 3) = -\frac{68}{11^3}.$$

Díky záměnnosti partiálních derivací můžeme dosadit do (11.34) a obdržet $z_{xy}(3, 3) = \frac{26}{121}$. ♣

11.8.35. Příklad. Necht' C^1 -funkce $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje rovnici

$$x u_y - y u_x = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje na \mathbb{R}^2 funkce $u^*(r, \alpha) = u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Výsledek použijte k nalezení nějakého nekonstantního řešení původní rovnice.

Řešení. Pomocí Věty 11.2.18 máme

$$\begin{aligned}u_r^* &= u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha \\ u_\alpha^* &= u_x (-r \sin \alpha) + u_y (r \cos \alpha).\end{aligned}$$

Vyjádříme u_x a u_y a dostáváme

$$\begin{aligned}-r u_x &= -r \cos \alpha u_r^* + \sin \alpha u_\alpha^* \\ r u_y &= r \sin \alpha u_r^* + \cos \alpha u_\alpha^*.\end{aligned}$$

Pro $r \neq 0$ tak platí

$$\begin{aligned}-u_x &= -\cos \alpha u_r^* + \frac{1}{r} \sin \alpha u_\alpha^* \\ u_y &= \sin \alpha u_r^* + \frac{1}{r} \cos \alpha u_\alpha^*.\end{aligned}$$

Tedy pro $r \neq 0$ platí

$$0 = x u_y - y u_x = r \cos \alpha u_x - r \sin \alpha u_y = r u_\alpha^*.$$

Tedy $u_\alpha^* = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Jelikož je u^* třídy C^1 , platí tato rovnost na \mathbb{R}^2 .

Nyní stačí zvolit funkci nezávislou na α , například $u^*(r, \alpha) = r^2$. Pak $u(x, y) = x^2 + y^2$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, je nekonstantní řešení zadané rovnice. ♣

11.8.36. Příklad. Necht' C^2 -funkce $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje funkce $u^*(r, \alpha) = u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ na množině $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 11.8.35 víme, že

$$\partial_1 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \cos \alpha u_r^*(r, \alpha) - \frac{1}{r} \sin \alpha u_\alpha^*(r, \alpha)$$

$$\partial_2 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \sin \alpha u_r^*(r, \alpha) + \frac{1}{r} \cos \alpha u_\alpha^*(r, \alpha).$$

Označíme $f(x, y) = \partial_1 u(x, y)$ a

$$f^*(r, \alpha) = f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \partial_1 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Dosažením do přechozích vztahů za $u = f$ dostáváme

$$\begin{aligned} \partial_{11} u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) &= \partial_1 (\partial_1 u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) = \partial_1 (f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) \\ &= \frac{\partial f^*}{\partial r}(r, \alpha) \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial f^*}{\partial \alpha}(r, \alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \alpha u_r^*(r, \alpha) - \frac{\sin \alpha}{r} u_\alpha^*(r, \alpha) \right) \\ &\quad - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\cos \alpha u_r^*(r, \alpha) - \frac{\sin \alpha}{r} u_\alpha^*(r, \alpha) \right) \\ &= \cos \alpha \left(\cos \alpha u_{rr}^* + \frac{\sin \alpha}{r^2} u_\alpha^* - \frac{\sin \alpha}{r} u_{\alpha r}^* \right) \\ &\quad - \frac{\sin \alpha}{r} \left(u_{r\alpha}^* \cos \alpha - \sin \alpha u_r^* - \frac{\sin \alpha}{r} u_{\alpha\alpha}^* - \frac{\cos \alpha}{r} u_\alpha^* \right) \\ &= u_{rr}^* \cos^2 \alpha - \frac{2}{r} u_{r\alpha}^* \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{r^2} u_{\alpha\alpha}^* \sin^2 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{r} u_r^* \sin^2 \alpha + \frac{2}{r^2} u_\alpha^* \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Obdobně vyjde

$$\begin{aligned} \partial_{22} u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) &= u_{rr}^* \sin^2 \alpha + \frac{2}{r} u_{r\alpha}^* \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{r^2} u_{\alpha\alpha}^* \cos^2 \alpha \\ &\quad - \frac{2}{r^2} u_\alpha^* \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{r} u_r^* \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Tedy dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{11} u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) + \partial_{22} u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \\ &= u_{rr}^* + \frac{1}{r^2} u_{\alpha\alpha}^* + \frac{1}{r} u_r^*. \end{aligned}$$

♣

11.8.37. Příklad.

11.8.38. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně omezená a uzavřená, tj. kompaktní (Věta 10.6.9). Funkce f je třídy C^∞ na \mathbb{R}^2 , a tedy nabývá na M svého minima a maxima. Máme $\text{Int } M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$. Bod podezřelý z extrému ležící v $\text{Int } M$ musí splňovat $\nabla f(x, y) = [0, 0]$ (vizte Větu 11.5.3), tj.

$$[2x - y, 2y - x] = [0, 0].$$

To nastává právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$.

Další body podezřelé z extrému budeme hledat na $\partial M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\}$. Hranici M můžeme popsat pomocí čtyř úseček, například

$$M_1 = \{[x, 1 - x]; x \in [0, 1]\}.$$

Pak funkce $g(x) = f(x, 1 - x)$ má tvar

$$g(x) = x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 = 3x^2 - 3x + 1, \quad x \in [0, 1],$$

která má body podezřelé z extrému v krajních bodech intervalu $[0, 1]$ a dále v bodě, kde $g'(x) = 0$, tj. v bodě $\frac{1}{2}$. Celkově dostáváme $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $[1, 0]$, $[0, 1]$ jako body, kde f může nabývat extrému na M .

Podobným způsobem popíšeme zbývající hrany ∂M a dostaneme další body

$$[-1, 0], [0, -1], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}].$$

Porovnáním hodnot funkce f ve všech podezřelých bodech zjistíme, že $\min f(M) = f(0, 0) = 0$ a

$$\max f(M) = f(1, 0) = f(0, 1) = f(-1, 0) = f(0, -1) = 1.$$

♣

11.8.39. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud $a > 0, b > 0$ a

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní, takže C^∞ funkce f na ní nabývá svých extrémů. Jelikož $\nabla f(x, y) = [\frac{1}{a}, \frac{1}{b}]$, žádný bod podezřelý z extrému neleží v $\text{Int } M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. Parametrizujeme ∂M jako dvě půlkružnice

$$M_1 = \{[x, \sqrt{1 - x^2}]; x \in [0, 1]\}, \quad M_2 = \{[x, -\sqrt{1 - x^2}]; x \in [0, 1]\}.$$

Pak funkce $f|_{M_1}$ má tvar

$$g(x) = f(x, \sqrt{1 - x^2}) = \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{b}, \quad x \in [0, 1].$$

Její derivace je rovna

$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{x}{b\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (0, 1).$$

Tedy pokud $g'(x) = 0$, pak $x = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Máme tedy podezřelé body $[\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Zahrneme ještě do úvahy krajní body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.

Při vyšetřování f na M_2 nám vyjdou body $[\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodech zjistíme, že

$$\begin{aligned} \min f(M) &= f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \\ \max f(M) &= f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}. \end{aligned}$$

♣

11.8.40. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \quad M = \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Množina M není omezená. Vzhledem k tomu, že

$$f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,$$

nabývá f svého minima $\min f(M) = -14$ v bodě $[-1, -2, 3]$. Jelikož

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, -2, 3) = \infty,$$

supremum f na M je rovno ∞ .

♣

11.8.41. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y, z) = (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Řešení. Funkce f je třídy C^∞ na \mathbb{R}^3 a $\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Ze spojitosti f na \mathbb{R}^3 plyne rovnost $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Vyšetříme nejprve body podezřelé z extrému, které leží v $\text{Int } \overline{M} = M$. V těchto bodech musí být $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{o}$, tj.

$$e^{-(x+2y+3z)} [1 - (x+y+z), 1 - 2(x+y+z), 1 - 3(x+y+z)] = \mathbf{o}.$$

Tato soustava však nemá řešení, a tedy v M žádný bod podezřelý z extrému neleží.

Uvažujme nyní jednu ze „stěn“ tvořící ∂M , například

$$M_1 = \{[x, y, 0]; x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Pak máme funkci $g(x, y) = f(x, y, 0) = (x+y)e^{-(x+2y)}$ na $N = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$. Jako výše dostaneme, že g nemá v $\text{Int } N$ podezřelý bod. Musíme tedy uvažovat $\partial N = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{[x, 0]; x \geq 0\}, \quad N_2 = \{[0, y]; y \geq 0\}.$$

Funkce $h(x) = g(x, 0) = xe^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, má bod podezřelý z extrému v 0 a v bodě, kde $h'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, tj. v $x = 1$. Dostáváme tak body

$$[0, 0, 0], [1, 0, 0].$$

V množině N_2 dostáváme další podezřelý bod $[0, \frac{1}{2}, 0]$. Tím máme vyřešenu otázku množiny N .

Zbývající stěny tvořící ∂M poskytnou bod $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Funkce f je zjevně nezáporná na \overline{M} , tedy

$$\in f(M) = \min f(\overline{M}) = f(0, 0, 0) = 0.$$

Zbývá dokázat, že

$$\sup f(M) = \max f(\overline{M}) = f(1, 0, 0) = e^{-1}.$$

K tomuto účelu uvažujme odhad

$$f(x, y, z) \leq \frac{x + y + z}{e^{x+y+z}}, \quad [x, y, z] \in \overline{M}. \quad (11.35)$$

Jelikož $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{e^r} = 0$, existuje $r > 1$ takové, že $\frac{r}{e^r} < e^{-1}$. Uvažujme množinu

$$K = \{[x, y, z] \in \overline{M}; x + y + z \leq r\}.$$

Pak K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f tedy nabývá na K svého maxima, přičemž z výpočtů výše a (11.35) plyne, že $\max f(K) = f(1, 0, 0)$. Díky (11.35) dále máme, že $\max f(K) = \max f(\overline{M})$. Tím je důkaz dokončen. ♣

11.8.42. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M , kde

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z, \quad M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy C^∞ na \mathbb{R}^3 . Proto nabývá na M svých extrémů. Pokud $x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ splňují $z_1 < z_2$, pak $f(x, y, z_1) < f(x, y, z_2)$. Tedy f nabývá své maximum na $M_1 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{1\}$ a minimum na $M_2 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{-1\}$.

K určení maxima tak vyšetřujeme maximum funkce $g(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1$ na množině $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Jelikož $g(x, y) = 2 \operatorname{dist}([x, y], 0)^2 + 1$, vidíme, že body v $[-1, 1] \times [-1, 1]$ nejvzdálenější od počátku jsou $[1, 1]$, $[-1, 1]$, $[-1, -1]$, $[1, -1]$.

Podobně postupujeme při hledání minima a dospějeme k bodu $[0, 0]$. Tedy

$$\min f(M) = f(0, 0, -1) = -1,$$

$$\max f(M) = f(1, 1, 1) = f(1, -1, 1) = f(-1, -1, 1) = f(-1, 1, 1) = 5. \quad \clubsuit$$

11.8.43. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M , kde

$$f(x, y) = x + y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená. Díky Příkladu 11.8.29 víme, že M je omezená a tedy je kompaktní. Funkce f je spojitá, a tedy nabývá na M svých extrémů. Použijeme Větu 11.5.8 pro $G = \mathbb{R}^2$, $m = 1$ a $g(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Platí

$$\nabla g(x, y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x),$$

a tedy $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$. Tím jsme získali podezřelý bod z extrému prvního druhu. Protože $\nabla f(x, y) = (1, 1)$, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + \lambda(3x^2 - 2y) &= 0 \\ 1 + \lambda(3y^2 - 2x) &= 0 \\ x^3 + y^3 - 2xy &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že $\lambda \neq 0$. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$3x^2 - 3y^2 = 2y - 2x,$$

tj.

$$(x - y)(3(x + y) + 2) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze body v prvním kvadrantu, plyne odtud $y = x$. Po dosazení do třetí rovnice obdržíme

$$x = y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = y = 1.$$

Tedy

$$\max f(M) = f(1, 1) = 2, \quad \min f(M) = f(0, 0) = 0.$$

♣

11.8.44. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = xyz, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Použijeme Větu 11.5.8 pro funkci f a vazební funkce $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x, y, z) = x + y + z$. Jelikož

$$\nabla g_1(x, y, z) = 2[x, y, z], \quad \nabla g_2(x, y, z) = [1, 1, 1],$$

jsou vektory $[x, y, z]$ a $[1, 1, 1]$ lineárně závislé právě tehdy, když $x = y = z$. Takový bod však splňuje rovnice $g_1(x, x, x) = 3x^2 - 1 = 0$ a $g_2(x, x, x) = 3x = 0$, což nelze.

Jelikož $\nabla f(x, y, z) = [yz, xz, xy]$, řešíme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 &= 0 \\ xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 &= 0 \\ xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$-z(x - y) + 2\lambda_1(x - y) = 0.$$

Odtud plyne, že musí být $x = y$ nebo $z = 2\lambda_1$. Podobně odečtením třetí rovnice od druhé obdržíme

$$-x(y - z) + 2\lambda_1(y - z) = 0.$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Dostáváme proto, že musí být buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na případ $x = y$. Z páté rovnice máme $z = -2x$, což po dosazení do čtvrté rovnice dá $6x^2 = 1$. K bodům $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ dopočítáme y a z . Případy $y = z$ a $z = x$ pak vyřešíme obdobně. Obdržíme tak tyto podezřelé body:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right], \left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right], \left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right], \\ & \left[\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right]. \end{aligned}$$

Výpočtem hodnot f v jednotlivých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodech z prvního řádku a minima v bodech druhého řádku. ♣

11.8.45. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$.

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nabývá tak na M svých extrémů. Povšimneme si, že bod $[x, y, z] \in M$ splňuje $x \geq 0$ a zároveň pro něj platí $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Označme $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Pak lze M popsat jako

$$\{[a, y, z] \in \mathbb{R}^3; a = y^2 + z^2\}.$$

Tedy extremalizujeme funkci

$$g(y, z) = f(a, y, z) = a^2 + 2az + y^2 + z$$

na kružnici

$$N = \{[y, z] \in \mathbb{R}^2; a = y^2 + z^2\}.$$

Na tuto úlohu použijeme Větu 11.5.8. Vazební podmínka $g(y, z) = y^2 + z^2 - a$ má gradient roven $\nabla g(y, z) = [2y, 2z]$, který je roven $\mathbf{0}$ pouze v počátku, což však není prvek N . Musíme tedy vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 2y + \lambda 2y &= 0 \\ 2a + 1 + \lambda 2z &= 0 \\ y^2 + z^2 &= a. \end{aligned}$$

Z první rovnice odvodíme $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. Pokud $y = 0$, z třetí rovnice máme $z = \pm\sqrt{a}$. Pokud $\lambda = -1$, druhá rovnice implikuje $z = a + \frac{1}{2}$. Dosadíme-li do třetí rovnice, máme

$$y^2 = a - z^2 = a - \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = -a^2 - \frac{1}{4} < 0,$$

což je nemožné.

Dostali jsem tedy dva podezřelé body

$$[a, 0, \sqrt{a}], \quad [a, 0, -\sqrt{a}].$$

Dosazením zjistíme, že v prvním bodě nabývá f maxima a v druhém minima. ♣

11.8.46. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud $f(x, y, z) = 10z + x - y$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$.

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Rozdělíme M na množiny

$$M_1 = \text{Int } M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y > 0\},$$

$$M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y > 0\},$$

$$M_3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y = 0\},$$

$$M_4 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

Jelikož $\nabla f = [1, -1, 10]$, nemá dle Věty 11.5.3 funkce f v M_1 bod podezřelý z extrému.

Použijeme nyní Větu 11.5.8 pro

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + y \geq 0\}$$

a vazební funkci $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Jelikož $\nabla g(x, y, z) = [2x, 2y, 2z]$, je ∇g nenulový na množině $\{x \in G; g(x) = 0\}$. Musíme tak vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0 \\ -1 - 2\lambda y &= 0 \\ 10 - 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Zjevně platí $\lambda \neq 0$. Dostáváme tak

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{-1}{2\lambda}, \quad z = \frac{5}{\lambda}.$$

Tedy

$$x + y = 0,$$

což znamená, že $[x, y, z] \notin G$. Nemáme tak žádný podezřelý bod ležící v množině M_2 .

Uvažujme nyní množinu M_3 . Pro body $[x, y, z] \in M_3$ platí $y = -x$, tj. $2x^2 + z^2 < 1$. Extremalizujeme tak funkci

$$h(x, z) = 10z + 2x$$

na množině

$$N = \{[x, z] \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + z^2 < 1\}.$$

Jelikož $\nabla h = [2, 10]$, nemá h v N bod podezřelý z extrému.

Zbývá nám tak množina M_4 . Použijeme-li rovnost $y = -x$, dostáváme extremalizaci funkce

$$h(x, z) = 10z + 2x$$

na množině

$$N = \{[x, z] \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + z^2 = 1\}.$$

Evidentně neexistují v N podezřelé body prvního druhu. Řešíme tak soustavu

$$\begin{aligned} 2 - \lambda 4x &= 0 \\ 10 - \lambda 2z &= 0 \\ 2x^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Z první a druhé rovnice máme $\lambda \neq 0$, a tedy $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{5}{\lambda}$. Po dosazení do třetí rovnice dostáváme

$$\lambda^2 = \frac{51}{2}.$$

Máme tak body

$$\left[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}} \right], \left[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}} \right].$$

V prvním z nich má f maximum o hodnotě $\sqrt{102}$, v druhém minimum o hodnotě $-\sqrt{102}$. ♣

11.8.47. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně uzavřená a f třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Množina M je též omezená. Vskutku, uvažujme libovolné $\mathbf{a} = [x, y] \in M$. Zapišme ho v polárních souřadnicích jako $[r \cos \alpha, r \sin \alpha]$, kde $r \geq 0$ a $\alpha \in [0, 2\pi)$. Pak \mathbf{a} splňuje rovnici

$$0 = r^4 - 2r^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Uvažujeme-li $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, máme rovnost

$$r^2 = 2 \cos(2\alpha).$$

Tedy $r \leq \sqrt{2}$. Proto je množina M obsažena v kruhu o středu \mathbf{o} a poloměru $\sqrt{2}$.

Funkce f tak nabývá na M svých extrémů. Pro vazební funkci $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ platí

$$\nabla g(x, y) = [4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 + 1)] = \mathbf{o}$$

právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$.

Dále řešíme soustavu

$$\begin{aligned} \lambda 4x(x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ 1 - \lambda 4y(x^2 + y^2 + 1) &= 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned}$$

První dvě rovnice implikují $\lambda \neq 0$. Pokud $x = 0$, pak ze třetí rovnice plyne $y = 0$. Pak však neplatí druhá rovnice. Tedy $x \neq 0$, což dává $x^2 + y^2 = 1$. Ze třetí rovnice tak máme $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, což spolu s rovností $x^2 + y^2 = 1$ dává body

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right].$$

Tedy

$$\min f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

a

$$\max f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

11.8.48. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M , pokud

$$f(x, y) = x^2 + y, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}.$$

Řešení. Nejprve ověříme, že (zřejmě) uzavřená množina M je omezená. Necht' $\{[x_n, y_n]\}$ je libovolná posloupnost bodů v M splňující $\|[x_n, y_n]\| \rightarrow \infty$. Pokud $y_{n_k} \rightarrow \infty$ pro nějakou podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ (připomeňme, že $y_n \geq 0$ dle definice M), platí

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \geq 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \rightarrow \infty,$$

což je zřejmý spor. Tedy $\{y_n\}$ je omezená posloupnost. Pak je ale i $\{x_n\}$ omezená, neboť v případě nějaké podposloupnosti $\{x_{n_k}\}$ splňující $|x_{n_k}| \rightarrow \infty$ máme

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \rightarrow \infty,$$

tedy opět spor. Proto je M omezená množina.

Rozdělíme M na množiny

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y > 0\},$$

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y = 0\} = \{[0, 0]\}.$$

Pro množinu M_1 použijeme Větu 11.5.8, kde

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y > 0\}.$$

Snadno zjistíme, že podezřelé body prvního druhu neexistují. Řešíme tak soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda 2x &= 0 \\ 1 + \lambda(12y^2 - 4) &= 0 \\ 4y^3 - 4y + x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pokud $x = 0$, máme z třetí rovnice $y = 1$, tj. bod $[0, 1]$. Pokud $x \neq 0$, platí $\lambda = -1$. Tedy druhá rovnice dává $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Z třetí rovnice pak dopočteme body

$$\left[\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \right], \quad \left[-\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \right].$$

Maximum nabývá f v těchto bodech, minimum pak v $[0, 0]$. ♣

11.8.49. Příklad. Nalezněte $C^2(\mathbb{R}^2)$ -funkci $z(x, y)$ splňující

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = x + y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

přičemž pro ni platí $z(x, 0) = x$ a $z(0, y) = y^2$.

Řešení. Funkce

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_0(y),$$

kde φ_0 je spojitě diferencovatelná funkce, zjevně splňuje $u_x = x + y$. Tedy

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + \varphi(y) + \psi(x),$$

kde φ je primitivní k φ_0 , $\varphi(0) = 0$ a ψ je třídy C^1 , splňuje $z_y = u$. Tedy $z_{yx} = x + y$.
Jelikož

$$x = z(x, 0) = \psi(x)$$

a

$$y^2 = z(0, y) = \varphi(y),$$

máme

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + y^2 + x$$
♣

11.8.50. Příklad. Rozviňte funkci $f(x, y) = x^y$ do Taylorova polynomu řádu 2 na okolí bodu $[1, 1]$.

Řešení. Počítejme pro $[x, y] \in (0, \infty)^2$:

$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \log x$$

a dále

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = (1+y \log x)x^{y-1}, \quad f_{yy} = x^y \log^2 x.$$

Tedy $f(1, 1) = 1$, $\nabla f(1, 1) = [1, 0]$ a

$$f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto

$$T_2^{f,[1,1]}(x, y) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1).$$

♣

11.8.51. Příklad. Vyšetřete extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \log x - 10 \log y, \quad [x, y] \in (0, \infty)^2.$$

Řešení. Máme

$$\nabla f(x, y) = \left[2x + y - \frac{4}{x}, 2y + x - \frac{10}{y} \right].$$

Soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y &= \frac{4}{x} \\ x + 2y &= \frac{10}{y} \end{aligned}$$

upravíme na soustavu

$$\begin{aligned} 2x^2 + yx &= 4 \\ xy + 2y^2 &= 10. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic dostáváme $y^2 - x^2 = 3$, tj. $y = \sqrt{3 + x^2}$. Po dosazení do druhé rovnice máme

$$2(3 + x^2) + x\sqrt{3 + x^2} = 10.$$

Řešením této rovnice je bod $x = 1$, a tedy $y = 2$.

Dále je

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$f''(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Z pozitivní definitnosti této matice nyní vyplývá, že f má v $[1, 2]$ lokální minimum o hodnotě $m = 7 - 10 \log 2$. Ukážeme, že se jedná o globální minimum.

Jelikož

$$f(x, y) \geq x \left(x - 4 \frac{\log x}{x} \right) + y \left(y - 10 \frac{\log y}{y} \right),$$

existuje $c_1 > 0$ takové, že pokud $\max\{x, y\} \geq c_1$, pak $f(x, y) > m$. Dále platí

$$f(x, y) > -4 \log x - 10 \log y,$$

z tedy existuje $c_2 \in (0, c_1)$ takové, že $f(x, y) > m$ kdykoliv $0 < \min\{x, y\} < c_2$. Tedy $f(x, y) > m$, kdykoliv $[x, y] \in (0, \infty)^2 \setminus ((c_2, c_1) \times (c_2, c_1))$. Na kompaktní množině $[c_2, c_1] \times [c_2, c_1]$ nabývá f svého minima. Vzhledem k předchozím úvahám je bod $[1, 2]$ jediný kandidát na toto minimum.

Tedy f má vskutku v $[1, 2]$ globální minimum. Zjevně také platí $\sup f(\mathcal{D}(f)) = \infty$. ♣

11.8.52. Příklad. Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Jelikož

$$\nabla f(x, y, z) = [3x^2 - 3y - 3z, 3y^2 - 3x - 3z, 3z^2 - 3x - 3y],$$

řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 &= y + z \\ y^2 &= x + z \\ z^2 &= x + y. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$x^2 - y^2 = y - x.$$

Tedy $x = y$ nebo $x + y = -1$. V prvním případě mám ze třetí rovnice $y = \frac{z^2}{2}$, což po dosazení do druhé rovnice dává

$$\frac{z^4}{4} = \frac{z^2}{2} + z.$$

Pokud $z = 0$, máme podezřelý bod $[0, 0, 0]$. V opačném případě platí

$$0 = z^3 - 2z - 4 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2),$$

tj. $z = 2$ a máme bod $[2, 2, 2]$. Pokud $x + y = -1$, máme ve třetí rovnici vztah $z^2 = -1$, což nelze. Tedy body $[0, 0, 0]$ a $[2, 2, 2]$ jsou jediné podezřelé z lokálního extrému.

Jelikož

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 6z \end{pmatrix},$$

platí

$$f''(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

První matici upravíme pomocí symetrických elementárních úprav na matici

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, a tedy f nemá v $[0, 0, 0]$ lokální extrém. Druhou matici převedeme na

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & \frac{45}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{54}{5} \end{pmatrix},$$

což je pozitivně definitní matice. Funkce f má tak v $[2, 2, 2]$ lokální minimum. ♣

11.8.53. Příklad. Necht $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R}$, ϱ a σ jsou eukleidovské metriky na \mathbb{R}^2 a τ je eukleidovská metrika na \mathbb{R} . Necht zobrazení $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definováno předpisem

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{pokud buď } x \neq 0 \text{ nebo } y \neq 0; \\ 0, & \text{pokud } x = y = 0. \end{cases}$$

(a) Necht $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x, kx) = 0.$$

(b) Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x, x^2) = \frac{1}{2}.$$

11.9. Početní příklady k metrickým prostorům

11.9.1. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}.$$

Řešení. Víme, že polynomy jsou spojité funkce, a proto je $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ spojitá funkce z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R} . Zadaná množina se dá zapsat jako

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in [36, \infty)\} = f^{-1}([36, \infty)).$$

Z Příkladu 10.3.2(a) víme, že interval $[36, \infty)$ je uzavřená množina v \mathbb{R} . Podle Věty 10.4.6 je tedy M uzavřená množina, neboť je to vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.

