2. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 15 body.

1. Ukažte, že rovnice
$$\operatorname{tg}(xy^2 + x) = \log(x + y)$$
definuje na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0] = [0, 1]$ jednoznačně funkci $x = x(y)$ proměnné y, která splňuje $x(1) = 0$. Zjistěte, zda má funkce $y \mapsto x(y)$ lokální extrém v bodě 1.
2. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x, y, z) = x^2 + z^2 + 2xz$ na množině
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$
3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ vyšetřete hodnost matice
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
Dále spočtěte determinant matice pro případ $a = 0$.
4. V závislosti na parametru $p \geq 0$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,(\operatorname{arccotg} n)\, \frac{n}{n^p + 1}.$$