Matematika I

Matematika I

- Úvod

Matematika I

- Úvod
- Limita posloupnosti

Matematika I

- Úvod
- Limita posloupnosti
- Zobrazení

Matematika I

- Úvod
- Limita posloupnosti
- Zobrazení
- Funkce jedné reálné proměnné

Literatura

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika
- Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika
- Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy
- Vanžura: Řešené příklady z matematické analýzy

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika
- Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy
- Vanžura: Řešené příklady z matematické analýzy
- Děmidovič: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika
- Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy
- Vanžura: Řešené příklady z matematické analýzy
- Děmidovič: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy
- Pick, Hencl, Spurný, Zelený: Matematická analýza

Množiny a množinové operace

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku.

Značení

Symbol $x \in A$ značí, že element x je prvkem množiny A.

Značení

Symbol $x \in A$ značí, že element x je prvkem množiny A.
Značení $x \notin A$ znamená, že x není prvkem množiny A.

Značení

Symbol $x \in A$ značí, že element x je prvkem množiny A.
Značení $x \notin A$ znamená, že x není prvkem množiny A.

Definice

Dvě množiny jsou si rovny ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.

Značení

Symbol $x \in A$ značí, že element x je prvkem množiny A.
Značení $x \notin A$ znamená, že x není prvkem množiny A.

Definice

Dvě množiny jsou si rovny ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina A je částí množiny B (nebo A je podmnožinou B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme inkluze a značíme $A \subset B$.

Značení

Symbol $x \in A$ značí, že element x je prvkem množiny A. Značení $x \notin A$ znamená, že x není prvkem množiny A.

Definice

Dvě množiny jsou si rovny ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina A je částí množiny B (nebo A je podmnožinou B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme inkluze a značíme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$. Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou disjunktní.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou disjunktní. Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho průnik $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice

Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice

Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Kartézským součinem množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1

Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Výroku A v implikaci se říká premisa, výrok B se nazývá závěr.

Výroku A v implikaci se říká premisa, výrok B se nazývá závěr. Výrok A je postačující podmínkou pro platnost B a B je nutnou podmínkou pro platnost A.

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(Platnost výroku) A je nutnou a postačující podmínkou (platnosti výroku) B.

Definice

Tautologií budeme nazývat výrok, který je pravdivý při libovolném ohodnocení elementárních výroků.

Definice

Tautologií budeme nazývat výrok, který je pravdivý při libovolném ohodnocení elementárních výroků.

Příklad

Příkladem tautologie jsou například výroky

$$A \vee \neg A, \quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B), \quad \neg(A \wedge \neg A),$$
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B), \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B),$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A), \quad \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B),$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)),$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (((A \wedge C) \Rightarrow B) \wedge ((A \wedge \neg C) \Rightarrow B))$$

Definice

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \dots, M_m$.

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Definice

Nechť $A(x), \ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M \colon A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme obecným (velkým) kvantifikátorem.

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon\ A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme existenčním (malým) kvantifikátorem.

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje právě jedno $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists! x \in M\colon\ A(x).$$

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje právě jedno $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists! x \in M\colon\ A(x).$$

Symbol $\exists! x \in M\colon\ A(x)$ je zkratka za výrok

$$(\exists x \in M\colon\ A(x)) \wedge (\forall y_1, y_2 \in M\colon\ (A(y_1) \wedge A(y_2)) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$

Značení

Nechť $A(x), x \in M$ a $B(x), x \in M$ jsou výrokové formy.
Výrok

$$\forall x \in M, B(x) \colon A(x)$$

znamená

Značení

Nechť $A(x), x \in M$ a $B(x), x \in M$ jsou výrokové formy.
Výrok

$$\forall x \in M, B(x)\colon\ A(x)$$

znamená

$$\forall x \in M\colon\ (B(x) \Rightarrow A(x)).$$

Značení

Nechť $A(x), x \in M$ a $B(x), x \in M$ jsou výrokové formy.
Výrok
$$\forall x \in M, B(x)\colon A(x)$$
znamená
$$\forall x \in M\colon (B(x) \Rightarrow A(x)).$$

Značení

Nechť $A(x), x \in M$ a $B(x), x \in M$ jsou výrokové formy.
Výrok
$$\exists x \in M, B(x)\colon A(x)$$
znamená

Značení

Nechť $A(x), x \in M$ a $B(x), x \in M$ jsou výrokové formy.
Výrok

$$\forall x \in M, B(x) \colon A(x)$$

znamená

$$\forall x \in M \colon (B(x) \Rightarrow A(x)).$$

Značení

Nechť $A(x), x \in M$ a $B(x), x \in M$ jsou výrokové formy.
Výrok

$$\exists x \in M, B(x) \colon A(x)$$

znamená

$$\exists x \in M \colon (B(x) \wedge A(x)).$$

Definice

Negace kvantifikovaných výroků se provádějí následovně:

$$(\neg(\forall x \in M\colon A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in M\colon \neg A(x))$$

Definice

Negace kvantifikovaných výroků se provádějí následovně:

$$(\neg(\forall x \in M\colon A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in M\colon \neg A(x))$$

a

$$(\neg(\exists x \in M\colon A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in M\colon \neg A(x))\,.$$

Platí následující pro výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$:

$$(\forall x \in M_1 \forall y \in M_2 : \ V(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in M_2 \forall x \in M_1 : \ V(x, y)),$$

Platí následující pro výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$:

$$(\forall x \in M_1 \forall y \in M_2 : \ V(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in M_2 \forall x \in M_1 : \ V(x, y)),$$
$$(\exists x \in M_1 \exists y \in M_2 : \ V(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in M_2 \exists x \in M_1 : \ V(x, y)),$$

Platí následující pro výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$:

$$(\forall x \in M_1 \forall y \in M_2\colon\ V(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in M_2 \forall x \in M_1\colon\ V(x, y)),$$
$$(\exists x \in M_1 \exists y \in M_2\colon\ V(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in M_2 \exists x \in M_1\colon\ V(x, y)),$$
$$(\exists x \in M_1 \forall y \in M_2\colon\ V(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in M_2 \exists x \in M_1\colon\ V(x, y)).$$

——————konec přednášky 2.10.——————

Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- matematická indukce

Věta 1 (de Morganova pravidla)

Mějme množiny S, A_α, $\alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$. Pak platí

$$S \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha) \qquad \text{a} \qquad S \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha).$$

Věta 2 (Cauchyova nerovnost)

Nechť $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Věta 3 (iracionalita $\sqrt{2}$)

Jestliže reálné číslo x řeší rovnici $x^2 = 2$, pak x není racionální.

Racionální čísla

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Racionální čísla

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Racionální čísla

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\},$$

přičemž $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, právě když $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$.

Reálná čísla

Množinou reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace sčítání a násobení (značíme $+$ a $\cdot$), a relace uspořádání (značíme $\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.
III. Axiom infima.

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání), Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon\ x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon\ x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon\ x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. jednotkový prvek, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. jednotkový prvek, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. jednotkový prvek, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita).

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \le y \ \ \& \ \ y \le z) \Rightarrow x \le z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \le y \ \ \& \ \ y \le x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \;\;\&\;\; y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \;\;\&\;\; y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \leq y \vee y \leq x$,

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (0 \leq x \ \ \& \ \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá dolní závorou množiny M.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá dolní závorou množiny M. Analogicky definujeme pojmy množina omezená shora a horní závora.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá dolní závorou množiny M. Analogicky definujeme pojmy množina omezená shora a horní závora. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, je-li omezená shora i zdola.

Axiom infima:

Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon\ x \geq g$,

Axiom infima:
Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g \ \exists x \in M\colon x < g'$.

Axiom infima:

Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g\ \exists x \in M\colon x < g'$.

Číslo g značíme symbolem $\inf M$ a čteme infimum M.

Poznámka

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.

————konec přednášky 6.10.————

Poznámka

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.
- Infimum množiny M je její největší dolní závora.

———————konec přednášky 6.10.——————————

Poznámka

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.
- Infimum množiny M je její největší dolní závora.
- Reálná čísla existují a jsou vlastnostmi I–III určena jednoznačně.

————konec přednášky 6.10.————

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ -x = (-1) \cdot x,$

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ -x = (-1) \cdot x,$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0),$

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ -x = (-1) \cdot x,$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0),$

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0,$

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \ -x = (-1) \cdot x$,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,

(v) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\; -x = (-1) \cdot x,$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0),$

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0,$

(v) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0\; \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0\; \forall n \in \mathbb{N}\colon x < y \Leftrightarrow x^n < y^n.$

(vi) $\vdots$

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- Otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- Uzavřený interval $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- Polootevřený interval $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- Polootevřený interval $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- Otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- Uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- Polootevřený interval $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- Polootevřený interval $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá levý krajní bod intervalu, bod b se nazývá pravý krajní bod intervalu. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. vnitřním bodem intervalu.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- Otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- Uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- Polootevřený interval $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- Polootevřený interval $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá levý krajní bod intervalu, bod b se nazývá pravý krajní bod intervalu. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. vnitřním bodem intervalu.

Neomezené intervaly:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\},$$

analogicky definujeme $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty)$ a $(-\infty, +\infty)$.

Platí $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přeneseme-li sčítání a násobení z $\mathbb{R}$ na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí.

Platí $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přeneseme-li sčítání a násobení z $\mathbb{R}$ na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí. Reálné číslo, které není číslem racionálním, nazveme číslem iracionálním. Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se nazývá množinou čísel iracionálních.

Komplexní čísla

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí
$i \cdot i = -1$.

Komplexní čísla

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí $i \cdot i = -1$.

Věta („základní věta algebry“)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M\colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \; \exists x \in M\colon x > G'$,

nazýváme supremem množiny M.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M\colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \; \exists x \in M\colon x > G'$,

nazýváme supremem množiny M.

Věta 4 (o supremu)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M \colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \ \exists x \in M \colon x > G'$,

nazýváme supremem množiny M.

Věta 4 (o supremu)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Supremum množiny M značíme $\sup M$.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M\colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\ \exists x \in M\colon x > G'$,

nazýváme supremem množiny M.

Věta 4 (o supremu)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Supremum množiny M značíme $\sup M$.
Platí $\sup M = -\inf(-M)$.

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je největší prvek (maximum) množiny M (značíme $\max M$), jestliže a je horní závorou množiny M a $a \in M$. Analogicky definujeme nejmenší prvek (minimum) M, který značíme $\min M$.

Lemma 5

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \ \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \colon z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 6 (existence celé části)

Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje celá část čísla r, tj. číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \le r < k + 1$. Celá část čísla r je určena jednoznačně a značíme ji $[r]$.

Věta 6 (existence celé části)

Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje celá část čísla r, tj. číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$. Celá část čísla r je určena jednoznačně a značíme ji $[r]$.

Věta 7 (Archimédova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

————konec přednášky 9.10.————

Věta 8 (o *n*-té odmocnině)

Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ *a ke každému* $n \in \mathbb{N}$ *existuje jediné* $y \in \langle 0, +\infty)$ *splňující* $y^n = x$.

Věta 8 (o n-té odmocnině)

Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné $y \in \langle 0, +\infty)$ splňující $y^n = x$.

Věta 9 (o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $a < r < b$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňující $a < s < b$.

II. Limita posloupnosti

II. Limita posloupnosti

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.

II. Limita posloupnosti

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazveme n-tým členem této posloupnosti.

II. Limita posloupnosti

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazveme n-tým členem této posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

II. Limita posloupnosti

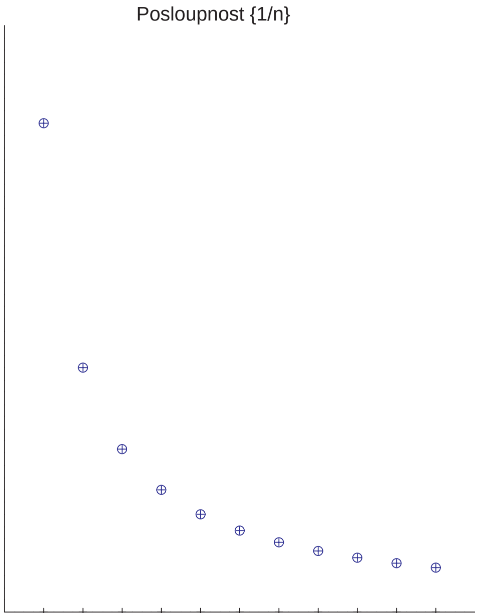
Definice

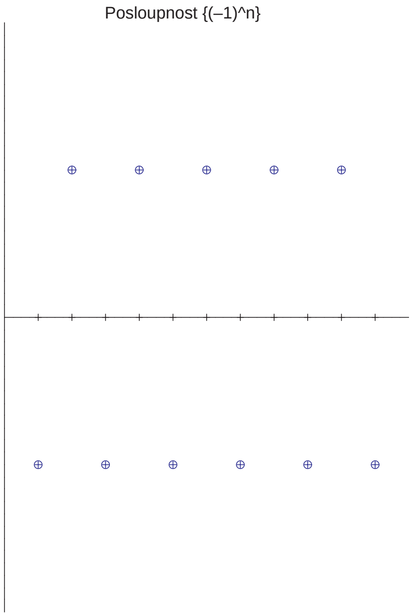
Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazveme n-tým členem této posloupnosti.

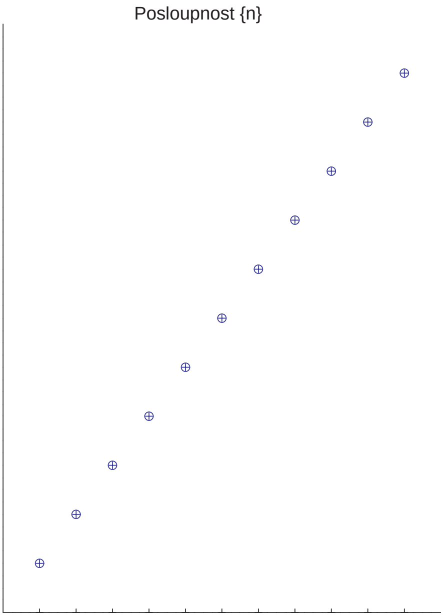
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

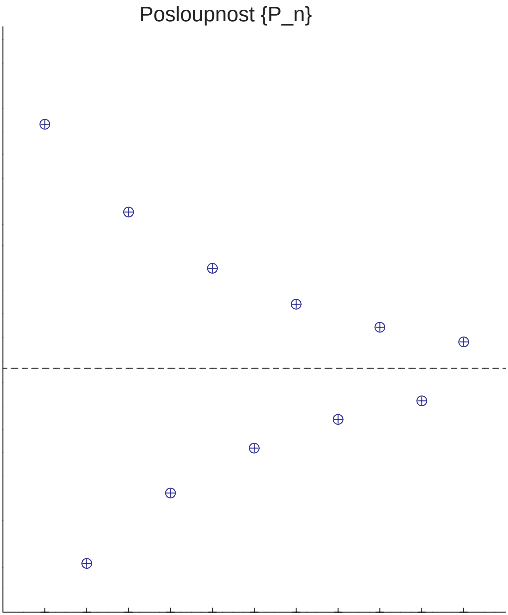
Množinou členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N} \colon a_n = x\}.$$


Posloupnost {1/n}


Posloupnost {(–1)^n}


Posloupnost {n}


Posloupnost {P_n}

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- shora omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- shora omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- zdola omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- shora omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- zdola omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- neklesající, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- neklesající, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- neklesající, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je ryze monotónní, pokud je rostoucí či klesající.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- **Součtem posloupností** $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- Součtem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme rozdíl a součin posloupností.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- Součtem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme rozdíl a součin posloupností.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak podílem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- Součtem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme rozdíl a součin posloupností.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak podílem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, pak λ-násobkem posloupnosti $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\lambda a_n\}$.

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$, tj.

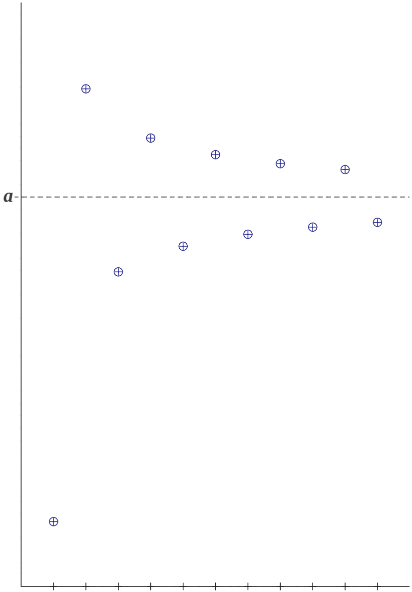
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

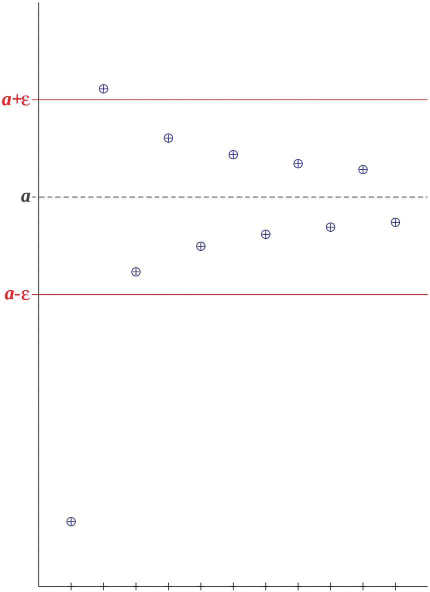
Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$, tj.

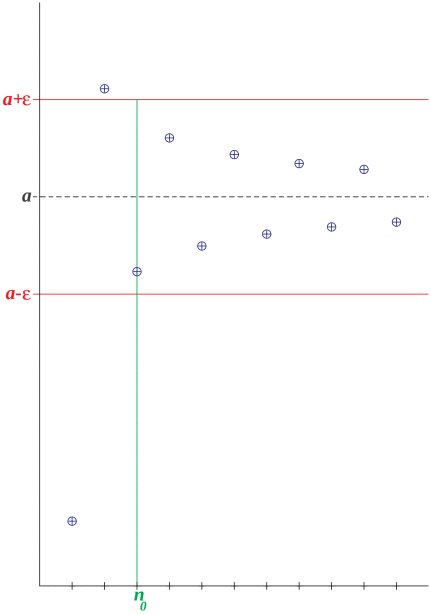
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

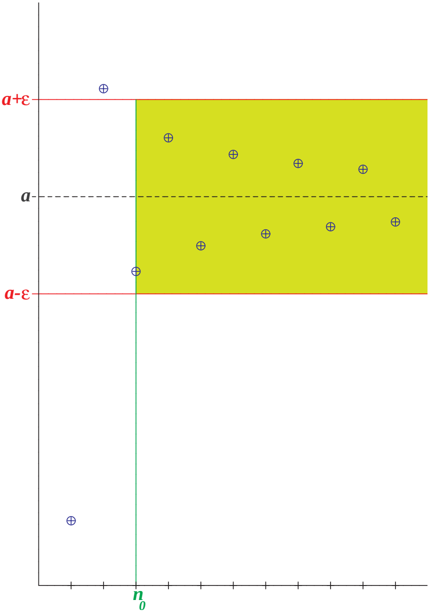
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$, které je limitou $\{a_n\}$.