Zadaná množina je elipsa, a proto je omezená. Formálně můžeme například ze zadané nerovnosti usoudit $x^2 \leq 9x^2 + 4y^2 \leq 36$, a tedy $x \in [-6, 6]$. Podobně z nerovnosti $y^2 \leq 9x^2 + 4y^2 \leq 36$ odvodíme $y \in [-6, 6]$. Tedy $M \subset [-6, 6]^2 \subset B([0, 0], 10)$, což ukazuje omezenost M . ♣

11.9.2. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}.$$

Řešení. Funkce $f(x, y) = xy$ je polynom, a tedy spojitá funkce. Zadaná množina se dá napsat jako $M = f^{-1}((1, \infty))$. Množina $(1, \infty)$ je otevřená, a tedy podle Příkladu 10.3.8 je M otevřená jakožto vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení.

Pro $k \in \mathbb{N}, k > 1$, snadno vidíme, že $[k, k] \in M$, ale $\text{dist}([k, k], [0, 0]) \rightarrow \infty$. Zadaná množina není tedy obsažena v žádné kouli, a proto není omezená. ♣

11.9.3. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 + 10z = 0\}.$$

Řešení. Funkce $f(x, y, z) = x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 + 10z$ je polynom, a tedy spojitá funkce. Zadaná množina se dá napsat jako $M = f^{-1}(\{1\})$. Jednobodová množina $\{1\}$ je uzavřená, a tedy podle Věty 10.4.6 je M uzavřená jakožto vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení.

Zadanou rovnost si můžeme přepsat jako

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 50,$$

odkud snadno vidíme

$$|x + 3| \leq \sqrt{50}, |y - 4| \leq \sqrt{50} \text{ a } |z + 5| \leq \sqrt{50}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} M &\subset [-3 - \sqrt{50}, -3 + \sqrt{50}] \times [4 - \sqrt{50}, 4 + \sqrt{50}] \times [-5 - \sqrt{50}, -5 + \sqrt{50}] \\ &\subset B([0, 0, 0], 30) \end{aligned}$$

z čehož dostaneme omezenost M . ♣

11.9.4. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ a } x + y \geq 1\}.$$

Řešení. Zadefinujme si množiny

$$M_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \text{ a } M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y \geq 1\}.$$

Snadno vidíme, že $M = M_1 \cap M_2$. Funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ je spojitá, a tedy je $M_1 = f^{-1}([1, \infty))$ uzavřená množina podle Věty ????. Dále $g(x, y, z) = x + y$ je spojitá funkce, a tedy je $M_2 = g^{-1}([1, \infty))$ uzavřená množina podle Věty ????. Podle Věty ??? je tedy i $M = M_1 \cap M_2$ uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin. Z

$$M \subset M_1 = \overline{B([0, 0, 0], 1)} \subset B([0, 0, 0], 2)$$

snadno dostáváme omezenost M . ♣

11.9.5. Příklad. Vyšetřete otevřenost, uzavřenost a omezenost množiny

$$M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5 \text{ a } xy + xz + yz = 8\}.$$

Řešení. Zdefinujme si množiny

$$M_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5\} \text{ a } M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : xy + xz + yz = 8\}.$$

Snadno vidíme, že $M = M_1 \cap M_2$. Funkce $f(x, y, z) = x + y + z = 5$ je spojitá, a tedy je $M_1 = f^{-1}(\{5\})$ uzavřená množina podle Věty 1.1. Dále $g(x, y, z) = xy + xz + yz$ je spojitá funkce, a tedy je $M_2 = g^{-1}(\{8\})$ uzavřená množina podle Věty 1.1. Podle Věty 1.1 je tedy i $M = M_1 \cap M_2$ uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin.

Důkaz omezenosti této množiny je trochu složitější. Ze zadaných dvou rovností snadno usoudíme, že

$$9 = 25 - 16 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Zadaná M je tedy podmnožina sféry se středem v $[0, 0, 0]$ a poloměru 3. Odtud ihned vidíme, že $M \subset B([0, 0, 0], 4)$, odkud plyne omezenost M . ♣

Stejněměrná konvergence posloupností a řad funkcí

12.1. Stejněměrná konvergence posloupností funkcí

12.1.1. Definice. Necht M je množina, (Q, σ) je metrický prostor a $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q . Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje bodově** k f na M , jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Bodovou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f značíme symbolem $f_n \rightarrow f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje stejnoměrně** k f na M , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall n \geq n_0: \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Stejněměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f značíme symbolem $f_n \rightrightarrows f$.

12.1.2. (a) Bude užitečné si uvědomit negaci výroku, který definuje stejnoměrnou konvergenci. Necht $M, (Q, \sigma), f$ a f_n jsou jako výše. Potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **nekonverguje stejnoměrně** k f na M , jestliže

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists x \in M \exists n \geq n_0: \sigma(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon.$$

(b) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ bodově konverguje, pak je limitní funkce určena jednoznačně.

(c) Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na M , potom $f_n \rightarrow f$ na M .

12.1.3. Příklady. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f_n(x) = x^n$. Označme dále

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Dokažte, že potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově, avšak nikoli stejnoměrně k funkci f na intervalu $[0, 1]$.

(b) Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g_n(x) = \frac{1}{2^n} \sin(nx).$$

Označme dále $g(x) = 0$ pro $x \in [0, 1]$. Dokažte, že potom posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci g na intervalu $[0, 1]$.

Řešení. (a) Bodová konvergence plyne z Příkladu 2.3.35. Dokážeme, že tato konvergence není stejnoměrná na $[0, 1]$. Položme $x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |x_n^n - 0| = \frac{1}{2} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Položíme-li $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dostaneme z 12.1.2, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekongruje stejnoměrně k funkci f na intervalu $[0, 1]$.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Potom zřejmě pro každé $n \geq n_0$ platí $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, a tedy pro každé $x \in [0, 1]$ dostáváme $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$. Podle Definice 12.1.1 tedy posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci g na intervalu $[0, 1]$. ♣

12.1.4. Definice. Necht (M, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q . Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k f na M , jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na $B_\varrho(x, r)$. Lokálně stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$.

12.1.5. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladu 12.1.3(a) konverguje na intervalu $[0, 1)$ lokálně stejnoměrně k nulové funkci.

Řešení. Zvolme $x \in [0, 1)$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $[0, 1) \cap (x-r, x+r) \subset (0, 1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} (x+r)^n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $(x+r)^n < \varepsilon$. Necht $y \in [0, 1) \cap (x-r, x+r)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $y^n < (x+r)^n$, a tedy pro každé $n \geq n_0$, platí $|f_n(y) - 0| = y^n < \varepsilon$. Odtud a z Definice 12.1.1 plyne, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k nulové funkci na $[0, 1) \cap (x-r, x+r)$. Protože $B_\varrho(x, r) = [0, 1) \cap (x-r, x+r)$, podle Definice 12.1.4 posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k nulové funkci na intervalu $[0, 1)$. ♣

12.1.6. Věta (charakterizace stejnoměrné konvergence). Necht M je neprázdná množina, (Q, σ) je metrický prostor, $f_n : M \rightarrow Q, n \in \mathbb{N}$, a $f : M \rightarrow Q$. Potom $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$ na M právě tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ \sigma(f_n(x), f(x)); x \in M \} = 0.$$

Důkaz. \Rightarrow Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in M \forall n \geq n_0: \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \geq n_0$ platí

$$0 \leq \sup\{\sigma(f_n(x), f(x)); x \in M\} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

\Leftarrow Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\sup\{\sigma(f_n(x), f(x)); x \in M\} < \varepsilon.$$

Potom zřejmě pro každá $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí $\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, a tedy $f_n \Rightarrow f$ na M . ■

12.1.7. Věta (Moore--Osgood). Necht (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$, f, f_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce z P do \mathbb{R} a platí

(a) existuje $r > 0$ takové, že $f_n \Rightarrow f$ na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$,

(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $a_n \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$.

Potom existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \forall n \geq n_0: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom platí

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Odtud vyplývá, že platí

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0: |a_n - a_m| \leq \varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu--Cauchyovu podmínku. Podle Věty 2.4.26 je tato posloupnost konvergentní, tedy existuje $a \in \mathbb{R}$ splňující $\lim a_n = a$.

Dokážeme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ a zároveň

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}: |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

K tomuto n_0 nyní nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}: |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < 3\varepsilon.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení. ■

12.1.8. Věta. Necht (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f_n: P \rightarrow Q$ jsou spojitá zobrazení, $n \in \mathbb{N}$, $f: P \rightarrow Q$ je zobrazení a $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$ na P . Potom f je spojitý.

Důkaz. Zvolme $a \in P$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(a, r)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(a, r): \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) < \varepsilon.$$

K tomuto n_0 dále nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(a, \delta): \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\sigma(f(x), f(a)) \leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + \sigma(f_{n_0}(a), f(a)) < 3\varepsilon.$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě a . Protože bod a byl zvolen libovolně, je f spojitá na P . ■

12.1.9. Rovnost $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ovšem neplatí obecně. Uvažujme funkce $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ a bod $a = 1$. Zřejmě platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$. Předpoklad lokálně stejnoměrné konvergence ve Věťách 12.1.7 a 12.1.8 tedy nelze vynechat.

Z uvedených vět je zřejmé, že lokálně stejnoměrná konvergence je velice důležitým pojmem. Ověřit lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí z definice může však být velice obtížné. V případě, kdy definičním oborem funkcí je otevřený interval, existuje snazší způsob ověření stejnoměrné konvergence, jak vyplývá z následující věty.

12.1.10. Věta (charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$, kde $c, d \in (a, b)$, $c < d$.

Důkaz. \Rightarrow Označme f bodovou limitu posloupnosti f_n na (a, b) . Předpokládejme, že existují $c, d \in (a, b)$ taková, že $c < d$, $[c, d] \subset (a, b)$ a $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $[c, d]$. Podle 12.1.2 nalezneme $\varepsilon > 0$, rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ a posloupnost $\{x_k\}$ prvků $[c, d]$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}: |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon.$$

Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty nalezneme rostoucí posloupnost $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $x^* \in [c, d]$ splňující $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x^*$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x^*, r)$. K tomuto r nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in B(x^*, r): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nyní nalezneme $j \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_j} \geq n_0$ a $x_{k_j} \in B(x^*, r)$. Potom

$$\varepsilon \leq |f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| < \varepsilon,$$

což je spor.

\Leftarrow Pro $x_0 \in (a, b)$ nalezneme $r > 0$ takové, že $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $(x_0 - r, x_0 + r)$. ■

12.1.11. Definice. Necht M je množina a $g_n: M \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{g_n\}$ je **stejněměrně cauchyovská** na M , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \forall x \in M : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

12.1.12. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci). Necht M je množina a $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když je stejnoměrně cauchyovská na M .

Důkaz. \Rightarrow Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zvolme $m, n \geq n_0$. Potom

$$\forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon,$$

a tedy je posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně cauchyovská na M .

\Leftarrow Zvolme $x \in M$. Potom je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v \mathbb{R} , a má tedy vlastní limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \geq n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Protože $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$, plyne odtud, že

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

a tedy $f_n \Rightarrow f$ na M . ■

12.1.13. Věta (stejněměrná konvergence derivací). Necht (a, b) je neprázdný omezený interval a $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Necht

- (a) pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f_n vlastní derivaci na (a, b) ,
- (b) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,
- (c) $\{f'_n\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b) .

Potom existuje $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $f_n \Rightarrow f$ na (a, b) , f má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f'_n \Rightarrow f'$ na (a, b) .

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \geq n_0 \forall x \in (a, b) : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon \quad (12.1)$$

(to je možné díky Větě 12.1.12) a zároveň

$$\forall m, n \geq n_0 : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Zvolme $x \in (a, b)$. Potom

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Užitím Lagrangeovy věty pro funkci $f_n - f_m$ na intervalu $[x, x_0]$, nebo $[x_0, x]$ nalezneme $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \cdot |x - x_0|.$$

Potom dle (12.1) platí $|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \varepsilon$. Navíc platí $|x - x_0| \leq b - a$, neboť (a, b) je omezený interval. Kombinací odhadů dostaneme

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon(b - a) + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1).$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je tedy stejnoměrně Cauchyovská na (a, b) , a tudíž je podle Věty 12.1.12 stejnoměrně konvergentní na (a, b) . Její limitu označíme f .

Zbývá dokázat, že f má vlastní derivaci na (a, b) a $f'_n \rightrightarrows f'$ na (a, b) . Protože f'_n konverguje stejnoměrně na (a, b) , stačí dokázat, že $f'_n \rightarrow f'$ na (a, b) . Zvolme $z \in (a, b)$ a $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci φ_n předpisem

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}, \quad x \in (a, b) \setminus \{z\}. \quad (12.2)$$

Zvolme $x \in (a, b) \setminus \{z\}$ a $m, n \geq n_0$. Podle Lagrangeovy věty existuje η ležící mezi x a z takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f'_n(\eta) - f'_m(\eta)| \cdot |x - z|.$$

Tedy podle (12.2) a (12.1) platí

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f'_n(\eta) - f'_m(\eta)| < \varepsilon.$$

Protože x bylo zvoleno libovolně, je posloupnost $\{\varphi_n\}$ stejnoměrně Cauchyovská, a tedy podle Věty 12.1.12 také stejnoměrně konvergentní na $(a, b) \setminus \{z\}$. Podle Mooreovy-Osgoodovy věty (Věta 12.1.7) tudíž existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow z} \varphi_n(x)$ a $\lim_{x \rightarrow z} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ a jsou si rovny. Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow z} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z)$$

a

$$\lim_{x \rightarrow z} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z),$$

existuje vlastní $f'(z)$ a platí $f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z)$. Protože z bylo zvoleno libovolně, plyne odtud tvrzení věty. ■

12.1.14. Důležitým předpokladem Věty 12.1.13 je omezenost intervalu (a, b) . Bez tohoto předpokladu věta neplatí. Pomocí Věty 12.1.10 však lze zformulovat variantu Věty 12.1.13 pro libovolný otevřený interval a lokálně stejnoměrnou konvergenci.

12.1.15. Věta (záměna limity a Newtonova integrálu). Necht' $f_n \rightrightarrows f$ na neprázdném omezeném intervalu (a, b) a $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Zvolme $x_0 \in (a, b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje funkce $F_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $F'_n = f_n$ na (a, b) a $F_n(x_0) = 0$. Potom podle Věty 12.1.13 je posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na (a, b) . Označme $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$,

$x \in (a, b)$. Podle Věty 12.1.13 potom platí $F' = f$ na (a, b) . Podle Mooreovy-Osgoodovy věty platí

$$\lim_{x \rightarrow a+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a+} F_n(x)$$

a

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b-} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow b-} F_n(x),$$

přičemž obě tyto limity jsou vlastní. Celkem tedy dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow b-} F_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a+} F_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. ■

12.1.16. Necht M je množina a $f, g, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou funkce z M do \mathbb{R} . Píšeme $f \leq g$ na M , jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in M$. Speciálně symbolem $f \geq 0$ na M značíme, že f je nezáporná funkce na M . Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ je **neklesající** na M , jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \leq f_{n+1}$ na M . Obdobně definujeme posloupnost funkcí **nerostoucí, klesající, rostoucí, monotónní a ryze monotónní** na M .

12.1.17. Věta (Dini). Necht (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých zobrazení P do \mathbb{R} . Necht $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité a $f_n \rightarrow f$ na P . Potom $f_n \rightrightarrows f$ na P .

Důkaz. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n - f$ spojité, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in P$, jinak bychom uvažovali posloupnost $\{f_n - f\}$. Dále můžeme předpokládat, že na $\{f_n\}$ je nerostoucí, neboť v opačném případě bychom uvažovali posloupnost $\{-f_n\}$. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Nalezneme $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ prvků P takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x_n) \geq \varepsilon$. Díky kompaktnosti P nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x^* \in P$ takové, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x^*$. Protože $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x^*) = 0$, nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $f_{n_m}(x^*) < \varepsilon$. Díky spojitosti f_{n_m} nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(x^*, \delta)$ platí $f_{n_m}(x) < \varepsilon$. Protože $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x^*$, nalezneme $l \geq m$ takové, že $x_{n_l} \in B(x^*, \delta)$. Posloupnost $\{f_{n_k}(x_{n_l})\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí, a tedy

$$\varepsilon \leq f_{n_l}(x_{n_l}) \leq f_{n_m}(x_{n_l}) < \varepsilon,$$

což je spor. ■

12.1.18. Definice. Necht' M je množina a $A \subset M$. Pak **charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A: M \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A; \\ 0 & \text{pro } x \in M \setminus A. \end{cases}$$

12.1.19. Příklad. Dokažte, že jestliže vynecháme kterýkoli z předpokladů Diniovy věty (kompaktnost množiny K , spojitost funkcí $\{f_n\}$, spojitost funkce f nebo monotonii posloupnosti $\{f_n\}$), pak věta neplatí.

Řešení. (a) Položme $K = [0, 1)$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1)$. Potom K není kompaktní. Posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Zřejmě jsou tedy všechny funkce f_n i funkce f spojité na K . Posloupnost $\{f_n\}$ ale nekonverguje k f stejnoměrně. To lze dokázat obdobně jako v Příkladu 12.1.3(a).

(b) Položme $K = [0, 1]$ a $f_n(x) = \chi_{(0, \frac{1}{n})}(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$. Potom K je kompaktní, posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Funkce f je tedy zřejmě spojitá na $[0, 1]$, ale funkce f_n spojité nejsou. Posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{2n}$ platí $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$ a stačí použít 12.1.2.

(c) Položme $K = [0, 1]$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$. Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K , posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou je funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Funkce f tedy není spojitá na $[0, 1]$. Z Příkladu 12.1.3(a) víme, že posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně.

(d) Položme $K = [0, 1]$ a definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2 - 2nx, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K a bodovou limitou f posloupnosti $\{f_n\}$ je nulová funkce, která je zřejmě spojitá. Posloupnost $\{f_n\}$ ovšem není monotónní na K a nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{n}$ platí $f_n(x_n) = 1$. ♣

12.2. Weierstrassova věta

12.2.1. Definice. Necht L je lineární zobrazení z $(\mathcal{C}([0, 1]), \text{sup})$ do $(\mathcal{C}([0, 1]), \text{sup})$. Řekneme, že L je **pozitivní operátor**, jestliže pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ splňující $f \geq 0$ na $[0, 1]$ platí $L(f) \geq 0$ na $[0, 1]$.

12.2.2. Je-li L pozitivní operátor na $\mathcal{C}([0, 1])$, pak pro každé funkce $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ splňující $f \leq g$ na $[0, 1]$ platí $L(f) \leq L(g)$ na $[0, 1]$. To plyne z linearitý operátoru L , neboť

$$0 \leq L(g - f) = L(g) - L(f).$$

12.2.3. Věta (Korovkinova věta o třech funkcích).¹ Necht $\{L_n\}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů z $\mathcal{C}([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$. Potom $L_n f \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ právě tehdy, když $L_n(g_j) \rightrightarrows (g_j)$ na $[0, 1]$ pro každou ze tří funkcí $g_j(x) = x^j$, $x \in [0, 1]$, $j = 0, 1, 2$.

Důkaz. Zvolme $f \in C([0, 1])$ a $\varepsilon > 0$. Potom je f omezená a stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$. Nalezneme tedy $M > 0$ takové, že pro každé $x \in [0, 1]$ platí $|f(x)| \leq M$, a $\delta \in (0, 1)$ takové, že pro každé $x, y \in [0, 1]$ splňující $|x - y| < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. K δ a ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, každé $x \in [0, 1]$ a každé $j \in \{0, 1, 2\}$ platí

$$|L_n(g_j)(x) - g_j(x)| < \varepsilon \delta^2.$$

Zvolme $y \in [0, 1]$. Potom pro každé $x \in [0, 1]$ nastane buď $|x - y| < \delta$ a potom $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, nebo $|x - y| \geq \delta$ a potom

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M \leq \frac{2M(x - y)^2}{\delta^2}.$$

V každém případě, tedy pro každé $x \in [0, 1]$, platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2M(x - y)^2}{\delta^2}.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$f(x) \leq f(y) + \varepsilon + \frac{2M(x - y)^2}{\delta^2}.$$

Označme

$$h(x) = f(y) + \varepsilon + \frac{2M(x - y)^2}{\delta^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Pak pro speciální volbu $x = y$ dostáváme

$$h(y) = f(y) + \varepsilon.$$

Z definice funkcí g_0 , g_1 a g_2 plyne, že

$$h = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2,$$

¹Pavel Petrovič Korovkin (1913-1985)

kde

$$c_0 = f(y) + \varepsilon + \frac{2My^2}{\delta^2}, \quad c_1 = -\frac{4My}{\delta^2}, \quad c_2 = \frac{2M}{\delta^2}.$$

Navíc platí $f \leq h$ na $[0, 1]$, a tedy díky pozitivitě operátorů $\{L_n\}$ také

$$L_n(f) \leq L_n(h) \quad \text{na } [0, 1] \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$\begin{aligned} |L_n(h)(x) - h(x)| &\leq |c_0| |L_n(g_0)(x) - g_0(x)| + \\ &+ |c_1| |L_n(g_1)(x) - g_1(x)| + |c_2| |L_n(g_2)(x) - g_2(x)|. \end{aligned}$$

Protože $y \in [0, 1]$, platí

$$|c_0| \leq M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \quad \text{a} \quad |c_1| \leq \frac{4M}{\delta^2}.$$

Tedy pro každé $x \in [0, 1]$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned} |L_n(h)(x) - h(x)| &\leq \left(M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\right) |L_n(g_0)(x) - g_0(x)| + \\ &+ \frac{4M}{\delta^2} |L_n(g_1)(x) - g_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2} |L_n(g_2)(x) - g_2(x)| \\ &\leq \varepsilon \delta^2 \left(M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} + \frac{4M}{\delta^2} + \frac{2M}{\delta^2}\right) = \varepsilon (M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M), \end{aligned}$$

a tudíž

$$L_n(h)(x) \leq h(x) + \varepsilon (M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M).$$

Pro speciální volbu $x = y$ dostáváme

$$L_n(f)(y) \leq L_n(h)(y) \leq h(y) + \varepsilon (M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M),$$

a tedy

$$L_n(f)(y) \leq f(y) + \varepsilon + \varepsilon (M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M) = f(y) + \varepsilon (M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1).$$

Obdobně lze dokázat, že

$$L_n(f)(y) \geq f(y) - \varepsilon (M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1).$$

Protože y bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\sup_{y \in [0, 1]} |L_n(f)(y) - f(y)| \leq \varepsilon (M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1),$$

tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in [0, 1]} |L_n(f)(y) - f(y)| = 0,$$

což podle Věty 12.1.6 znamená, že

$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } [0, 1].$$

Tvrzení věty je dokázáno. ■

12.2.4. Definice. Necht' $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom polynom

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Bernsteinovým polynomem** funkce f stupně n .

12.2.5. Poznámka. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazení $B_n: \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$, definované předpisem $B_n: f \mapsto B_n f$ přiřazující každé funkci $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ „její“ Bernsteinův polynom stupně n pozitivním lineárním operátorem na $\mathcal{C}[0, 1]$.

12.2.6. Věta (Weierstrassova). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takový, že

$$\forall x \in [a, b]: |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $[a, b] = [0, 1]$. Víme, že $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů na $\mathcal{C}([0, 1])$. Tvrzení věty tedy vyplývá z Korovkinovy věty pokud ověříme, že pro $j = 0, 1, 2$ platí

$$B_n(g_j) \rightrightarrows g_j \quad \text{na } [0, 1].$$

Pro $j = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ jest

$$B_n(g_0)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1 = g_0(x),$$

takže platí dokonce $L_n(g_0) = g_0$ na $[0, 1]$.

Připomeneme, že pro každé $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, platí

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Pro $j = 1$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ jest

$$\begin{aligned} B_n(g_1)(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= x(x+1-x)^{n-1} = x = g_1(x), \end{aligned}$$

a tedy i pro $j = 1$ platí $L_n(g_1) = g_1$ na $[0, 1]$.

Zbývá ověřit případ $j = 2$. Pro tuto funkci a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ máme

$$\begin{aligned}
 B_n(g_2)(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} k x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \\
 &= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \frac{x}{n} \\
 &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}.
 \end{aligned}$$

To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ máme

$$|B_n(g_2)(x) - g_2(x)| = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n},$$

a tedy

$$B_n(g_2) \rightrightarrows g_2 \quad \text{na } [0, 1].$$

Tím je ověřeno tvrzení věty ve speciálním případě $[a, b] = [0, 1]$.

Nechť nyní je $[a, b]$ obecný interval. Definujeme zobrazení $\varphi: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ předpisem

$$\varphi(x) = (b-a)x + a.$$

Potom φ je bijekce $[0, 1]$ na $[a, b]$. Položme $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Podle již dokázaného tvrzení nalezneme polynom \tilde{P} takový, že pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{P}(x)| < \varepsilon.$$

Položíme dále $P = \tilde{P} \circ \varphi^{-1}$. Protože funkce φ^{-1} má tvar

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{b-a}(y-a), \quad y \in [a, b],$$

je P zřejmě polynom. Navíc pro každé $y \in [a, b]$ platí

$$|f(y) - P(y)| = |\tilde{f}(\varphi^{-1}(y)) - \tilde{P}(\varphi^{-1}(y))| < \varepsilon.$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. ■

12.2.7. Poznámka. Weierstrassova věta by neplatila, pokud by interval nebyl omezený a uzavřený. To lze doložit na následujících příkladech: pro $f(x) = e^x$ na $(0, \infty)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - P(x)| = \infty$, podobně pro $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0, 1)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x) - P(x)| = \infty$.

