Příklad 1. Ověřme, že $C^n(\mathbb{R})$ tvoří podprostor $C(\mathbb{R})$. Množina $C^n(\mathbb{R})$ je zřejmě neprázdná (obsahuje například konstantní nulovou funkci). Jestliže $f, g \in C^n(\mathbb{R})$, pak $f + g \in C^n(\mathbb{R})$, protože $(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jestliže $a \in \mathbb{R}$ a $f \in C^n(\mathbb{R})$, pak také $af \in C^n(\mathbb{R})$, protože $(af)^{(n)}(x) = af^{(n)}(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Podobně prostor $C^n(I)$, kde I je neprázdný otevřený interval, je podprostorem prostoru $C(I)$.

Příklad 2. Budiž $\mathfrak{s}$ množina všech posloupností reálných čísel. Ukažte, že $\mathfrak{s}$ s těmito operacemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Dokažte, že následující podmnožiny $\mathfrak{s}$ jsou jeho vektorovými podprostory:

(i) $\ell_\infty = \left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{s};\ \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ je omezená}\right\}$,
(ii) $c_0 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{s};\ \lim x_n = 0\right\}$,
(iii) $\ell_1 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{s};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n| < +\infty\right\}$,
(iv) $\ell_2 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{s};\ \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < +\infty\right\}$. Zde je vhodné použít nerovnost $(a + b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ a srovnávací kritérium pro konvergenci řad.

Příklad 3. Nechť I je neprázdný otevřený interval a $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ jsou daná reálná čísla. Definujme množinu $U \subset C^n(I)$ takto:

$$U = \{f \in C^n(I);\ \text{pro každé } x \in I \text{ platí } f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0\}.$$

Ukážeme, že U tvoří vektorový podprostor vektorového prostoru $C^n(I)$. Konstantní nulová funkce patří do U, a proto je U neprázdná množina. Jestliže $f, g \in U$, pak funkce $f + g$ je prvkem $C^n(I)$ a pro každý bod $x \in I$ platí

$$\begin{aligned}&(f + g)^{(n)}(x) + a_{n-1}(f + g)^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(f + g)(x) = \\ &\quad = \bigl(f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 f(x)\bigr) + \bigl(g^{(n)}(x) + a_{n-1}g^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 g(x)\bigr) = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f \in U$, pak funkce αf je prvkem $C^n(I)$ a pro každé $x \in I$ platí

$$\begin{aligned}&(\alpha f)^{(n)}(x) + a_{n-1}(\alpha f)^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(\alpha f)'(x) + a_0(\alpha f)(x) = \\ &\quad = \alpha\bigl(f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x)\bigr) = \alpha \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Příklad 4. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ jsou navzájem různá. Potom funkce $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ jsou lineárně nezávislé v prostoru $C(\mathbb{R})$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, protože $e^{\lambda_1 t}$ je nenulová funkce. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n. Uvažujme funkce $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_{n+1} t}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1}$. Vezměme nyní lineární kombinaci uvažovaných funkcí, která je rovna nulovému vektoru. Pro jistá reálná čísla $c_1, \dots, c_{n+1}$ a pro každé $t \in \mathbb{R}$ tak platí

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} = 0. \tag{1}$$

Vynásobíme-li obě strany rovnosti (1) výrazem $e^{-\lambda_{n+1} t}$ a spočítáme-li limitu pro $t \to +\infty$ funkcí na levé a na pravé straně, bude limita pravé strany rovna nule a limita levé strany rovna c_{n+1}. Musí tedy být $c_{n+1} = 0$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ máme

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} = 0.$$

Použitím indukčního předpokladu dostáváme $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Uvažovaná lineární kombinace je tedy triviální, což bylo k dokázání. $\square$