Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

1. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$.

2. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte

a) všechna maximální řešení,
b) maximální řešení procházející bodem $[1, 1/2]$,
c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.

3. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte

a) všechna maximální řešení,
b) maximální řešení procházející bodem $[0, 1]$.

4. Řešte rovnici $y'(2 - e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$.

Nalezněte všechna maximální řešení rovnic.

5. $y' = y^2$

6. $y' = |y|$

7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

8. $xy' = 1 + y^2$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Nalezněte všechna maximální řešení následujících rovnic.

9. $y' - \frac{1}{x+1}y = -\frac{1}{100}$

10. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$

11. $y' + (\operatorname{tg} x)y = \frac{1}{\cos x}$

12. $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

13. $y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}$

14. $y' + xy = x$

15. $y' - \frac{1}{x}y = x \sin x$

16. $y' - y = xe^x$

17. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$

18. $y' - y = \sin x$

19. $y' = y + xe^x \sin 2x$

20. $y' + \frac{x+1}{x}y = 1$

21. $(x - 1)y' = x^2 - y$

22. $y' + 2y = \cos x$

23. $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \sin x$

24. $xy' - y = x^2$

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Nalezněte všechna maximální řešení následujících rovnic.

25. $y'' + 4y' + 4y = 0$

26. $y'' - 3y' + 2y = 0$

27. $y'' - 6y' + 13y = 0$

28. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

29. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

30. $y'' + y = 4x \cos x$

31. $7y'' - y' = 14x$

32. $y'' - 2y' + 2y = \cos x$

33. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$

34. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+x+1}$

Výsledky

1.

$$y(x)=0, \qquad x\in\mathbf{R};$$

$$y(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,c]\\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x\in(c,\infty)\end{cases}, \qquad c\in\mathbf{R};$$

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x\in(-\infty,c)\\ 0 & x\in[c,\infty)\end{cases}, \qquad c\in\mathbf{R};$$

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_1)\right)^5} & x\in(-\infty,c_1)\\ 0 & x\in[c_1,c_2]\\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_2)\right)^5} & x\in(c_2,\infty)\end{cases}, \qquad c_1,c_2\in\mathbf{R}, c_1<c_2;$$

$$y(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5}, \quad x\in\mathbf{R}, \qquad c\in\mathbf{R}.$$

2. a) $y(x)=\frac{x}{1-cx}$ na intervalech $(0,1/c)$, $(1/c,\infty)$, $(-\infty,0)$ pro $c>0$, na intervalech $(-\infty,1/c)$, $(1/c,0)$, $(0,\infty)$ pro $c<0$; $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ pro $c=0$; $y(x)=0$ na intervalech $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$.

b) $y(x)=\frac{x}{1-cx}$ na intervalu $(0,\infty)$

c) $y(x)=0$ na intervalech $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$; $y(x)=\frac{x}{1-cx}$ na $(-\infty,0)$ pro $c>0$ a $(0,\infty)$ pro $c<0$.

3. a) $y(x)=\operatorname{tg}(-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c)$ na intervalech

$\left(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1},\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}\right)$ pro $|c|<\pi/2$,
$\left(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1},-\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}\right)$ pro $|c|\geq\pi/2$,
$\left(\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1},-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}\right)$ pro $|c|\geq\pi/2$.

b) $y(x)=\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\frac{\pi}{4}\right)$ na intervalu $\left(-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1},\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}\right)$.

4. Nejde o rovnici se separovanými proměnnými. Je-li však $x\neq\log 2$, můžeme ji na tento tvar upravit:

$$y'=-\frac{3e^x}{2-e^x}\cdot\operatorname{tg}y\cdot\cos^2 y. \tag{1}$$

Nejprve standardním postupem vyřešíme tuto rovnici.

1. krok. Funkce $h(x)=-3e^x/(2-e^x)$ je spojitá na intervalech $(-\infty,\log 2)$ a $(\log 2,+\infty)$. Budeme tedy řešit rovnici (1) na každém z těchto intervalů.