12.2.8. Poznámka. Necht $f_n, n \in \mathbb{N}$, je posloupnost funkcí z $\mathcal{C}[0, 1]$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\text{sup}} = 0$.

12.3. Stejnomořná konvergence řad funkcí

12.3.1. Definice. Necht M je množina, $(Q, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $f_n: M \rightarrow Q, n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada zobrazení $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je **bodově konvergentní** na M , jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^n f_k\}_{n=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M . Obdobně definujeme pojmy **stejnomořné konvergence** a **lokálně stejno-měrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Stejnomořnou konvergenci značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, lokálně stejno-měrnou konvergenci symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.

12.3.2. Poznámky. Necht M je množina a $f_n, g_n: M \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

(a) *Bolzanova--Cauchyova podmínka:* řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejno-měrně na množině M právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

(b) *Nutná podmínka konvergence:* pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M , potom $f_n \rightrightarrows 0$ na M , neboť $|f_n(x)| = \left| \sum_{j=n}^n f_j(x) \right|$.

(c) *Linearita:* pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows, \sum_{n=1}^{\infty} g_n \rightrightarrows$ na M a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak také řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha f_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n \pm g_n)$ konvergují stejno-měrně na M .

12.3.3. Věta (Weierstrassovo kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině M . Označme

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x)|.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M .

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 : \sum_{j=n}^m \sigma_j < \varepsilon.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n}^m |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^m \sigma_j < \varepsilon.$$

Ověřili jsme Bolzanovu--Cauchyovu podmínku. Řada je tedy konvergentní podle Poznámky 12.3.2(a). ■

12.3.4. Příklad. Necht $\alpha > 1$. Dokažte, že řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

jsou stejnoměrně konvergentní na \mathbb{R} .

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha}.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty,$$

a tedy je řada konvergentní podle Weierstrassova kritéria. Důkaz stejnoměrné konvergence druhé řady je možné provést obdobně. ♣

12.3.5. Poznámka. Weierstrassovo kritérium nedává odpověď na otázku, zda jsou řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

stejnoměrně konvergentní na \mathbb{R} pro $\alpha \in (0, 1]$.

12.3.6. Věta (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence). Necht M je množina, $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n: M \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Necht platí

- (i) pro každé $x \in M$ je posloupnost reálných čísel $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní (libovolným způsobem),
- (ii) $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.

$$\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : |g_n(x)| \leq K,$$

- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na M .

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \Rightarrow \quad \text{na } M.$$

Důkaz. Označme

$$M^\downarrow = \{x \in M; \{g_n(x)\} \text{ je nerostoucí}\}$$

a

$$M^\uparrow = \{x \in M; \{g_n(x)\} \text{ je neklesající}\}.$$

Potom dle (a) platí $M = M^\downarrow \cup M^\uparrow$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \quad \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n$ a každé $x \in M$ označme

$$\sigma_k(x) = \sum_{j=n}^k f_j(x).$$

Potom

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n \quad \forall x \in M : |\sigma_k(x)| < \varepsilon. \quad (12.3)$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}, m \geq n$. Z Abelovy parciální sumace vyplývá, že

$$\forall x \in M : \sum_{j=n}^m f_j(x)g_j(x) = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j(x) (g_j(x) - g_{j+1}(x)) + \sigma_m(x)g_m(x). \quad (12.4)$$

Zvolme $x \in M^\downarrow$. Potom z předpokladu (a) a odhadu (12.3) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=n}^m f_j(x)g_j(x) \right| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j(x)| (g_j(x) - g_{j+1}(x)) + |\sigma_m(x)||g_m(x)| \\ &< \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} (g_j(x) - g_{j+1}(x)) + \varepsilon |g_m(x)| \\ &= \varepsilon (g_n(x) - g_m(x)) \leq 3K\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \Rightarrow$ na M^\downarrow . Obdobně lze dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \Rightarrow$ na M^\uparrow . Protože $M = M^\downarrow \cup M^\uparrow$, plyne odtud tvrzení věty. ■

12.3.7. Věta (Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence). Necht M je množina, $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}, g_n: M \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Necht platí

- (i) pro každé $x \in M$ je posloupnost reálných čísel $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní (libovolným způsobem),
- (ii) $g_n \Rightarrow 0$,
- (iii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má **stejnoměrně omezené částečné součty na M** , tj.

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M : \left| \sum_{j=1}^m f_j(x) \right| \leq K.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

Důkaz. Označme M^\downarrow a M^\uparrow stejné množinu jako v důkazu Věty 12.3.6. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu díky předpokladu (b) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$, takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad \forall x \in M: |g_n(x)| < \varepsilon.$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ a každé $x \in M$ označme

$$\sigma_k(x) = \sum_{j=n}^k f_j(x).$$

Potom dle předpokladu (c) platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, a každé $x \in M$

$$|\sigma_k(x)| = \left| \sum_{j=1}^k f_j(x) - \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x) \right| \leq \left| \sum_{j=1}^k f_j(x) \right| + \left| \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x) \right| \leq 2K.$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, a $x \in M^\downarrow$. Potom dle předpokladu (a), platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) g_j(x) \right| & \left| \sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j(x)| (g_j(x) - g_{j+1}(x)) + |\sigma_m(x)| |g_m(x)| \right| \\ & \leq 2K \sum_{j=n}^{m-1} (g_j(x) - g_{j+1}(x)) + 2K |g_m(x)| \\ & = 2K (g_n(x) - g_m(x)) + 2K |g_m(x)| \\ & \leq 2K (|g_n(x)| + |g_m(x)| + |g_m(x)|) < 6K\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na M^\downarrow . Obdobně lze dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na M^\uparrow . Protože $M = M^\downarrow \cup M^\uparrow$, plyne odtud tvrzení věty. ■

12.3.8. Poznámka. Pro každé $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ stejnoměrně omezené částečné součty na $[\delta, \pi - \delta]$. To plyne ihned z Příkladů 3.3.7 a 3.3.8.

12.3.9. Příklady. (a) Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \arccos(\frac{n-1}{n})$ je lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, \pi)$.

(b) Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0, \infty)$, jsou lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, \pi)$.

(c) Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \arctg(nx)$ je stejnoměrně konvergentní na \mathbb{R} .

Řešení. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $f_n(x) = \sin(nx)$ a $g_n(x) = \arccos(\frac{n-1}{n})$, $x \in (0, \pi)$ (funkce g_n jsou tedy konstantní na $(0, \pi)$). Necht $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Podle poznámky 12.3.8 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má stejnoměrně omezené částečné součty na

$[\delta, \pi - \delta]$. Posloupnost $\{g_n(x)\}$ je klesající a splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$. Protože tato posloupnost nezávisí na x , máme $g_n \rightrightarrows 0$ na $(0, \pi)$. Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $[\delta, \pi - \delta]$. Je-li $[a, b]$ libovolný interval splňující $0 < a < b < \pi$, potom k němu nalezneme $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ takové, že $[a, b] \subset [\delta, \pi - \delta]$. Z již dokázaného tvrzení víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $[\delta, \pi - \delta]$, a tedy i na $[a, b]$.

Odtud a z Věty 12.1.10 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows^{\text{loc}}$ na $(0, \pi)$.

(b) Důkaz je podobný jako u tvrzení (a), přičemž klademe $g_n(x) = n^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$. Stačí si pouze uvědomit, že i v tomto případě platí $g_n \rightrightarrows 0$ na \mathbb{R} a $\{g_n\}$ je klesající posloupnost.

(c) Důkaz provedeme ve dvou krocích. Nejprve se budeme věnovat řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $f_n(x) = (-1)^n$ a $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má stejnoměrně omezené částečné součty na \mathbb{R} a posloupnost $\{g_n(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ klesající. Navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|g_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, takže $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = 0$, a tedy $g_n \rightrightarrows 0$ na \mathbb{R} . Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \rightrightarrows$ na \mathbb{R} .

Ve druhém kroku položíme $f_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$ a $g_n = \arctg(nx)$. Z prvního kroku víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na \mathbb{R} . Posloupnost $\{g_n(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ monotónní (nerostoucí pro $x \in (-\infty, 0]$ a neklesající pro $x \in [0, \infty)$). Navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. Z Abelova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \arctg(nx) \rightrightarrows$ na \mathbb{R} . ♣

12.3.10. Věta (záměna sumy a derivace). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} splňující

- (i) f_n má vlastní derivaci na omezeném intervalu (a, b) , $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že je číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergentní,
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n \rightrightarrows$ na (a, b) .

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Důkaz. Položme $g_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (a, b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ má g_n vlastní derivaci na (a, b) , posloupnost $\{g_n(x_0)\}$ je konvergentní a posloupnost $\{g'_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na (a, b) . Podle Věty 12.1.13 tedy existuje funkce $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $g_n \rightrightarrows g$ a $g'_n \rightrightarrows g'$ na (a, b) . Odtud plyne tvrzení věty, neboť zřejmě platí $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. ■

12.3.11. Věta (záměna sumy a Newtonova integrálu). Necht' (a, b) je omezený neprázdný interval a necht' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí splňující

- (i) $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$,
- (ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f na (a, b) .

Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b f.$$

Důkaz. Použijeme Větu 12.1.15 na posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^n f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud ihned plyne tvrzení. ■

12.3.12. Věta (o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady). Necht $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada, přičemž $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, s poloměrem konvergence $\varrho \in (0, \infty)$. Potom tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$.

Důkaz. Necht $r \in (0, \varrho)$. Potom pro každé $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ platí $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|r^n$. Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|r^n$ je konvergentní, a tedy podle Weierstrassova kritéria je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Odtud a z Věty 12.1.10 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Odtud a z Věty 12.1.10 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ lokálně stejnoměrně konvergentní na $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$. ■

12.3.13. Poznámka. Ukážeme, jak z Abelova kritéria snadno vyplývá tvrzení Abelovy věty (Věta 8.3.2). Necht $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a necht ϱ je její poloměr konvergence, přičemž $\varrho \in (0, \infty)$. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [x_0, x_0 + \varrho]$ položme $f_n(x) = a_n \varrho^n$ a $g_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{\varrho^n}$. Potom je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0 + \varrho]$, $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí (s konstantou omezenosti rovnou jedné) a pro každé $x \in [x_0, x_0 + \varrho]$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ nerostoucí. Podle Abelova kritéria je tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0 + \varrho]$. Podle Mooreovy-Osgoodovy věty pak platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 + \varrho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n &= \lim_{x \rightarrow x_0 + \varrho} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n(x-x_0)^n \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0 + \varrho} \sum_{n=0}^k a_n(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení Abelovy věty.

12.4. Teoretické příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí

12.4.1. Příklad. Necht (M, ρ) je metrický prostor a $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou posloupnosti funkcí z M do \mathbb{C} konvergující stejnoměrně k $f: M \rightarrow \mathbb{C}$, respektive $g: M \rightarrow \mathbb{C}$. Ukažte následující tvrzení.

- (a) Platí $f_n + g_n \Rightarrow f + g$.
- (b) Jsou-li posloupnosti $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ omezené, platí $f_n g_n \Rightarrow fg$.
- (c) Dokažte, že bez předpokladu omezenosti je tvrzení (b) obecně neplatné.
- (d) Jsou-li funkce f_n stejnoměrně spojité, je f stejnoměrně spojitá.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z odhadu

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty.$$

(b) Necht $M \in (0, \infty)$ splňuje $\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty \leq M$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in M} |g(x)| = \sup_{x \in M} (\lim |g_n(x)|) \leq \sup_{x \in M} |g_n(x)| = \|g_n\|_\infty \leq M,$$

tj. g je též omezená číslem M . Tedy máme odhad

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n g_n - f_n g + f_n g - fg\|_\infty \\ &\leq \|f_n\| \|g_n - g\| + \|g\| \|f_n - f\| \\ &\leq M (\|g_n - g\| + \|f_n - f\|), \end{aligned}$$

který implikuje $f_n g_n \Rightarrow fg$.

(c) Uvažujme prostor \mathbb{R} s funkcemi definovanými pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ jako $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $f(x) = x$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $g = 0$. Pak

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Tedy $f_n \Rightarrow f$ a $g_n \Rightarrow g$. Na stranu druhou však neplatí $f_n g_n \Rightarrow fg$, jelikož

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}x \right| = \infty.$$

(d) Necht $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Necht $\delta \in (0, \infty)$ je takové, že $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každou dvojici $x, y \in M$ splňující $\rho(x, y) < \delta$. Pak pro taková x, y platí

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy f je stejnoměrně spojitá. ♣

12.4.2. Příklad. Necht M je množina a $f_n: M \rightarrow \mathbb{C}$ je posloupnost funkcí splňující

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |a_n - a_m|, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

pro nějakou konvergentní posloupnost čísel $\{a_n\}$. Pak $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M .

Řešení. Mějme $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní, splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, a tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a_m| < \varepsilon$ pro každé indexy $n, m \geq n_0$. Pro tato n, m pak máme

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f_m(x)| \leq |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{f_n\}$ splňuje podmínku z Věty 12.1.12, a tedy $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní. \clubsuit

12.4.3. Příklad. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná, přičemž f' je stejnoměrně spojitá. Pak posloupnost

$$g_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

konverguje stejnoměrně k f' .

Ukažte, že pouhá spojitost f' ke stejnému závěru nestačí.

Řešení. Jelikož

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in \mathbb{R},$$

platí dle Heineovy věty 4.2.16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

K dokončení důkazu stačí ověřit, že je posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně Cauchyovská. Mějme tedy $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno. Zvolme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$, kdykoliv $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $|x - y| < \delta$. Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ je větší než $\frac{1}{\delta}$ a necht $n, m \in \mathbb{N}$ jsou větší než n_0 . Pro každé $x \in \mathbb{R}$ najdeme dle Lagrangeovy věty 5.2.4 $\alpha \in (x, x + \frac{1}{n})$ a $\beta \in (x, x + \frac{1}{m})$ splňující

$$n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) = f'(\alpha), \quad m \left(f\left(x + \frac{1}{m}\right) - f(x) \right) = f'(\beta).$$

Pak $|\alpha - \beta| \leq \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$, a tedy

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |f'(\alpha) - f'(\beta)| < \varepsilon.$$

Protože $x \in \mathbb{R}$ bylo libovolné, máme

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Tím je důkaz první části tvrzení dokončen.

Uvažujme nyní funkci $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Pak platí pro $x \in \mathbb{R}$ rovnosti

$$g_n(x) = n \left(\left(x + \frac{1}{n}\right)^3 - x^3 \right) = n \left(3x^2 \frac{1}{n} + 3x \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = 3x^2 + 3x \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Tedy pro různé indexy n, m platí

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g_m(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| 3x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \right| = \infty.$$

Proto není posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy ani stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.4. Příklad. Necht $s \in \mathbb{N}$, X značí prostor všech polynomů na \mathbb{R} stupně nejvýše s a $\{p_n\}$ je posloupnost v X . Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (i) Posloupnost $\{p_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně.
- (ii) Existuje $s+1$ různých bodů x_0, \dots, x_s v \mathbb{R} , takové, že $\{P_n(x_i)\}$ konverguje pro každé $i \in \{0, \dots, s+1\}$.
- (iii) Posloupnosti koeficientů p_n konvergují.

Řešení. (i) \Rightarrow (ii) platí zřejmě.

(ii) \Rightarrow (iii) Necht $p_n(x) = a_{n,s}x^s + a_{n,s-1}x^{s-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}$. Matice systému lineárních rovnic pro neznámé $a_{n,0}, \dots, a_{n,s}$ je

$$\begin{aligned} a_{n,0} + a_{n,1}x_0 + \dots + a_{n,s}x_0^s &= p_n(x_0), \\ a_{n,0} + a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,s}x_1^s &= p_n(x_1), \\ &\dots \\ a_{n,0} + a_{n,1}x_s + \dots + a_{n,s}x_s^s &= p_n(x_s). \end{aligned} \tag{12.5}$$

je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^s \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_s & x_s^2 & \dots & x_s^s \end{pmatrix},$$

což je matice s nenulovým determinantem číslo dle [3,]. Tedy má systém (12.5) jednoznačné řešení $a_{n,0}, \dots, a_{n,s}$. Toto řešení lze navíc vyjádřit jako

$$a_{n,i} = \frac{\det A_{n,i}}{\det A}, \quad i \in \{0, \dots, s\},$$

kde matice $A_{n,i}$ vznikne z matice A nahrazením i -tého sloupce vektorem pravých stran rovnice (12.5). Tedy konvergence hodnot posloupností $\{p_n(x_i)\}$, $i \in \{0, \dots, s\}$, implikuje konvergenci posloupností $\{a_{n,i}\}$, $i \in \{0, \dots, s\}$.

(iii) \Rightarrow (i) Necht' $p_n(x) = a_{n,s}x^s + a_{n,s-1}x^{s-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž posloupnosti $\{a_{n,i}\}$ konvergují pro $i \in \{0, \dots, s\}$. Pak pro každý interval tvaru $[-M, M]$, $M \geq 1$, platí

$$\sup_{x \in [-M, M]} |p_n(x) - p_m(x)| \leq sM^s \sup_{i \in \{0, \dots, s\}} |a_{n,i} - a_{m,i}|,$$

tedy $\{p_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém takovém intervalu, a proto lokálně stejnoměrně na \mathbb{R} . \clubsuit

12.4.5. Příklad. Necht' $\{p_n\}$ je posloupnost polynomů na \mathbb{R} stejnoměrně konvergující k f . Pak f je polynom.

Řešení. Nejprve ukažme, že existuje $s \in \mathbb{N}$ takové, že všechny polynomy p_n jsou stupně nejvýše s . Vezmeme totiž $\varepsilon = 1$ a nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |p_n(x) - p_m(x)| < 1. \quad (12.6)$$

Jsou-li nyní p, q dva polynomy splňující (12.6), pak st $p = \text{st } q$. Vskutku, je-li

$$\begin{aligned} p(x) &= a_i x^i + a_{i-1} x^{i-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{a} \\ q(x) &= b_j x^j + b_{j-1} x^{j-1} + \dots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

přičemž $a_i b_j \neq 0$, $i < j$, pak $p - q$ je polynom stupně j , a tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |q(x) - p(x)| = \infty.$$

To je ovšem spor s (12.6). Proto st $p = \text{st } q$.

Tedy dostáváme, že všechny polynomy p_n jsou stupně nejvýše s pro nějaké $s \in \mathbb{N}$. Dle Příkladu 12.4.4 proto konvergují posloupnosti koeficientů polynomů p_n , řekněme k číslům a_s, a_{s-1}, \dots, a_0 . Pak zjevně $p_n(x) \rightarrow p(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Protože však $p_n \rightrightarrows f$, platí $f = p$, a f je tedy polynom. \clubsuit

12.4.6. Příklad. Necht' $f_n: (M, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ je bodově konvergentní stejně spojitá posloupnost na kompaktním metrickém prostoru M . Pak $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně.

Nalezněte příklad ukazující, že bez předpokladu kompaktnosti prostoru M tvrzení obecně neplatí.

Řešení. Necht' $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Pro každé $x \in M$ nalezneme $r_x \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $y \in B(x, r_x)$ platí $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. Díky kompaktnosti vybereme body $x_1, \dots, x_k \in M$ takové, že $M \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_{x_i})$. Protože $\{f_n\}$ konverguje bodově, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geq n_0$ platí

$$|f_n(x_i) - f_m(x_i)| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Necht' nyní $x \in M$ je libovolné. Nalezneme $i \in \{1, \dots, k\}$ splňující $x \in B(x_i, r_{x_i})$. Pak pro $n, m \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\{f_n\}$ je stejnoměrně Cauchyovská, a proto stejnoměrně konvergentní.

Abychom našli požadovaný příklad, uvažujme funkce $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f_n \rightarrow 0$. Dále jsou všechny funkce f_n 1-lipschitzovské, a tedy je systém $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ stejně spojitý. Posloupnost $\{f_n\}$ však nekonalguje stejnoměrně k 0, jelikož

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \infty.$$

♣

12.4.7. Příklad. Najděte posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $[0, 1]$ s hodnotami v $[0, 1]$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně.

Řešení. Uvažujme spojitě funkce $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, s těmito vlastnostmi:

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{vně intervalu } [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ \frac{1}{n}, & \text{v nějakém bodě intervalu } [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Pak zjevně $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Na druhou stranu však platí pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ odhad

$$\sup_{x \in [0, 1]} \sum_{n=n_0}^{n_0+k} f_n(x) \leq \frac{1}{n_0}.$$

Tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.8. Příklad. Necht $f_n: (M, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové funkce, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně konvergentní. Necht $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ je omezená funkce na M . Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní.

Ukažte, že bez předpokladu omezenosti f je tvrzení obecně neplatné.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $g_n = f$. Pak je pro každé $x \in M$ posloupnost $\{g_n(x)\}$ konstantní, a tudíž monotónní. Navíc je $\{g_n\}$ posloupnost stejně omezených funkcí. Podle Abelova kritéria (Věta 12.3.6) je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní na M . ♣

12.4.9. Příklad. Necht M je množina a $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\sup_{x \in M} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$. Necht $\{c_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ konverguje absolutně stejnoměrně.

Řešení. Mějme $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno. Necht $K = \sup_{x \in M} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{n=n_0}^{n_0+k} c_n^2 < \varepsilon$. Pak pro $k \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí dle Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+k} |c_n f_n(x)| \leq \left(\sum_{n=n_0}^{n_0+k} c_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=n_0}^{n_0+k} f_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\varepsilon K}.$$

Tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ stejnoměrně Cauchyovská, a tedy stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.10. Příklad. Necht' je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ řada spojitých funkcí na $[0, 1]$. Necht' konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ konverguje.

Řešení. Jelikož jsou funkce f_n spojitě na $[0, 1]$, platí pro každé $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \leq m_2$, odhad

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{n=m_1}^{m_2} f_n(x) \right| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{n=m_1}^{m_2} f_n(x) \right|.$$

Díky stejnoměrné cauchyovskosti řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[0, 1]$ tedy dostáváme stejnoměrnou cauchyovskost této řady na $[0, 1]$. Speciálně proto zadaná řada konverguje v bodě 1. ♣

12.4.11. Příklad. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada nezáporných spojitých funkcí na kompaktním metrickém prostoru M bodově konvergující ke spojitě funkci f . Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k f na M .

Řešení. Posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je neklesající. Tvrzení tedy plyne z Diniovy věty (Věta 12.1.17). ♣

12.4.12. Příklad. Naleznete řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ reálných funkcí na metrickém prostoru M konvergující stejnoměrně na M , která je v každém $x \in M$ absolutně konvergentní, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ nekonverguje stejnoměrně na M .

Řešení. Uvažujme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n, \quad x \in [0, 1].$$

Definujme pro $x \in [0, 1]$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ funkce $f_n(x) = (-1)^n$, $g_n(x) = (1-x)x^n$. Pak $\{g_n(x)\}$ je nerostoucí posloupnost pro každé $x \in [0, 1]$. Dále platí

$$\sup_{x \in [0, 1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow 0.$$

Tedy $g_n \Rightarrow 0$. Konečně, řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty. Tedy naše řada konverguje stejnoměrně.

Dále $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ je konvergentní v každém bodě $x \in [0, 1]$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n|$ však nekonverguje stejnoměrně, neboť

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

což je nespojitá funkce na $[0, 1]$. Řada spojitých funkcí tedy nemůže konvergovat stejnoměrně. ♣

12.4.13. Příklad. Necht' $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou monotónní funkce. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje pro $x \in \{a, b\}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konverguje stejnoměrně na $[a, b]$.

Řešení. Díky monotonii funkcí f_n máme odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\}, \quad x \in [a, b].$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\}$ je konvergentní, je dle Weierstrassova kritéria (Věta 12.3.3) řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.14. Příklad. Ukažte, že na prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ neexistuje metrika ρ , která pro každou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{C}([0, 1])$ a $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ splňuje

$$\rho(f_n, f) \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f.$$

Řešení. Necht ρ je metrika splňující předepsanou podmínku. Přivedeme tento předpoklad ke sporu. Necht $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ značí množinu všech konečných posloupností přirozených čísel. Pro $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ značíme délku s jako $|s|$. Symbol $s^{\wedge}n$, kde $n \in \mathbb{N}$, značí posloupnost s prodlouženou o n , tj. $s^{\wedge}n = (s_1, \dots, s_{|s|}, n)$. Symbolem \emptyset značíme prázdnou posloupnost. V intervalu $[0, 1]$ zkonstruujeme systémy nedegenerovaných intervalů $\{I_s; s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ a $\{J_s; s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ takové, že

- $I_{\emptyset} = J_{\emptyset} = [0, 1]$,
- pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ platí $\overline{I_s} \subset J_s$,
- pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ je J_s otevřený interval,
- pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ a $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{J_{s^{\wedge}n}} \subset I_s$,
- pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ je systém $\{\overline{J_{s^{\wedge}n}}; n \in \mathbb{N}\}$ disjunktní.

Pro chvíle rozvažování je zřejmé, že takové systémy množin je snadné sestrojít.

Pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ nyní najdeme spojitou funkci $f_s \in \mathcal{C}([0, 1])$ s hodnotami v intervalu $[0, 1]$, které splňuje

$$f_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{I_s}, \\ 0, & x \notin J_s. \end{cases}$$

Z vlastnosti (e) je vidět, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{s^{\wedge}n} = 0, \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_{s^{\wedge}n}, 0) = 0, \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}. \quad (12.7)$$

Indukcí nyní sestrojíme posloupnost $\{s^n\}$ v $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ takovou, že s^n je délky n , s^{n+1} prodlužuje s^n a $\rho(f_{s^n}, 0) < \frac{1}{n}$. V prvním kroku využijeme vlastnost (12.7) pro $s = \emptyset$ a najdeme $s^1 \in \mathbb{N}^1$ takové, že $\rho(f_{s^1}, 0) < 1$.

Mějme nyní posloupnosti s_1, \dots, s_n v $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ takové, že pro $i \in \{1, \dots, n\}$ je s^i délky i , $\rho(f_{s^i}, 0) < \frac{1}{i}$ a s^i prodlužuje s^{i-1} pro $i \in \{2, \dots, n\}$. Použijeme vlastnost (12.7) pro s^n a najdeme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(f_{s^n \wedge k}, 0) < \frac{1}{n+1}$. Položíme $s^{n+1} = s^n \wedge k$. Tím je konstrukce ukončena.

Vzhledem k tomu, že $\rho(f_{s^n}, 0) \rightarrow 0$, $f_{s^n} \rightarrow 0$ dle našeho předpokladu. Vezmeme-li však posloupnost intervalů $\{\overline{I_{s^n}}\}$, pak se jedná o monotónní posloupnost

kompaktních množin v $[0, 1]$. Jejich průnik tedy obsahuje nějaký bod (vizte Větu 9.2). V tomto bodě jsou ale všechny funkce f_s^n rovny 1, což je spor s jejich bodovou konvergencí k 0. ♣

12.5. Početní příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí

12.5.1. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad g_n(x) = x^{2n} - x^{3n}, \quad x \in (0, 1).$$

Řešení. Zjevně platí $f_n \rightarrow 0$ a $g_n \rightarrow 0$ na $(0, 1)$. Jelikož

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x), \quad x \in (0, 1),$$

nabývá f_n maxima v bodě $x = \frac{n}{n+1}$ o hodnotě

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Tedy

$$\max_{x \in (0,1)} |f_n(x)| = \max_{x \in (0,1)} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \rightarrow 0.$$

Proto $f_n \Rightarrow 0$ na $(0, 1)$.

Naproti tomu $\{g_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Spočítáme-li totiž

$$g'_n(x) = nx^{2n-1}(2 - 3x^n), \quad x \in (0, 1),$$

dostaneme, že

$$\max_{x \in (0,1)} |g_n(x)| = \max_{x \in (0,1)} g_n(x) = g_n\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \rightarrow 0.$$

Platí však, že $g_n \Rightarrow 0$ na každé množině tvaru $(0, q)$, kde $q \in (0, 1)$, a tedy $g_n \Rightarrow 0$ lokálně stejnoměrně na $(0, 1)$. Mějme totiž $q \in (0, 1)$ libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} > q$ pro $n \geq n_0$. Pak

$$\max_{x \in (0,q)} g_n(x) = g_n(q), \quad n \geq n_0,$$

a tedy $\max_{x \in (0,q)} g_n(x) \rightarrow 0$. ♣

12.5.2. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Řešení. Zřejmě $f_n(x) \rightarrow f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Odhadneme rozdíl $|f_n - f|$ na \mathbb{R} a dostaneme

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

a tedy $f_n \Rightarrow f$ na \mathbb{R} . ♣

12.5.3. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right), \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}},$$

konvergují funkce f_n bodově k funkci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.

Odhadujeme $|f - f_n|$ jako

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)^2} \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že

$$\sup_{x \in (0, \infty)} |f(x) - f_n(x)| \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)^2} = \infty,$$

tj. $\{f_n\}$ nekonvergují stejnoměrně na $(0, \infty)$.

Na druhou stranu $f_n \Rightarrow f$ na každém intervalu tvaru (q, ∞) , kde $q > 0$. Vskutku, je-li $q > 0$, z přechozího máme odhad

$$\sup_{x \in (q, \infty)} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{q} (2\sqrt{q})^2} \rightarrow 0.$$

Tedy $f_n \Rightarrow f$ na (q, ∞) . Proto $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$ na $(0, \infty)$. ♣

12.5.4. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Zjevně

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = x \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x = \frac{\pi}{2} |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Označme $g(y) = |y \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2} |y||$, $y \in \mathbb{R}$. Pak pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} |x| \right| = \frac{1}{n} \left| nx \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} |nx| \right|.$$

Tedy

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \sup_{y \in \mathbb{R}} g(y).$$

K dokončení důkazu stejnoměrné konvergence tak stačí ukázat omezenost funkce g . Ta je však na \mathbb{R} zjevně spojitá a platí

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) &= \left| \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{y}} \right| = 1, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) &= \left| \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{y}} \right| = 1, \end{aligned}$$

tedy g je omezená na \mathbb{R} . ♣

12.5.5. Příklad. Necht M je množina a $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou nenulové funkce stejnoměrně konvergující k 0 na M . Necht f je reálná funkce splňující $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = L$, kde $L \in \mathbb{R}$. Pak $f \circ f_n \rightrightarrows L$ na M .

Řešení. Necht $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $\delta > 0$ takové, že $f(P(0, \delta)) \subset B(L, \varepsilon)$. Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sup_{x \in M} |f_n(x)| < \delta$ pro $n \geq n_0$. Pak pro $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí $f_n(x) \in P(0, \delta)$, a tedy

$$|f(f_n(x)) - L| < \varepsilon.$$

Proto $f \circ f_n \rightrightarrows L$ na M . ♣

12.5.6. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{x \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

platí $f_n(x) \rightarrow f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Jelikož

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = \infty,$$

konvergence není stejnoměrná.

Uvažujme však libovolný interval tvaru $[-q, q]$, kde $q > 0$. Uvažujme funkce $x \mapsto \frac{x}{n}$, $x \in [-q, q]$. Jelikož $|\frac{x}{n}| \leq \frac{q}{n}$, platí $\frac{x}{n} \rightrightarrows 0$ na $[-q, q]$. Jelikož $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, Příklad 12.5.5 dává

$$\frac{\log(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \rightrightarrows 1, \quad \text{na } [-q, q] \setminus \{0\}.$$

Díky omezení funkce $x \mapsto x$ na $[-q, q]$ pak plyne

$$n \log(1 + \frac{x}{n}) - x = x \left(\frac{\log(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} - 1 \right) \rightrightarrows 0 \quad \text{na } [-q, q] \setminus \{0\}.$$

Opětovným použitím Příkladu 12.5.5 a z omezení funkce $x \mapsto e^x$ na $[-q, q]$ dostáváme

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x - e^{n \log(1 + \frac{x}{n})} = e^x \left(1 - e^{n \log(1 + \frac{x}{n}) - x}\right) \rightrightarrows 0$$

na $[-q, q] \setminus \{0\}$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-q, q] \setminus \{0\}$. Jelikož $f_n(0) = f(0)$, platí $f_n \rightrightarrows f$ na množině $\{0\}$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-q, q]$.

Proto $f_n \xrightarrow{\text{loc}} f$ na \mathbb{R} . ♣

12.5.7. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Řešení. pokud $x = -1$ a $n \in \mathbb{N}$ je liché, není $f_n(x)$ definována. Tedy uvažujeme pouze $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{-n} + 1} = 1, & x \in (-\infty, -1), \\ 0, & x \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{-n} + 1} = 1, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Jelikož limitní funkce f není spojitá v bodě 1, konvergence není stejnoměrná na žádném okolí 1. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty, -1 - \varepsilon] \cup [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon] \cup [1 + \varepsilon, \infty)$. Vskutku, toto plyne z odhadů

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \left| \frac{1}{1+x^n} \right| \leq |1| |x|^n - 1 \leq \frac{1}{|-1-\varepsilon|^{n-1}}, & x \in (-\infty, -1 - \varepsilon], \\ |x^n| \leq (1 - \varepsilon)^n, & x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon], \\ \left| \frac{1}{1+x^n} \right| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}, & x \in [1 + \varepsilon, \infty). \end{cases}$$

Nakonec ukažme, že konvergence není stejnoměrná na žádném levém nebo pravém okolí bodu -1 . Pro $x < -1$ totiž máme

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{|x^n + 1|},$$

což je výraz konvergující k ∞ pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché $x \rightarrow -1_-$. Tedy

$$\sup_{x \in (-\infty, -1)} |f_n(x) - f(x)| = \infty, \quad n \in \mathbb{N} \text{ liché.}$$

Podobně pro x z pravého okolí bodu -1 a $n \in \mathbb{N}$ sudé máme

$$\lim_{x \rightarrow -1_+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1_+} \frac{|x|^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}.$$

♣

12.5.8. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \log \left(1 + \frac{1}{nx^2} \right) \sqrt{n^2 + 1}.$$

Řešení. Zjevně je třeba uvažovat $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro tato x máme

$$f_n(x) = \frac{\log \left(1 + \frac{1}{nx^2} \right)}{\frac{1}{nx^2}} \cdot \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^2}} \frac{1}{x^2} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &\geq \left| f_n \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \right) - f \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \right) \right| = \left| \log 2 \sqrt{n^2 + 2} - n \right| \\ &= n \left(\log 2 \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^2}} - 1 \right) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

konvergence není na \mathbb{R} stejnoměrná.

Uvažujme libovolné $q > 0$ a množinu $(-\infty, -q] \cup [q, \infty)$. Necht $\varepsilon > 0$ je dáno. Jelikož $\log(1+t) = t + \varphi(t)$, kde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ takové, že $\left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| < \varepsilon$ kdykoliv $t \in P(0, \delta)$. Necht $M > 0$ je takové, že

$$\frac{\sqrt{n^2 + 2}}{n} \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{nq^2} < \delta$ a

$$\left| \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^2}} - 1 \right| < \varepsilon$$

pro $n \geq n_0$. Pak pro libovolné $x \in (-\infty, -q] \cup [q, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme

$$\frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{nq^2} < \delta,$$

a tedy

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{n^2 + 2} \left(\frac{1}{nx^2} + \frac{\varphi\left(\frac{1}{nx^2}\right)}{\frac{1}{nx^2}} \cdot \frac{1}{nx^2} \right) - \frac{1}{x^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x^2} \left(\sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^2}} - 1 \right) \right| + \varepsilon \frac{1}{q^2} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{n} \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} M \right). \end{aligned}$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty, -q] \cup [q, \infty)$. \clubsuit

12.5.9. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = (x + 1)^3 \operatorname{arccotg}(-nx^3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož

$$-nx^3 \rightarrow \begin{cases} -\infty, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \infty, & x < 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} (x + 1)^3 \pi, & x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Jelikož f není spojitá v 0, konvergence není stejnoměrná na žádném okolí bodu 0.

Uvažujme libovolné $q > 0$ a množinu $(-\infty, -q]$. Funkce $g(y) = y \operatorname{arccotg} y$, $y \in [0, \infty)$, je omezená, neboť je spojitá a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg} y}{\frac{1}{y}} = 1.$$

Pro $x \in (-\infty, -q]$ máme odhad

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| (x + 1)^3 \frac{1}{nx^3} ((-nx^3) \operatorname{arccotg}(-nx^3)) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sup_{x \in (-\infty, -q]} \left| \frac{x + 1}{x} \right|^3 \sup_{y \in [0, \infty)} g(y), \end{aligned}$$

což je výraz konvergující pro $n \rightarrow \infty$ k 0. Tedy $f_n \rightrightarrows 0$ na $(-\infty, -q]$.

Uvažujme-li množinu $[q, \infty)$, dostaneme též stejnoměrnou konvergenci. Funkce

$$y \mapsto |(\pi - \operatorname{arccotg} y)y|, \quad y \in (-\infty, 0],$$

je totiž omezená, takže z odhadu platného pro $x \in [q, \infty)$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |(x+1)^3 (\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3))| \\ &= \frac{1}{n} \left| \frac{x+1}{x} \right|^3 |(-nx^3)(\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3))| \\ &\leq \frac{1}{n} \sup_{x \in [q, \infty)} \left| \frac{x+1}{x} \right|^3 \sup_{y \in [0, \infty)} g(y) \end{aligned}$$

dostáváme stejnoměrnou konvergenci na $[q, \infty)$. \clubsuit

12.5.10. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sqrt{x} \log n e^{-\sqrt{x} \log n}, & x > 0 \end{cases}$$

a $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t} = 0$, platí $f_n \rightarrow 0$ na $[0, \infty)$.

Počítejme $\sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} f_n(x)$. Platí

$$f'_n(x) = e^{-\sqrt{x} \log n} \frac{\log n}{2} \left(-\log n + \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad x > 0.$$

Tedy pokud $n \geq 2$, $f'_n > 0$ na $(0, \log^{-2} n)$ a $f'_n < 0$ na $(\log^{-2} n, \infty)$. Proto má f_n v bodě $\log^{-2} n$ maximum o hodnotě e^{-1} . Posloupnost $\{f_n\}$ tak nekonverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Uvažujeme-li však libovolný interval $[q, \infty)$, kde $q > 0$, dostaneme již na této množině stejnoměrnou konvergenci. Nalezneme totiž $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\log^{-2} n < q$ pro $n \geq n_0$. Pak pro $n \geq n_0$ platí

$$\sup_{x \in [q, \infty)} |f_n(x)| = f_n(q) \rightarrow 0,$$

což znamená $f_n \rightrightarrows 0$ na $[q, \infty)$. \clubsuit

12.5.11. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Máme

$$3 \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{23^n} = 3 \sqrt[n]{2}, \quad x \in [0, 3],$$

a

$$x \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2x^n} = x \sqrt[n]{2}, \quad x \in (3, \infty).$$

Dle Věty 2.2.46 platí

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 3], \\ x, & x \in (3, \infty). \end{cases}$$

Jelikož

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n} (x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} > 0, \quad x \in (0, 3),$$

je $f_n - f$ nezáporná a rostoucí na $[0, 3]$. Tedy

$$\sup_{x \in [0, 3]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3 \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \rightarrow 0,$$

což znamená, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 3]$.

Na intervalu $[3, \infty)$ platí

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n} (x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} - 1 < 0, \quad x \in (3, \infty),$$

a tedy je $f_n - f$ klesající na $[3, \infty)$. Zjevně je $f_n - f > 0$, a proto

$$\sup_{x \in [3, \infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3 \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \rightarrow 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ i na $[3, \infty)$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, \infty)$. ♣

12.5.12. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ lichá a v nekonečnu má limitu 0. Jelikož

$$f_n'(x) = \frac{n}{(1+n^5x^2)^2} (1-n^5x^2), \quad x \in \mathbb{R},$$

Má funkce v bodě $-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ minimum a v bodě $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ maximum. V absolutní hodnotě lze tak funkci f_n odhadnout číslem $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, zadaná řada konverguje stejnoměrně dle Věty 12.3.3. ♣

12.5.13. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \leq t$, $t \in (-1, \infty)$, a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ konverguje, konverguje bodově i zadaná řada. Protože však

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n} \right) = \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

nekonvergují členy řady stejnoměrně k 0. Proto daná řada nekonverguje stejnoměrně na \mathbb{R} dle Poznámky 12.3.2.

Uvažujme nyní libovolný interval $[-q, q]$, kde $q > 0$. Pak

$$\sup_{x \in [-q, q]} \log \left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n} \right) \leq \frac{q^2}{n \log^2 n},$$

a tedy dle Věty 12.3.3 řada konverguje stejnoměrně na $[-q, q]$. ♣

12.5.14. Příklad. Ukažte, že řada

$$\sum_{n=+}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

nekonverguje stejnoměrně na $(0, \pi)$.

Řešení. Použijeme Poznámku 12.3.2(a), tj. ukážeme, že daná řada na $(0, \pi)$ nespĺňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Uvažujme libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, \pi)} \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \right| &\geq \sum_{k=n}^{2n} n \frac{\sin(\frac{k}{2n})}{2n} \\ &\geq \frac{\sin(\frac{n}{2n})}{2n} \sum_{k=n}^{2n} 1 \geq \frac{\sin \frac{1}{2}}{2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tedy řada nekonverguje stejnoměrně na $(0, \pi)$. ♣

12.5.15. Příklad. Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$$

spojitá na svém definičním oboru.

Řešení. Vyzkoumejme nejprve, pro jaké $x \in \mathbb{R}$ je řada konvergentní. Necht' nejprve $x \in [0, \infty)$. Položíme-li $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ a $b_n = \operatorname{arctg}(x^n)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (Věta 3.3.1) a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a monotónní (neklešající pro $x \geq 1$ a nerostoucí pro $x \in [0, 1]$). Dle Věty 3.3.5 tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. Pokud $x \in (-1, 0)$, máme

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n) = \operatorname{arctg}(|x|^n) \leq |x|^n,$$

a tedy řada konverguje dle Věty 3.2.2.

Pokud $x \in (-\infty, -1]$, platí

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n) = \operatorname{arctg}(|x|^n) \geq \operatorname{arctg} 1,$$

a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, \infty)$.

Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci na $[0, \infty)$. Položíme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad g_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n), \quad x \in [0, \infty).$$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$, pro každé $x \in [0, \infty)$ je $\{g_n(x)\}$ monotónní a $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \infty)$. Dle Věty 12.3.6 daná řada konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Ukážeme nyní, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$ nekonverguje stejnoměrně na žádném pravém okolí bodu -1 . Předpokládejme pro spor, že řada konverguje stejnoměrně na nějakém intervalu $(-1, -1 + \delta)$. Položme

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}, \quad x \in (-1, -1 + \delta).$$

Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\pi}{4\sqrt{n+1}} = a_N \in \mathbb{R},$$

dle Věty 12.1.7 existuje vlastní limita $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N$. To je však zřejmá nepravda, a tedy náš předpoklad o stejnoměrné konvergenci byl chybný.

Ukážeme však, že řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[q, 0]$, kde $q \in (-1, 0)$. Pro $x \in [q, 0]$ totiž platí

$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)}{\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{\operatorname{arctg}(|x|^n)}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{\sqrt{n+1}} \leq |q|^n.$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |q|^n$ konvergentní, konverguje daná řada stejnoměrně na $[q, 0]$ dle Věty 12.3.3.

Řada tak konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, \infty)$, což zaručuje spojitost f na tomto intervalu, vizte Větu 12.1.8. ♣

12.5.16. Příklad. Spočítejte $f'(0)$, pokud

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Označíme

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$|f'_n(x)| = \left| (-1)^n \frac{\cos\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Tedy na každém intervalu tvaru $(-q, q)$, kde $q > 0$, je $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n \Rightarrow$ dle Věty 12.3.3. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sin(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, jsou splněny předpoklady Věty ???. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na $(-q, q)$ a navíc

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in (-q, q).$$

Tedy

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

♣

12.5.17. Příklad. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2 \cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

a zjistěte, zda je na něm spojitá.

Řešení. Položme

$$f_n(x) = \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2 \cos(2x))^{2n}}{\sqrt{\log n}} = (\operatorname{sign}(\cos x))^n \frac{(4 \cos^2 x)^n}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud $x \in \mathbb{R}$ splňuje $|\cos x| < \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak

$$|f_n(x)| \leq (4 \cos^2 x)^n,$$

a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně. Pokud $|\cos x| > \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak $f_n(x) \rightarrow 0$, a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ diverguje. Pokud $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = \frac{1}{2}$ a $\operatorname{sign} \cos x = 1$, tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}}$$

diverguje. Pokud $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sign} \cos x = -1$, a tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje dle Věty 3.3.1. Definiční obor f je tak

$$\mathcal{D}(f) = \left[\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right) \right] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu $[\frac{\pi}{3} + \varepsilon, \frac{\pi}{2}]$. Zde platí

$$|f_n(x)| \leq \frac{(4 \cos^2(\frac{\pi}{3} + \varepsilon))^{2n}}{\sqrt{\log n}},$$

přičemž

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4 \cos^2(\frac{\pi}{3} + \varepsilon))^n}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na $[\frac{\pi}{3} + \varepsilon, \frac{\pi}{2}]$ dle Věty 12.3.3.

Na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ použijeme Větu 12.3.6. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ totiž konverguje stejnoměrně, pro každé $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ je $\{(4 \cos^2 x)^n\}$ monotónní a $|(4 \cos^2 x)^n| \leq 1$. Tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}} (4 \cos^2 x)^n$$

konverguje stejnoměrně na $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \xrightarrow{\text{loc}}$ na $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

Na intervalu $[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ postupujeme obdobně.

Díky Větě 12.1.8 je tak f spojitá na $\mathcal{D}(f)$.

Ukažme ještě, že $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ nekongruje stejnoměrně na $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. Kdyby tomu tak bylo, tak z Věty 12.1.7 plyne existence vlastní limity

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{\sqrt{\log n}},$$

což není pravda. ♣

12.5.18. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2x}{x^2 + n^2}\right), \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \leq t$, $t \in [0, \infty)$, máme pro $f_n(x) = \log\left(1 + \frac{2x}{x^2 + n^2}\right)$ odhad

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2} \leq 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tedy $\sum_{n=1}^i n f_n(x)$ konverguje na $[0, \infty)$.

Pro libovolný interval $[0, q]$ též máme odhad

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{q}{n^2}, \quad x \in [0, q],$$

což dle Věty 12.3.3 implikuje stejnoměrnou konvergenci na $[0, q]$.

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{2N} f_n(N) &= \sum_{n=N}^{2N} \log \left(1 + \frac{2N}{N^2 + n^2} \right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log \left(1 + \frac{2N}{N^2 + (2N)^2} \right) \\ &\geq N \log \left(1 + \frac{2}{5N} \right) \rightarrow \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nespĺňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0, \infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Necht $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0, \infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0, \infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \Rightarrow \{ \frac{1}{n^{x-x_0}} \}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na \mathbb{R} a spojitou druhou derivaci na $(0, 2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f''_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na \mathbb{R} . Z Příkladu ?? plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f''_n$ na $(0, 2\pi)$. Z Věty ?? a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ na \mathbb{R} a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f''_n$ na $(0, 2\pi)$. ♣

12.5.21. Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^\infty(1, \infty)$.

Řešení. Postupujeme indukcí. Necht' $q > 1$ je libovolné. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konverguje, a tedy z Příkladu 12.5.19 plyne stejnoměrná konvergence dané řady na $[q, \infty)$. Tedy ζ je spojitá na $(1, \infty)$.

Dokážeme nyní, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^x}, \quad x \in (1, \infty).$$

Pro $k = 0$ vzorec zjevně platí. Předpokládejme jeho platnost pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{k+1} n}{n^x}$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $(1, \infty)$ (vizte Příklad 12.5.19), a tedy platí díky Větě ?? rovnost

$$\zeta^{(k+1)}(x) = \left(\zeta^{(k)}(x) \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \log^{k+1} n}{n^x}.$$

Tedy ζ je třídy C^∞ na $(1, \infty)$. ♣

12.5.22. Příklad. Zjistěte, kde jsou diferencovatelné funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Řešení. (a) Označme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n+x}, \quad g_n(x) = \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Necht' $N = \{-n; n \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

na každé množině tvaru $[-q, q] \setminus N$. Necht' tedy $q > 0$ je libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > q$. Pak pro $x \in [-q, q]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n-q)^2}.$$

Tedy máme

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{n^2}{(n+x)^2},$$

přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow, \frac{n^2}{(n+x)^2} \leq \frac{n^2}{(n-q)^2}$ a pro každé $x \in [-q, q]$ je posloupnost $\left\{ \frac{n^2}{(n+x)^2} \right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónní. (Vskutku,

$$\frac{n^2}{(n+x)^2} \geq \frac{(n+1)^2}{(n+1+x)^2}$$

právě tehdy, když

$$1 + \frac{1}{n+x} \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

To však nastává právě tehdy, když $x \leq 0$. Tedy daná posloupnost je nerostoucí, pokud $x \in [-q, 0]$, a neklesající, pokud $x \in [0, q]$. Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} f'_n$ tak konverguje stejnoměrně na $[-q, q]$. Protože původní řada konverguje v bodě $x = 0$, máme

$$\left(f(x) - \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x) \right)' = \sum_{n=n_0}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in [-q, q] \setminus N.$$

Z toho však dostáváme

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in [-q, q] \setminus N.$$

Jelikož q bylo libovolné, je f diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus N$.

(b) Z odhadu $|g_n(x)| \leq \frac{q}{n^2}$ platného pro $x \in [-q, q]$ vidíme, že řada definující g konverguje lokálně stejnoměrně na \mathbb{R} . Máme

$$g'_n(x) = \operatorname{sign} x \frac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}, \quad x \neq 0,$$

a tedy pro interval $(0, q)$ platí

$$|g'_n(x)| \leq \frac{q(n^2 + q^2)}{n^4}.$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(n^2 + q^2)}{n^4}$ konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} g'_n \Rightarrow$ na $(0, q)$. Tedy

$$g' = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n$$

na $(0, \infty)$. Obdobně odvodíme, že $g' = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n$ na $(-\infty, 0)$.

Ukážeme nyní, že $g'(0)$ neexistuje. Díky Věť 12.1.7 máme

$$g'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

a obdobně $g'_-(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tedy $g'(0)$ neexistuje. ♣

12.5.23. Příklad. Dokažte, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \frac{\log 2}{2}$$

Řešení. (a) Dokažeme nejprve rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)} = \frac{\log 2}{2}.$$

K tomu dle Věty 12.1.7 stačí ověřit stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)}$ na nějakém levém okolí bodu 1. Avšak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Rightarrow, 0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq 1$ pro $x \in (0, 1)$ a posloupnost $\left\{ \frac{x^n}{1+x^n} \right\}$ je pro každé $x \in (0, 1)$ monotónní. (To plyne ze vztahu

$$\frac{x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1}{1+x^n}.)$$

Tedy daná řada konverguje stejnoměrně a lze zaměnit limitní přechody. Dostáváme tak

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} = \frac{\log 2}{2},$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu ??.