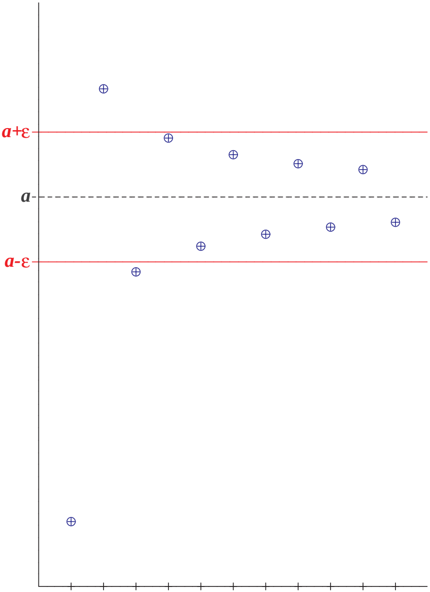

a



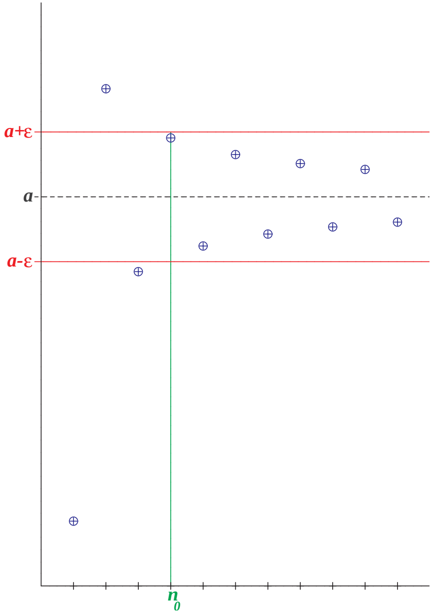
a+ε
a
a-ε

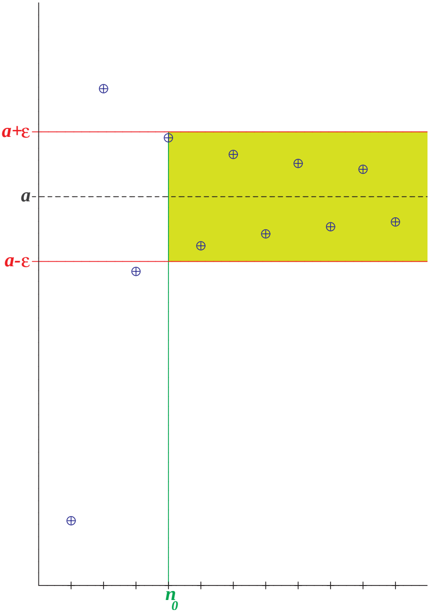

a+ε
a
a-ε
n0

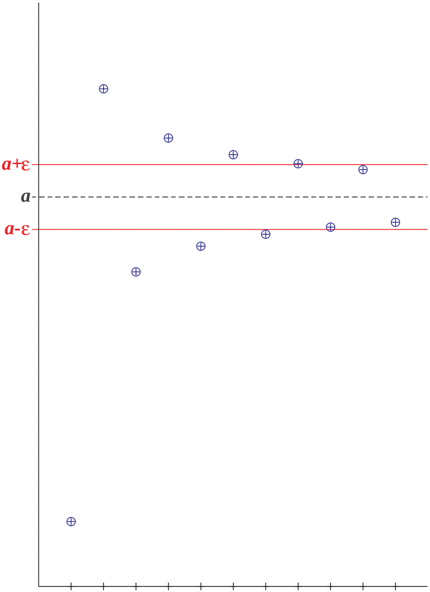

a+ε
a
a-ε
n0



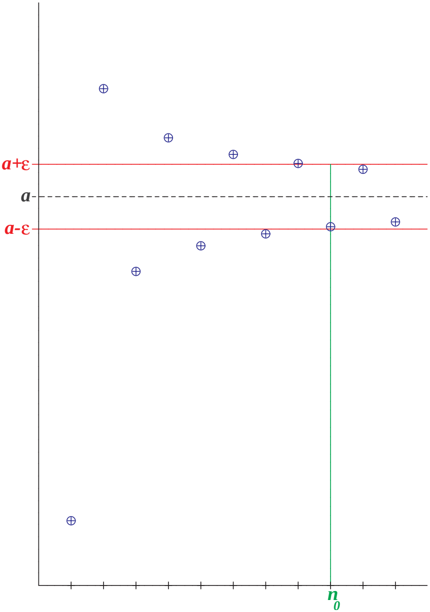
a+ε
a
a-ε


a+ε
a
a-ε
n0

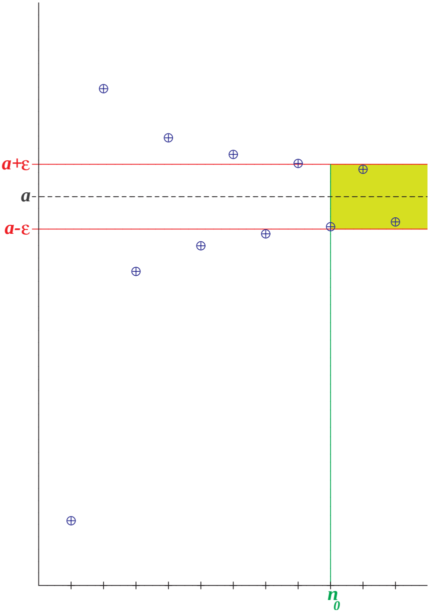

a+ε
a
a-ε
n0



a+ε
a
a-ε



a+ε
a
a-ε
n0



a+ε
a
a-ε
n0

————konec přednášky 13.10.——————

Věta 10 (jednoznačnost limity)

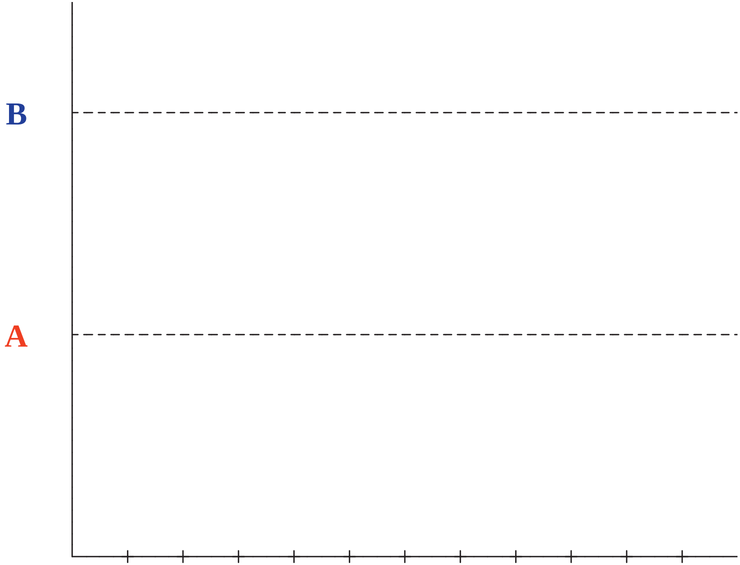
Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

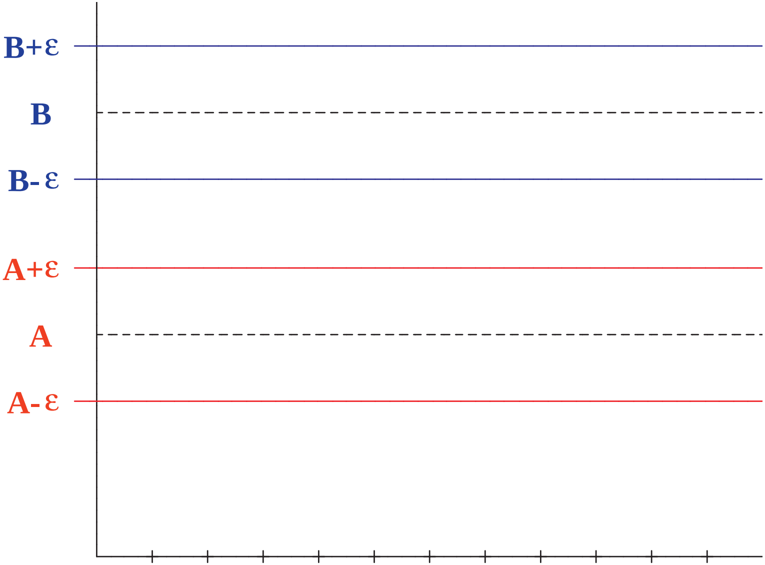
————konec přednášky 13.10.——————

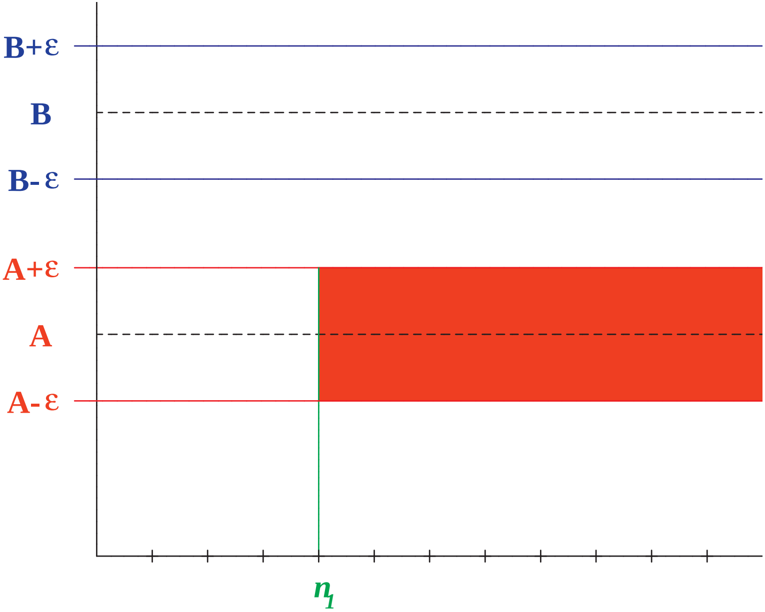
Věta 10 (jednoznačnost limity)

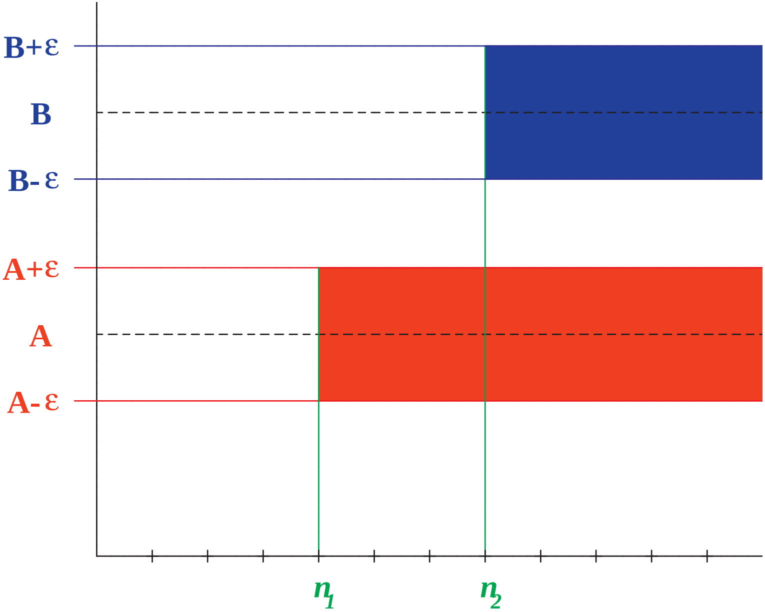
Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.


B
A


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_1


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_1
n_2

Poznámka

Pro posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$ platí následující:

(i) Pokud $\lim a_n = A$, pak $\lim |a_n| = |A|$.

Poznámka

Pro posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$ platí následující:

(i) Pokud $\lim a_n = A$, pak $\lim |a_n| = |A|$.

(ii) Platí $\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0$.

Poznámka

Pro posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$ platí následující:

(i) Pokud $\lim a_n = A$, pak $\lim |a_n| = |A|$.

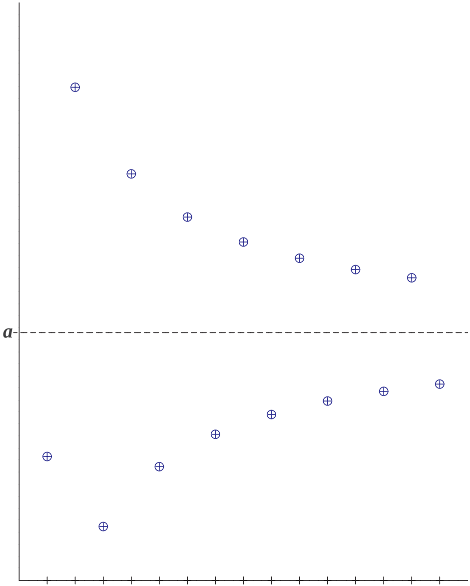
(ii) Platí $\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0$.

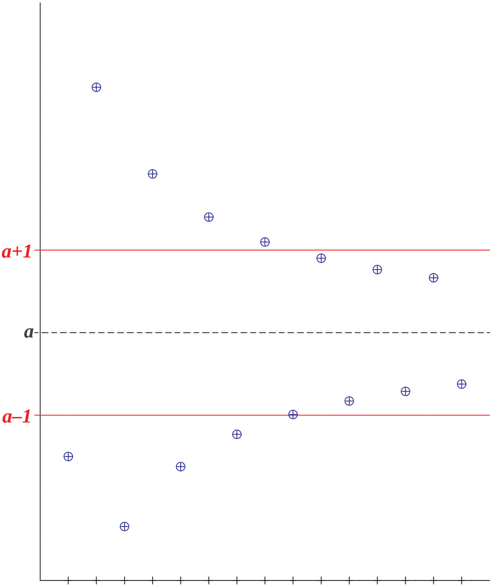
(iii) Platí

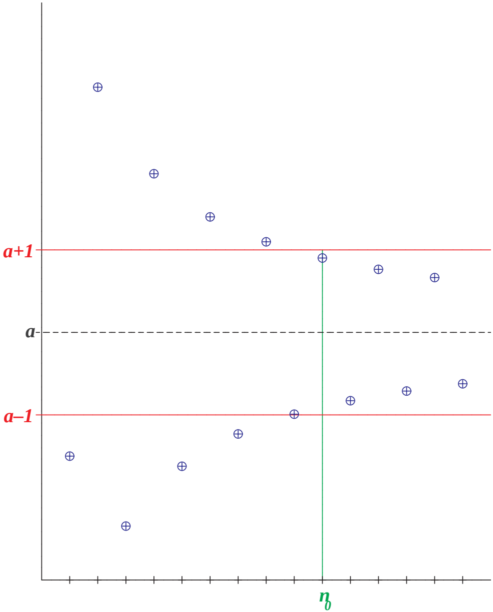
$$\lim a_n = A \Leftrightarrow$$
$$\exists K > 0 \exists \eta > 0 \forall \varepsilon \in (0, \eta) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \colon \ |a_n - A| \leq K\varepsilon.$$

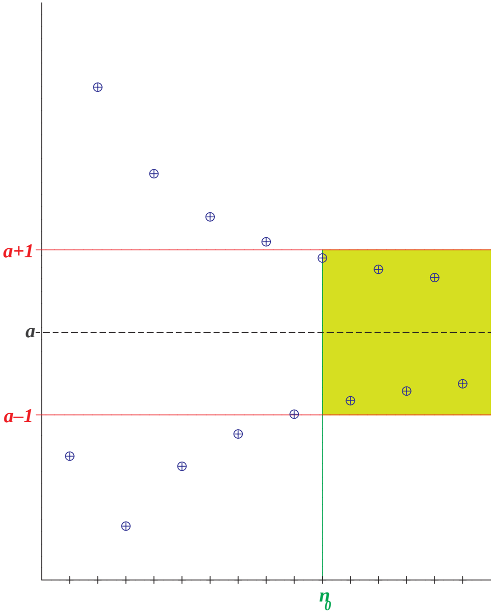
Věta 11

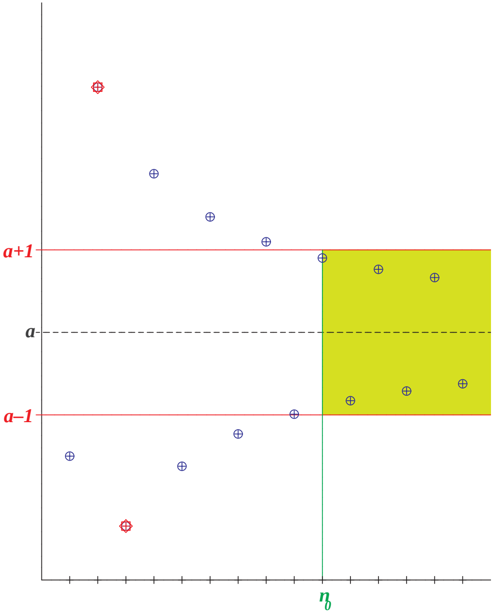
Každá konvergentní posloupnost je omezená.


a

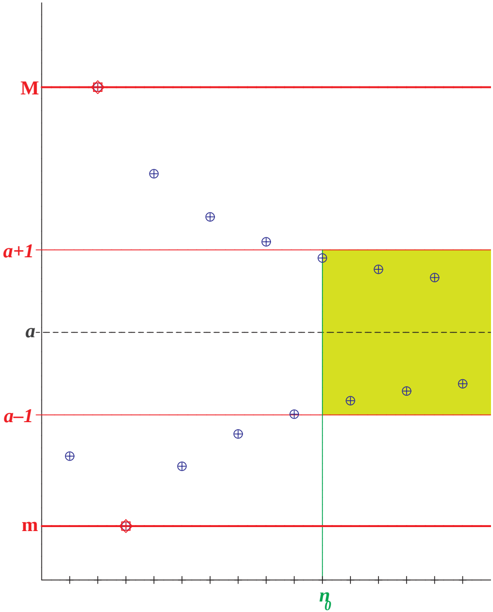

a+1
a
a–1


a+1
a
a–1
n
0


a+1
a
a–1
n
0



a+1
a
a–1
n0


M
a+1
a
a–1
m
n_0

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též podposloupností posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též podposloupností posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Věta 12 (limita vybrané posloupnosti)

