

## URČITÝ INTEGRÁL

Spočtěte následující určité integrály.

- |   |  |
|---|--|
| <p>1. <math>\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx</math></p> <p>3. <math>\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}</math></p> <p>5. <math>\int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx</math></p> <p>7. <math>\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x-2}</math></p> | <p>2. <math>\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx</math></p> <p>4. <math>\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}</math></p> <p>6. <math>\int_0^2  1-x  dx</math></p> <p>8. <math>\int_0^{8\pi} \frac{dx}{1+\alpha \cos x}, \quad 0 &lt; \alpha &lt; 1</math></p> |
|---|--|

9. Pomocí poznatků o Riemannově integrálu dokažte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

10. Spočtěte objem koule a kužele.
11. Spočtěte povrch koule a kužele.
12. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami  $y = \frac{2}{1+x^2}$ ,  $y = x^2$ .
13. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami  $y = x^2 - 6x + 8$ ,  $y = -4x + 7$ ,  $y = 2x - 8$ .
14. Vypočítejte délku křivky, která je grafem funkce  $f(x) = \log(\cos x)$  pro  $x \in \langle 0, \pi/6 \rangle$ .
15. Vypočítejte délku křivky dané parametrickým vyjádřením  $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y(t) = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $a > 0$ .
16. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky  $y = x^2/2$ ,  $x \in \langle 0, 3/4 \rangle$  kolem osy  $x$ .
17. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ležícího v rovině  $x, y$  kolem osy  $x$ . Obrazec je ohraničen křivkami, jejichž rovnice jsou  $x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$  a  $y^2 - x^2 = 1$ .

## VÝSLEDKY A NÁVODY

Výsledky k úlohám na primitivní funkce jsou uváděny bez aditivních konstant.

- |   |   |  |                                       |                          |
|---|---|--|---------------------------------------|--------------------------|
| 1. $1 - \frac{9}{5} \log 3 + \frac{17}{10} \log 2 + \pi/10$ | 2. $\pi^3/6 - \pi/4$                          | 3. $\pi/2\sqrt{2}$                               | 4. $\pi/\sqrt{2}$                     | 5. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$ |
| 6. 1  | 7. $-\frac{2}{3} \log 2 + \frac{1}{3} \log 5$ | 8. $8\pi/\sqrt{1-\alpha^2}$                      | 12. $\pi - \frac{2}{3}$               | 13. $9/4$                |
| 14. $\frac{1}{2} \log 3$                                    | 15. $2a\pi^2$                                 | 16. $\frac{\pi}{16} (\frac{255}{64} - 2 \log 2)$ | 17. $\frac{4}{3} \pi (3\sqrt{3} - 2)$ |                          |