(b) K důkazu druhé rovnosti též použijeme Větu 12.1.7, a tedy je třeba ověřit stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$$

na nějakém levém okolí bodu 1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ má omezené částečné součty. Stejnomořná konvergence naší řady tak bude dle Věty 12.3.7 zaručena, pokud dokažeme, že funkce

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$$

jsou pro každé $x \in (0, 1)$ monotónní a platí $f_n \Rightarrow 0$ na $(0, 1)$. Pišme

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n}{\frac{1-x^{2n}}{1-x}} = \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-2}+x^{2n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x^{-n+\frac{1}{2}}+x^{-n+\frac{3}{2}}+\dots+x^{n-\frac{3}{2}}+x^{n-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Jelikož $y + \frac{1}{y} \geq 2$ pro každé $y \in (0, \infty)$, máme z předchozího odhad

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2n},$$

z kterého plyne $f_n \rightrightarrows 0$. Těž obdržíme monotonii, neboť

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x^{-n-\frac{1}{2}} + x^{-n+\frac{1}{2}} + \dots + x^{n-\frac{1}{2}} + x^{n+\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{\sqrt{x}}{x^{-n+\frac{1}{2}} + x^{-n+\frac{3}{2}} + \dots + x^{n-\frac{3}{2}} + x^{n-\frac{1}{2}}} = f_n(x). \end{aligned}$$

Proto daná řada konverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = \frac{1}{2n},$$

máme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n} = \frac{\log 2}{2}.$$

♣

Diferenciální rovnice

13.0.1. Definice. Diferenciální rovnici rozumíme rovnicí tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \quad (13.1)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

13.0.2. Definice. Řešením diferenciální rovnice (13.1) rozumíme reálnou funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v každém bodě intervalu I vlastní n -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (13.1) v každém bodě intervalu I , tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

Řešení y rovnice (13.1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z , pro které $\mathcal{D}(y) \subsetneq \mathcal{D}(z)$ a které se na $\mathcal{D}(y)$ shoduje s y .

13.1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

13.1.1. Definice. Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \quad (13.2)$$

13.1.2. Věta (lepení řešení). Necht $a \in \mathbb{R}$, $\delta, \eta \in (0, \infty)$ a F je spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Necht y_l je řešením diferenciální rovnice

$$y' = F(x, y) \quad (13.3)$$

na intervalu $(a - \delta, a)$ a y_r je řešením této rovnice na $(a, a + \eta)$. Necht $[a, A] \in G$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a-} y_l(x) = \lim_{x \rightarrow a+} y_r(x) = A.$$

Pak funkce

$$y = \begin{cases} y_l(x), & x \in (a - \delta, a), \\ A, & x = a, \\ y_r(x), & x \in (a, a + \eta) \end{cases}$$

je řešením rovnice (13.3) na intervalu $(a - \delta, a + \eta)$.

Důkaz. Jediný bod intervalu $(a-\delta, a+\eta)$, kde není jasné, že y splňuje rovnici (13.3), je bod a . Počítejme tedy jednostranné derivace y v bodě a pomocí Věty ?? jako

$$y'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} y'_l(x) = \lim_{x \rightarrow a-} F(x, y_l(x)) = F(a, A)$$

a

$$y'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} y'_r(x) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x, y_r(x)) = F(a, A).$$

Tedy

$$y'(a) = F(a, A) = F(a, y(a))$$

a y je řešením (13.3) na $(a-\delta, a+\eta)$. ■

13.1.3. Věta. Necht $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $c < d$, necht $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Necht $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$. Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^x h(t) dt, \quad x \in (a, b),$$

a

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt, \quad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (13.2) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, které splňují $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a, b)$ a

$$H(x) \in G((c, d)), \quad x \in I.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že g nemění znaménko na (c, d) , a tedy G je ryze monotónní funkce na (c, d) . Proto je $G((c, d))$ otevřený interval obsahující $H(x_0) = 0$. Dále existuje G^{-1} (viz Věta ??). Funkce H je spojitá dle Věty ??, a proto je $H^{-1}(G((c, d)))$ otevřená množina v (a, b) obsahující x_0 . Dle Věty ?? existuje maximální otevřený interval $I = (x_0 - \delta, x_0 + \eta)$ v (a, b) splňující $H(I) \subset G((c, d))$.

Dále víme, že jsou G', H' spojitě (viz Věta ??) a $G' = \frac{1}{g}$ je nenulová, a tedy je spojitá i $(G^{-1})' = \frac{1}{G' \circ G^{-1}}$. Proto je funkce $y = G^{-1} \circ H$ spojitě diferencovatelná na I . Dle aritmetiky derivací a větě o derivaci inverzní funkce (Věta ?? a ??) platí

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x))H'(x) \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)))} H'(x) = g(y(x))h(x), \quad x \in I,$$

tj. y řeší na I rovnici (13.2).

Ukažme, že $I = (x_0 - \delta, x_0 + \eta)$ je maximální interval s vlastnostmi $I \subset (a, b)$ a $H(x) \in G((c, d))$ pro $x \in I$. Nejprve ověříme, že řešení y nelze prodloužit vlevo od bodu $x_0 - \delta$. Pokud $x_0 - \delta = a$, zjevně nelze interval δ zvětšit bez porušení vlastnosti $I \subset (a, b)$. Pokud $a < x_0 - \delta$, pak máme $H(x_0 - \delta) \notin G((c, d))$, protože jinak by byl interval I díky své maximalitě prodloužen vlevo od bodu $x_0 - \delta$. To ale znamená, že

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 - \delta)_+} y(x) = \lim_{x \rightarrow (x_0 - \delta)_+} G^{-1}(H(x)) \in \{c, d\}.$$

Tedy bod

$$[x_0 - \delta, \lim_{x \rightarrow (x_0 - \delta)_+} y(x)] \notin (a, b) \times (c, d).$$

Proto řešení y nelze prodloužit vlevo od bodu $x_0 - \delta$. Obdobně bychom ukázali, že y nelze prodloužit vpravo od bodu $x_0 + \eta$. Tedy I je vskutku maximální vzhledem k popsaným vlastnostem a y je maximální řešení.

Předpokládejme nyní, že z je jiné maximální řešení (13.2) na otevřeném intervalu $\tilde{I} \subset (a, b)$ splňující $z(x_0) = y_0$. Pak máme

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = h(x), \quad x \in \tilde{I},$$

a tedy pro $x \in \tilde{I}$ máme díky $z(x) \in (c, d)$ rovnost

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{x_0}^x h(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{z'(t)}{g(z(t))} dt \\ &= \int_{y_0}^{z(x)} \frac{1}{g(s)} ds = G(z(x)). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Protože $z(x) \in (c, d)$, je $G(z(x)) \in G((c, d))$. Tedy je $H(x) \in G((c, d))$. Z maximality I máme tedy $\tilde{I} \subset I$ a z (13.4) dostáváme

$$z(x) = G^{-1}(H(x)) = y(x), \quad x \in \tilde{I}.$$

Z maximality řešení z pak plyne $\tilde{I} = I$. Tedy řešení z splývá s řešením y . ■

13.1.4 (postup při řešení (13.2)). Necht f, h jsou spojité funkce reálné proměnné. Při hledání maximálních řešení rovnice (13.2) postupujeme následujícím způsobem.

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $\mathcal{D}(h)$.

Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (13.2). Těmto řešením se říká **singulární** nebo také **stacionární**.

2. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.

3. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J . Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Necht H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J . Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení y , který nalezneme v následujícím kroku.

Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

(Zde G^{-1} je inverzní funkce ke G . Existuje, protože G je intervalu J buď rostoucí nebo klesající.)

Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení pomocí Věty 13.1.2.

13.1.5. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Řešení. V tomto případě máme v rovnici (13.2) $h(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

- (1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme řešení hledat na \mathbb{R} .
- (2) Nulové body funkce g jsou 1 a -1 . Tedy $y = 1$ a $y = -1$ jsou stacionárními řešeními naší rovnice.
- (3) Maximální otevřený interval, kde je g nenulová, je $(-1, 1)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v tomto intervalu.
- (4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, platí

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y^2(x)}} = 1.$$

Primitivní funkce k levé straně je $\arcsin y(x)$ a primitivní funkce k pravé straně je x . Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\arcsin y(x) = x + c.$$

- (5) Protože hledáme řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, pro pevné $c \in \mathbb{R}$ máme

$$y_c(x) = \sin(x + c), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right).$$

- (6) Lepením singulárních řešení s řešeními z bodu 5 dostaneme pro pevné $c \in \mathbb{R}$ maximální řešení

$$y_c(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - c], \\ \sin(x + c), & x \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c), \\ 1, & x \in [\frac{\pi}{2} - c, \infty) \end{cases}$$

♣

13.1.6. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = x \sqrt[3]{y^2}$.

Řešení. Zadaná rovnice je tvaru (13.2), kde $h(x) = x$ a $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$.

- (1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme hledat řešení na \mathbb{R} .
- (2) Nulový bod funkce g je 0, tedy $y = 0$ je stacionární řešení.
- (3) Maximální otevřené intervaly, kde je g nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

- (4) Je-li y řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, platí pro něj rovnost

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y^2}} = x.$$

Primitivní funkce k levé straně je $G(y) = 3y^{\frac{1}{3}}(x)$, primitivní funkce k pravé straně je $H(x) = \frac{x^2}{2}$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$3y^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{x^2}{2} + c.$$

- (5) Vezměme nyní $c \in \mathbb{R}$ pevné. Pro intervaly $J = (0, \infty)$ a $J = (-\infty, 0)$ hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \in J$ pro $x \in I_c$.

- Necht $J = (0, \infty)$. Pak výše uvedený požadavek dává tři možnosti:

$$- c > 0, I_c = \mathbb{R} \text{ a } y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3,$$

$$- c \leq 0, I_c = (-\infty, -\sqrt{-2c}) \text{ a } y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3,$$

$$- c \leq 0, I_c = (\sqrt{-2c}, \infty) \text{ a } y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3.$$

- Necht $J = (-\infty, 0)$. Hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \in (-\infty, 0)$ pro $x \in I_c$. Toto je možné pouze pro $c < 0$. Pak $I_c = (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c})$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3$.

- (6) Nalezená řešení z bodu (5) a (2) nyní lze lepit dohromady v bodech osy x , protože

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{-2c}} \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3 = 0.$$

To nám dává následujících devět různých typů maximálních řešení:

- $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$,
- $y(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3, x \in \mathbb{R}$, pro $c > 0$.
- pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2} + c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c}, \infty). \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2, c_2 \leq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_3}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_3}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \leq 0, c_1 \geq c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \geq 0, c_1 \geq c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \geq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{x^2+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty). \end{cases}$$

•

13.1.7. Příklad. Necht $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' + p(x)y = 0$.

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru $y' = -p(x)y$. Položíme-li $h(x) = -p(x)$ a $g(y) = y$, vidíme, že se jedná o speciální případ (13.2). Řešme tedy tuto rovnici metodou popsanou v 13.1.4.

- (1) Funkce $h(x) = -p(x)$ je spojitá na (a, b) , budeme tedy hledat řešení na tomto intervalu.
- (2) Existuje jediné stacionární řešení, a to $y(x) = 0$, $x \in (a, b)$.
- (3) Maximální intervaly, kde je funkce g spojitá a nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v těchto intervalech.
- (4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, pak y splňuje

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x).$$

Primitivní funkce k levé straně je $\log |y(x)|$. Funkce p je spojitá, a tudíž má primitivní funkci (viz Věta 13.1.2). Označme ji P . Pak je $-P$ primitivní funkce k $-p$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\log |y(x)| = c - P(x)$$

na definičním oboru y .

- (5) Protože $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$, nedostaneme žádnou omezující podmínku na x . Řešení jsou tudíž definovaná na celém (a, b) a splňují

$$|y(x)| = e^c \cdot e^{-P(x)},$$

neboli

$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (6) Nalezená řešení nelze nalepovat, neboť jsou zřejmě všechna maximální.

Nyní si zbývá uvědomit, že řešení nalezená v 5. kroku lze spolu se stacionárním řešením napsat jako

$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), k \in \mathbb{R}.$$

♣

13.2. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi typu

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{13.5}$$

kde p, q jsou spojitě funkce na daném intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Těto rovnici říkáme **lineární diferenciální rovnice prvního řádu**.

13.2.1. Věta. Maximální řešení rovnice (13.5) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (13.5). Díky Větě ?? je y spojitě diferencovatelná. Dostáváme tedy

$$y'(x) = q(x)e^{P(x)}e^{-P(x)} - p(x)e^{-P(x)} \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) - p(x)y_0e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)} \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) + p(x)y_0e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Zjevně $y(x_0) = y_0$.

Nechť z je nějaké jiné řešení rovnice (13.5). Pak $u = y - z$ řeší rovnici $u' + pu = 0$. Díky Příkladu 13.1.7 existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x) = ce^{-P(x)}$ na (a, b) . Protože $u(x_0) = 0$, je $c = 0$. Tedy $0 = u = y - z$ na (a, b) . Tím je jednoznačnost dokázána. ■

13.3. Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

13.3.1. Definice. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad (13.6)$$

kde a_0, \dots, a_{n-1} jsou reálná čísla a f je spojitá funkce na daném intervalu (a, b) .

Homogenní rovnici k rovnici (13.6) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (13.7)$$

13.3.2. Věta. Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (13.6), které splňuje podmínky

$$y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β) .

Důkaz. Položme

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}$$

a uvažujme soustavu

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= x_3, \\&\vdots \\x_{n-1}' &= x_n, \\x_n' &= f - (a_{n-1}x_n + \cdots + a_0x_1)\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}(t_0) = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}].$$

Dle Věty 13.5.1 má tato soustava právě jedno řešení \mathbf{x} na (α, β) , které splňuje počáteční podmínku. Pak je zřejmě funkce $y = x_1$ n -krát spojitě diferencovatelná a řeší (13.6). ■

13.3.3. Věta.

- Maximální řešení rovnice (13.7) jsou definována na celém \mathbb{R} a tvoří vektorový podprostor dimenze n prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.
- Nechť y_p je maximální řešení rovnice (13.6). Pak funkce y je jejím maximálním řešením právě tehdy, když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice (13.7).

Důkaz. (a) Dle Věty 13.3.2 jsou maximální řešení definovaná na \mathbb{R} . Definujme zobrazení $L: \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y.$$

Potom je zobrazení L lineární a množina řešení rovnice (13.7) je rovna $\text{Ker } L$. Jde tedy o vektorový prostor. Podle Věty 13.3.2. nalezneme maximální řešení y_1, y_2, \dots, y_n rovnice 13.7 splňující

$$\begin{array}{cccc}y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & \cdots & y_n(0) = 0 \\y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 & \cdots & y_n'(0) = 0 \\& \vdots & & \vdots \\y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & \cdots & y_n^{(n-1)}(0) = 1.\end{array}$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bázi prostoru $\text{Ker } L$. Nejprve ověříme její lineární nezávislost. Nechť c_1, \dots, c_n jsou reálná čísla splňující

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$c_1y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_ny_n^{(k)}(x) = 0.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod 0, dostaneme $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Řešení y_1, \dots, y_n jsou tedy lineárně nezávislá.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (13.7) je lineární kombinací y_1, \dots, y_n . Necht y je maximální řešení (13.7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (13.7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 13.3.2 rovnost $y = z$ na \mathbb{R} , takže $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$.

(b) Řeší-li y_p rovnici (13.6) a y_h rovnici (13.7), pak z linearitity zobrazení L plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (13.6). Obráceně, je-li y maximální řešení rovnice (13.6), pak $y - y_p \in \text{Ker } L$, tj. $y_h = y - y_p$ je maximální řešení rovnice (13.7). Tím je důkaz dokončen. ■

13.3.4. Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (13.7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Bázi prostoru všech maximálních řešení rovnice (13.7) nazýváme **fundamentální systém** rovnice (13.7).

13.3.5. Věta. Necht $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu χ s násobnostmi r_1, \dots, r_s . Necht $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_l + i\beta_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, \dots, q_l . Pak funkce

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ & \vdots & & & \\ & e^{\lambda_s t}, & t e^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1} e^{\lambda_s t}, \\ & e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & t e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, \\ & e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & t e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, \\ & \vdots & & & \\ & e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & t e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1} e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, \\ & e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & t e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1} e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t \end{aligned} \tag{13.8}$$

tvorí fundamentální systém rovnice (13.7).

13.3.6. Označení. Množinu všech komplexních polynomů značíme \mathcal{P} .

13.3.7. Lemma. Necht $\omega \in \mathbb{C}$ a $L : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ je definováno předpisem $L(P) = \omega P + P'$. Potom pro $k \in \mathbb{N}$ a $P \in \mathcal{P}$ platí

$$L^k(P) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí dle k . Je-li $k = 1$, platí $L(P) = \omega P + P'$.

Necht tvrzení platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak pomocí indukčního předpokladu a identity $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ dostáváme pro $k+1$ rovnost

$$\begin{aligned} L^{(k+1)}(P) &= L(L^k(P)) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j+1)} \\ &= \omega^{k+1} P + \sum_{j=1}^k \left(\binom{k}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + \binom{k}{j-1} \omega^{k-j+1} P^{(j)} \right) + P^{(k+1)} \\ &= \omega^{k+1} P + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + P^{(k+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)}. \end{aligned}$$

Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$. ■

13.3.8. Lemma. Necht Q je polynom a ω je jeho kořen násobnosti $s \in \mathbb{N}$. Pak

$$Q(\omega) = Q'(\omega) = \dots = Q^{(s-1)}(\omega).$$

13.3.9. Lemma. Necht $\omega \in \mathbb{C}$ je d -násobný kořen polynomu $Q(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ a P je polynom splňující st $P < d$. Pak

$$\sum_{k=0}^n a_k L^k(P) = 0,$$

kde $L(P) = \omega P + P'$.

Důkaz. Vzhledem k linearitě L stačí dokázat požadovanou rovnost pro polynom $P(z) = z^l$, kde $l \in \{0, \dots, d-1\}$. Platí

$$P^{(j)}(z) = \frac{l!}{(l-j)!} z^{l-j}, \quad j = 0, \dots, l, \quad P^{(j)}(z) = 0, \quad j > l.$$

Tedy máme z Lemmatu 13.3.7

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n a_k L^k(P) &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)} = \sum_{j=0}^l \sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)} \\
 &= \sum_{j=0}^l \sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} \omega^{k-j} \frac{l!}{(l-j)!} z^{l-j} \\
 &= \sum_{j=0}^l \frac{l! z^{l-j}}{(l-j)! j!} \sum_{k=j}^n a_k \frac{k!}{(k-j)!} \omega^{(k-j)} \\
 &= \sum_{j=0}^l \frac{l! z^{l-j}}{(l-j)! j!} Q^{(j)}(\omega) = 0,
 \end{aligned}$$

jelikož máme $Q(\omega) = Q'(\omega) = \dots = Q^{(d-1)}(\omega) = 0$ dle Lemmatu 13.3.8. \blacksquare

Důkaz. Necht $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je s -násobný kořen charakteristického polynomu χ , $s \in \mathbb{N}$. Položme

$$y(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t P_0(t) + \sin \beta t S_0(t)),$$

kde P_0, S_0 jsou polynomy, $\text{st } P_0, \text{st } S_0 < s$. Ukážeme, že y řeší (13.7). Platí

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= e^{\alpha t} (\alpha \cos \beta t P_0(t) + \alpha \sin \beta t S_0(t) \\
 &\quad - \beta \sin \beta t P_0(t) + \beta \cos \beta t S_0(t) \\
 &\quad + \cos \beta t P_0'(t) + \sin \beta t S_0'(t)) \\
 &= e^{\alpha t} (\cos \beta t (\alpha P_0 + \beta S_0 + P_0') + \sin \beta t (\alpha S_0 - \beta P_0 + S_0')),
 \end{aligned}$$

kde

$$P_1 = \alpha P_0 + \beta S_0 + P_0', \quad S_1 = \alpha S_0 - \beta P_0 + S_0'$$

jsou polynomy stupně menšího než s .

Pro derivace y tedy platí

$$y^{(j)}(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t P_j(t) + \sin \beta t S_j(t)), \quad j = 0, \dots, n,$$

kde

$$P_j = \alpha P_{j-1} + \beta S_{j-1} + P_{j-1}', \quad S_j = \alpha S_{j-1} - \beta P_{j-1} + S_{j-1}'.$$

Dosadíme derivace y do (13.7) a dostaneme

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \sum_{j=0}^n a_j P_j(t) + e^{\alpha t} \sin \beta t \sum_{j=0}^n a_j S_j(t).$$

Stačí tedy odvodit rovnosti

$$\sum_{j=0}^n a_j P_j = \sum_{j=0}^n a_j S_j = 0.$$

Označme

$$C_j = P_j + iS_j \quad \text{a} \quad \omega = \alpha - i\beta.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} C_{j+1} &= P_{j+1} + iS_{j+1} = \alpha P_j + \beta S_j + P_j' + i\alpha S_j - i\beta P_j + iS_j' \\ &= (\alpha - i\beta)P_j + i(\alpha - i\beta)S_j + P_j' + iS_j' \\ &= \omega C_j + C_j'. \end{aligned}$$

Definujeme-li $L(P) = \omega P + P'$, potom $C_j = L^j(C_0)$. Máme tak dle Lemma-tu 13.3.9

$$0 = \sum_{j=0}^n a_j L^j(C_0) = \sum_{j=0}^n a_j C_j = \sum_{j=0}^n a_j P_j + i \sum_{j=0}^n a_j S_j,$$

takže

$$\sum_{j=0}^n a_j P_j = \sum_{j=0}^n a_j S_j = 0.$$

Lineární nezávislost. Uvažujme lineární kombinaci funkcí ze systému (13.8), která je na intervalu (a, b) rovna nulové funkci. Předpokládejme, že funkce $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ a $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ se v této lineární kombinaci vyskytují s koeficienty a a b . Platí

$$\begin{aligned} at^k e^{\alpha t} \cos \beta t + bt^k e^{\alpha t} \sin \beta t &= at^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + bt^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}(a - bi)t^k e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{1}{2}(a + bi)t^k e^{(\alpha-i\beta)t}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Dále platí, že

$$a = b = 0 \Leftrightarrow a - bi = a + bi = 0. \quad (13.10)$$

Naši lineární kombinaci lze díky (13.9) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \dots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a P_1, \dots, P_k jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \dots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$. K důkazu lineární nezávislosti našeho systému stačí dokázat, že $P_1 = P_2 = \dots = P_k = 0$, protože pak budou všechny koeficienty polynomů P_1, \dots, P_k nulové a díky pozorování (13.10) obdržíme, že i koeficienty použité v naší lineární kombinaci jsou nulové.

Důkaz provedeme matematickou indukcí dle k . Pokud $k = 1$ a pro každé $x \in (a, b)$ platí $P_1(x)e^{\omega_1 x} = 0$, pak nutně $P_1(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, a tedy $P_1 = 0$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud P je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$\begin{aligned}(P(x)e^{\omega x})' &= P'(x)e^{\omega x} + P(x)\omega e^{\omega x} \\ &= (P'(x) + \omega P(x))e^{\omega x} = R(x)e^{\omega x},\end{aligned}$$

kde R je polynom stejného stupně jako P .

Předpokládejme nyní, že

$$\forall x \in (a, b): P_1(x)e^{\omega_1 x} + \dots + P_{k+1}(x)e^{\omega_{k+1} x} = 0,$$

tedy

$$\forall x \in (a, b): P_1(x)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})x} + \dots + P_k(x)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})x} + P_{k+1}(x) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme

$$\forall x \in (a, b): R_1(x)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})x} + \dots + R_k(x)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})x} = 0,$$

kde $\text{st } R_1 = \text{st } P_1, \dots, \text{st } R_k = \text{st } P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \dots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \dots = P_k = 0$. Potom

$$\forall x \in (a, b): P_{k+1}(x)e^{\omega_{k+1} x} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$. ■

13.3.10. Věta. Necht

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos vt + Q(t) \sin vt),$$

kde $\mu, v \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (13.6) ve tvaru

$$y(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos vt + S(t) \sin vt),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max \text{st } P, \text{st } Q$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i v$ jakožto kořen charakteristického polynomu.

13.3.1. Metoda variace konstant.

13.3.11. Lemma. Necht y_1, \dots, y_n tvoří fundamentální systém rovnice (13.7). Pak je matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

regulární pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbb{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbb{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \dots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (13.7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \dots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \dots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 13.3.2 máme $z = 0$ na \mathbb{R} . Funkce y_1, \dots, y_n tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$. To je ale spor s nenulovostí vektoru d , čímž je důkaz dokončen. ■

13.3.12. Hledejme řešení rovnice (13.6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a, b),$$

kde c_1, \dots, c_n jsou spojitě diferencovatelné funkce na (a, b) a $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (13.7). Počítejme

$$y'(t) = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y''(t) = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0$. Pokračováním tohoto procesu se dobereme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosadíme do (13.6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$

neboli

$$U(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Funkci c'_i vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

$$c'_i(t) = \frac{1}{\det U(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y'_1(t) & \dots & y'_{i-1}(t) & 0 & y'_{i+1}(t) & \dots & y'_n(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Pravá strana předchozího vztahu je spojitá funkce v t , takže hledaná $c_i, i = 1, \dots, n$, můžeme nalézt jako primitivní funkci k pravé straně.

13.4. Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{13.11}$$

kde $f_i, i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Vektorový tvar je

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

kde $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $x'(t) = [x'_1(t), \dots, x'_n(t)]$ a $f = [f_1, \dots, f_n]$.