Nechť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak také $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 13 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

Věta 13 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

Věta 13 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*, je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 13 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*, je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

———konec přednášky 16.10.———

Věta 14

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 15 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

Věta 15 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 15 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

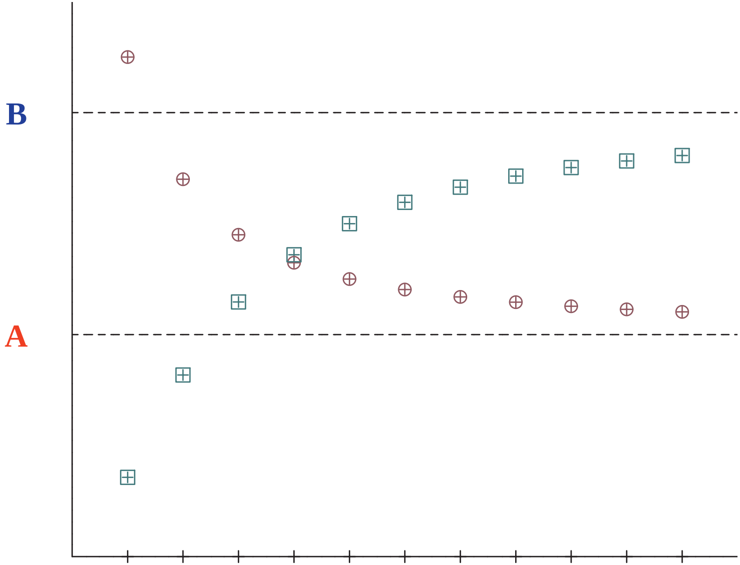
Věta 16 (o dvou policajtech)

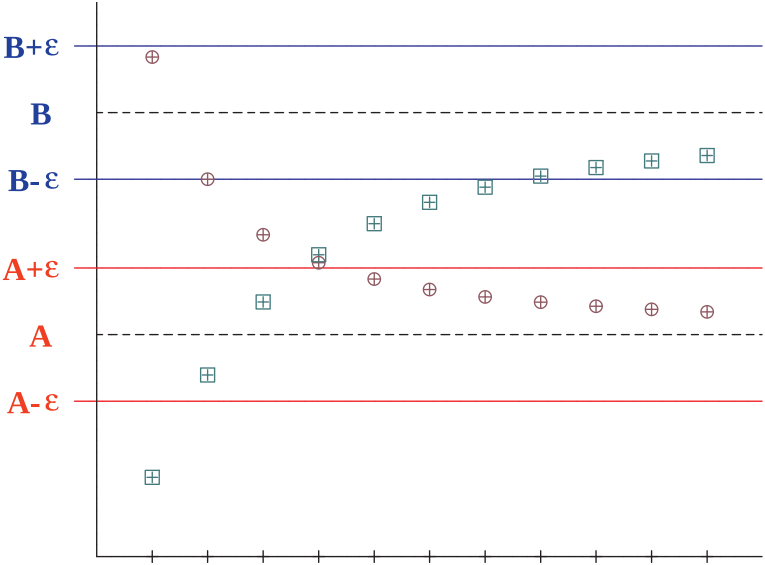
Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

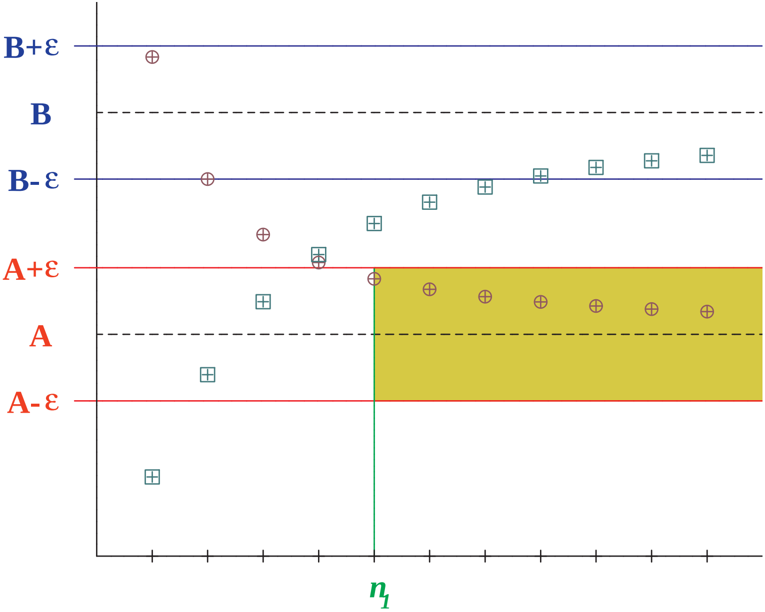
(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq c_n \leq b_n$,

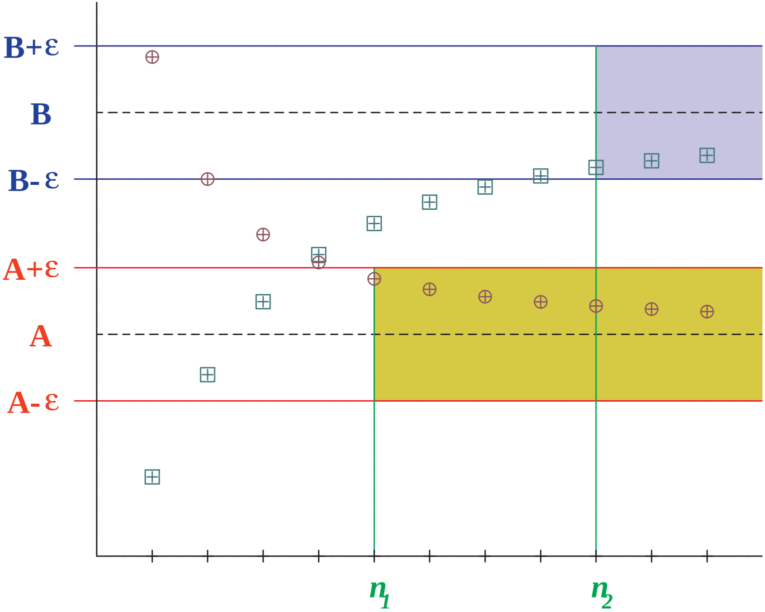
(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

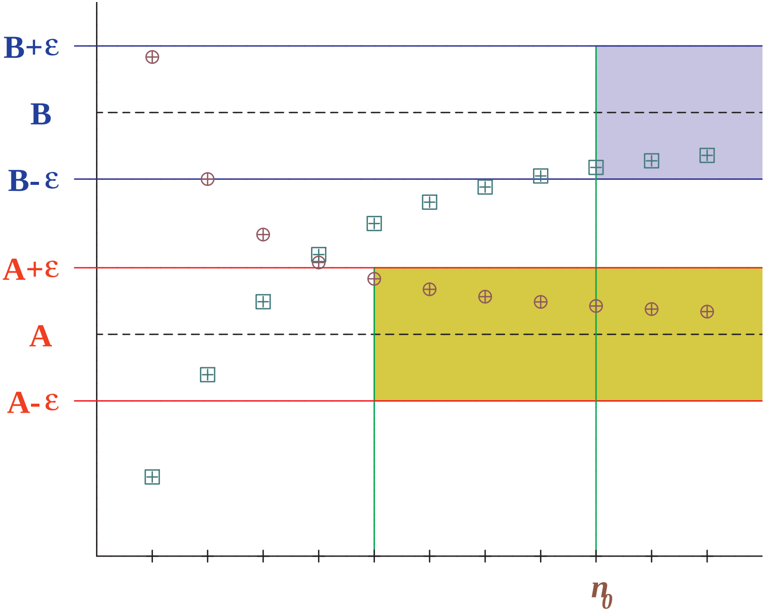

B
A

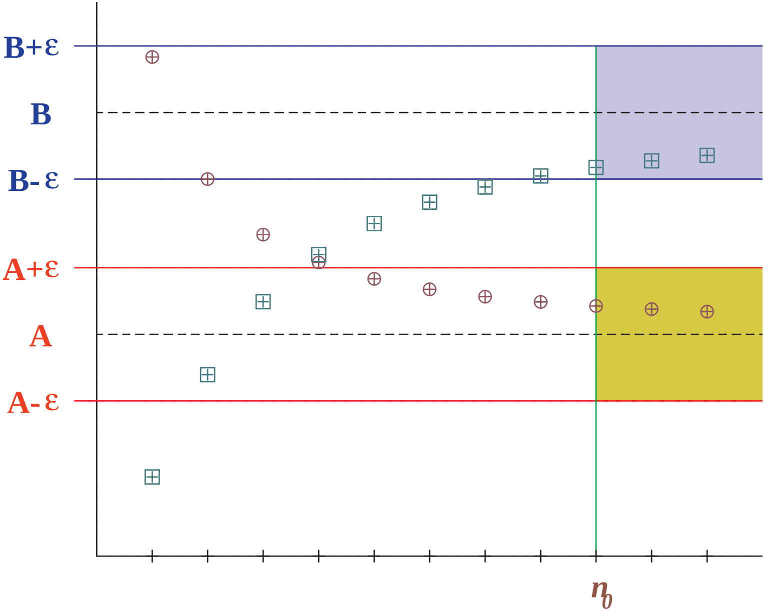

B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_1



B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n1
n2


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_0


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_0

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > L.$$

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Věta 10 o jednoznačnosti limity platí i pro limity $+\infty$ a $-\infty$. Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $+\infty$, podobně pro $-\infty$.

Definice

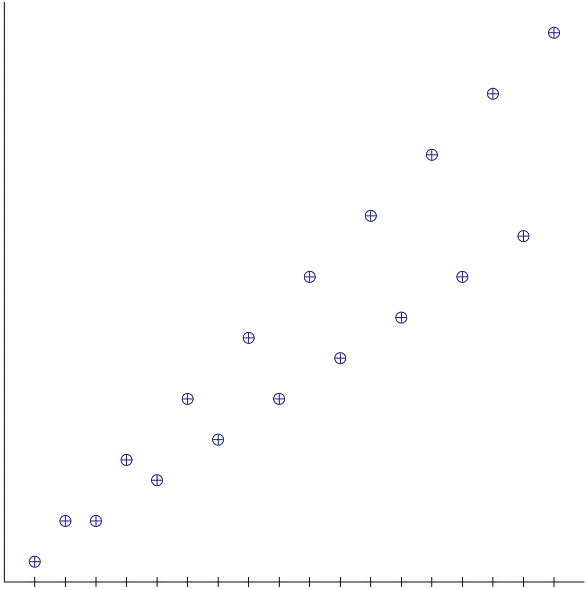
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

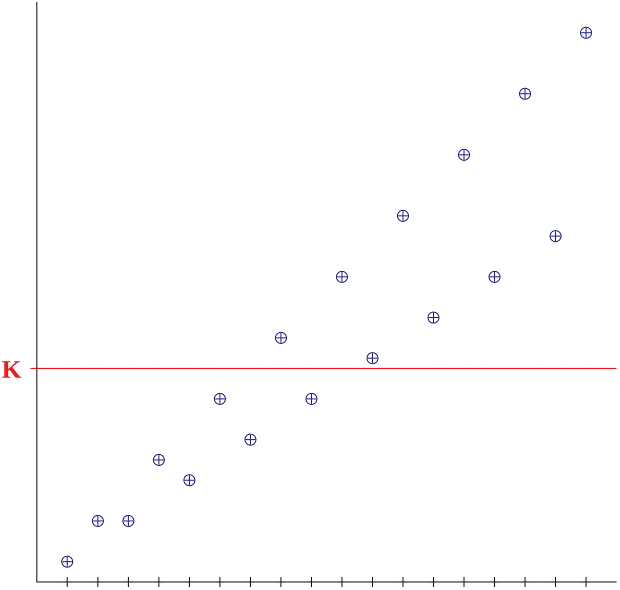
$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ a_n > L.$$

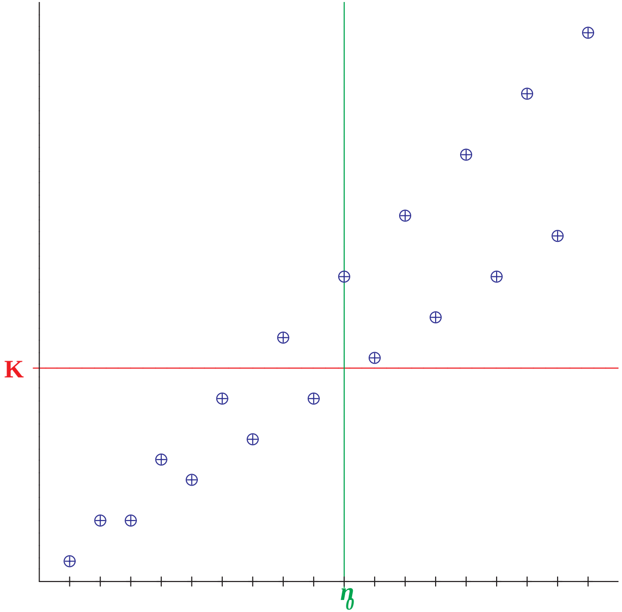
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže

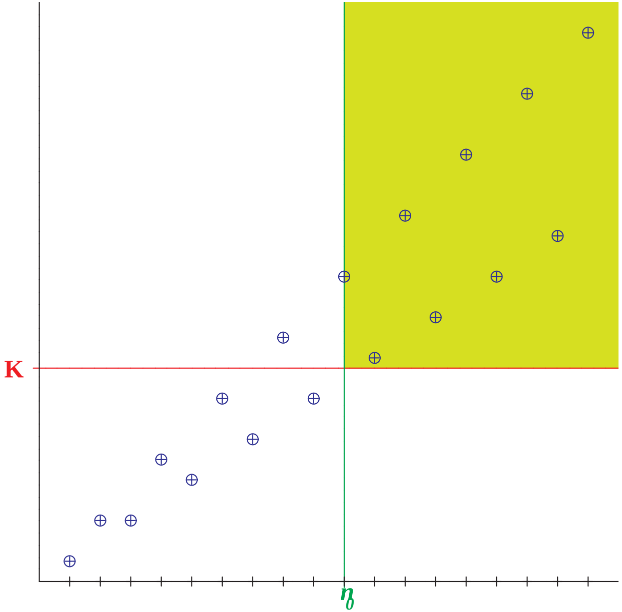
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ a_n < K.$$

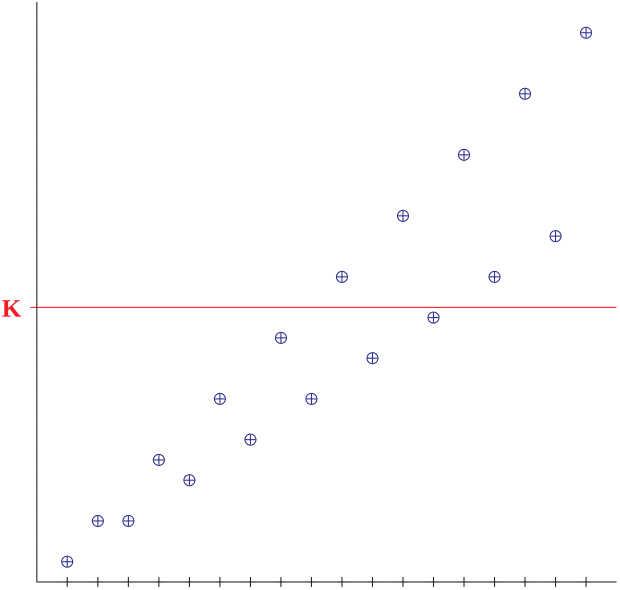
Věta 10 o jednoznačnosti limity platí i pro limity $+\infty$ a $-\infty$. Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $+\infty$, podobně pro $-\infty$. Je-li $\lim a_n \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu.

