OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, VNITŘEK, UZÁVĚR, HRANICE

1. Nechť $x \in R^n$ a $r > 0$. Ukažte, že množina $\{y \in R^n;\ \rho(y,x) \le r\}$ je uzavřená. Určete její vnitřek, uzávěr a hranici.

2. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \forall r > 0\colon B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Z toho odvoďte rovnosti

$$\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup H(A), \qquad H(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A.$$

3. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že platí:

(i) $H(A) = H(\mathbb{R}^n \setminus A)$,
(ii) $\operatorname{Int} A = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$,
(iii) $\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

4. Pro následující podmnožiny $\mathbb{R}$ zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici:
a) $\mathbb{N}$, b) $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, c) $\mathbb{Q}$, d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0\}$.

5. Pro následující podmnožiny $\mathbb{R}^2$ zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici:
a) $A = \{[x,y];\ x \ge 0, y > 0\}$, b) $B = \{[x,y];\ y < \sin x\}$,
c) $C = \{[x,y];\ (x^2+y^2)(1-x^2-y^2) \le 0\}$, d) $D = \{[x,y];\ (x^2+y^2)(1-x^2-y^2) < 0\}$.

SPOJITOST FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

6. Ukažte, že funkce $x \mapsto \rho(x,o)$ je spojitá na $\mathbb{R}^n$.

7. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je spojitá na svém definičním oboru.

PARCIÁLNÍ DERIVACE

8. Pro následující funkce určete jejich definiční obor a spočtěte parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných ve všech bodech, kde existují:
a) x^y, b) $x^{(y^z)}$, c) $\sqrt{x^2+y^2}$, d) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$, e) $e^{x|y|}$,
f) $\sqrt{xy}$, g) $|y-x^2|$, h) $|y-x^3|$, i) $|y^2-x^2|$, j) $x \cdot [y]$.

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

9. Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x,y,z) = xyz$, funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou dány předpisy $\varphi_1(s,t) = s + t^2$, $\varphi_2(s,t) = st$, $\varphi_3(s,t) = s$ a složená funkce $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $F(s,t) = f(\varphi_1(s,t), \varphi_2(s,t), \varphi_3(s,t))$. Pomocí věty o derivaci složené funkce spočtěte parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial s}$ a $\frac{\partial F}{\partial t}$.

APLIKACE VĚTY O IMPLICITNÍCH FUNKCÍCH

10. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě x_0:
a) $\sin(xy) + \cos(x+y) + 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [\pi, 0]$; b) $e^{xy} - \sin(x+y) = 1$, $[x_0, y_0] = [0, -\pi]$;
c) $x^2 e^{y^2} = y e^x$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$; d) $\operatorname{arctg}(y-x) + \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x} = \frac{\pi}{4}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$;
e) $e^{(\frac{x}{y}-1)} + e^{x-y^2} = 2$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$; f) $x^y = y^x$, $[x_0, y_0] = [2, 4]$.

11. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci $z = f(x,y)$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
a) $x \sin z + y \cos z - e^z = 0$, $[x_0, y_0, z_0] = [2, 1, 0]$;
b) $e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = 3e^{xyz}$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$;
c) $x^{y^z} + z^{x^y} = 2y^{z^x}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.

12. Dokažte, že existují funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy C^∞ na okolí bodu 0, které splňují $y(0) = z(0) = -1$ a vztahy

$$6xyz - x - 2y - 3z = 5, \qquad e^{xz} = yz.$$

Spočtěte $y'(0)$, $z'(0)$, $y''(0)$ a $z''(0)$.

13. Dokažte, že existují funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$ třídy C^∞ na okolí bodu $[1,1]$, které splňují $u(1,1) = 0$, $v(1,1) = \frac{\pi}{2}$ a vztahy

$$\exp\frac{u}{x} \cos\frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \qquad \exp\frac{u}{x} \sin\frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Nalezněte tečné roviny v bodech $[1, 1, 0]$, resp. $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$.

Extrémy – elementární metody

14. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
a) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + xy + y$, $M = \{[x,y];\ 2|x| + |y| \le 3\}$;
b) $f(x,y) = x^2 + xy$, $M = \{[x,y];\ x^2 + y^2 < 4\}$;
c) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$, $M = \mathbb{R}^2$;
d) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+2y+1}$, $M = \{[x,y];\ x > 0, y > 0\}$.

Extrémy – použití věty o multiplikátorech

15. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
a) $f(x,y,z) = \frac{x}{y}$, $M = \{[x,y,z];\ x^2 + (y-3)^2 + z^2 \le 1, y + z \le 4\}$;
b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$, $M = \{[x,y,z];\ x^2 + y^2 = z^2, xy \ge 1\}$;
c) $f(x,y,z) = yz$, $M = \{[x,y,z];\ x^2 + z^2 \le 4, x^2 + y^2 \le 1\}$;
d) $f(x,y,z) = xy + z$, $M = \{[x,y,z];\ x^2 + y^2 = 2, xyz \ge 1, z \ge 0\}$.

Počítání s maticemi

16. Určete hodnost následujících matic (v závislosti na parametru):

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & x & x+1 \\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & y & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & x & y \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2+|x| & x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

17. Najděte inverzní matice k následujícím maticím (v závislosti na parametru):

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -9 & -2 \\ 14 & -4 & 18 & 0 \\ 12 & -4 & 16 & 0 \\ 9 & -2 & 15 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 10 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 4 & 7x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Spočtěte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -6 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}.$$

Řešení soustav lineárních rovnic

19. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}x = b$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran b_1, b_2 a b_3, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

20. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}x = b$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené dva vektory pravých stran b_1 a b_2, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

21. Pro která $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ má soustava $\mathbb{A}x = b$ řešení? Najděte všechna řešení pro uvedený vektor pravých stran.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \text{ pravá strana } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

22. Pro následující řady určete, zda konvergují absolutně, konvergují neabsolutně či divergují.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)! \cdot (2n+1)! \cdot (-7)^n}{(3n)!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n+700)!n!(-8)^n}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-1}\right)$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+1)}$, g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \log\frac{1}{n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n \sin\frac{1}{n}\right)$, j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, k) $\displaystyle\sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+17n}}$,

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+1}\right)\right)$, m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[3]{n^2-n} - \sqrt[3]{n^2-2n}\right)$,

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1} - n}{\sqrt{n^2+n} - n}$, o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$, p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}$.