IMPLICITNÍ FUNKCE

V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě x_0.

1.* $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0,\ [0, 1]$

2.* $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1,\ [2, 0]$

3.* $\sin(xy) + \cos(xy) = 1,\ [\pi, 0]$

4. $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1,\ [1, 0]$

5. $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0,\ [0, 0]$

6. $\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0,\ [0, 0]$

7. $x^y + y^x = 2y,\ [1, 1]$

8.* $y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0,\ [0, 0]$

9. $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2,\ [0, 0]$

10. $\frac{\pi}{2} + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2),\ [0, 0]$

11. * Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$. Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$, určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U, napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

12. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}$, které splňují vztah $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

13. Spočtěte parciální derivace funkce z v bodě $[0, 1]$, která je implicitně zadaná rovnicí $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$ a splňuje $z(0, 1) = 1$.

V následujících třech úlohách ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v (proměnných x, y). Spočtěte obě parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

14.* $xe^{u+v} + 2uv = 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \qquad [1, 2, 0, 0]$

15.* $x = u \cos \frac{v}{u}, y = u \sin \frac{v}{u}, \qquad [1, 0, 1, 0]$

16.* $x = e^u + u \sin v, y = e^u - u \cos v, \qquad [e + 1, e, 1, \pi/2]$

VÝSLEDKY

1. 2, -14 **2.** Rovnice tečny: $x \mapsto 0$.

3. Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(\pi, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1,$$
$$\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0,$$
$$-\sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) = 0.$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

4. Položme

$$F(x,y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

5. Položme

$$F(x,y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbf{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2x - \sin(xy)\cdot y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2y - \sin(xy)\cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) = 0,$$
$$\frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))) + \varphi'(x) = 0,$$
$$\frac{-1}{(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)))^2} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2$$
$$+\frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)$$
$$-\cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))) + \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -2$.

6. Položme

$$F(x,y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1 + y^2} + x.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1) + x\varphi(x) = 0,$$
$$\frac{1}{x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$\frac{-1}{(x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{x + \operatorname{arctg}\varphi(x) + 1} \cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2}$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0,$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = 2$.

7. Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$
$$+e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$
$$+e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, která obsahuje bod $[1, 1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x) \log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$
$$+ e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$
$$+ e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

8. Položme

$$F(x, y) = y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y^3x + 2y^2x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2x^2 + 2yx^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3x^2 + \varphi(x)^2x^2 + \sin \varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$3\varphi(x)^2\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^3x + 2\varphi(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^2x + \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0,$$
$$6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)x^2 + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x$$
$$+2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x)x$$
$$+4\varphi(x)\varphi'(x)x + 2\varphi(x)^2 - \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\varphi'(x) + \cos \varphi(x) \cdot \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

9. Položme

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F\in\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0,0)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=-2\neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\sin x^2}\cdot(\cos x^2\cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2}\cdot\sin x^2\cdot 4x^2$$
$$+e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)}(\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2$$
$$-e^{\sin x\varphi(x)}\sin x\varphi(x)\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=1$.

10. Položme

$$F(x,y) = \pi/2 + \arcsin(x+y^2) - \arccos(y+x^2).$$

Bod $[0,0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F – můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0,0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0,0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f\in\mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=1\neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x+(\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x)+x^2) = 0,$$
$$\frac{1+2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x)+2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}} = 0,$$
$$-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(x+(\varphi(x))^2))\cdot(1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2$$
$$+(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x))$$
$$-\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(\varphi(x)+x^2))\cdot(\varphi'(x)+2x)^2$$
$$+(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\varphi''(x)+2) = 0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a využijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=-1$ a $\varphi''(0)=-4$.

11. Rovnice tečné roviny: $L(x,y)=\frac{7}{5}(y+2)+1$. **12.** Rovnice tečné roviny: $L(x,y)=-(x-1)-(y-1)+1$. **13.** $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)=1$ **14.** $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,2)=-1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,2)=-1/3$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,2)=1/3$ **15.** $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)=1$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)=1$
16. $\frac{\partial u}{\partial x}(e+1,e)=1/(1+e)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(e+1,e)=-e/(e+1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(e+1,e)=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(e+1,e)=1$