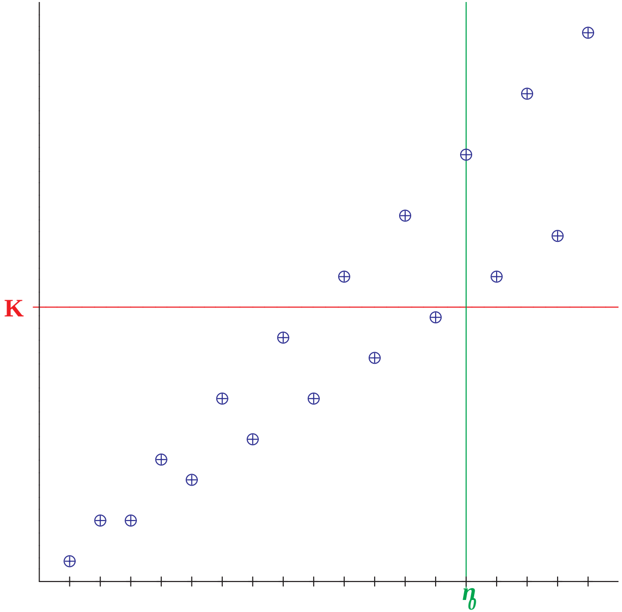


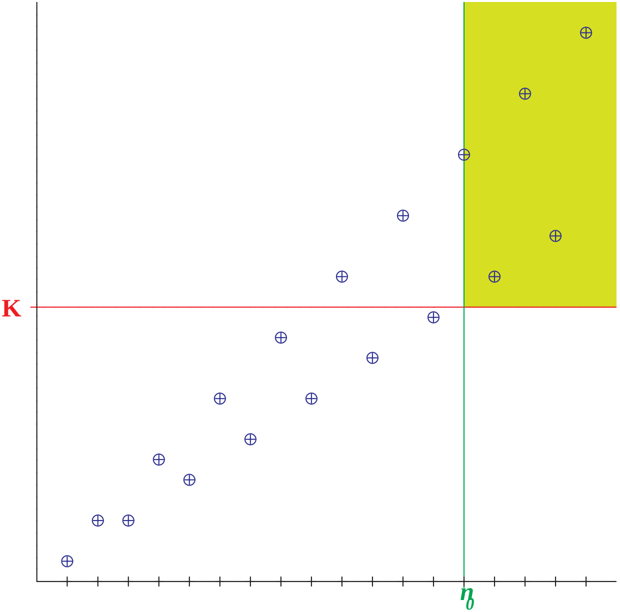

K

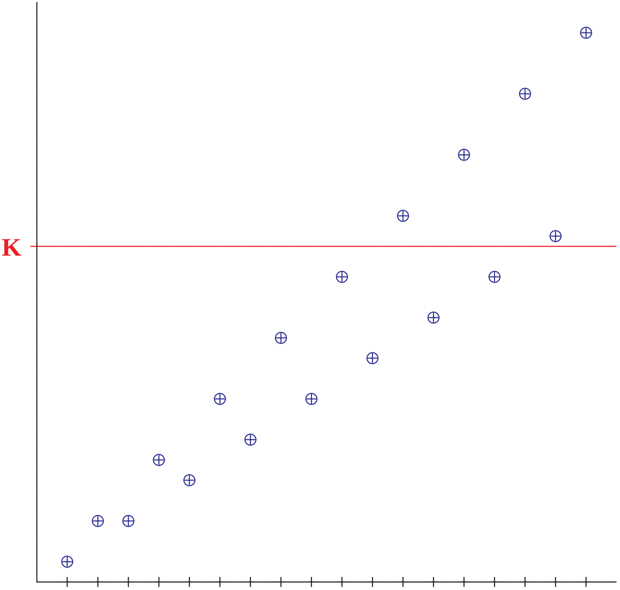

K
n_0

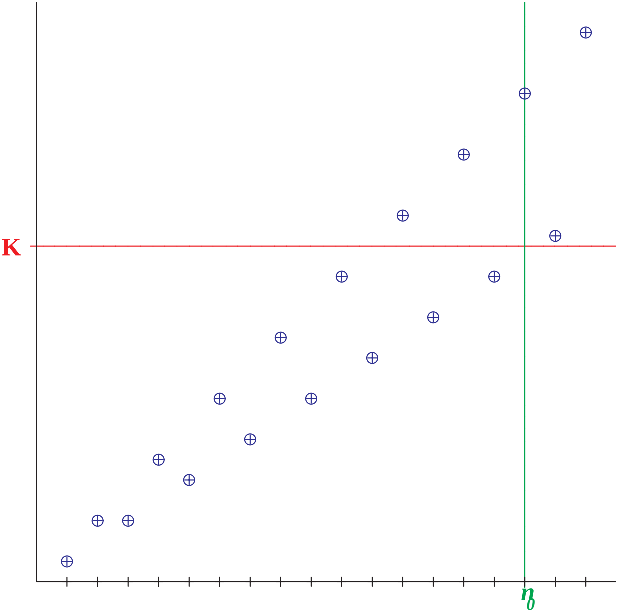

K
n_0

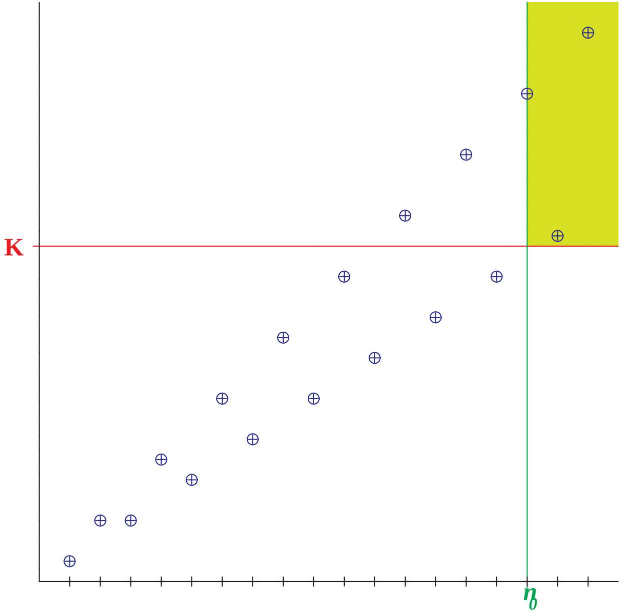

K

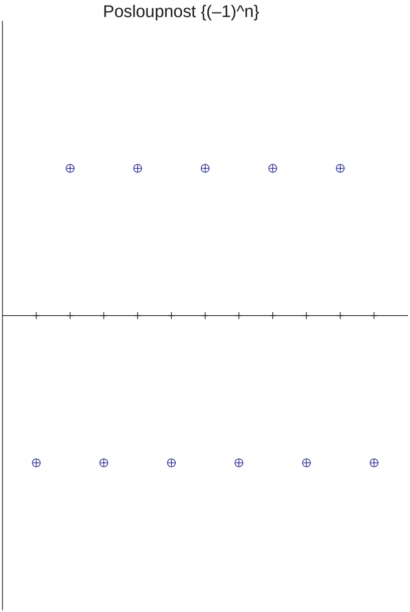

K
n_0


K
n_0

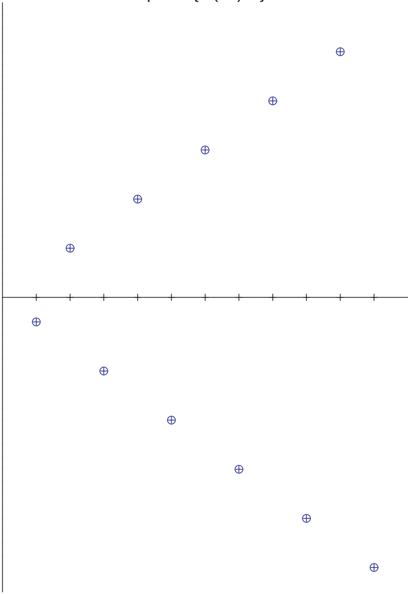

K

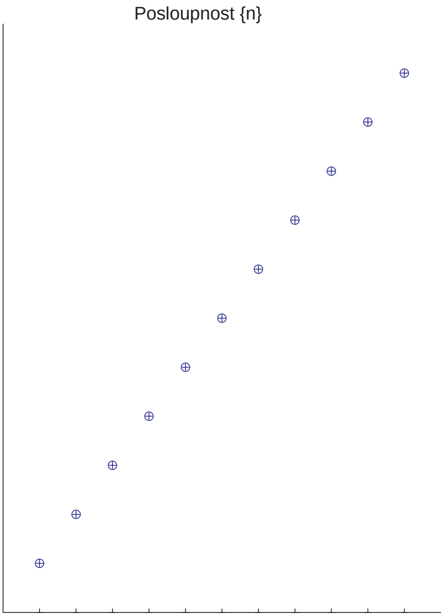

K
n_0

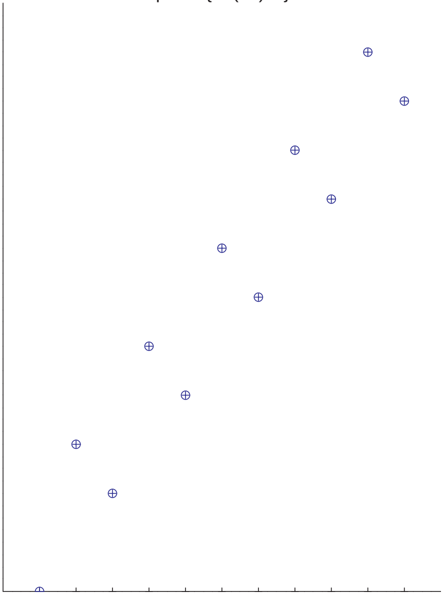

K
n_0

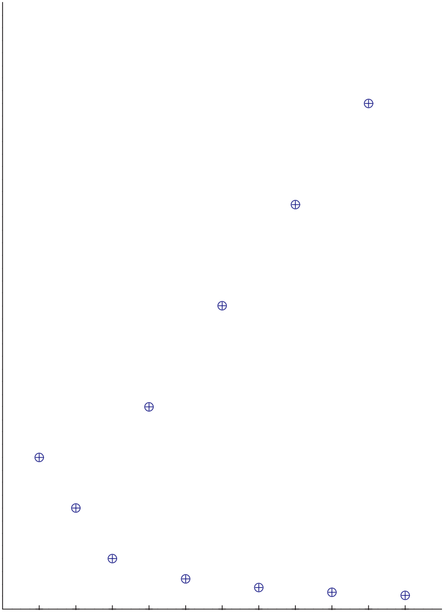

Posloupnost {(–1)^n}

Posloupnost {n.(–1)^n}




Posloupnost {n}


Posloupnost {n+(–1)^n}



Věta 11 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

Věta 11'

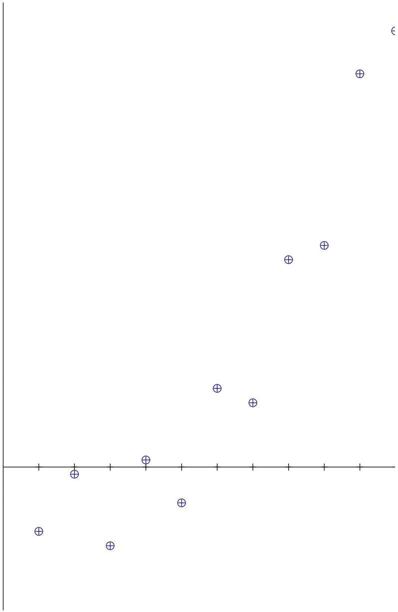
- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

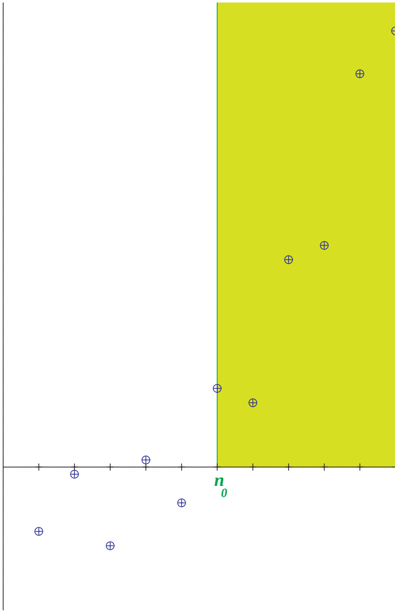
Věta 11 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

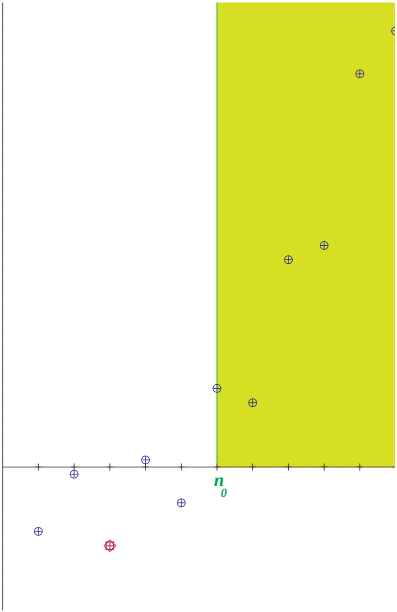
Věta 11'

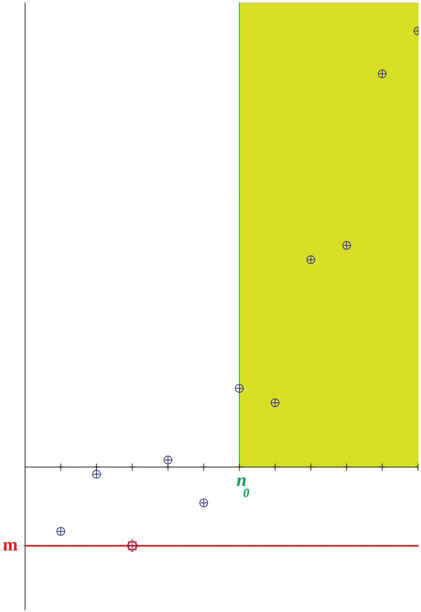
- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

Věta 12 (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity.




n_0


n_0



n_0
m

Definice

———konec přednášky 20.10.———

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,

Definice

——————konec přednášky 20.10.——————

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,

Definice

————konec přednášky 20.10.————

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,

Definice

———konec přednášky 20.10.———

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,

Definice

———konec přednášky 20.10.———

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,

Definice

———konec přednášky 20.10.———

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,
- $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$,

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,
- $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$,
- $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$.

Věta 13' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$*, pokud je pravá strana definována,*

Věta 13' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

Věta 13' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 13' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$*, pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$*, pokud je pravá strana definována.*

Věta 17

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$*,* $A > 0$*,* $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$*, platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim a_n/b_n = +\infty$*.*

Věta 15 (limita a uspořádání) a Věta 16 (o dvou policajtech) platí i pro nevlastní limity. Dokonce platí

Věta 16' (o jednom policajtovi)

Buďte $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *dvě posloupnosti.*

- *Jestliže* $\lim a_n = +\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n \geq a_n$, *pak* $\lim b_n = +\infty$.
- *Jestliže* $\lim a_n = -\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n \leq a_n$, *pak* $\lim b_n = -\infty$.

Definice

Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Definice

Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Lemma 18

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $G \in \mathbb{R}^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

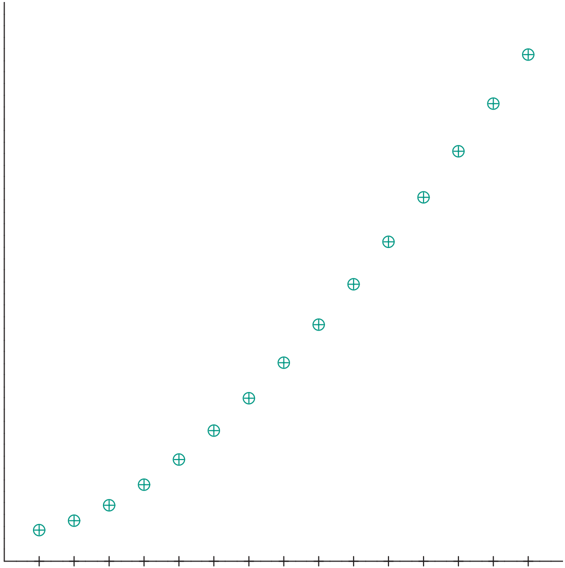
(i) $G = \sup M$.

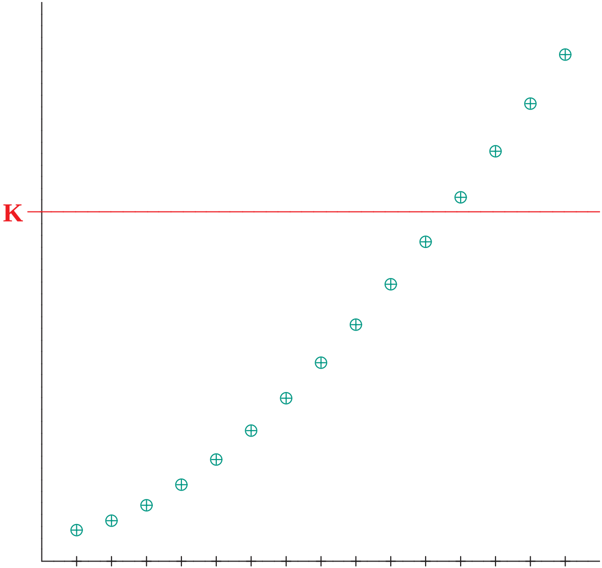
(ii) *Číslo G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z M, pro kterou* $\lim x_n = G$.

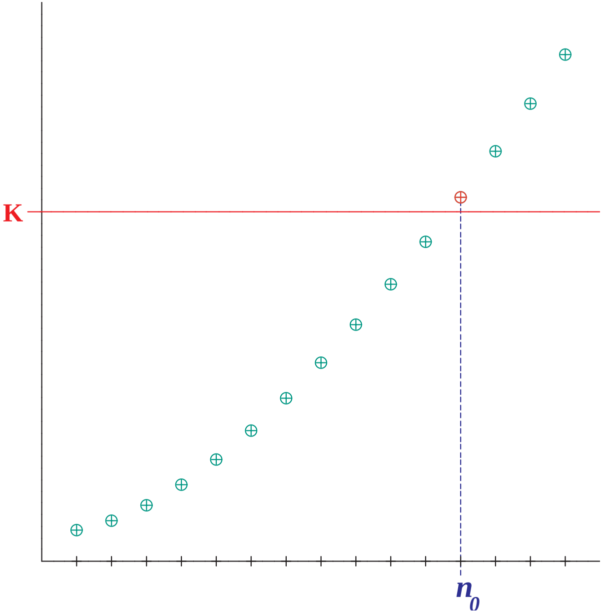
——————konec přednášky 23.10.——————

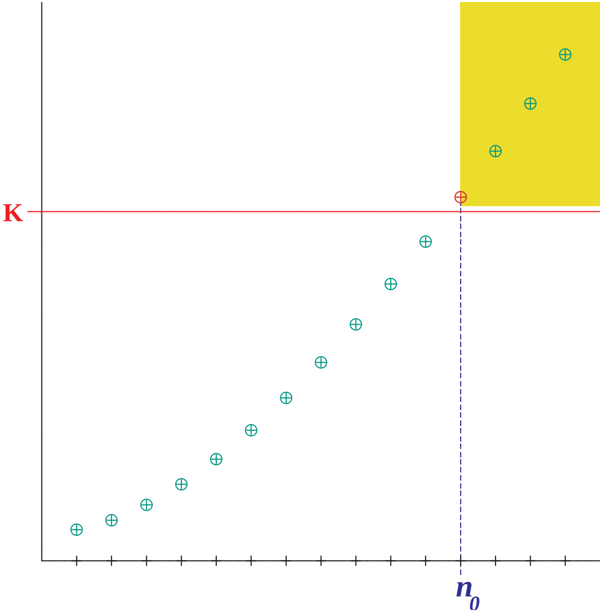
Věta 19 (o limitě monotónní posloupnosti)