13.4.1. Definice. Řešení soustavy (13.11) rozumíme vektorovou funkci $x = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu J s hodnotami v \mathbb{R}^n takovou, že pro každé $t \in J$ existují $x'_i(t), i = 1, \dots, n$, a platí (13.11). **Počáteční úlohou** pro (13.11) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení (13.11) splňující navíc předem zadanou podmínku $x(t_0) = x^0$, kde $[t_0, x^0] \in G$ (této podmínce se říká **počáteční podmínka**). **Maximální řešení** soustavy (13.11) je takové řešení x definované na intervalu J , které již nelze prodloužit, tj. je-li y řešení definované na intervalu $I, J \subset I$ a $y(t) = x(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

13.4.2. Mějme rovnici

$$y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{13.12}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2, \\x'_2 &= x_3, \\&\vdots \\x'_{n-1} &= x_n, \\x'_n &= h(t, x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Pokud x řeší (??), pak x_1 řeší (13.12). Obráceně, pokud y řeší (13.12), pak $[y, \dots, y^{(n-1)}]$ řeší (??).

13.4.3. Definice. Necht (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že množina \mathcal{F} zobrazení P do Q je **stejně spojitá**, pokud platí

$$\forall x \in P \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B_\rho(x, \delta) \forall f \in \mathcal{F} : f(y) \in B_\sigma(f(x), \varepsilon).$$

13.4.4. Je jednoduché si rozmyslet, že každá konečná množina spojitých zobrazení je stejně spojitá.

13.4.5 (prostor $\mathcal{C}(K, X)$). Necht K je kompaktní metrický prostor a X je Banachův prostor. Pak symbol $\mathcal{C}(K, X)$ značí množinu všech spojitých zobrazení K do X . Na této množině můžeme zavést operaci sčítání a násobení reálným číslem. Necht $f, g \in \mathcal{C}(K, X)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad x \in K, \\(\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \quad x \in K.\end{aligned}$$

Prostor $\mathcal{C}(K, X)$ je vzhledem k těmto operacím vektorový prostor. Necht $f \in \mathcal{C}(K, X)$. Pak $\mathcal{H}(f)$ je kompaktní množina v X (vizte Větu ??), a je tedy omezená (Věta ??). Proto má smysl položit

$$\|f\|_{\mathcal{C}(K, X)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|_X.$$

Je lehké si rozmyslet, že $\|\cdot\|_\infty$ je vskutku norma na $\mathcal{C}(K, X)$.

Dále si uvědomme, že prostor $\mathcal{C}(K, X)$ je v této normě díky Větě ?? úplný. Jedná se tedy o Banachův prostor.

13.4.6. Věta (Arzelà¹ - Ascoli²). Necht (K, ρ) je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Pak množina \mathcal{F} je relativně kompaktní v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ právě tehdy, když je omezená a stejně spojitá.

Důkaz. \Leftarrow Necht $\{f_n\}$ je posloupnost v \mathcal{F} .

Krok 1. Díky stejné spojitosti množiny \mathcal{F} nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in K$ kladné reálné číslo $r_x^n > 0$ takové, že

$$\forall f \in \mathcal{F} \forall y \in B(x, r_x^n) : \|f(x) - f(y)\| < \frac{1}{n}. \quad (13.13)$$

¹Cesare Arzelà (1847-1912)

²Giulio Ascoli (1843-1896)

Systém $\{B(x, r_x^n); x \in K\}$ zřejmě tvoří pokrytí K pro každé $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž K je kompaktní, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná množina $C_n \subset K$ taková, že $K \subset \bigcup \{B(x, r_x^n); x \in C_n\}$.

Krok 2. Položme $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Nyní nalezneme podposloupnost $\{f_{n_j}\}$ z posloupnosti $\{f_n\}$ takovou, že posloupnost $\{f_{n_j}(c)\}$ je cauchyovská pro každé $c \in C$.

Množina C je spočetná, a proto můžeme nalézt posloupnost $\{c_l\}_{l=1}^{\infty}$ takovou, že C jako $C = \{c_l; l \in \mathbb{N}\}$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že platí

- posloupnost $\{f_{n_k^m}(c_m)\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní,
- posloupnost $\{n_k^{m+1}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$.

Pro $m = 1$ využijeme omezenosti posloupnosti $\{f_n(c_1)\}_{n=1}^{\infty}$ a nalezneme posloupnost $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že posloupnost $\{f_{n_k^1}(c_1)\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní. Předpokládejme, že již máme zkonstruovanou posloupnost $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$. Potom je posloupnost $\{f_{n_k^{m+1}}(c_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ omezená. Můžeme tedy z posloupnosti $\{n_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ vybrat posloupnost $\{n_k^{m+1}\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že je posloupnost $\{f_{n_k^{m+1}}(c_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní. Pro $j \in \mathbb{N}$ položme $p_j = n_j^j$. Potom je $\{p_j\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí, že posloupnost $\{f_{p_j}(c_l)\}_{j=1}^{\infty}$ je konvergentní, neboť posloupnost $\{p_j\}_{j=l}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$.

Krok 3. Ukažme, že $\{f_{p_j}\}$ je cauchyovská v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Necht $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Posloupnost $\{f_{p_j}(c)\}_{j=1}^{\infty}$ je cauchyovská pro každé $c \in C$, a tedy díky konečnosti množiny C_n existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j, j' \geq j_0 \quad \forall c \in C_n: \|f_{p_j}(c) - f_{p_{j'}}(c)\| < \varepsilon.$$

Necht $x \in K$. Nalezneme $c \in C_n$ takové, že $x \in B(c, r_c^n)$. Pak pro $j, j' \geq j_0$ platí díky (13.13)

$$\begin{aligned} \|f_{p_j}(x) - f_{p_{j'}}(x)\| &\leq \|f_{p_j}(x) - f_{p_j}(c)\| + \|f_{p_j}(c) - f_{p_{j'}}(c)\| \\ &\quad + \|f_{p_{j'}}(c) - f_{p_{j'}}(x)\| \\ &\leq \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{n} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy pro každé $j, j' \geq j_0$ platí

$$\|f_{p_j} - f_{p_{j'}}\|_{\infty} = \sup_{x \in K} \|f_{p_j}(x) - f_{p_{j'}}(x)\| \leq 3\varepsilon.$$

Krok 4. Z dané množiny jsme tedy vybrali cauchyovskou podposloupnost $\{f_{p_j}\}$. Protože je $\mathcal{C}(K, X)$ úplný, je tato podposloupnost konvergentní. A tedy je \mathcal{F} relativně kompaktní.

\Rightarrow Necht \mathcal{F} je relativně kompaktní množina v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Pak je $\overline{\mathcal{F}}$ kompaktní, a tedy omezená. Proto je i \mathcal{F} omezená v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$.

Ukažme dále, že je stejně spojitá. Mějme tedy dáno $\varepsilon > 0$. Protože je $\overline{\mathcal{F}}$ kompaktní, je totálně omezená, a tedy existují funkce $f_1, \dots, f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ takové, že množina

$\{f_1, \dots, f_n\}$ tvoří konečnou ε -sít v $\overline{\mathcal{F}}$. Jelikož je $\{f_1, \dots, f_n\}$ konečná, je stejně spojitá dle 13.4.4. Mějme nyní dáno $x \in K$. Najdeme tedy $\delta > 0$ splňující

$$\forall y \in B(x, \delta) \forall i \in \{1, \dots, n\}: \|f_i(y) - f_i(x)\| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní libovolné $f \in \mathcal{F}$. K němu nalezneme $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $\|f_i - f\|_\infty < \varepsilon$. Pak pro $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f(y) - f_i(y)\| + \|f_i(y) - f_i(x)\| + \|f_i(x) - f(x)\| < 3\varepsilon.$$

Tedy \mathcal{F} je stejně spojitá. ■

13.4.7. Lemma. Necht $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá na G a $[t_0, \mathbf{x}_0] \in G$. Pak $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ řeší na otevřeném intervalu I obsahujícím t_0 rovnici (13.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ právě tehdy, když je \mathbf{x} spojitý, $[t, \mathbf{x}(t)] \in G$ pro $t \in I$ a pro každé $t \in I$ platí

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds.$$

Důkaz. \Rightarrow Je-li \mathbf{x} řešením, pak $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $[t, \mathbf{x}(t)] \in G$ a

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ dostáváme integrací od t_0 do t vztah

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds,$$

neboli

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds.$$

\Leftarrow Necht \mathbf{x} je spojitý zobrazení s popsánými vlastnostmi. Protože je zobrazení $s \mapsto \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))$ dobře definované a spojitý, díky Věťe ?? je \mathbf{x} diferencovatelné zobrazení a platí

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad t \in I.$$

Zjevně $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. ■

13.4.8. Věta (Peano). Necht $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá na G . Pak pro každé $[t_0, \mathbf{x}_0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (13.11) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Důkaz. V první části důkazu budeme hledat řešení definované na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím t_0 .

Krok 1. Rozmysleme si, že řešení stačí hledat na nějakém intervalu tvaru $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ (Řešením na tomto intervalu rozumíme spojitý zobrazení $\mathbf{x} : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ a (13.11) na $(t_0, t_0 + \varepsilon)$). Mějme totiž vyřešenou takovou úlohu. Pak lze uvažovat úlohu s obráceným časem

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{f}(-t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(-t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (13.14)$$

Je-li $\phi(t)$ řešení (13.14) na intervalu $[-t_0, -t_0 + \varepsilon_2]$ a $\psi(t)$ je řešení (13.11) na $[t_0, t_0 + \varepsilon_1]$ s počáteční podmínkou $\psi(t_0) = \mathbf{x}_0$, pak

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \phi(-t), & t \in [t_0 - \varepsilon_2, t_0], \\ \psi(t), & t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_1] \end{cases}$$

je řešení (13.11) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Krok 2. Vezměme $a, b \in (0, \infty)$ takové, že

$$K = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, b) \subset G.$$

Protože je K kompaktní, je dle Věty ?? zobrazení f na K stejnoměrně spojitá a omezené (viz Věta ??). Tedy existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ takové, že

$$\|f(t, \mathbf{y})\| \leq L, \quad t \in [t_0, t_0 + a], \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, b).$$

Položme

$$c = \min\left\{a, \frac{b}{L}\right\}, \quad I = [t_0, t_0 + c]$$

a

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n; (\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0) \& (\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(s)\| \leq L|t - s|, t, s \in I)\}.$$

Krok 3. Povšimněme si, že \mathcal{F} sestává z L -lipschitzovských zobrazení, a tedy se jedná o stejně spojitou množinu. Dále platí

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{F} \quad \forall t \in I : \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0)\| \leq L|t - t_0| \leq Lc \leq b.$$

Tedy \mathcal{F} je množina omezená v $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Snadno se pak ověří, že je uzavřená. Tedy je dle Věty ?? kompaktní.

Krok 3. Definujme $F : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ jako

$$F(\mathbf{y}) = \max_{t \in I} \left\| \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds \right\| = \left\| \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds \right\|_{\infty}.$$

Zobrazení F je dobře definované. Zobrazení $s \mapsto \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))$ je totiž spojitě na I , a tedy je dle Věty ?? spojitě i zobrazení

$$t \mapsto \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds.$$

Protože je norma spojitá funkce na \mathbb{R}^n , je funkce

$$t \mapsto \left\| \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds \right\|$$

spojitá na I .

Krok 4. Nyní ukážeme, že je zobrazení F spojitě na \mathcal{F} . Mějme tedy dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti f na K existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ takové, že

$$\forall [t, \mathbf{z}], [t', \mathbf{z}'] \in K : (|t - t'| < \delta \& \|\mathbf{z} - \mathbf{z}'\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{f}(t, \mathbf{z}) - \mathbf{f}(t', \mathbf{z}')\| < \varepsilon.$$

Nechť $y_1, y_2 \in \mathcal{F}$, $\|y_1 - y_2\|_\infty < \delta$. Pak máme $\sup_{s \in I} \|y_1(s) - y_2(s)\| < \delta$, a tedy

$$\begin{aligned} |F(y_1) - F(y_2)| &= \left\| y_1(t) - \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds - \left(y_2(t) - \int_{t_0}^t f(s, y_2(s)) ds \right) \right\|_\infty \\ &\leq \|y_1(t) - y_2(t)\|_\infty + \sup_{t \in I} \int_{t_0}^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| \\ &\leq \varepsilon + \int_{t_0}^{t_0+c} \varepsilon ds = \varepsilon(1+c). \end{aligned}$$

Tím je spojitost F ukázána.

Krok 5. Jelikož je F spojitá funkce na kompaktní množině, nabývá svého minima v nějakém bodě $x \in \mathcal{F}$. Zbytek důkazu bude věnován ověření $F(x) = 0$, což dle Lemmatu 13.4.7 stačí k nalezení řešení na intervalu I .

Krok 6. Nyní zkonstruujeme funkce $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ v \mathcal{F} splňující $F(x_k) \rightarrow 0$. K tomuto účelu vezměme $k \in \mathbb{N}$ pevné. Induktivně sestrojíme zobrazení $x_k : I \rightarrow \overline{B}(x^0, b)$ takové, že $x_k \in \mathcal{F}$ a $F(x_k) \leq \frac{Lc}{k}$.

Položme nejprve

$$x_k(t) = x^0, \quad t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}].$$

Dále definujeme

$$x_k(t) = x^0 + \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^t f(s - \frac{c}{k}, x_k(s - \frac{c}{k})) ds, \quad t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + \frac{2c}{k}].$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $j \in \{2, \dots, k-1\}$ je zobrazení x_k definované na $[t_0, t_0 + \frac{jc}{k}]$ a splňuje

$$x_k(t) = x^0 + \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^t f(s - \frac{c}{k}, x_k(s - \frac{c}{k})) ds, \quad t \in [t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}]. \quad (13.15)$$

Pak máme z (13.15)

$$\begin{aligned} \|x^0 - x_k(t)\| &= \left\| \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^t f(s - \frac{c}{k}, x_k(s - \frac{c}{k})) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^t \|f(s - \frac{c}{k}, x_k(s - \frac{c}{k}))\| ds \\ &\leq L(t - t_0 - \frac{c}{k}) \leq Lc \leq b, \quad t \in (t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}]. \end{aligned}$$

Tedy je zobrazení $s \mapsto f(s - \frac{c}{k}, x_k(s - \frac{c}{k}))$ dobře definované na $(t_0 + \frac{jc}{k}, t_0 + \frac{(j+1)c}{k}]$ a můžeme položit

$$x_k(t) = x_k(t_0 + \frac{jc}{k}) + \int_{\frac{jc}{k}}^t f(s - \frac{c}{k}, x_k(s - \frac{c}{k})) ds, \quad t \in (\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}].$$

Pak zřejmě platí

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^t \mathbf{f}\left(s - \frac{c}{k}, \mathbf{x}_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) ds, \quad t \in \left(\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}\right].$$

Tím je konstrukce zobrazení \mathbf{x}_k na celém intervalu $[t_0, t_0 + c]$ ukončena. Povšimněme si, že z konstrukce vyplývá rovnost

$$\mathbf{x}_k(t) = \begin{cases} \mathbf{x}^0, & t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}], \\ \mathbf{x}^0 + \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^t \mathbf{f}\left(s - \frac{c}{k}, \mathbf{x}_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) ds, & t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c] \end{cases} \quad (13.16)$$

Po substituci $s - \frac{c}{k} = u$ obdržíme rovnost

$$\mathbf{x}_k(t) = \begin{cases} \mathbf{x}^0, & t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}], \\ \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t - \frac{c}{k}} \mathbf{f}(u, \mathbf{x}_k(u)) du, & t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c] \end{cases} \quad (13.17)$$

Krok 7. Ukážeme, že $\mathbf{x}_k \in \mathcal{F}$. K tomu je třeba ověřit L -lipschitzovskost \mathbf{x}_k . Mějme tedy dány body $t, s \in [t_0, t_0 + c]$ splňující $t < s$. Pokud $t, s \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, nerovnost

$$\|\mathbf{x}_k(s) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq L(s - t)$$

zjevně platí. Pokud $t_0 + \frac{c}{k} \leq t$, pak máme z (13.16) odhad

$$\|\mathbf{x}_k(s) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq \int_t^s \left\| \mathbf{f}\left(u - \frac{c}{k}, \mathbf{x}_k\left(u - \frac{c}{k}\right)\right) \right\| du \leq L(s - t).$$

Pokud $t \leq t_0 + \frac{c}{k} \leq s$, pak

$$\|\mathbf{x}_k(s) - \mathbf{x}_k(t)\| = \left\| \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^s \mathbf{f}\left(u - \frac{c}{k}, \mathbf{x}_k\left(u - \frac{c}{k}\right)\right) du \right\| \leq L\left(s - t_0 - \frac{c}{k}\right) \leq L(s - t).$$

Tedy $\mathbf{x}_k \in \mathcal{F}$.

Krok 8. Nyní ověříme, že

$$F(\mathbf{x}_k) \leq \frac{Lc}{k}. \quad (13.18)$$

Nechť $t \in [t_0, t_0 + c]$ je dáno. Pokud $t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, pak

$$\left\| \mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}^0 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s))\| ds \leq \frac{Lc}{k}.$$

Pokud $t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, pak

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}^0 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds \right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t - \frac{c}{k}} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t - \frac{c}{k}}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s))\| ds \leq \frac{Lc}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$F(\mathbf{x}_k) = \max_{t \in I} \left\| \mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}^0 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds \right\| \leq \frac{Lc}{k}.$$

Funkce \mathbf{x} tedy splňuje

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds,$$

a tedy na intervalu I řeší rovnici (13.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ (viz Lemma 13.4.7).

Hledejme nyní nějaké *maximální* řešení procházející bodem $[t_0, \mathbf{x}^0]$. Položme

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} \text{ řeší (13.11) a } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0\}.$$

Definujme na \mathcal{A} částečné uspořádání vztahem

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \text{graf } \mathbf{x} \subset \text{graf } \mathbf{y}.$$

Pokud $\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ je řetězec, je $\bigcup \mathcal{R}$ horní závora \mathcal{R} . Maximální prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ je potom maximálním řešením (13.11), který splňuje $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Tím je důkaz dokončen. ■

13.4.9. Věta (Picard). Necht $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\mathbf{f} : [t, \mathbf{x}] \rightarrow \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení na G a je „lokálně lipschitzovské v x “, tj. pro každý bod $[t, \mathbf{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \mathbf{x}^1], [s, \mathbf{x}^2] \in B([t, \mathbf{x}], \varepsilon)$ máme

$$\|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}^2)\| \leq L \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|.$$

Jestliže $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení \mathbf{x} rovnice (13.11) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

13.4.10. Poznámka. Pokud \mathbf{f} je třídy \mathcal{C}^1 na G , potom \mathbf{f} splňuje podmínky Věty 13.4.9. Stačí totiž použít Větu ?? o přírůstku vektorové funkce.

Důkaz. Krok 1. Pro $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ nalezneme L a ε svědčící o lipschitzovskosti \mathbf{f} ve druhé proměnné na $B(\mathbf{x}^0, \varepsilon)$, tj.

$$\forall [s, \mathbf{x}^1], [s, \mathbf{x}^2] \in B([t_0, \mathbf{x}^0], \varepsilon) : \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}^2)\| \leq L \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|.$$

Navíc můžeme předpokládat, že existuje $K \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall [s, \mathbf{x}] \in B([t_0, \mathbf{x}^0], \varepsilon) : |\mathbf{f}(s, \mathbf{x})| \leq K.$$

Zvolme $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ takové, že

$$2L\delta < 1 \quad \text{a} \quad K\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Pak máme

$$I \times B(\mathbf{x}^0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \overline{B}([t_0, \mathbf{x}^0], \varepsilon) \subset G.$$

Krok 2. Uvažujme Banachův prostor $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ a jeho podmnožinu $M = \overline{B}(\mathbf{g}^0, \frac{\varepsilon}{2})$, kde $\mathbf{g}^0(t) = \mathbf{x}^0$, $t \in I$. Pak M je uzavřená podmnožina úplného prostoru $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$,

a tedy je sama úplná (viz Věta ??). Definujme zobrazení $T : M \rightarrow M$ předpisem

$$T\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) \, ds, \quad t \in I, \mathbf{x} \in M.$$

Ukažme, že T je dobře definováno. Pokud $\mathbf{x} \in M$, pak

$$[s, \mathbf{x}(s)] \in I \times \overline{B}(\mathbf{x}^0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset G, \quad s \in I.$$

Funkce $s \mapsto \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))$ je spojitá na I , a tedy $T\mathbf{x} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}^0(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) \, ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\| \, ds \\ &\leq K\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Odtud máme $\|T\mathbf{x} - \mathbf{g}^0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $T\mathbf{x} \in M$.

Krok 3. Dále ověříme, že zobrazení T je kontrakce na prostoru M . Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ totiž máme

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}\| &= \sup_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) \, ds - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in I} \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\| \, ds \\ &\leq \sup_{t \in I} \int_{t_0}^t L \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\| \, ds \\ &\leq L \cdot 2\delta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

Protože $2L\delta < 1$, T je vskutku kontrakce.

Krok 4. Použitím Banachovy věty o kontrakci ?? najdeme jednoznačně určený prvek $\mathbf{x} \in M$ splňující $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, neboli

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) \, ds.$$

Dle Lemmatu 13.4.7 je \mathbf{x} řešením (13.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

Krok 5. Ukažme, že řešení \mathbf{x} je určeno na okolí bodu t_0 jednoznačně, tj., je-li $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ řešením (13.11), kde J je otevřený interval obsahující t_0 a $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}^0$, pak $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ na nějakém otevřeném intervalu obsaženém v $J \cap I$. Mějme tedy takové řešení $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vezmeme $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$ takové, že $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}] \subset J$ a $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}^0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $t \in [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$. Položíme $\tilde{I} = [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$ a uvažujme objekty $\mathcal{C}(\tilde{I}, \mathbb{R}^n)$, \tilde{M} a \tilde{T} definované analogicky jako v předešlém. Předchozí postup dává, že existuje právě jedno $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{M}$ takové, že $\tilde{T}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}$. Protože $\mathbf{x}|_{\tilde{I}}, \mathbf{y}|_{\tilde{I}} \in \tilde{M}$ a splňují

$$\mathbf{x}|_{\tilde{I}} = \tilde{T}(\mathbf{x}|_{\tilde{I}}), \quad \mathbf{y}|_{\tilde{I}} = \tilde{T}(\mathbf{y}|_{\tilde{I}}),$$

platí díky jednoznačnosti $\tilde{\mathbf{x}}$ rovnost $\mathbf{x}|_{\tilde{I}} = \mathbf{y}|_{\tilde{I}}$.

Krok 6. Stejně jako v důkazu Peanovy věty 13.4.8 najdeme nyní maximální řešení $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ rovnice (13.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

Krok 7. Ukažme jednoznačnost tohoto maximálního řešení. Necht $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ je jiné maximální řešení (13.11) splňující $y(t_0) = x^0$. Označme

$$S = \{t \in I \cap J; x(t) = y(t)\}.$$

Ze spojitosti řešení je S uzavřená v $I \cap J$, díky Kroku 5. je množina S otevřená v $I \cap J$. Máme-li totiž $s \in S$, pak na nějakém okolí s má rovnice (13.11) pouze jedno řešení procházející bodem $[s, x(s)]$. Na tomto okolí se tedy řešení x a y rovnají. Nakonec si uvědomíme, že S je neprázdná díky bodu t_0 . Protože je množina $I \cap J$ souvislá (viz Věta ??), platí $S = I \cap J$ dle Věty ??.

Nakonec ukažme, že $I = J$. Pokud by existoval $I \setminus J \neq \emptyset$, pak by funkce

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in I \setminus J, \\ y(t), & t \in J, \end{cases}$$

byla řešením striktně větším než y , což by byl spor s maximalitou y . Tedy $I \subset J$. Analogicky pak odvodíme $J \subset I$. Tím je důkaz dokončen. ■

13.4.11. Lemma. Necht x je řešení (13.11) na intervalu (α, β) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x^0$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takové, že řešení x lze prodloužit na interval $(\alpha, \beta + \varepsilon)$;
- (ii) Existuje posloupnost $\{t_n\}$ ležící v (α, β) a $y \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [t_m, x(t_m)] = [\beta, y] \in G.$$

Důkaz. (ii) \Rightarrow (i) Existuje-li řešení \tilde{x} rozšiřující x za bod β , pak pro každou posloupnost $\{t_m\}$ konvergující k β platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [t_m, x(t_m)] = [\beta, \tilde{x}(\beta)] \in G.$$

(i) \Rightarrow (ii) Necht $\{t_m\}$ a y splňují podmínku popsanou v (ii). Ukážeme nejprve, že

$$\lim_{t \rightarrow \beta_+} x(t) = y. \quad (13.19)$$

Zvolme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že

$$[\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(y, \delta) \subset G$$

a necht $M \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\sup\{f([t, z]); [t, z] \in [\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(y, \delta)\} \leq M.$$

Předpokládejme, že (13.19) neplatí. Z Heineovy věty (viz Věta ??) existuje posloupnost $\{\tau_n\}$ v (α, β) konvergující k β a číslo $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ takové, že $\|x(\tau_n) - y\| \geq \gamma$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\gamma < \delta$. Postupným vybíráním členů posloupností $\{t_n\}$ a $\{\tau_n\}$ lze zařídit, aby $t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \dots$ a $\|x(t_n) - y\| < \gamma$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$s_n = \inf\{t \in [t_n, \tau_n]; \|x(t) - y\| \geq \gamma\}.$$

Pak $s_n \in (t_n, \tau_n)$ (máme $\|\mathbf{x}(t_n) - y\| < \gamma$ a funkce $t \mapsto \|\mathbf{x}(t) - y\|$ je spojitá v t_n). Ze spojitosti funkce $t \mapsto \|\mathbf{x}(t) - y\|$ dostáváme $\|\mathbf{x}(s) - y\| \geq \gamma$. Pokud by tato norma byla větší než γ , byla by větší i na nějakém okolí bodu s_n . Tedy by existoval bod t nalevo od s_n splňující $\|\mathbf{x}(t) - y\| \geq \gamma$, což je spor s definicí infima. Tedy $\|\mathbf{x}(s_n) - y\| = \gamma$.