2. krok. Nulovými body funkce $g(y)=\operatorname{tg}y\cdot\cos^2 y$ jsou body $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Odtud dostáváme stacionární řešení

$$y(x)=k\pi,\ x\in(-\infty,\log 2),\ k\in\mathbf{Z},$$
$$y(x)=k\pi,\ x\in(\log 2,+\infty),\ k\in\mathbf{Z}.$$

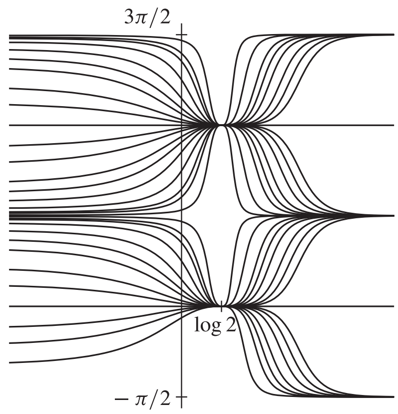
3. krok. Funkce g je spojitá a nenulová na intervalech $\left(k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\right)$ pro $k\in\mathbf{Z}$.

4. krok. Zafixujme jeden z intervalů z 1. kroku a jeden z intervalů ze 3. kroku. Je-li y řešením rovnice, pak splňuje

$$\frac{y'(x)}{\operatorname{tg}y(x)\cdot\cos^2 y(x)}=-\frac{3e^x}{2-e^x}.$$

Primitivní funkcí k funkci $y\mapsto\dfrac{1}{\operatorname{tg}y\cdot\cos^2 y}$ je například $G(y)=\log|\operatorname{tg}y|$, primitivní funkcí k pravé straně zase $H(x)=3\log|2-e^x|$. Je-li y řešení, pak existuje konstanta $c\in\mathbf{R}$ taková, že

$$\log|\operatorname{tg}y(x)|=3\log|2-e^x|+c.$$



OBRÁZEK 1

5. krok. Zafixujme c. Všimněme si, že $G\big(\big(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\big)\big) = \mathbf{R}$ pro libovolné $k \in \mathbf{Z}$, tedy pro x již nedostaneme žádné další omezení. Po úpravě obdržíme

$$|\operatorname{tg} y(x)| = e^c \cdot |2 - e^x|^3.$$

Rozeberme různé případy znamének. Podle toho, zda $x \in (-\infty, \log 2)$, nebo $x \in (\log 2, +\infty)$, je výraz $2 - e^x$ kladný, nebo záporný. Podobně znaménko $\operatorname{tg} y$ závisí na tom, ve kterém z intervalů z 3. kroku pracujeme. Odstraníme-li tedy absolutní hodnoty, mohou se na jednotlivých stranách rovnice objevit znaménka navíc. Když si však uvědomíme, že číslo e^c je libovolná kladná konstanta, je jasné, že ve všech případech bude platit

$$\operatorname{tg} y = a \cdot (2 - e^x)^3,$$

kde a je nějaká nenulová konstanta. Funkce tg zúžená na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ má inverzní funkci $k\pi + \operatorname{arctg}$, a tedy funkce

$$y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}\big(a(2 - e^x)^3\big)$$

je pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ řešením rovnice (1) na intervalu $(-\infty, \log 2)$ a také na intervalu $(\log 2, +\infty)$. Všimněme si ještě, že dosadíme-li $a = 0$, dostaneme stacionární řešení z 2. kroku.

6. krok. Řešení rovnice (1) mezi sebou nelze lepit, jsou totiž definovaná na maximálních možných intervalech. Proto jsou v 5. kroku popsána všechna maximální řešení rovnice (1).

My jsme však měli najít řešení původně zadané rovnice. Na intervalech neobsahujících bod $\log 2$ je tato rovnice ekvivalentní s (1). Bod $\log 2$ jsme vyloučili jen proto, abychom mohli řešit rovnici (1), na niž bylo možné použít standardní postup. Proto je třeba ověřit, zda je řešení rovnice (1) možno slepit v bodě $\log 2$. Uvědomte si, že jde o slepování z jiného důvodu než v 6. kroku řešení rovnice se separovanými proměnnými, a tudíž musíme ověřit nejen shodnost limit řešení, ale i existenci derivace a platnost naší rovnice v bodě $\log 2$.