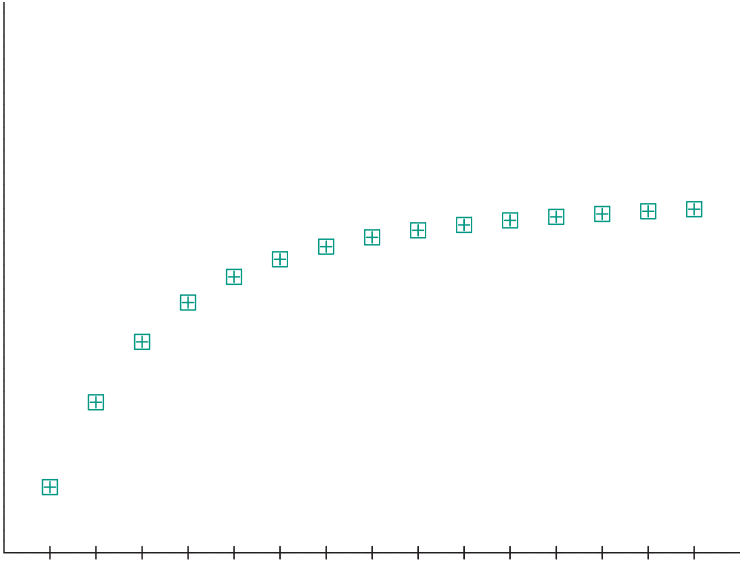
Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li $\{a_n\}$ *neklesající, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*. Je-li* $\{a_n\}$ *nerostoucí, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*.*

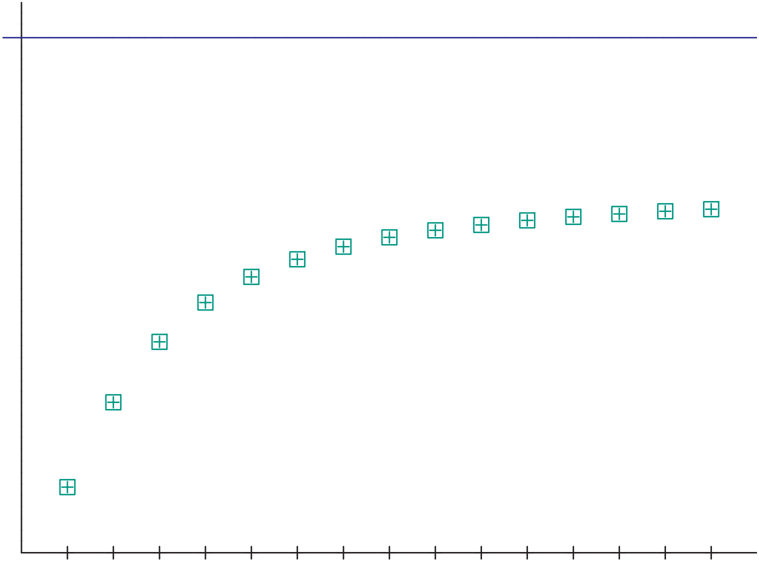


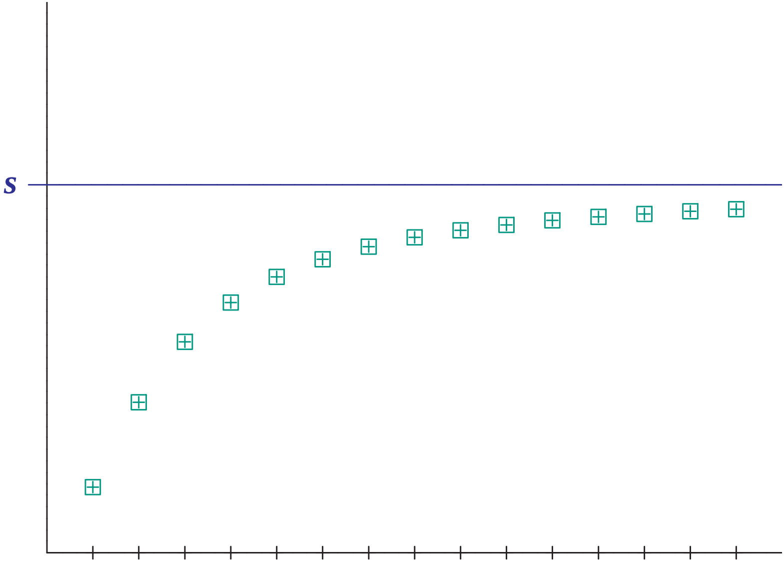

K

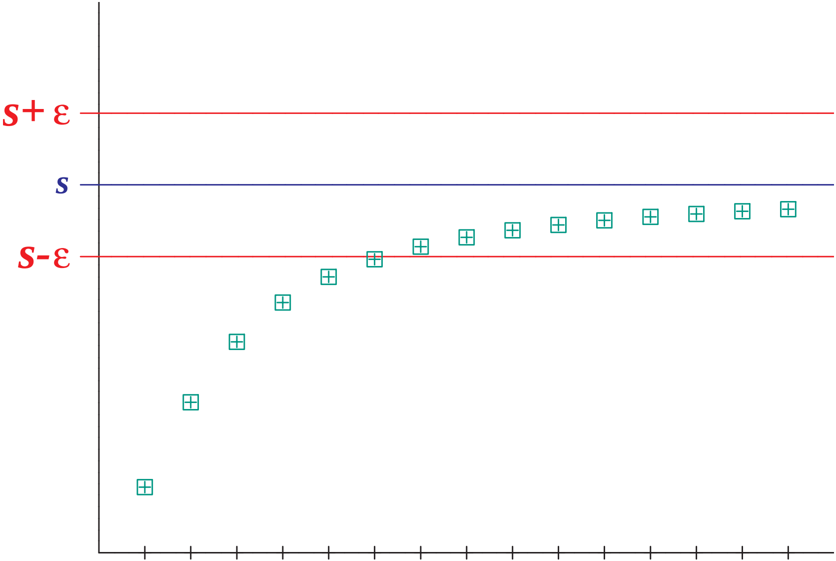

K
n_0


K
n_0

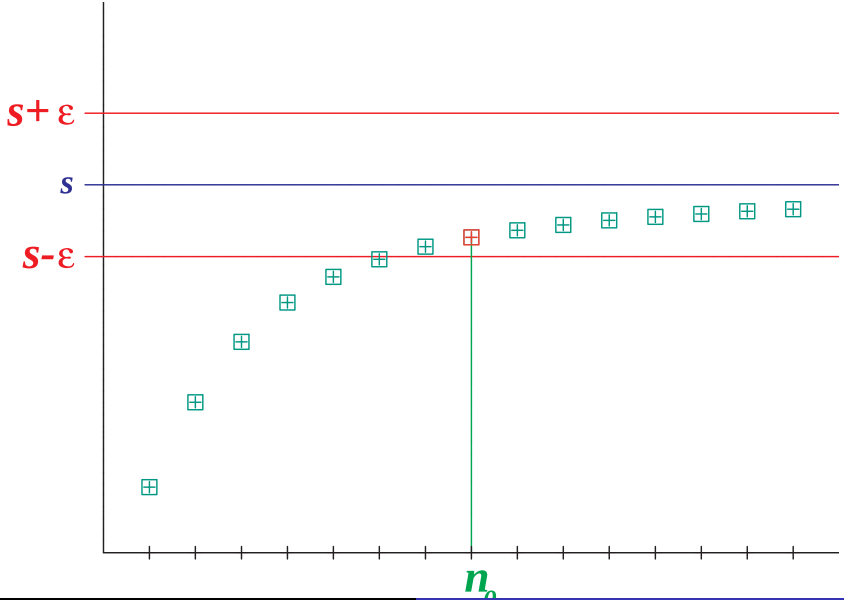


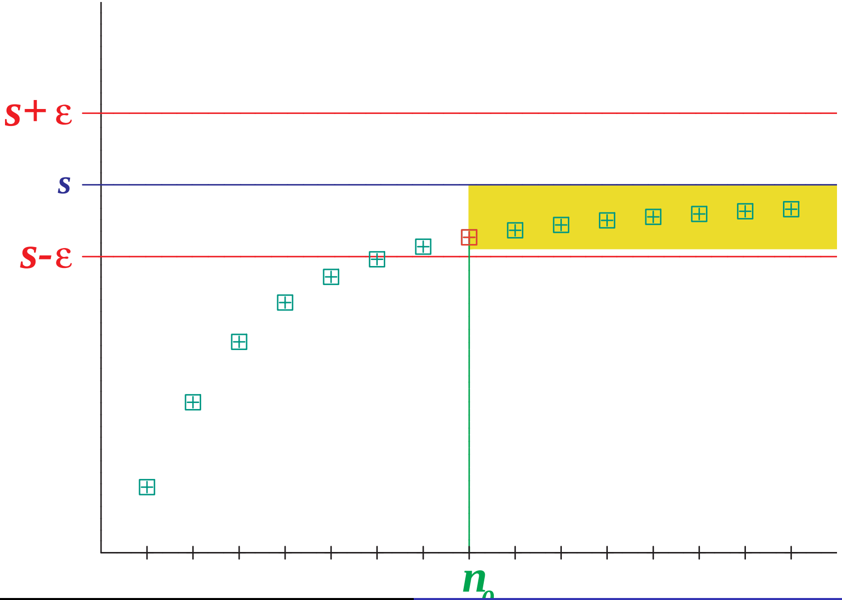



s



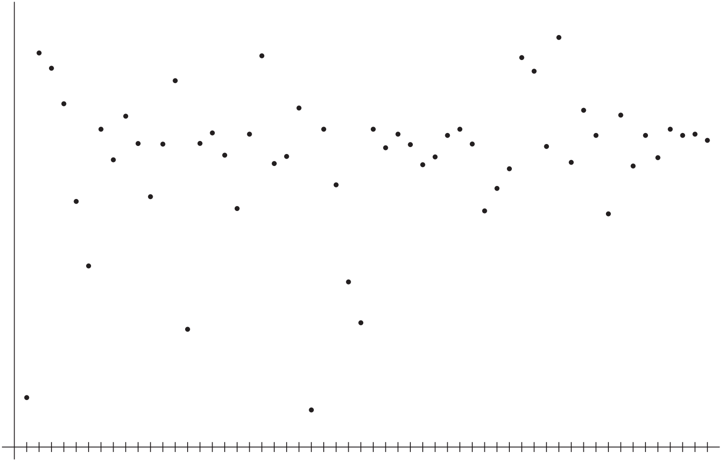
s+ ε
s
s-ε

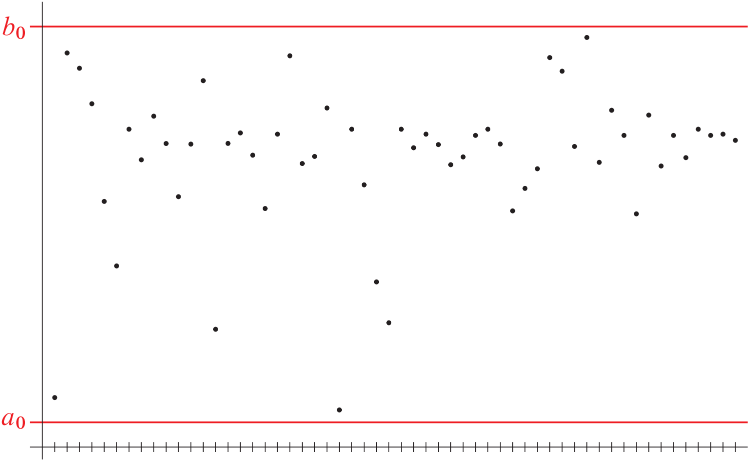

s+ ε
s
s- ε
n0

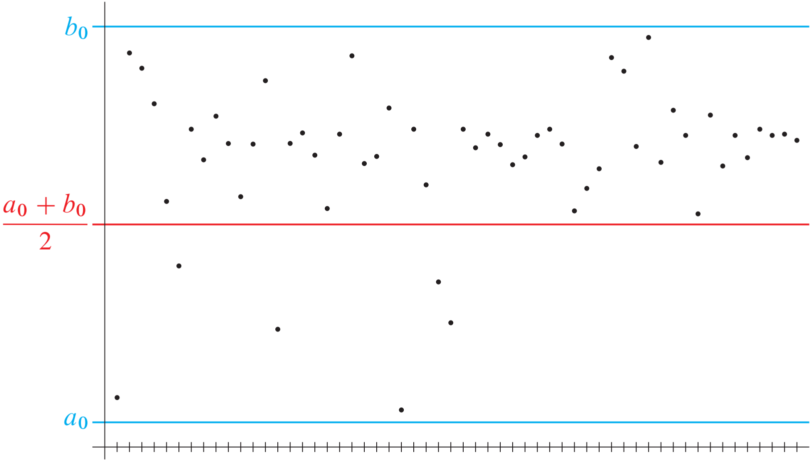

s+ ε
s
s- ε
n_0

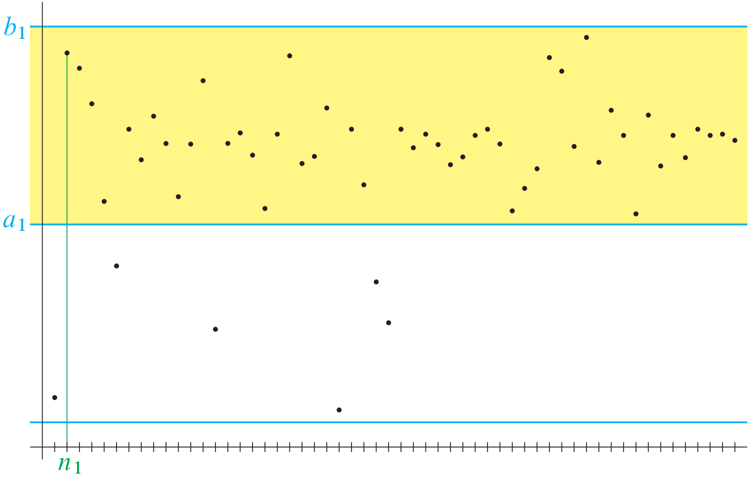
Věta 20 (Bolzano-Weierstraß)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