Dále platí $\|\mathbf{x}(t) - y\| \leq \gamma$ pro $t \in [t_n, s_n]$. To nahlédneme opět sporem; pokud by $\|\mathbf{x}(t) - y\| > \gamma$ pro nějaké $t \in [t_n, s_n)$, dostali bychom znovu spor s definicí bodu s_n . Tedy

$$\forall t \in [t_n, s_n] : \|\mathbf{x}(t) - y\| \leq \gamma < \delta.$$

Pak ale máme $[s, \mathbf{x}(s)] \in [\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(y, \delta)$ pro $s \in [t_n, s_n]$, a tedy

$$\begin{aligned} \gamma &= \|\mathbf{x}(s_n) - y\| \leq \|\mathbf{x}(s_n) - \mathbf{x}(t_n)\| + \|\mathbf{x}(t_n) - y\| \\ &\leq \int_{t_n}^{s_n} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\| \, ds + \|\mathbf{x}(t_n) - y\| \\ &\leq M \|s_n - t_n\| + \|\mathbf{x}(t_n) - y\|. \end{aligned}$$

Tím dostáváme spor, neboť pravá strana konverguje k 0 pro n jdoucí do nekonečna. Tedy platí (13.19).

Nyní uvažujme nějaké řešení y úlohy (13.11) na intervalu $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(\beta) = y$. Pak je funkce

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & t \in (\alpha, \beta), \\ \mathbf{y}(t), & t \in [\beta, \beta + \varepsilon). \end{cases}$$

prodloužením řešení \mathbf{x} za bod β (viz Lemma 13.1.2). ■

13.4.12. Věta. Necht $\mathbf{x} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešení (13.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Necht $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, že $[t_0, \beta] \times K \subset G$ a necht existuje posloupnost $\{t_n\}$ konvergující k β a splňující $\mathbf{x}(t_n) \in K$. Pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a řešení $\mathbf{y} : (\alpha, \beta + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ rovnice (13.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}^0$ shodující se na (α, β) s \mathbf{x} .

Důkaz. Mějme posloupnost $\{t_n\}$ konvergující k β a splňující $\mathbf{x}(t_n) \in K$. Protože K je kompaktní, lze po eventuálním výběru podposloupnosti předpokládat, že $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow y$ pro nějaké $y \in K$. Lemma 13.4.11 tedy dává rozšíření řešení za bod β . ■

13.4.13. Lemma (Gronwall³). Necht funkce x je spojitá na intervalu $[\alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$. Necht existují čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c \geq 0$ taková, že pro každé $t \in [\alpha, \beta)$ platí

$$x(t) \leq a + \int_{\alpha}^t (bx(s) + c) \, ds.$$

Pak pro každé $t \in [\alpha, \beta)$ platí

$$u(t) \leq \left(a + \frac{c}{b}\right) e^{b(t-\alpha)}.$$

³Thomas Hakon Grönwall (1877-1932)

Důkaz. Označme

$$y(t) = a + \int_{\alpha}^t (bx(s) + c) ds, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Platí

$$y(\alpha) = a \quad a \quad y'(t) = bx(t) + c \leq by(t) + c, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Proto také

$$y'(t)e^{-bt} \leq by(t)e^{-bt} + ce^{-bt}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Odtud plyne

$$\left(y(t)e^{-bt} \right)' \leq ce^{-bt}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Použitím Věty ?? a úpravou postupně dostáváme pro každé $s \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^s \left(y(t)e^{-bt} \right)' dt &\leq \int_{\alpha}^s ce^{-bt} dt, \\ \left[y(t)e^{-bt} \right]_{\alpha}^s &\leq \left[-\frac{c}{b}e^{-bt} \right]_{\alpha}^s, \\ y(s)e^{-bs} - y(\alpha)e^{-b\alpha} &\leq -\frac{c}{b}e^{-bs} + \frac{c}{b}e^{-b\alpha}. \end{aligned}$$

Odtud již dostáváme

$$x(s) \leq y(s) \leq a + e^b(s - \alpha) - \frac{c}{b} + \frac{c}{b}e^{b(s-\alpha)} \leq \left(a + \frac{c}{b} \right) e^{b(s-\alpha)}$$

pro každé $s \in [\alpha, \beta]$. ■

13.4.14. Věta. Necht I je otevřený interval a $G = I \times \mathbb{R}^n$. Necht pro každý uzavřený omezený interval $J \subset I$ existují nezáporné konstanty M_J, L_J takové, že

$$\forall [t, \mathbf{x}] \in J \times \mathbb{R}^n : \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq M_J + L_J \|\mathbf{x}\|.$$

Pak je každé maximální řešení (13.11) definováno na celém I .

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že všechny konstanty L_J jsou kladné. Necht \mathbf{x} je řešení (13.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ a $J \subset I$ je libovolný omezený uzavřený interval obsahující t_0 . Pak máme pro $t \in J$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &= \left\| \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds \right\| \\ &\leq \|\mathbf{x}^0\| + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\| ds \\ &\leq \|\mathbf{x}^0\| + \int_{t_0}^t (M_J + L_J \|\mathbf{x}(s)\|) ds. \end{aligned}$$

Dle Gronwallovy nerovnosti 13.4.13 pak obdržíme pro $t \in J$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left(\|\mathbf{x}^0\| + \frac{M_J}{L_J} \right) e^{L_J(t-t_0)}.$$

Protože je funkce $e^{L_J(t-t_0)}$ na J omezená (viz Věta ??), leží řešení \mathbf{x} na J v nějaké uzavřené kouli. Podle Věty 13.4.12 lze řešení \mathbf{x} prodloužit z J na nějaký otevřený interval \tilde{J} , $J \subset \tilde{J} \subset I$. Protože je \mathbf{x} maximální, obsahuje jeho definiční obor \tilde{J} . Tedy \mathbf{x} je definováno na každém omezeném uzavřeném podintervalu I , a tedy na I . ■

13.5. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \quad (13.20)$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ jsou spojité funkce.

Vektorový tvar je

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

13.5.1. Věta. Necht $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Necht $A : (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení \mathbf{x} soustavy (13.20) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β) .

Důkaz. Definujme $\mathbf{f} : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t).$$

Zobrazení \mathbf{f} je na množině $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ spojité.

Dále ukažme, že je „lipschitzovské v druhé proměnné“. Mějme $[t, \mathbf{x}] \in (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ dáno. Zvolme uzavřený omezený interval J , $t \in J \subset (\alpha, \beta)$. Položme

$$M_J = \sup_{t \in J} \|\mathbf{b}(t)\| \quad \text{a} \quad L_J = \sup_{t \in J} \|A(t)\|,$$

což jsou díky spojitosti uvažovaných funkcí nezáporná reálná čísla. Pak pro $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^2)\| = \|A(t)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)\| \leq L_J \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|.$$

Tedy dle Věty 13.4.9 existuje maximální řešení \mathbf{x} splňující počáteční podmínku a je určeno jednoznačně.

Dále ukažme, že pro každý omezený uzavřený interval $J \subset (\alpha, \beta)$ obsahující t_0 splňují konstanty M_J, L_J definované výše odhady Věty 13.4.14. Vskutku,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| &= \|\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\| \leq \|\mathbf{A}(t)\| \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{b}(t)\| \\ &\leq L_J \|\mathbf{x}\| + M_J, \quad [t, \mathbf{x}] \in J \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Věta 13.4.14 tedy říká, že řešení \mathbf{x} je definováno na celém intervalu (α, β) . ■

13.5.2. Definice. Je-li \mathbf{A} jako v (13.20), pak **homogenní soustavou** rozumíme soustavu rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \quad (13.21)$$

13.5.3. Věta. Necht $n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha < \beta$ a $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$ je spojitě zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (13.21) tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n .

Důkaz. Podle Věty 13.5.1 je každé maximální řešení (13.21) definováno na (α, β) . Množina maximálních řešení je rovna jádru $\text{Ker } L$ lineárního zobrazení $L : \mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ definovaného předpisem $L\mathbf{y} = \mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y}$. Tedy se jedná o vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$.

K důkazu jeho n -dimenzionality zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$ soustavy (13.21) na (α, β) splňující $\mathbf{x}^i(t_0) = \mathbf{e}^i, i = 1, \dots, n$. Funkce $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ lineárně nezávislé. Necht \mathbf{y} je maximální řešení (13.21). Pak \mathbf{y} je definováno na (α, β) . Označme

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}_1(t_0)\mathbf{x}^1(t) + \dots + \mathbf{y}_n(t_0)\mathbf{x}^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$ a \mathbf{z} řeší (13.21) na (α, β) . Z jednoznačnosti řešení plyne

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t) = \mathbf{y}_1(t_0)\mathbf{x}^1(t) + \dots + \mathbf{y}_n(t_0)\mathbf{x}^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Tedy $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n\}$ je báze prostoru $\text{Ker } L$. ■

13.5.4. Věta. Necht $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha < \beta$ a $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Necht $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n), \mathbf{b} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Necht \mathbf{y} je řešení (13.20) na (α, β) . Potom každé řešení soustavy (13.20) na intervalu (α, β) má tvar $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, kde \mathbf{z} je jisté řešení (13.21).

Důkaz. Jelikož je zobrazení $L : \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y}$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, máme pro maximální řešení \mathbf{x} rovnice (13.20) rovnost

$$L(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = L\mathbf{x} - L\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

a tedy $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ řeší (13.21). ■

13.5.5. Definice. Necht' tvoří vektorové funkce y^1, \dots, y^n bázi prostoru řešení rovnice (13.21) na (α, β) . Takovou množinu nazýváme **fundamentální systém** rovnice (13.21). Označme

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Matici ϕ nazýváme **fundamentální maticí** soustavy (13.21).

13.5.6. Lemma. Necht' ϕ je fundamentální matice rovnice (13.21). Pak $\phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz. Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\Phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 y^1(t_0) + \dots + c_n y^n(t_0) = \mathbf{0}.$$

Potom řešení

$$y = c_1 y^1 + \dots + c_n y^n$$

splňuje $y(t_0) = \mathbf{0}$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $y = \mathbf{0}$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí y^1, \dots, y^n . ■

13.5.7. Věta (Variace konstant). Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení y rovnice (13.20) s počáteční podmínkou $y(t_0) = y^0$ má tvar

$$y(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)y^0 + \phi(t) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde ϕ je fundamentální matice soustavy (13.21).

Důkaz. Matice $\phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 13.5.6 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)$, a tedy je y dobře definováno. Použitím $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \phi'(t)\phi^{-1}(t_0)y^0 + \phi'(t) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds + \phi(t)\phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \\ &= A(t)\phi(t)\phi^{-1}(t_0)y^0 + A(t)\phi(t) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds + \mathbf{b}(t) \\ &= A(t)y(t) + \mathbf{b}(t). \end{aligned}$$

Zřejmě platí $y(t_0) = y^0$. ■

13.6. Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

13.6.1. Věta. Necht $A \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $y' = Ay$. Pak y je třídy \mathcal{C}^∞ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $y^{(k)}(t) = A^k y(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k . Pro $k = 1$ máme $y' = Ay$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbb{N}$ je y je třídy \mathcal{C}^k a $y^{(k)} = A^k y$. Pak máme

$$(A^k y)' = A^k y' = A^k Ay = A^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = (A^k y)' = A^{k+1} y.$$

Funkce y je tedy třídy \mathcal{C}^{k+1} a platí požadovaný vztah. Tím je důkaz dokončen. ■

13.6.2. Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -maticí.

Řádkovými úpravami λ -matice rozumíme

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde P je polynom v proměnné λ .

13.6.3. Lemma. Necht $A = (P_1, \dots, P_n)^T$ je λ -matice o rozměrech $n \times 1$. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ -matici $\tilde{A} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

Důkaz. Předpokládejme, že $A \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(A) = \min\{\text{st } P_i; i \in \{1, \dots, n\}, P_i \neq 0\}.$$

Použijeme matematickou indukcí podle $k(A)$. Je-li $k(A) = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$. Potom lze pomocí třetí řádkové úpravy převést A na $(c, 0, \dots, 0)^T$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $A \neq 0$ splňující $k(A) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici A splňující $k(A) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\text{st } P_1 = k$. Pokud P_j , $j \neq 1$, je nenulový prvek A , pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\text{st } P_j^* < \text{st } P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^* . Matici A tak lze převést na matici $A^* = (P_1, P_2^*, \dots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1 , nebo $k(A^*) < k$ a lze použít indukční předpoklad. ■

13.6.4. Věta. Necht $A \in M(n \times n)$. Pak lze matici $\lambda I - A$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ -matici. Výsledná λ -matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n .

Důkaz. Nejprve ukážeme, že každou λ -matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ -matici. Použijeme matematickou indukci podle n . Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Necht A je λ -matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na A aplikujeme řádkové úpravy, které převedou A na \tilde{A} , jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (vizte Lemma 13.6.3). Na submatici matice \tilde{A} , která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.

Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Necht A je horní trojúhelníková λ -matice vzniklá z $\lambda I - A$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{A} = c \det(\lambda I - A)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c \det(\lambda I - A)$ je n -tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení. ■

13.6.5. Označení. Necht $P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_0$ je polynom s reálnými koeficienty a $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n -tého řádu na \mathbb{R} . Pak symbol $P\left(\frac{d}{dx}\right)y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y.$$

Necht $\mathcal{P} = (P_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je λ -matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající \mathcal{P} rozumíme soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n1}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0. \end{aligned}$$

13.6.6. Lemma. Necht P, Q jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pak

- (a) $(P + Q)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)y + Q\left(\frac{d}{dx}\right)y$,
- (b) $(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)y\right)$.

Důkaz. (a) Tvrzení je zřejmé.

(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^m a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^n b_j \lambda^j$ máme

$$\begin{aligned} (PQ)\left(\frac{d}{dx}\right)y &= \left(\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^n b_j \lambda^j\right)\left(\frac{d}{dx}\right)y \\ &= \left(\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)y = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n a_k b_j y^{(k+j)} \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{j=0}^n b_j y^{(j)}\right)^{(k)} = P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)y\right), \end{aligned}$$

a tedy platí (b). ■

13.6.7. Věta. Necht' λ -matice \tilde{P} vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ -matice P . Potom vektorová funkce $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ třídy \mathcal{C}^∞ je řešením soustavy odpovídající λ -matici P právě tehdy, když je řešením soustavy odpovídající λ -matici \tilde{P} .

Důkaz. Stačí ukázat, že pokud y řeší soustavu odpovídající P , pak řeší i soustavu odpovídající \tilde{P} , která vznikla z P aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).

Toto jistě platí, pokud vyměníme dva řádky či řádek vynásobíme nenulovou konstantou.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přičítáme $P(\lambda)$ -násobek druhého řádku k řádku prvnímu. Máme

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \\ P_{21}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} (P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= \\ = P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n + (P \cdot P_{21})\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= \\ = 0 + P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(P_{21}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n\right) &= \\ = 0 + P\left(\frac{d}{dx}\right)0 = 0. \end{aligned}$$

■

13.6.8. Homogenní soustava odpovídá λ -matici $\lambda I - A$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou λ -matici

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \end{aligned}$$

pak vyřešíme „odzadu“.

Nehomogenní soustavu vyřešíme pomocí variace konstant, případně variantou výše uvedené metody, pokud je pravá strana \mathcal{C}^∞ .

13.6.9. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= 4y_1 + 5y_2, \\y_2' &= -2y_1 - 2y_2.\end{aligned}$$

Řešení. Příslušná λ -matice $\lambda I - A$ má tvar

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix},$$

kterou pomocí řádkových úprav převedeme na

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & -5 - (\frac{1}{2}\lambda + 1)(\lambda - 4) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

Rovnice

$$y_2'' - 2y_2' + 2y_2 = 0$$

má kořeny charakteristického polynomu rovny

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Obecný tvar řešení je tedy

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$y_2' = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t - \alpha_2 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t,$$

což dosazením do první rovnice znamená

$$\begin{aligned}y_1 &= -\alpha_1 e^t \sin t - \alpha_2 e^t \cos t - \frac{1}{2}\alpha_1 e^t \sin t - \frac{1}{2}\alpha_1 e^t \cos t \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha_2 e^t \sin t - \frac{1}{2}\alpha_2 e^t \cos t \\ &= \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right)e^t \sin t + \left(-\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\right)e^t \cos t.\end{aligned}$$

Fundamentální matice naší soustavy je tedy

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t & \frac{1}{2} \sin t - \frac{3}{2} \cos t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} e^t.$$

♣

13.7. Početní příklady na diferenciální rovnice

13.7.1. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x^3(y^2 + 2y - 3).$$

Řešení. Řešíme rovnici

$$y' = g(y)h(x),$$

kde $g(y) = (y + 3)(y - 1)$ a $h(x) = x^3$.

- (1) Zjevně platí $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$.
- (2) Dále máme, že $y = 1$ a $y = -3$ jsou stacionární řešení na \mathbb{R} .
- (3) Intervaly, kde je g nenulová, jsou po řadě $J_1 = (-\infty, -3)$, $J_2 = (-3, 1)$ a $J_3 = (1, \infty)$.
- (4) Pro $I = \mathbb{R}$ a jeden z intervalů J_1, J_2, J_3 řešíme rovnici

$$\frac{y'}{(y + 3)(y - 1)} = x^3.$$

Jelikož $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4$ a

$$\int \frac{1}{(y + 3)(y - 1)} dy = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y + 3} \right) dy = \frac{1}{4} \log \left| \frac{y - 1}{y + 3} \right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{y - 1}{y + 3} \right| = \frac{1}{4}x^3 + c,$$

kde x probíhá níže určený interval. Tedy

$$\log \left| \frac{y - 1}{y + 3} \right| = x^3 + 4c$$

na tomto intervalu.

- (5) Uvažujme nejprve interval J_1 . Ten zobrazuje funkce $\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|$ na interval $(0, \infty)$. Pokud $c > 0$, je $\mathcal{H}(x^4 + c) \subset (0, \infty)$, a tedy pro $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$\left| \frac{y - 1}{y + 3} \right| = \frac{y - 1}{y - 3} = e^{x^4 + 4c}.$$

Tedy

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4 + 4c}}{1 - e^{x^4 + 4c}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud $c \leq 0$, $x^4 + 4c \in (0, \infty)$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}) \cup (\sqrt[4]{-4c}, \infty)$. Jako výše pak odvodíme, že

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4 + 4c}}{1 - e^{x^4 + 4c}}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, \infty).$$

Uvažujme nyní interval J_2 . Pro $y \in J_2$ platí $\left| \frac{y-1}{y+3} \right| = \frac{1-y}{y+3}$ a dále funkce $\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|$ zobrazuje J_2 na \mathbb{R} . Tedy na c není žádné omezení a dostáváme

$$y(x) = \frac{1 - 3e^{x^4+4c}}{1 + e^{x^4+4c}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro interval J_3 platí, že ho funkce $\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $x^4 + 4c \in (-\infty, 0)$, pokud $c < 0$ a $x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c})$. Pak

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c}).$$

- (6) Zjistíme nyní, zdali lze získat slepením požadovaná maximální řešení. Má smysl se zabírat pouze řešeními, která nejsou definovaná na \mathbb{R} , neboť ta definovaná na \mathbb{R} jsou zřejmě maximální. Uvažujme tedy řešení

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, \infty),$$

kde se blížíme k bodu $-\sqrt[4]{-4c}$ nebo $\sqrt[4]{-4c}$. Pak ale $|y(x)|$ konverguje do ∞ , takže není možné řešení nalepit. Podobně vyloučíme možnost lepení u řešení

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c}).$$

♣

13.7.2. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$x(y-4)y' = y^2 - 5y + 6$$

splňující $y(1) = \frac{7}{2}$.

Řešení. Pro $x \neq 0$ a $y \neq 4$ rovnici upravíme na

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{(y-2)(y-3)}{y-4}.$$

- (1) Pro funkci $h(x) = \frac{1}{x}$ dostáváme intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$
- (2) Stacionární řešení jsou $y = 2$ a $y = 3$ na I_1 a I_2 .
- (3) Funkce g je nenulová na intervalech $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ a $(4, \infty)$.
- (4) Pro každou dvojici intervalů I z 1. kroku a J z 3. kroku pak platí

$$y' \frac{y-4}{(y-2)(y-3)} = \frac{1}{x}.$$

Jelikož

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$$

a

$$\int \frac{y-4}{(y-2)(y-3)} dy = \int \left(\frac{2}{y-2} - \frac{1}{y-3} \right) dy = \log \frac{(y-2)^2}{|y-3|},$$

existuje $k > 0$ takové, že

$$\log \frac{(y-2)^2}{|y-3|} = \log k |x|.$$

- (5) Vzhledem k tomu, že nás zajímá řešení procházející bodem $[1, \frac{7}{2}]$, uvažujme intervaly $I = (0, \infty)$ a $J = (3, 4)$. Pak funkce $\log \frac{(y-2)^2}{|y-3|}$ zobrazuje $(3, 4)$ na $(\log 4, \infty)$. Tedy pro $k > 0$ pak dostáváme podmínku $\log(k|x|) > \log 4$, neboli $x \in (\frac{4}{k}, \infty)$. Pro tato x pak platí

$$\frac{(y-2)^2}{y-3} = kx,$$

což vede na rovnici

$$y^2 + y(-4 - kx) + (4 + 3kx) = 0.$$

Ta má řešení

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(4 + kx \pm \sqrt{(4 + kx)^2 - 4(4 + 3kx)} \right) = 2 + \frac{kx}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{kx(kx - 4)}.$$

Jelikož platí $\frac{kx}{2} > 2$ a $y(x) \in (3, 4)$, zajímá nás řešení

$$y(x) = 2 + \frac{kx}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{kx(kx - 4)}.$$

Požadavek $y(1) = \frac{7}{2}$ implikuje $k = \frac{9}{2}$, což dává řešení

$$y(x) = 2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{2}x(\frac{9}{2}x - 4)}, \quad x \in (\frac{8}{9}, \infty).$$

- (6) Zkoumejme chování řešení pro $x \rightarrow \frac{8}{9}_+$. Pak $y(x) \rightarrow 4$, avšak v bodě $[\frac{8}{9}, 4]$ není rovnice splněna, neboť se levá strana rovnice

$$\frac{8}{9} \cdot 0 \cdot y'(\frac{8}{9})$$

nemůže rovnat pravé straně, totiž 2.

♣

13.7.3. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + 1.$$

Řešení. Uvažujme substituci $y = zx$. Pak $y' = z'x + z$, a tedy zadaná rovnice přejde na tvar

$$z'x + z = z = \sqrt[3]{z} + 1,$$

tj.

$$z' = \frac{-\sqrt[3]{z+1}}{x}.$$

Dostáváme tak rovnici se separovanými proměnnými.

- (1) Zjevně $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
- (2) Stacionární řešení je $z = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
- (3) Intervaly pro z jsou tvaru $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.
- (4) Jelikož

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$$

a

$$\int -\frac{1}{\sqrt[3]{z+1}} dz = -\frac{3}{2}(z+1)^{\frac{2}{3}},$$

existuje $k > 0$ takové, že platí

$$-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2 = \log(k|x|).$$

- (5) Na intervalu $J_1 = (-\infty, -1)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $\log(k|x|) < 0$, což znamená $x \in (0, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}, 0)$. Máme tak řešení

$$z(x) = -1 - \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3} \log(k|x|)} \right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

Pro interval $(-1, \infty)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ též zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Jako výše tak dostáváme řešení

$$z(x) = -1 + \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3} \log(k|x|)} \right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

- (6) Eventuální lepení nelze provést v 0, neboť zde rovnice nemá smysl. V bodech $\pm \frac{1}{k}$ však $z(x)$ konverguje k -1 , a tedy lze lepit na stacionární řešení. Dostáváme tak maximální řešení

$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3} \log(k|x|)} \right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3} \log(k|x|)} \right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -1, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Přechodem k původní rovnici tak máme řešení

$$y(x) = \begin{cases} -x \pm x \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3} \log(k|x|)} \right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -x, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -x \pm x \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3} \log(k|x|)} \right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

(Konstanta k je kladná.) Navíc pak ještě máme řešení

$$y(x) = -x, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

13.7.4. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{3(y^2 + 1)}{2x(x + 3)}.$$

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kde $h(x) = \frac{3}{x(x+3)}$ a $g(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 1)$.

- (1) Intervaly pro funkci h jsou $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ a $(0, \infty)$.
- (2) Stacionární řešení žádná nejsou.
- (3) Funkce g je nenulová na \mathbb{R} , tj. $J = \mathbb{R}$.
- (4) Jelikož

$$\int \frac{2}{1+y^2} dy = 2 \operatorname{arctg} y$$

a

$$\int \frac{3}{x(x+3)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \log \left| \frac{x}{x+3} \right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$2 \operatorname{arctg} y = \log \left| \frac{x}{x+3} \right| + c.$$

Tedy

$$y(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{c}{2} \right) \quad (13.22)$$

na intervalech, které určíme v následujícím kroku.