Snadno zjistíme, že limita řešení z 5. kroku v bodě $\log 2$ zprava eventuálně zleva je $k\pi$, a limita y' je zde 0. Definujeme-li tedy

$$y(x) = \begin{cases} k\pi + \operatorname{arctg}\big(a(2 - e^x)^3\big) & \text{pro } x \in (-\infty, \log 2\rangle, \\ k\pi + \operatorname{arctg}\big(b(2 - e^x)^3\big) & \text{pro } x \in (\log 2, +\infty), \end{cases} \qquad a, b \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z},$$

pak tato funkce je spojitá na $\mathbf{R}$ a podle věty o výpočtu derivace platí $y'(\log 2) = 0$. Dosazením ověříme, že naše rovnice je splněna i v bodě $\log 2$. Všechna maximální řešení mají tedy uvedený tvar. Některá jsou znázorněna na obrázku.

9. $y(x) = -\frac{1}{100}(x+1)\log|x+1| + a(x+1)$, $\quad x \in (-\infty, -1)$ nebo $x \in (-1, \infty)$ **10.** $y(x) = x^4 + cx^2$, $\quad x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ **11.** $y(x) = \sin x + a\cos x$, $\quad x \in (-\pi/2, \pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **12.** $y(x) = x^2 e^{-x} + a e^{-x}\frac{1}{x}$, $\quad x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R}$ **13.** $y(x) = 1 + 2x\log|2x+1| + \log|2x+1| + a(2x+1)$, $\quad x \in (-\infty, -1/2)$ nebo $x \in (-1/2, \infty)$ **14.** $y(x) = 1 + a e^{-x^2/2}$, $\quad x \in \mathbf{R}$ **15.** $y(x) = -x\cos(x) + ax$, $\quad x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ **16.** $y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x + a e^x$, $\quad x \in \mathbf{R}$

17. $y(x)=e^{\operatorname{tg} x}+ae^{-\operatorname{tg} x}$, $x\in(-\pi/2,\pi/2)+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ **18.** $y(x)=-\frac12\cos(x)-\frac12\sin(x)+ae^x$, $x\in\mathbf{R}$ **19.** $y(x)=-e^x x\cos^2 x+\frac12 e^x\cos(x)\sin(x)+\frac12 xe^x+ae^x$, $x\in\mathbf{R}$ **20.** $y(x)=\frac{x-1}{x}+a\frac1x e^{-x}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$ **21.** $y(x)=\frac13\frac{x^3}{x-1}+a\frac{1}{x-1}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,\infty)$ **22.** $y(x)=\frac25\cos x+\frac15\sin x+ae^{-2x}$, $x\in\mathbf{R}$ **23.** $y(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}+a\operatorname{tg} x$, $x\in(0,\pi/2)+k\pi/2$, $k\in\mathbf{Z}$ **24.** $y(x)=x^2+ax$, $x\in\mathbf{R}$ **25.** $y(x)=ae^{-2x}+bxe^{-2x}$, $x\in\mathbf{R}$ **26.** $y(x)=ae^x+be^{2x}$, $x\in\mathbf{R}$ **27.** $y(x)=ae^{3x}\sin 2x+be^{3x}\cos 2x$, $x\in\mathbf{R}$ **28.** $y(x)=-\frac13 xe^{-3x}-\frac19 e^{-3x}-\frac12 x^2e^{-3x}+a+be^{-3x}$, $x\in\mathbf{R}$ **29.** $y(x)=-e^x\operatorname{arctg}(e^{-x})+e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)+ae^x+be^{-x}$, $x\in\mathbf{R}$ **30.** $y(x)=x^2\sin x+x\cos x+a\sin x+b\cos x$, $x\in\mathbf{R}$ **31.** $y(x)=-7x^2-98x+a+be^{x/7}$, $x\in\mathbf{R}$ **32.** $y(x)=-\frac25\sin x+\frac15\cos x+ae^x\sin x+be^x\cos x$, $x\in\mathbf{R}$ **33.** $y(x)=\frac16 xe^{2x}-\frac18x^4-\frac14x^3-\frac38x^2-\frac78x+a+be^{2x}+ce^{-x}$, $x\in\mathbf{R}$ **34.** $y(x)=-\frac12\log(x^2+x+1)e^x+\frac{1}{\sqrt3}e^x\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}+\frac{2}{\sqrt3}xe^x\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}+ae^x+bxe^x$, $x\in\mathbf{R}$