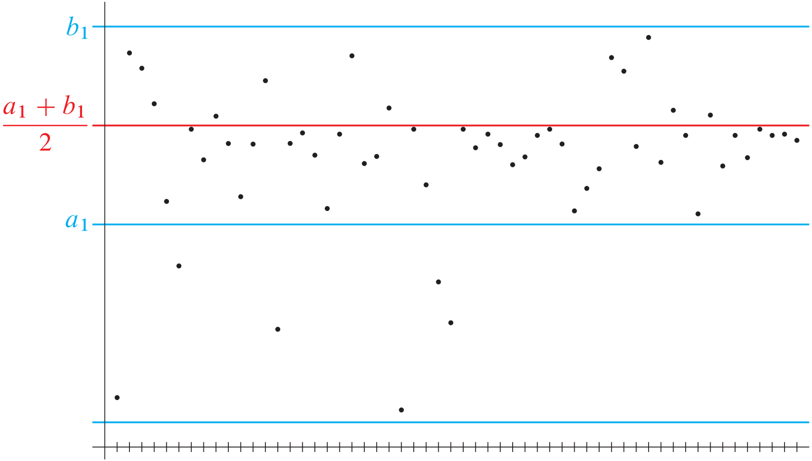


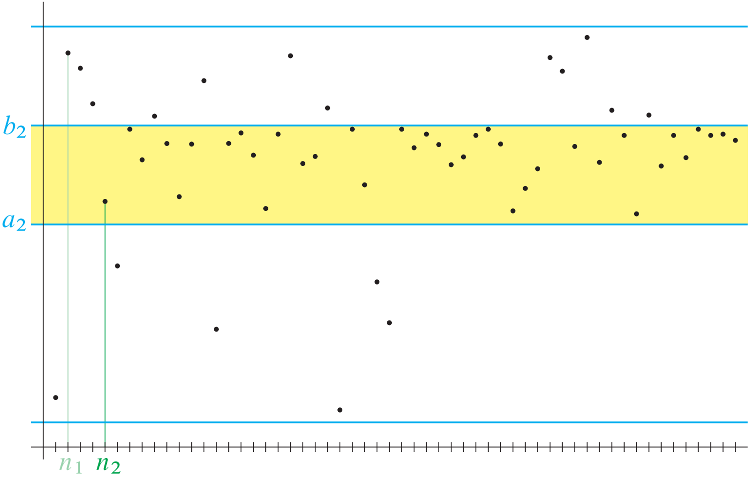

b_0
a_0

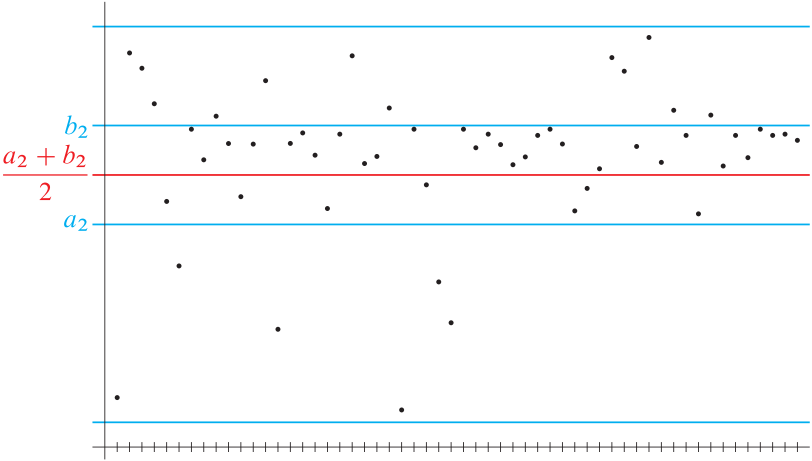

b_0
$\frac{a_0+b_0}{2}$
a_0

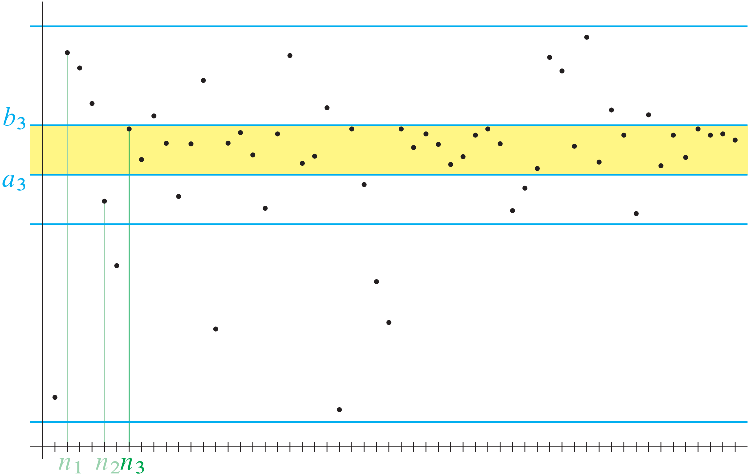


b_1
a_1
n_1

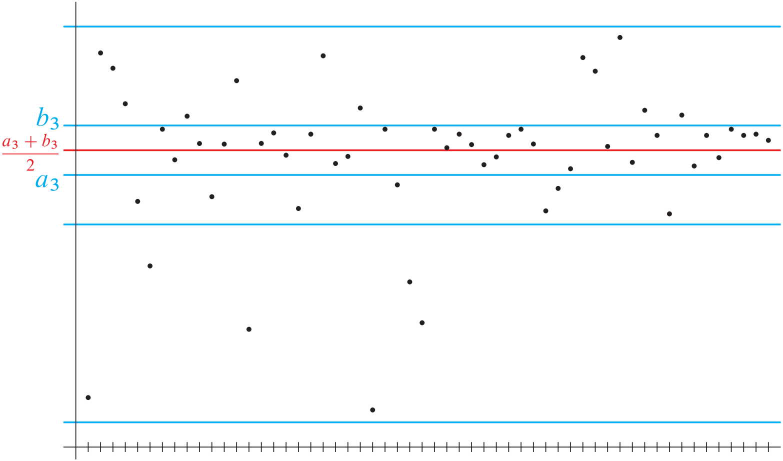

b_1
$\frac{a_1+b_1}{2}$
a_1

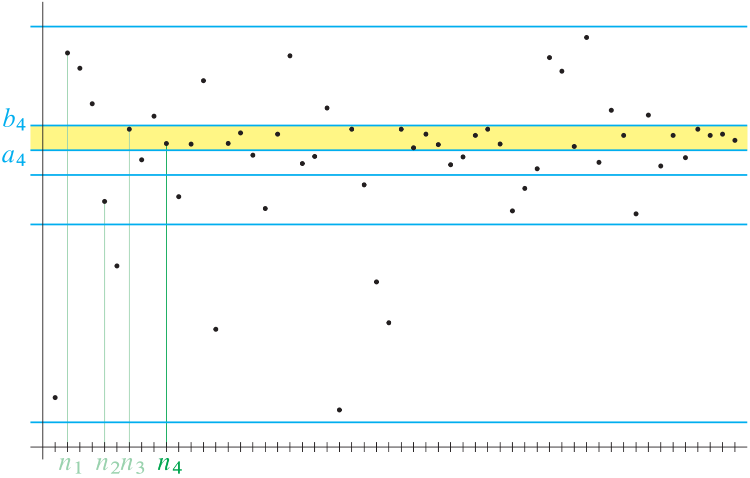

b_2
a_2
n_1
n_2


b_2
$\frac{a_2+b_2}{2}$
a_2

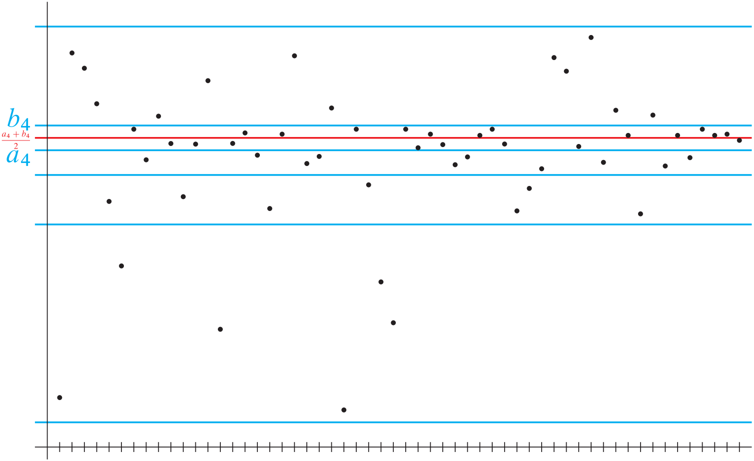


b_3
a_3
n_1
n_2
n_3

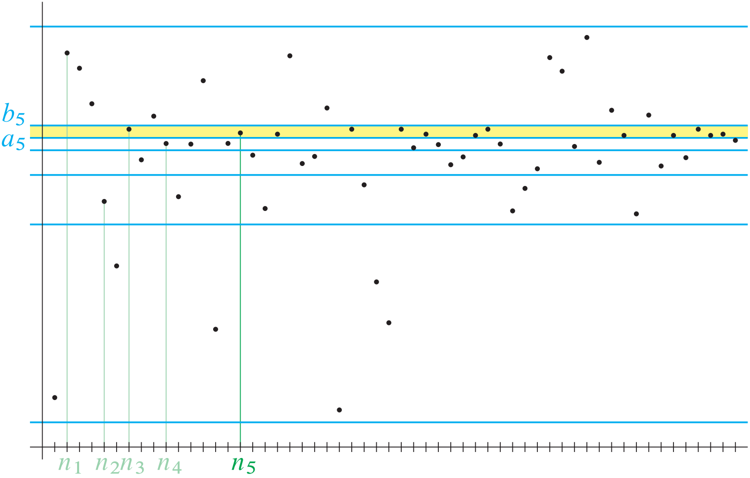

b_3
$\frac{a_3 + b_3}{2}$
a_3



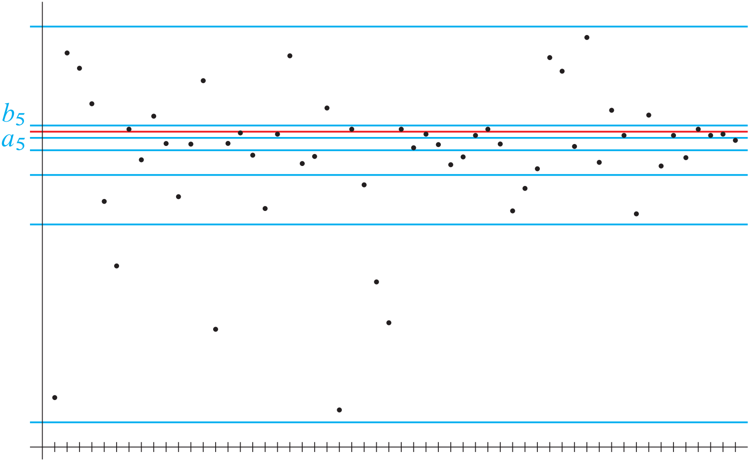
b_4
a_4
n_1
n_2
n_3
n_4

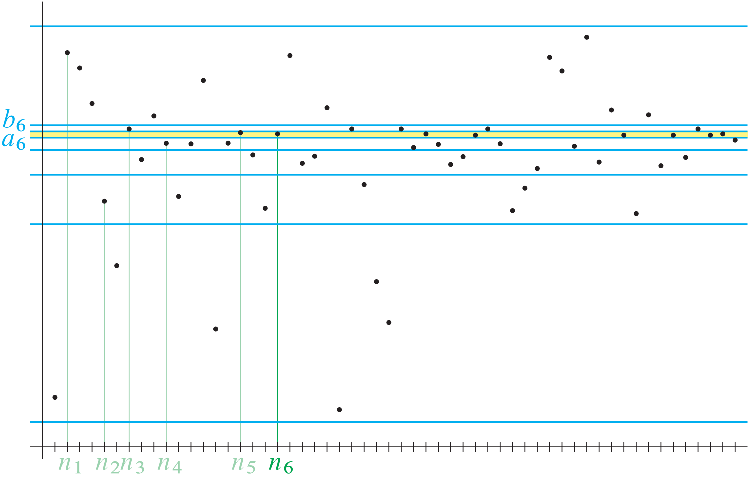


b_4
$\frac{a_4+b_4}{2}$
a_4



b_5
a_5
n_1
n_2
n_3
n_4
n_5


b_5
a_5



b_6
a_6
n_1
n_2
n_3
n_4
n_5
n_6

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f\colon x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f\colon x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.
- Množinu A z definice zobrazení nazýváme definičním oborem zobrazení f a značíme ji symbolem D_f.

Definice

————konec přednášky 30.10.————— Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.

Definice

————konec přednášky 30.10.—————— Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.
- Obrazem množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\ x \in M\}).$$

Definice

————konec přednášky 30.10.———————— Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.
- Obrazem množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

  $$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\ x \in M\}).$$

- Množina $f(A)$ se nazývá obor hodnot zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)

Definice

————konec přednášky 30.10.———— Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x,y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.
- Obrazem množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

  $$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\ x \in M\}).$$

- Množina $f(A)$ se nazývá obor hodnot zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)
- Vzorem množiny $W \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu

  $$f_{-1}(W) = \{x \in A;\ f(x) \in W\}.$$

Poznámka

Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,

Poznámka

Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,

Poznámka

Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,

Poznámka

Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Definice

Nechť A, B, C jsou množiny, $C \subset A$ a $f\colon A \to B$. Zúžením (restrikcí) zobrazení f na množinu C rozumíme zobrazení $\tilde{f}\colon C \to B$ definované předpisem $\tilde{f}(x) = f(x)$ pro každé $x \in C$. Značíme $f|_C$.

Definice

Nechť $f: A \to B$ a $g: B \to C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá složeným zobrazením.

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$

- zobrazuje množinu A na množinu B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$

- zobrazuje množinu A na množinu B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- je prosté, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$

- zobrazuje množinu A na množinu B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- je prosté, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

- je bijekce A na B (nebo též vzájemně jednoznačné zobrazení), jestliže je zároveň prosté a zobrazuje A na B.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je bijekce (tj. f je prosté a na). Inverzním zobrazením $f^{-1}\colon B \to A$ rozumíme zobrazení, které každému prvku $y \in B$ přiřadí (jednoznačně určený) prvek $x \in A$ splňující $f(x) = y$.

IV. Funkce jedné reálné proměnné

IV. Funkce jedné reálné proměnné

Definice

Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

IV. Funkce jedné reálné proměnné

Definice

Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je rostoucí na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci klesající (neklesající, nerostoucí) na intervalu J.

IV. Funkce jedné reálné proměnné

Definice

Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- lichá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,

Definice

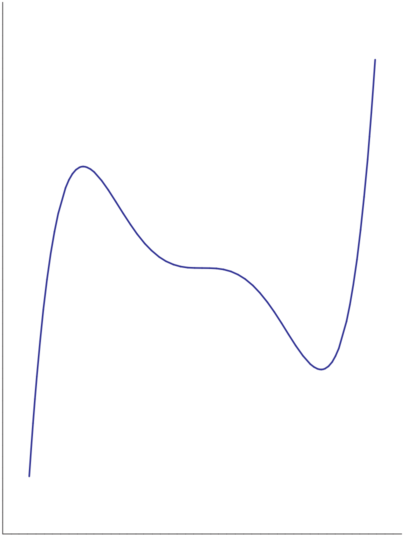
Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

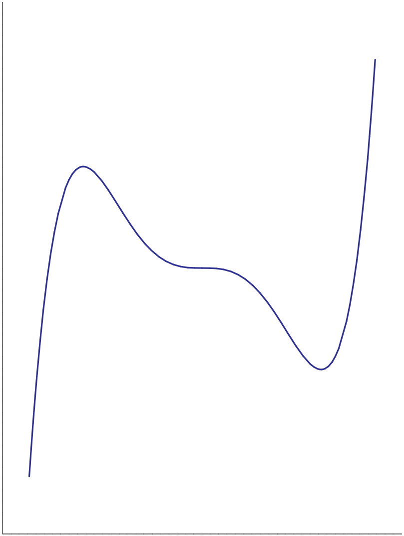
- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- lichá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- sudá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,

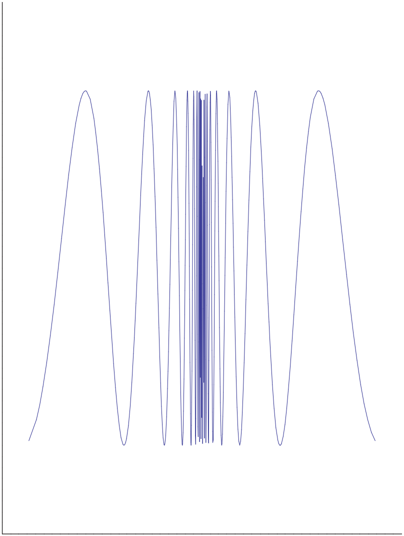
Definice

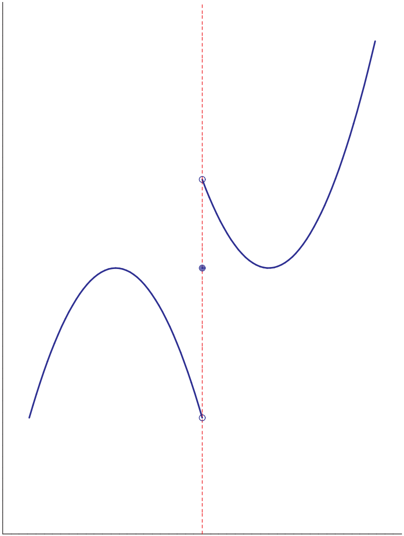
Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

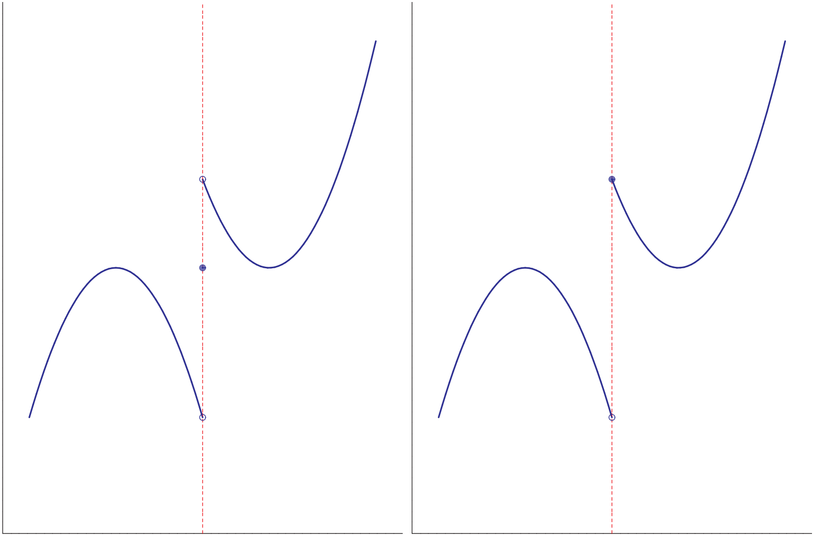
- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- lichá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- sudá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- periodická s periodou a, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f$, $x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

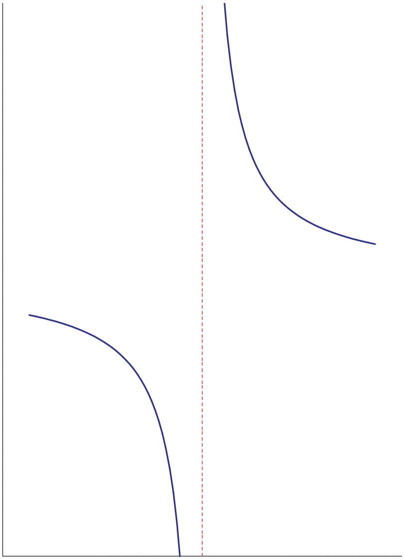


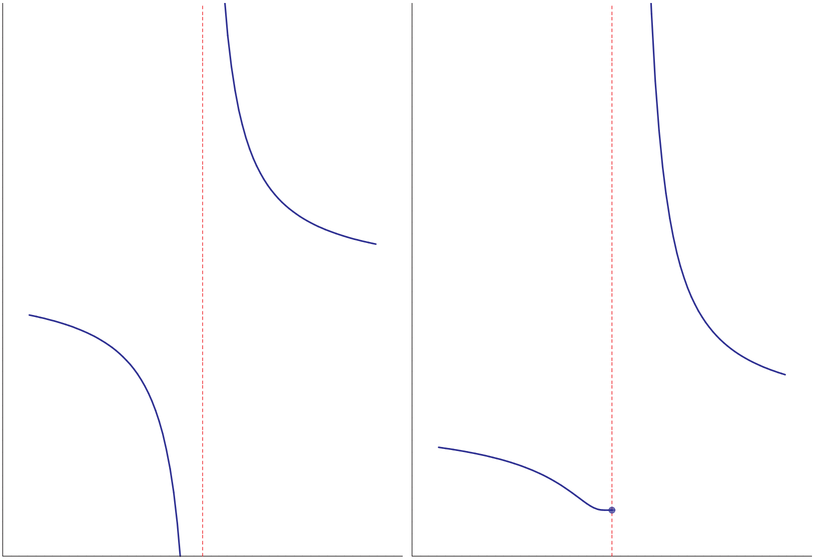












Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- okolí bodu c o poloměru ε jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- okolí bodu c o poloměru ε jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- prstencové okolí bodu c o poloměru ε jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 21 (jednoznačnost limity)

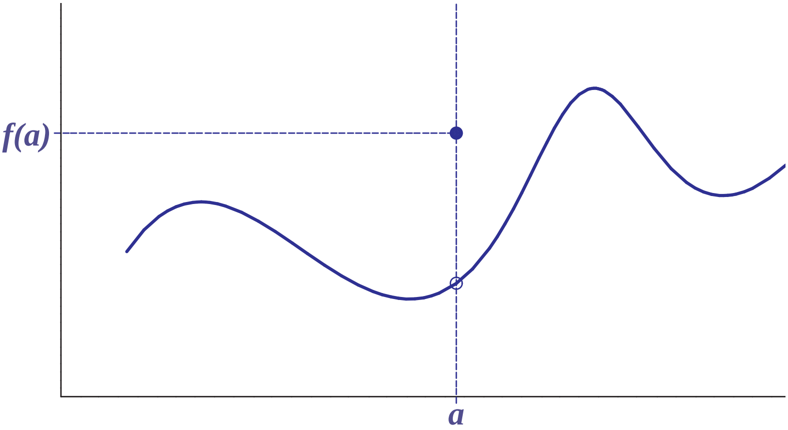
Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu $A \in \mathbb{R}$.

