

1. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1. Řešte následující nerovnice v $\mathbf{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0, \quad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

2. Nakreslete graf funkce $f(x) = \left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right|$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Řešte rovnice v $\mathbf{R}$:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2 \sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x).$$

4. Vyjádřete funkce $\cos 5x$ a $\sin 5x$ pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

5. Řešte následující nerovnici v $\mathbf{R}$.

$$|x-2| + 3 < |x| + |x+1|$$

6. Dokažte následující vztah:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

7. Necht' $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. Pak platí $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

8. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ dokažte, že platí $n \leq 2^n$.

9. (binomická věta) Pro každé $n \in \mathbf{N}$ a pro každá $a, b \in \mathbf{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

VÝSLEDKY A NÁVODY

1. $(4, 6)$; $\langle 1, 2 \rangle$; $(-6, -3) \cup (\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}), \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}))$

2. Obrázek grafu

3. 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 3. rovnice: $4/3$ **4.** Použijte Moivreovu větu nebo součtové vzorce. Výsledek: $\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$ a $\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$. **5.** $(-\infty, -6) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$ **6.** Použijte matematickou indukci.