- (5) Necht' $I = (0, \infty)$. Funkce $2 \operatorname{arctg} y$ zobrazuje \mathbb{R} na $(-\pi, \pi)$ a $\left| \frac{x}{x+3} \right| = \frac{x}{x+3}$ na $(0, \infty)$. Tedy řešíme nerovnici

$$\log \frac{x}{x+3} + c \in (-\pi, \pi).$$

Nerovnost

$$\frac{x}{x+3} > e^{-\pi-c}$$

není nikdy splněna, pokud $c \leq -\pi$, a pro $c > -\pi$ vede na nerovnost

$$x > \frac{3e^{-\pi-c}}{1 - e^{-\pi-c}}.$$

Druhá nerovnost

$$\frac{x}{x+3} < e^{\pi-c}$$

je pro $c \leq \pi$ splněna vždy, zatímco pro $c > \pi$ implikuje nerovnost

$$x < \frac{3e^{\pi-c}}{1 - e^{-\pi-c}}.$$

Tedy máme řešení (13.22) na intervalech

$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1 - e^{-\pi-c}}, \frac{3e^{\pi-c}}{1 - e^{\pi-c}} \right), \quad c > \pi,$$

$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1 - e^{-\pi-c}}, \infty \right), \quad c \in (-\pi, \pi].$$

Nechť nyní $I = (-3, 0)$. Zde $|x|x + 3 = \frac{-x}{x+3}$, a tedy řešíme nerovnosti

$$e^{-\pi-c} < \frac{-x}{x+3} < e^{\pi-c}.$$

Jejich řešením je interval

$$\left(\frac{-3e^{\pi-c}}{1 + e^{\pi-c}}, \frac{-3e^{-\pi-c}}{1 + e^{-\pi-c}} \right).$$

Pokud $I + (-\infty, -3)$, pak $|x|x + 3 = \frac{-x}{-x-3}$. Tedy řešíme nerovnosti

$$e^{-\pi-c} < \frac{-x}{-x-3} < e^{\pi-c}.$$

Ty vedou na intervaly

$$x \in \left(-\infty, \frac{3e^{\pi-c}}{1 - e^{\pi-c}} \right), \quad c \in [-\pi, \pi),$$

$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1 - e^{-\pi-c}}, \frac{3e^{\pi-c}}{1 - e^{\pi-c}} \right), \quad c \in (-\infty, -\pi).$$

- (6) Lepení v krajních bodech nalezených intervalů nepřichází do úvahy, neboť limity řešení v těchto bodech jsou nekonečné.

♣

13.7.5. Příklad. Nalzněte všechna maximální řešení rovnice

$$yy' = \sin x + \cos x.$$

Řešení. Rovnice má tvar

$$y' = \frac{1}{y}(\sin x + \cos x).$$

- (1) Máme $I = \mathbb{R}$.
 (2) Dále $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$ a stacionární řešení neexistuje.
 (3) Jelikož

$$\int y \, dy = \frac{1}{2}y^2$$

a

$$\int (\sin x + \cos x) \, dx = -\cos x + \sin x,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{1}{2}y^2 = -\cos x + \sin x + c.$$

- (4) Funkce $\frac{1}{2}y^2$ zobrazuje J_1 i J_2 na $(0, \infty)$. Pro $c \in \mathbb{R}$ tak řešíme nerovnici

$$0 < -\cos x + \sin x + c = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + c,$$

tj.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Pokud $c \leq -\sqrt{2}$, nerovnice není splněna pro žádné x . Je-li $c > \sqrt{2}$, je splněna pro $x \in \mathbb{R}$. Pokud $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pak $x \in (a, b)$, kde

$$a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right), \quad b = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi + \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na intervalech výše nalezeného tvaru má pak řešení tvar

$$y(x) = \pm \sqrt{2(\sin x - \cos x + c)} = \pm \sqrt{2(\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + c)}.$$

- (5) Zjistíme nyní, zdali jsou řešení maximální. Pokud $c > \sqrt{2}$, je $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$, a tedy se jedná o maximální řešení. Pokud $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} y(x) = \lim_{x \rightarrow b-} y(x) = 0.$$

Pokud má být rovnice splněna i v bodech a, b , musí být

$$0 = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

tj.

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jelikož

$$a = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{2},$$

$$b = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{2},$$

pro $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ máme již řešení maximální.

Pokud $c = \sqrt{2}$, máme

$$y'(x) = \sqrt{2\sqrt{2}} \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1}},$$

takže

$$y'_{\pm}(-\frac{\pi}{4}) = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}\sqrt{2}}{2}.$$

Proto funkce

$$y(x) = (-1)^k \sqrt{2\sqrt{2}(\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi + 2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

a

$$y(x) = (-1)^{k+1} \sqrt{2\sqrt{2}(\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi + 2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

jsou řešení definované na \mathbb{R} .

♣

13.7.6. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Řešení. Homogenní rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ má charakteristický polynom roven $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$, a tedy fundamentální systém rovnice má tvar $\{e^x, e^{2x}\}$. Maximální řešení budou existovat na těch intervalech, kde je definovaná pravá strana, tj. na intervalech $(-\infty, \log 2)$, $(\log 2, \log 3)$, $(\log 3, \infty)$. Hledejme metodou variace konstant partikulární řešení. Pišme tedy $y_p = c(x)e^x + d(x)e^{2x}$. Pak máme soustavu

$$c'e^x + d'e^{2x} = 0$$

$$c'e^x + d'2e^{2x} = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$d'e^{2x} = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6},$$

tj.

$$d' = \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Máme tak

$$d(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6} dx = \log \left| \frac{e^x - 3}{e^x - 2} \right|.$$

Jelikož

$$c'e^x = -d'e^{2x} = -\frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6},$$

platí

$$c(x) = \int -\frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6} dx = -3 \log |e^x - 3| + 2 \log |e^x - 2|.$$

Tedy

$$y_p(x) = e^x (2 \log |e^x - 2| - 3 \log |e^x - 3|) + e^{2x} (\log |e^x - 3| - \log |e^x - 2|)$$

všechna řešení mají tvar

$$y(x) = e^x (2 \log |e^x - 2| - 3 \log |e^x - 3| + a) + e^{2x} (\log |e^x - 3| - \log |e^x - 2| + b),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $x \in (-\infty, \log 2), (\log 2, \log 3), (\log 3, \infty)$. ♣

13.7.7. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 5xe^x.$$

Řešení. Charakteristický polynom $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2$ má dvojnásobné kořeny $\pm 2i$. Tedy fundamentální systém dané rovnice má tvar

$$\{\sin 2x, \cos 2x, x \sin 2x, x \cos 2x\}.$$

Pravá strana je ve speciálním tvaru, a tedy budeme partikulární řešení y_p hledat ve tvaru

$$y_p = (ax + b)e^x,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Pak dostáváme postupně

$$y_p' = (ax + (a + b))e^x,$$

$$y_p'' = (ax + (2a + b))e^x,$$

$$y_p''' = (ax + (3a + b))e^x,$$

$$y_p^{(4)} = (ax + (4a + b))e^x,$$

a tedy po dosazení do rovnice

$$(ax + (4a + b))e^x + 8(ax + (2a + b))e^x + 16(ax + b)e^x = 5xe^x.$$

Tedy máme

$$25ax + 20a + 25b = 5x,$$

což znamená, že $a = \frac{1}{5}$ a $b = -\frac{4}{25}$.

Všechna řešení pak mají tvar

$$y(x) = a \sin 2x + b \cos 2x + cx \sin 2x + dx \cos 2x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ♣

13.7.8. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 8y = (5x - 3)e^x \cos x.$$

Řešení. Charakteristický polynom homogenní rovnice má tvar $\lambda^2 - 4\lambda + 8$, který má kořeny $2 \pm 2i$. Tedy fundamentální systém je $\{e^{2x} \cos 2x, e^{2x} \sin 2x\}$.

Jelikož je pravá strana ve speciálním tvaru, hledáme partikulární řešení y_p jako

$$y_p = (ax + b)e^x \cos x + (cx + d + e^x \sin x).$$

Po zderivování a dosazení do rovnice dostáváme

$$(5x - 3)e^x \cos x = e^x \cos x (2cx + 2a + 2c + 2d - 4(ax + cx + b + a + d) + 8(ax + b)) \\ + e^x \sin x (-2ax - 2a - 2b + 2c - 4(cx - ax + c + d - b) + 8(cx + d)).$$

Porovnáním koeficientů u $e^x \cos x$ a $e^x \sin x$ máme

$$-2cx + 4ax - 2a + 4b + 2c - 2d = 5x - 3 \\ 2ax + 4cx - 2a + 2b - 2c + 4d = 0.$$

Řešením je

$$a = 1, c = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{10}, d = \frac{2}{10}.$$

Tedy všechna řešení mají tvar

$$y(x) = ae^{2x} \cos 2x + be^{2x} \sin 2x + (x + \frac{1}{10})e^x \cos x + (-\frac{1}{2}x + \frac{2}{10})e^x \sin x,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. ♣

13.7.9. Příklad. Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{y}{1-x^2} = x\sqrt{1-x}$$

splňující $y(0) = 0$.

Řešení. Maximální řešení dané rovnice budou definována na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$. Tedy hledané řešení bude definováno na intervalu $(-1, 1)$. Budeme postupovat metodou integračního faktoru. Platí

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

Jelikož

$$e^{\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

na intervalu $(-1, 1)$ naše rovnice dostává tvar

$$\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} y \right)' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} x \sqrt{1-x} = x \sqrt{1+x}.$$

Máme

$$\int x \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c \right) \\ &= \sqrt{1-x} \left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1) \right) + c \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \end{aligned}$$

Vzhledem k počáteční podmínce $y(0) = 0$ platí $c = \frac{4}{15}$, a tedy výsledné řešení má tvar

$$y(x) = \sqrt{1-x} \left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1) \right) + \frac{4}{15} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

♣

13.7.10. Příklad. Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y' + |x|y = x^5.$$

Řešení. Maximální řešení budou definována na celém \mathbb{R} . Postupujme metodou integračního faktoru. Máme

$$\int |x| dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Na intervalu $(0, \infty)$ tak dostáváme

$$\left(e^{\frac{1}{2}x^2} y \right)' = e^{\frac{1}{2}x^2} x^5.$$

Jelikož $\int e^{\frac{1}{2}x^2} x^5$ převedem substitucí $z = \frac{1}{2}x^2$ na $\int e^z 4z^2 dz$, máme pomocí per partes

$$\int e^z 4z^2 dz = 4z^2 e^z - 8z e^z + 8e^z.$$

Odtud máme

$$\int e^{\frac{1}{2}x^2} x^5 = e^{\frac{1}{2}x^2} (x^4 - 4x^2 + 8) + k_1.$$

Tedy

$$y(x) = x^4 - 4x^2 + 8 + k_1 e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Analogicky dostaneme na $(-\infty, 0)$ rovnost

$$\left(e^{-\frac{1}{2}x^2} y \right)' = e^{-\frac{1}{2}x^2} x^5.$$

a tedy

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2} x^5 dx = e^{-\frac{1}{2}x^2} (-x^4 - 4x^2 - 8) + k_2.$$

Odtud plyne

$$y(x) = -x^4 - 4x^2 - 8 + k_2 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Nakonec řešení nalepíme v 0. Dostaneme tak

$$y(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 8 + ke^{-\frac{1}{2}x^2}, & x \geq 0, \\ -x^4 - 4x^2 - 8 + (k + 16)e^{-\frac{1}{2}x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{R}$. ♣

13.7.11. Příklad. Nalezněte omezené maximální řešení rovnice

$$(x^2 - 1)y' + (x^2 + 2x - 1)y = (x - 1).$$

Řešení. Pro $x \notin \{-1, 1\}$ máme rovnici

$$y' + \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}y = \frac{x - 1}{x^2 - 1}.$$

Jelikož

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} dx = x + \log|x^2 - 1|,$$

dostáváme integrační faktor $e^x|x^2 - 1|$. Zvolíme ho jako $e^x(x^2 - 1)$. Pak

$$(e^x(x^2 - 1)y)' = e^x(x^2 - 1)y' + e^x(x^2 + 2x - 1)y = e^x(x - 1).$$

Jelikož

$$\int e^x(x - 1) dx = e^x(x - 2),$$

dostáváme

$$y(x) = \frac{x - 2 + ce^{-x}}{x^2 - 1}, \quad x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty).$$

Nyní hledáme omezené maximální řešení. Máme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \begin{cases} 0, & c = 0, \\ \notin \mathbb{R}, & c \neq 0, \end{cases}$$

a

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) \notin \mathbb{R}, \text{ pokud } c = 0.$$

Tedy na $(-\infty, -1)$ řešení nebude omezené pro žádné $c \in \mathbb{R}$.

Dále platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 1} y(x) \begin{cases} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \frac{x-1+e^{-(x-1)}-1}{x-1} = 0, & c = e, \\ \notin \mathbb{R}, & c \neq e. \end{cases}$$

Tedy jediná možnost na omezené řešení je případ $c = e$. Pak

$$\begin{aligned} y'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} \frac{x - 2 + e^{-x+1}}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2 + 1 + (1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x)^2 + o((1 - x)^2)}{(x - 1)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tedy $y'(1) \in \mathbb{R}$ a rovnice je splněna, lze proto nalepit řešení v bodě 1. Avšak

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = \infty,$$

a proto je slepené řešení neomezené. Závěrem tedy lze říci, že neexistují neomezená maximální řešení.

♣

13.7.12. Příklad. Vyřešte soustavu

$$y_1' = -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 9y_4,$$

$$y_2' = -20y_1 - 4y_2 + 12y_3 + 32y_4,$$

$$y_3' = -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 7y_4,$$

$$y_4' = -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 9y_4.$$

Řešení. Příslušná λ -matice $\lambda I - A$ má tvar

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 5 & 1 & -3 & -9 \\ 20 & \lambda + 4 & -12 & -32 \\ 5 & 1 & \lambda - 3 & -7 \\ 5 & 1 & -3 & \lambda - 9 \end{pmatrix}.$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \lambda + 5 & 1 & -3 & -9 \\ 20 & \lambda + 4 & -12 & -32 \\ 5 & 1 & \lambda - 3 & -7 \\ 5 & 1 & -3 & \lambda - 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & -4\lambda + 4 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda + 2 \\ 5 & 1 & -3 & \lambda - 9 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 3\lambda & -5\lambda - \lambda^2 + 9\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & 4(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & \lambda & 2 - \lambda \\ 5 & 1 & -3 & \lambda - 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\lambda & -\lambda^2 + 4 \\ 0 & \lambda & 0 & 4(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & \lambda & 2 - \lambda \\ 5 & 1 & -3 & \lambda - 9 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 + 3\lambda - 2 \\ 0 & \lambda & 0 & 4(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & \lambda & 2 - \lambda \\ 5 & 1 & -3 & \lambda - 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jelikož $-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)$, dostáváme

$$y_4(t) = ae^t + be^{2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ze třetí rovnice

$$y_3'(t) = y_4'(t) - 2y_4(t) = -ae^t,$$

tj.

$$y_3(t) = -ae^t + c.$$

Druhá rovnice pak implikuje

$$y_2'(t) = 4y_4'(t) - 4y_4(t) = 4be^{2t},$$

tj.

$$y_2(t) = 2be^{2t} + d.$$

Konečně pak čtvrtá rovnice dává

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{5}(-y_2(t) + 3y_3(t) + 9y_4(t) - y_4'(t)) \\ &= \frac{1}{5}(-d + 3c + 5be^{2t} + 5ae^t). \end{aligned}$$

Fundamentální systém naší soustavy má tak tvar

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 2e^{2t} & 0 & 1 \\ -e^t & 0 & 1 & 0 \\ e^t & e^{2t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♣

13.7.13. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y' &= -8y - 6z + 12w + 2e^x, \\ z' &= -3y - 2z + 3w, \\ w' &= -9y - 6z + 13w + 2e^x. \end{aligned}$$

Řešení. Upravujeme příslušnou λ -matici s nenulovou pravou stranou:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda + 8 & 6 & -12 & 2e^x \\ 3 & \lambda + 2 & -3 & 0 \\ 9 & 6 & \lambda - 13 & 2e^x \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3\lambda + 24 & 18 & -36 & 6e^x \\ 3 & \lambda + 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda - 4 & 2e^x \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & -\lambda^2 - 2\lambda + 18 & 3\lambda - 36 & 6e^x \\ 3 & \lambda + 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda - 4 & 2e^x \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda^2 - 10\lambda + 2 & 3\lambda - 12 & 6e^x \\ 3 & \lambda + 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda - 4 & 2e^x \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda^2 - \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda + 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda - 4 & 2e^x \end{array} \right). \end{aligned}$$

Jelikož $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$, platí

$$z(x) = ae^{-2x} + be^x.$$

Dále

$$w'(x) - 4w(x) = 2e^x + 3z' = (2 + 3b)e^x - 6ae^{-2x}.$$

Fundamentální systém pro rovnici $w' - 4w = 0$ je e^{4x} . Hledejme partikulární řešení w_1 a w_2 splňující

$$w_1' - 4w_1 = (2 + 3b)e^x, \quad w_2' - 4w_2 = -6ae^{-2x}.$$

V prvním případě hledáme w_1 jako pe^x a máme rovnici

$$pe^x - 4pe^x = (2 + 3b)e^x.$$

Tedy

$$p = -\frac{2}{3} - b$$

a $w_1(x) = (-\frac{2}{3} - b)e^x$. Podobně dostaneme $w_2(x) = ae^{-2x}$. Dohromady máme

$$w(x) = ce^{4x} - \left(\frac{2}{3} + b\right)e^x + ae^{-2x}.$$

Z druhé rovnice soustavy konečně dostáváme

$$y(x) = \frac{1}{3}(3w - z' - 2z) = ce^{4x} - \left(\frac{2}{3} + 2b\right)e^x + ae^{-2x}.$$

♣

13.7.14. Příklad. Vyřešte soustavu

$$y'' + z'' - 3y' - y + 2z = x,$$

$$3y'' + y' + z' + 2y - z = 2.$$

Řešení. Upravujeme příslušnou λ -matici a vyjde nám

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} \lambda^2 - 3\lambda - 1 & \lambda^2 + 2 & x \\ 3\lambda^2 + \lambda + 2 & \lambda - 1 & 2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} -3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda - 3 & 3 & x - 2 \\ 3\lambda^2 + \lambda + 2 & \lambda - 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 1 & 1 & \frac{x-2}{3} \\ 3\lambda^2 + \lambda + 2 & \lambda - 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 1 & 1 & \frac{x-2}{3} \\ \lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 & 0 & 1 + \frac{x}{3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Jelikož $\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$ právě tehdy, když

$$\lambda = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{3}i}.$$

Tedy fundamentální systém pro y je

$$\{\sin \sqrt{2 + \sqrt{3}}x, \cos \sqrt{2 + \sqrt{3}}x, \sin \sqrt{2 - \sqrt{3}}x, \cos \sqrt{2 - \sqrt{3}}x\}.$$

Hledáme partikulární řešení rovnice

$$y^{(4)} + 4y'' + y = 1 + \frac{x}{3}$$

ve tvaru $y_p = ax + b$. Po zderivování a dosazení vyjde $y_p = 1 + \frac{x}{3}$. Tedy

$$y(x) = 1 + \frac{x}{3} + a \sin \sqrt{2 + \sqrt{3}}x + b \cos \sqrt{2 + \sqrt{3}}x + c \sin \sqrt{2 - \sqrt{3}}x + d \cos \sqrt{2 - \sqrt{3}}x.$$

Jelikož

$$z(x) = \frac{x-2}{3} + y''' + y'' + 2y' + y,$$

dostáváme

$$\begin{aligned} z(x) = & \frac{2}{3}x + 1 + \sin \sqrt{2 + \sqrt{3}}x \left(a(-1 - \sqrt{3}) + b\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{3} \right) \\ & + \cos \sqrt{2 + \sqrt{3}}x \left(b(-1 - \sqrt{3}) - a\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{3} \right) \\ & + \sin \sqrt{2 - \sqrt{3}}x \left(c(-1 + \sqrt{3}) - d\sqrt{2 - \sqrt{3}}\sqrt{3} \right) \\ & + \cos \sqrt{2 - \sqrt{3}}x \left(d(-1 + \sqrt{3}) + c\sqrt{2 - \sqrt{3}}\sqrt{3} \right). \end{aligned}$$

♣

13.7.15. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$x^2 y' = y(x - y).$$

Řešení. Řešení hledáme na intervalech $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ uvažujme

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x} \right).$$

Jelikož je pravá strana homogenní funkce, použijeme substituci $y(x) = z(x)x$. Pak dostáváme rovnici

$$x^3 z' = -z^2 x^2,$$

kteřá po úpravě na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ přejde na

$$z' = -\frac{z^2}{x}.$$

To je již rovnice se separovanými proměnnými.

- (1) Máme intervaly $I = (-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
- (2) Stacionární řešení je $z = 0$.
- (3) Intervaly J jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
- (4) Vezměme interval I a interval J , Zde platí

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x},$$

neboli

$$\frac{1}{z} = \log k |x|, \quad k > 0.$$

- (5) Fixujme $k > 0$. Pak dostáváme

$$z(x) = \frac{1}{\log k |x|}, \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{k}), (-\frac{1}{k}, 0), (0, \frac{1}{k}), (\frac{1}{k}, \infty).$$

- (6) Dosazením do substituce $y = zx$ máme řešení $y(x) = \frac{x}{\log k |x|}$, které lze napojit v 0. Maximální řešení pak budou

$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \frac{x}{\log c |x|}, \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{c}), x \in (\frac{1}{c}, \infty), \quad c > 0,$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log c |x|}, & x \in (-\frac{1}{c}, 0], c > 0, \\ \frac{x}{\log d |x|}, & x \in (0, \frac{1}{d}), d > 0, \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{x}{\log c |x|}, & x \in (0, \frac{1}{c}), c > 0, \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log c |x|}, & x \in (-\frac{1}{c}, 0], c > 0, \\ 0, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

♣

13.7.16. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}.$$

Řešení. Předpokládáme, že y řeší rovnici. Pak pro vhodné $A, B \in \mathbb{R}$ řeší funkce

$$Y(X) = y(X - A) + B$$

homogenní rovnici. Vskutku, zvolme $A = \frac{1}{3}$ a $B = -\frac{1}{3}$. Pak

$$\begin{aligned} Y'(X) = y'(X - A) &= \frac{2(X - A) - y(X - A) + 1}{X - A - 2y(X - A) + 1} \\ &= \frac{2X - 2A - Y(X) + B + 1}{X - A - 2Y(X) + 2B + 1} = \frac{2X - Y(X)}{X - 2Y(X)}, \end{aligned}$$

tj. Y řeší rovnici

$$Y' = \frac{2X - Y}{X - 2Y}.$$

Tuto rovnici řešíme další substitucí $Y = XZ$, čímž přejde na rovnici

$$Z' = 2 \frac{Z^2 - Z + 1}{1 - 2Z} \cdot \frac{1}{X}.$$

Pro $X \in (-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ a $Z \in (-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$ platí

$$\log(Z^2 - Z + 1) = -2 \log |X| + C.$$

Funkce na levé straně zobrazuje každý z intervalů $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$ na $(\log \frac{3}{4}, \infty)$, tj.

$$-2 \log |X| + C > \log \frac{3}{4}.$$

Odtud dostáváme

$$X \in \left(0, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{respektive } X \in \left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Ze vztahu mezi Z a X máme

$$Z^2 - Z + 1 - e^C X^{-2} = 0,$$

neboli

$$Z = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right).$$

Dosazením do substituce dostáváme

$$Y(X) = \frac{1}{2} \left(X \pm X \sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right) = \frac{1}{2} \left(X \pm \sqrt{4e^C - 3X^2}\right).$$

Vidíme, že toto řešení lze dodefinovat v 0 a bude zde vyhovovat naší rovnici.

Dále pak máme

$$y(x) = Y(x + A) - B = \frac{1}{2} \left(x + 1 \pm \sqrt{4e^C - 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}\right)$$

na intervalu

$$\left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right).$$

Tento interval je maximální, neboť v jeho krajních bodech platí $y = \frac{1}{2}(x+1)$ a pravá strana rovnice není definována.

Nyní si rozmyslíme, že jsme obdrželi všechna řešení. Uvažujme výraz

$$\left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2,$$

který je kladný všude mimo bod $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Existuje tak $C > 0$, že

$$4e^C = \left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2.$$

Pokud $y_0 \neq \frac{1}{2}(x_0 + 1)$, dostáváme z poslední rovnice řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$. ♣

13.7.17. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

Řešení. Jedná se o Bernoulliovu rovnici, a tedy použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Pak $z > 0$ a platí

$$z' = -2y^{-3}y'.$$

Po vydělení dané rovnice y^3 dostáváme

$$-\frac{1}{2}z' - xz = y'y^{-3} - xy^{-2} = -e^{-x^2},$$

tj. rovnici

$$z' + xz = 2e^{-x^2}.$$

Metodou integračního faktoru máme

$$\left(e^{x^2}z\right)' = 2,$$

neboli

$$z(x) = e^{-x^2}(2x + c).$$

Zajímají nás pouze kladná řešení z , takže dostáváme řešení

$$y = \pm \left(e^{-x^2}(2x + c)\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x > -\frac{c}{2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

a stacionární řešení

$$y = 0.$$

Z tvaru řešení je patrné, že lepení nepřichází do úvahy.

Literatura

1. A. Anzenbacher, *Úvod do filozofie*, SPN, Praha 1990.
2. B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, 2005.
3. J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress 2010.
4. K. M. Ball, *Strange curves, counting rabbits, and other mathematical explorations*, Princeton University Press, 2003.
5. J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of radioactive decay*, Open Problems in Communication and Computation, T.M. Cover and B. Gopinath, eds., Springer, 1987, pp. 173--188.
6. J. H. Conway a R.K. Guy, *The book of numbers*, New York: Copernicus 1996.
7. B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003.
8. A. Gelfond, *Sur le septieme Probleme de Hilbert*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. **7** (1934), 623--630.
9. P. Hájek, P. Habala, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces*, Matfyzpress 1996.
10. P. R. Halmos, *Measure theory*, Springer 1978.
11. V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
12. V. Jarník, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1956.
13. V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
14. T. Jech, *Set theory*, Springer 2002.
15. A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer 1995.
16. J. Lukeš, J. Malý, *Measure and integral*, Matfyzpress.
17. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1964.
18. T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65--69.
19. A. Sochor, *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.
20. R. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá Fronta, 1986.
21. A. Tarski, *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd*, Academia, Praha 1969.
22. L. Zajíček, *Vybrané partie z matematické analýzy pro 2. ročník*, Matfyzpress, 2007.