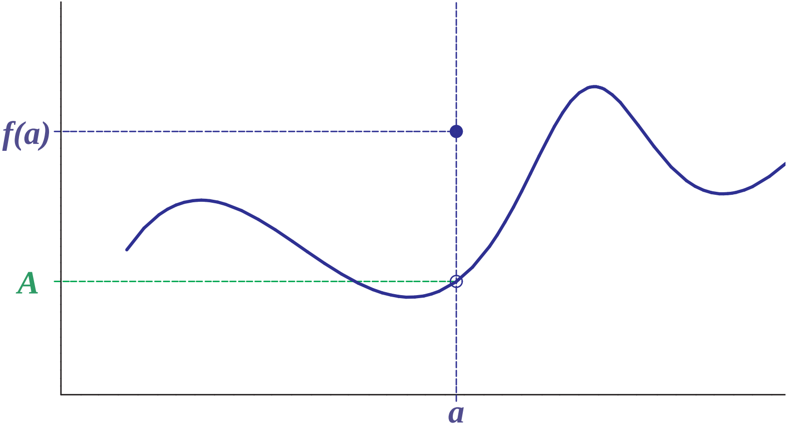
Věta 21 (jednoznačnost limity)

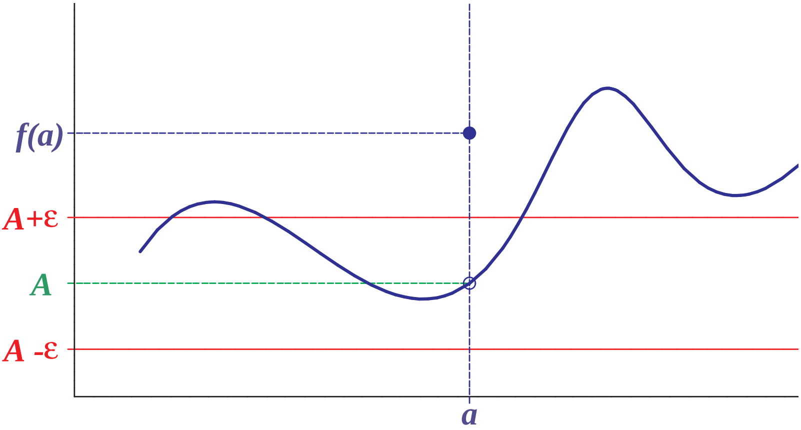
Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu $A \in \mathbb{R}$.

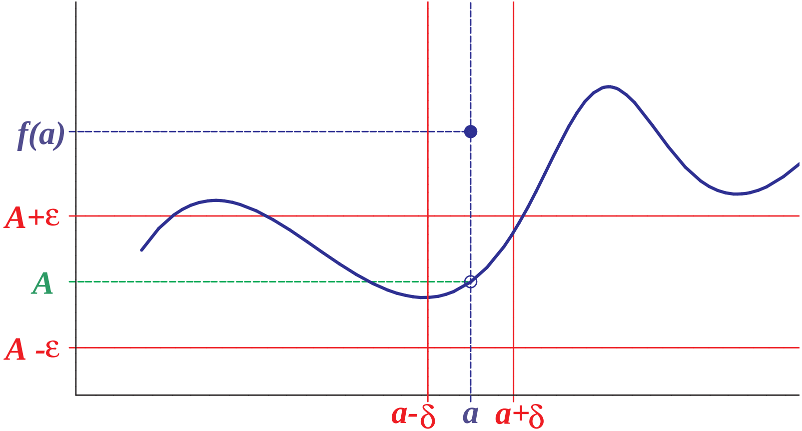
Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

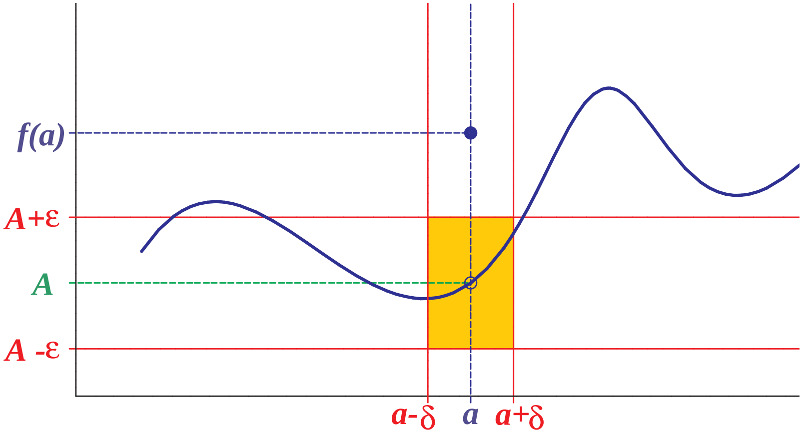
———konec přednášky 3.11.———

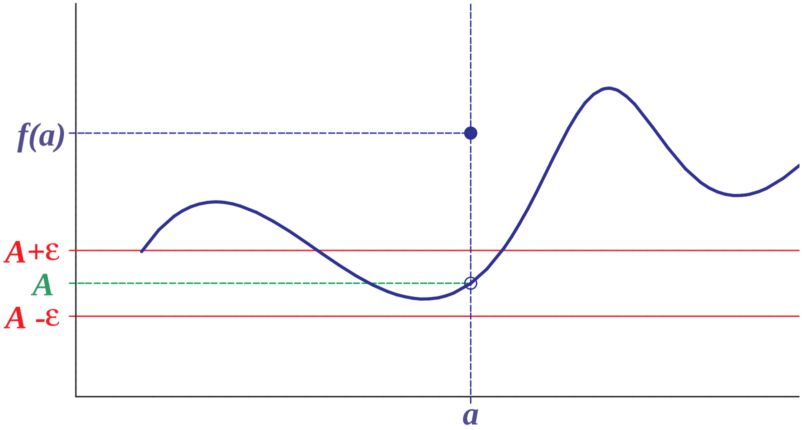

f(a)
a


f(a)
A
a

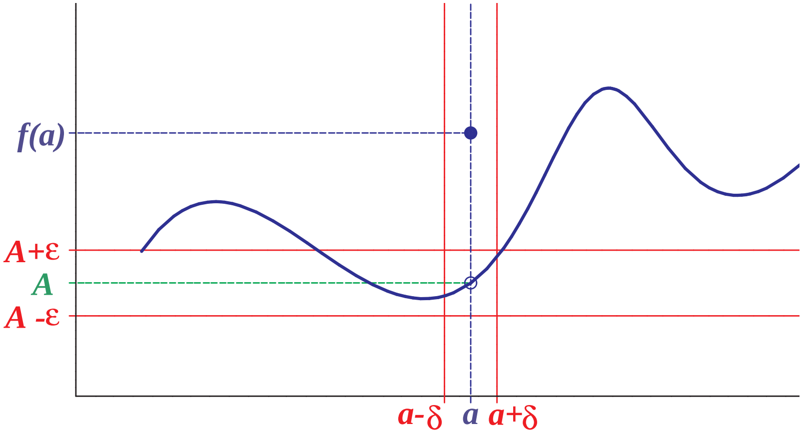

f(a)
A+ε
A
A -ε
a

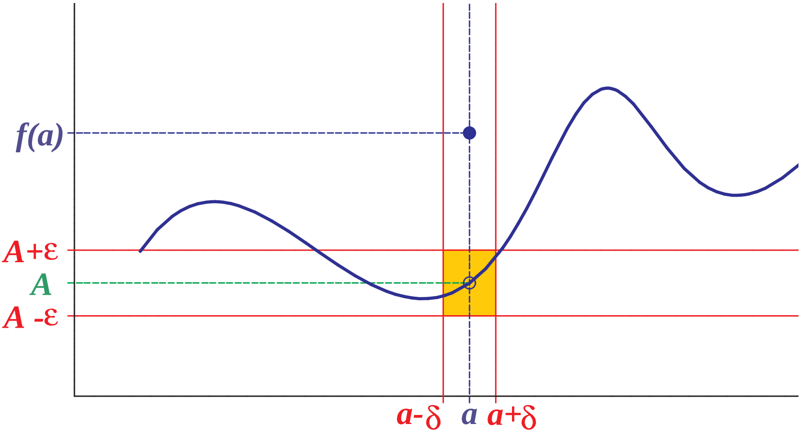

f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ



f(a)
A+ε
A
A -ε
a


f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ

Definice

Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Definice

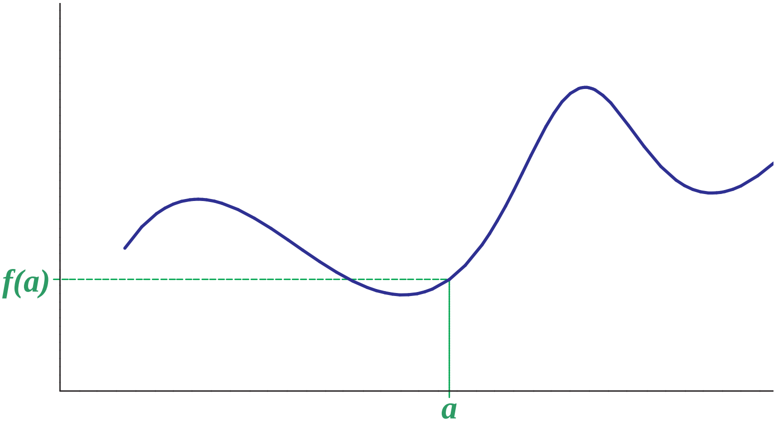
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

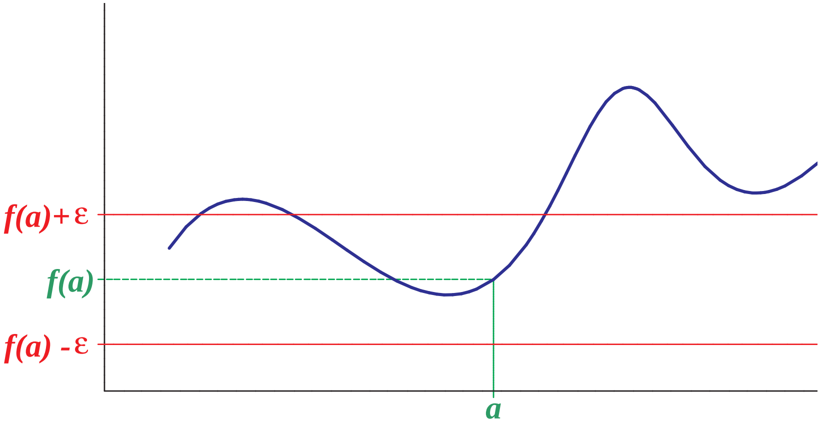
Poznámka

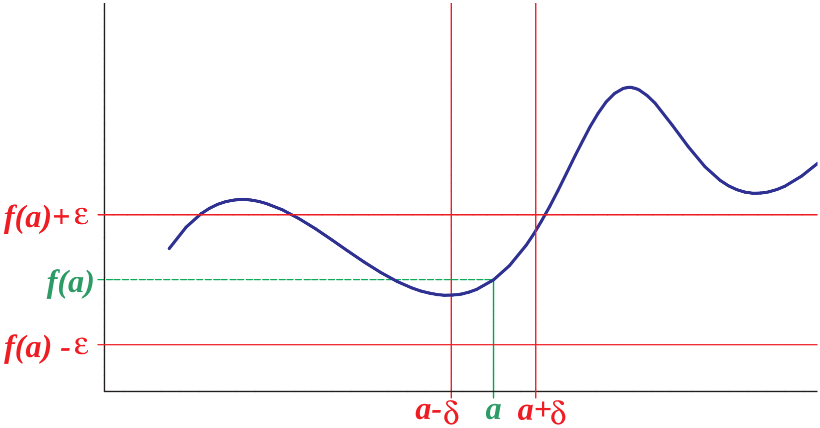
Funkce f je spojitá v bodě c, právě když platí

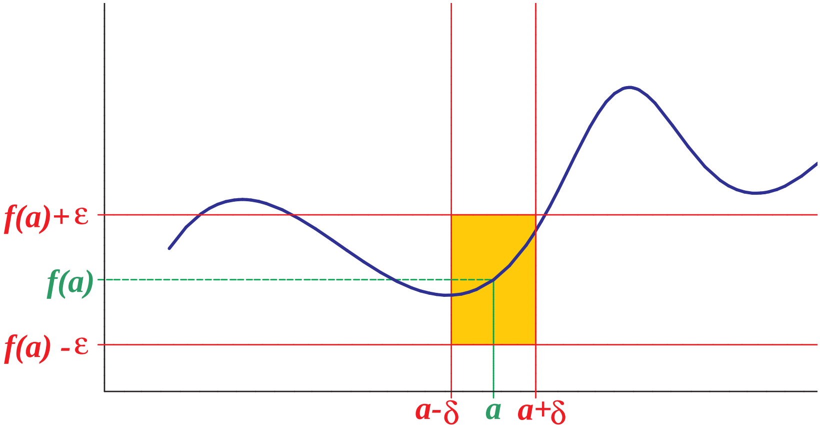
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in B(c, \delta) \colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

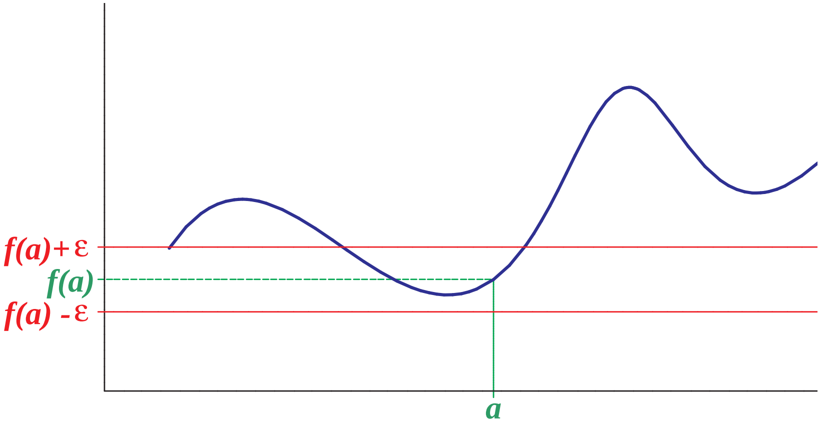


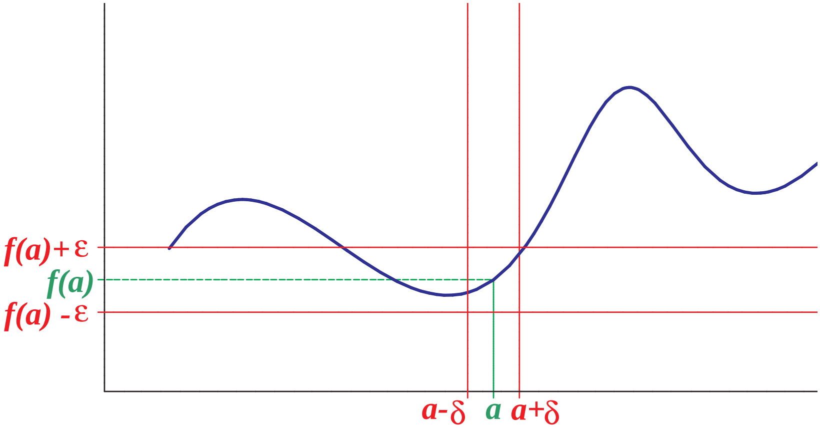
f(a)
a


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a

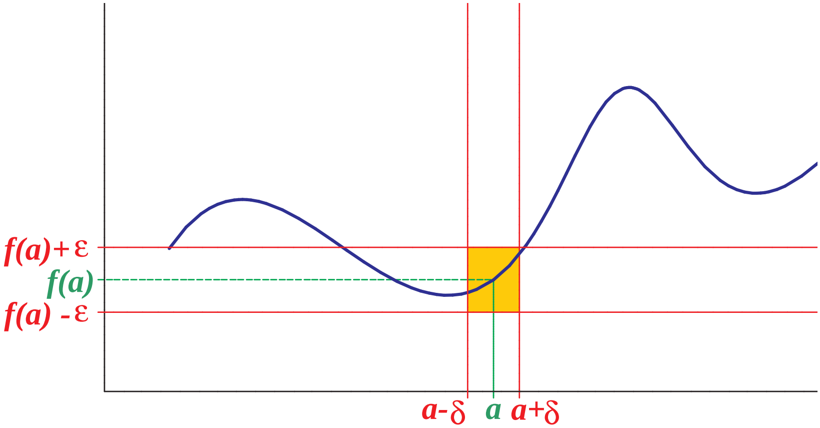

f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ

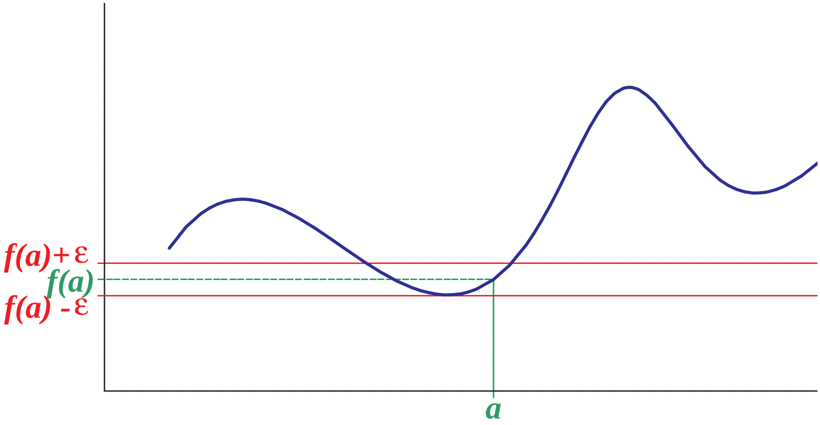

f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ

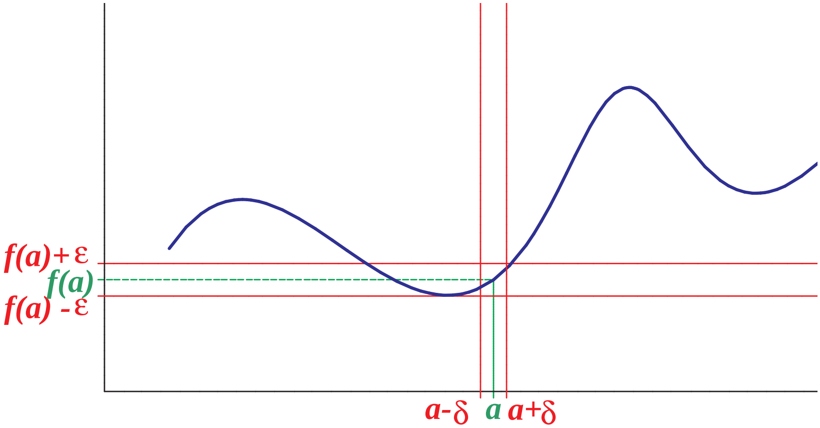

f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a

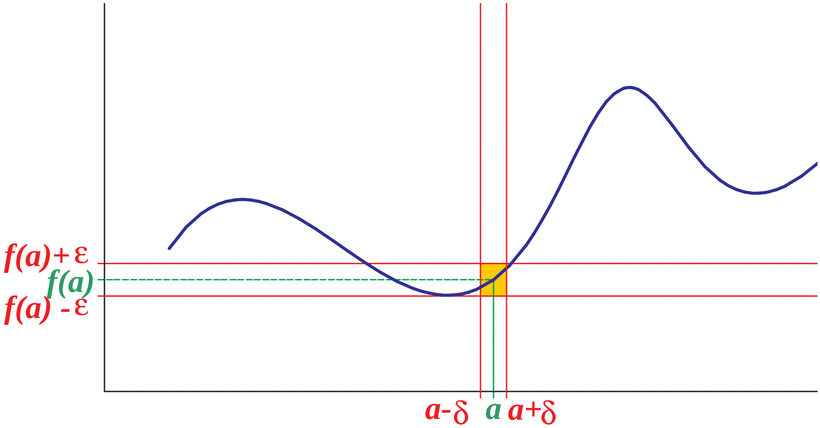


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ

Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

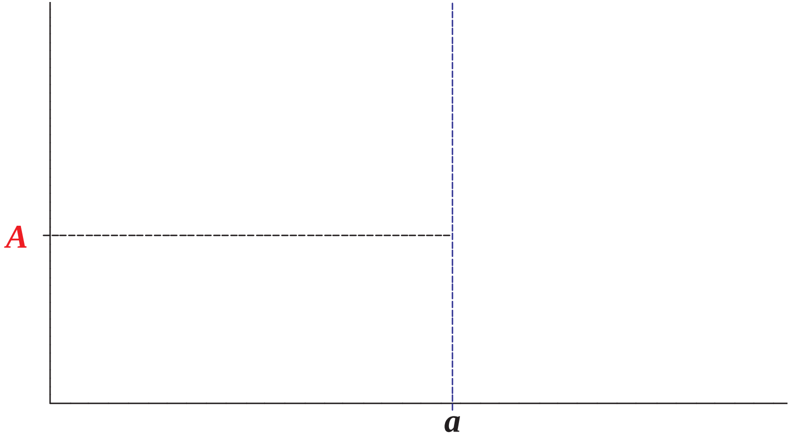
$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

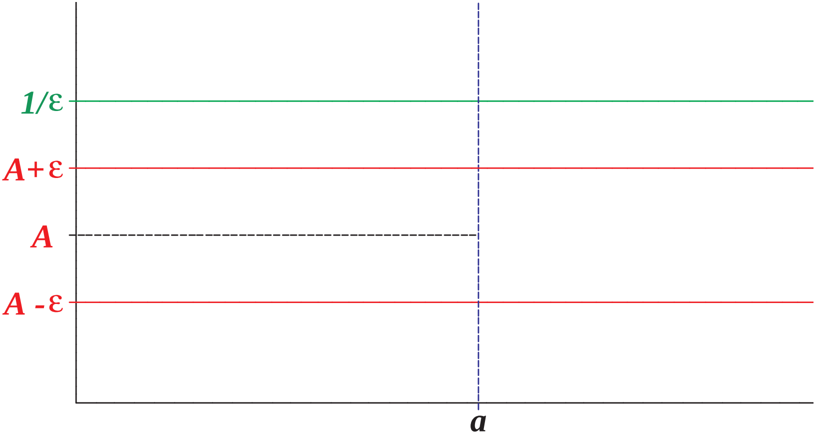
Definice

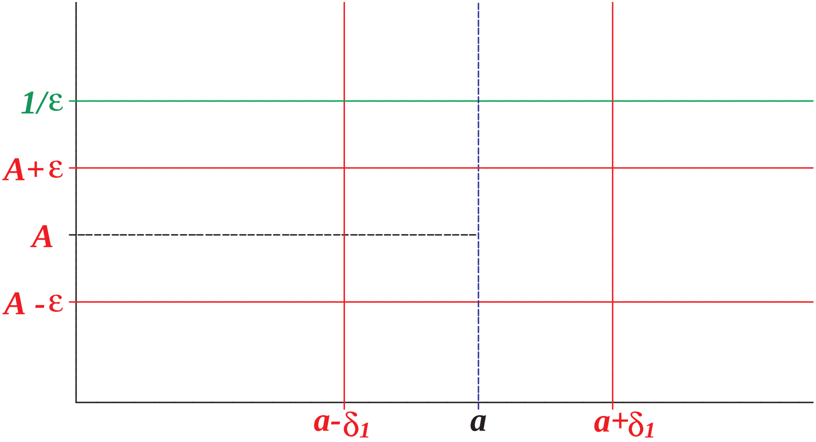
Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

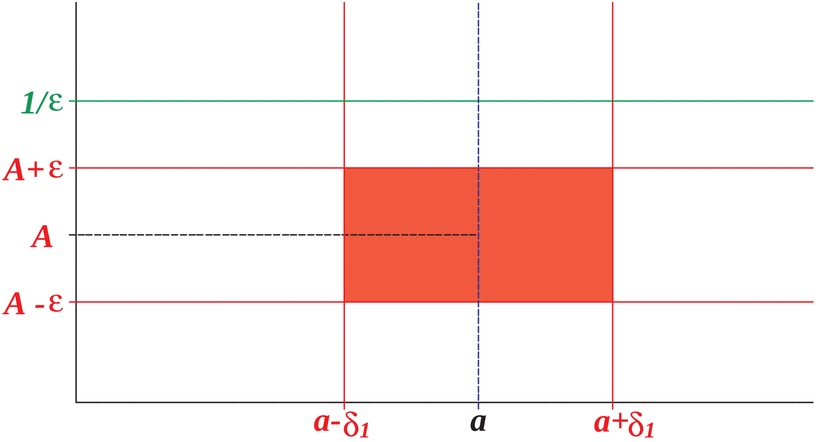
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

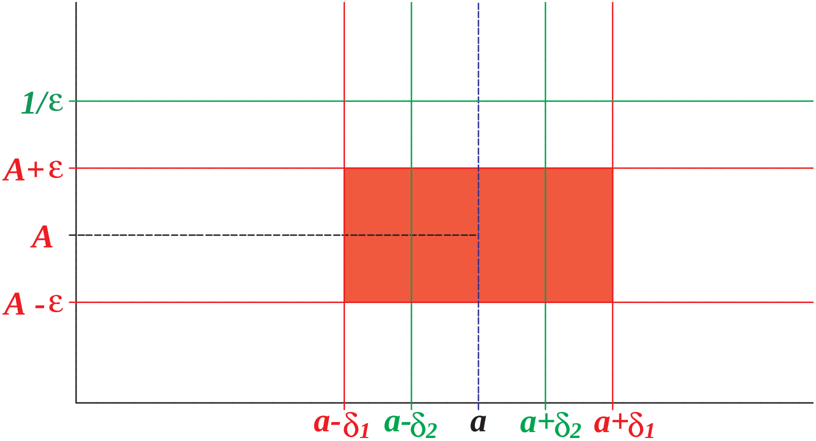
Věta 21 platí i pro $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$, tedy lze použít označení $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

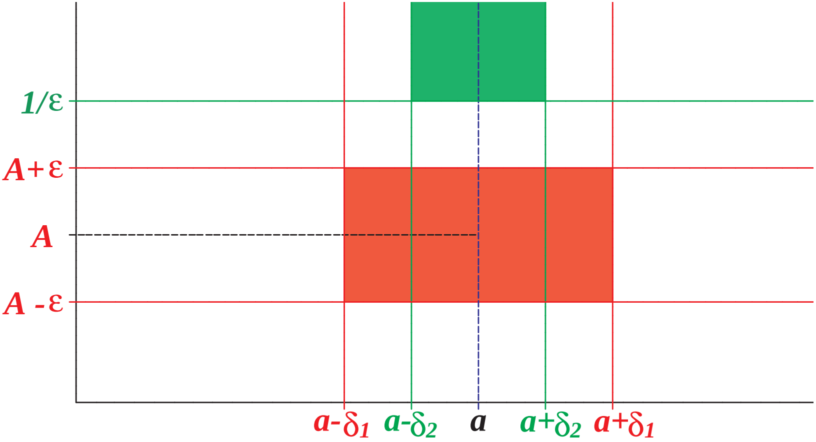

A
a

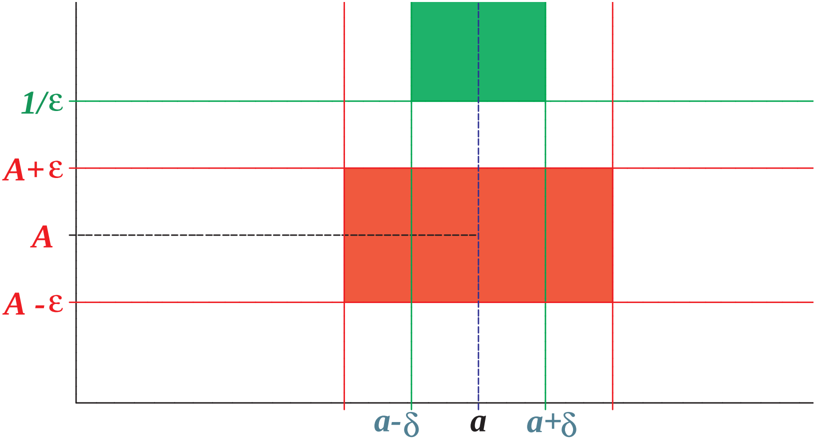

1/ε
A+ε
A
A -ε
a

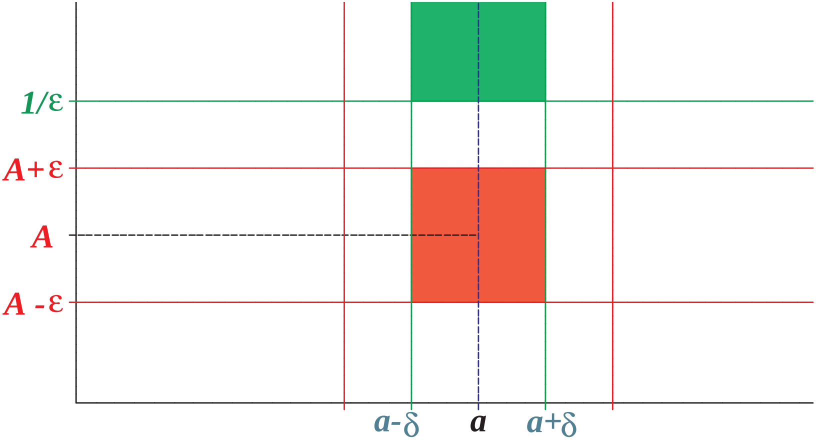

1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a
a+δ1

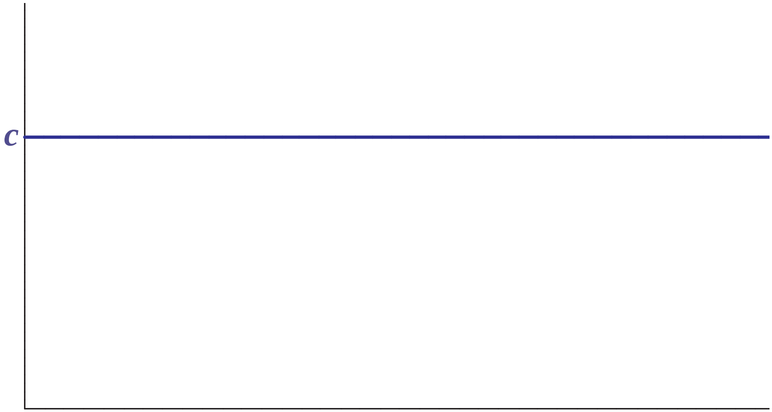

1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a
a+δ1

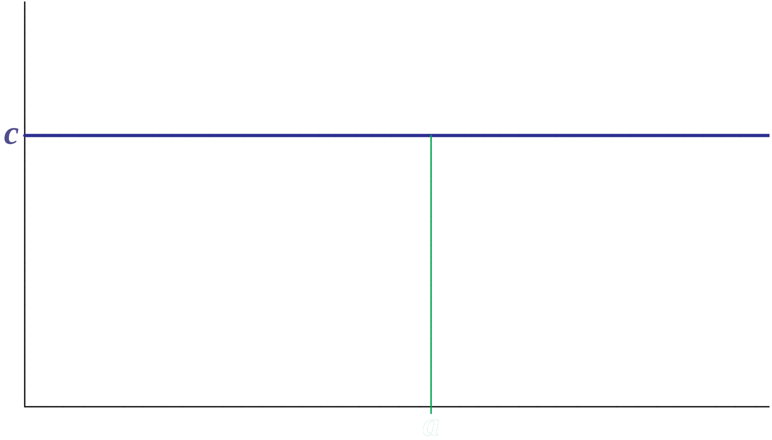

1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a-δ2
a
a+δ2
a+δ1

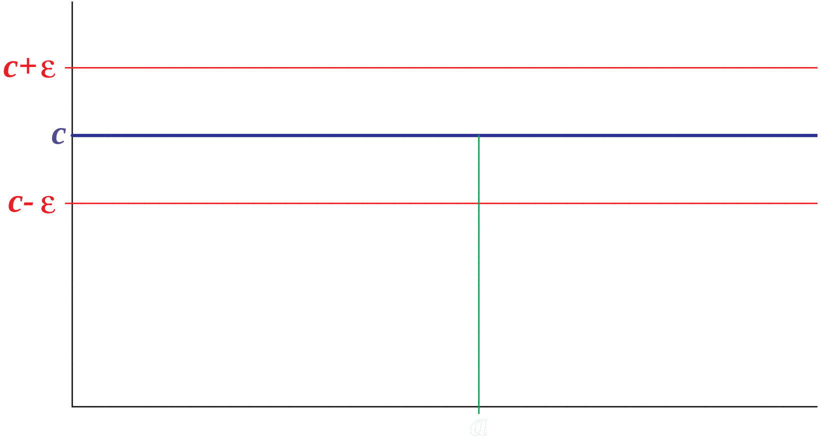

1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a-δ2
a
a+δ2
a+δ1

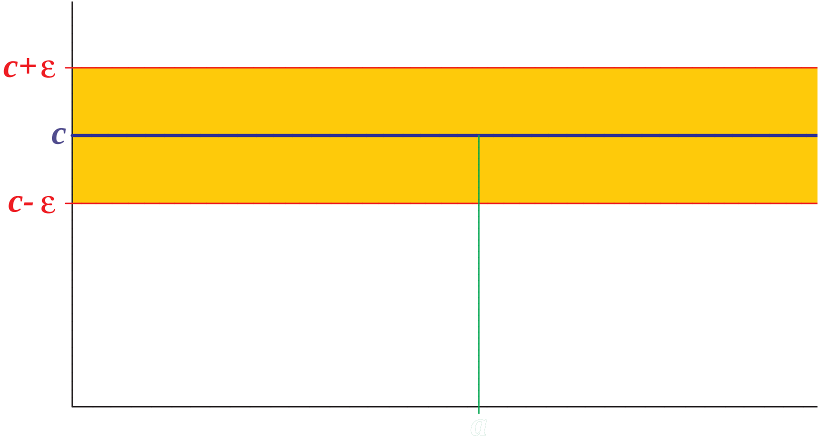

1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ

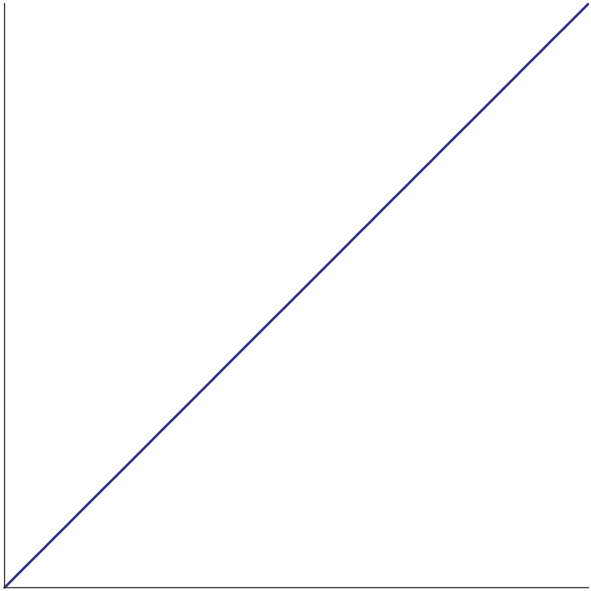

1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ

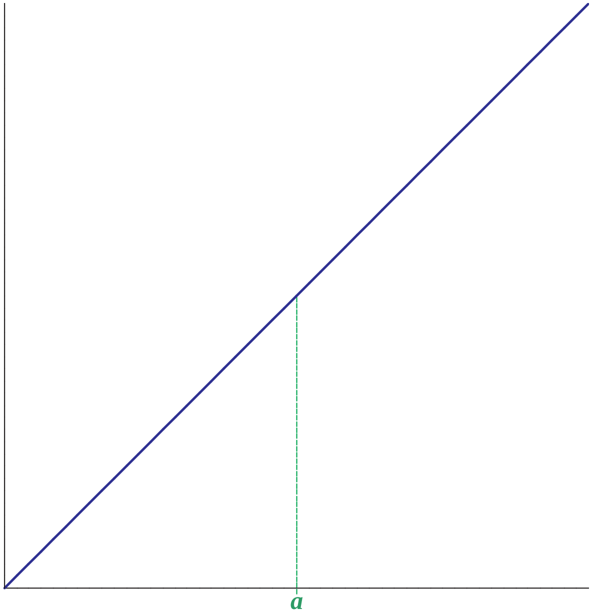

c

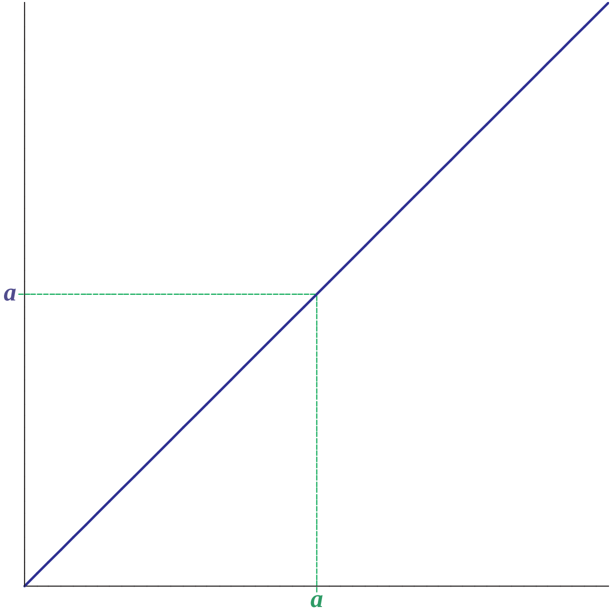

c
a

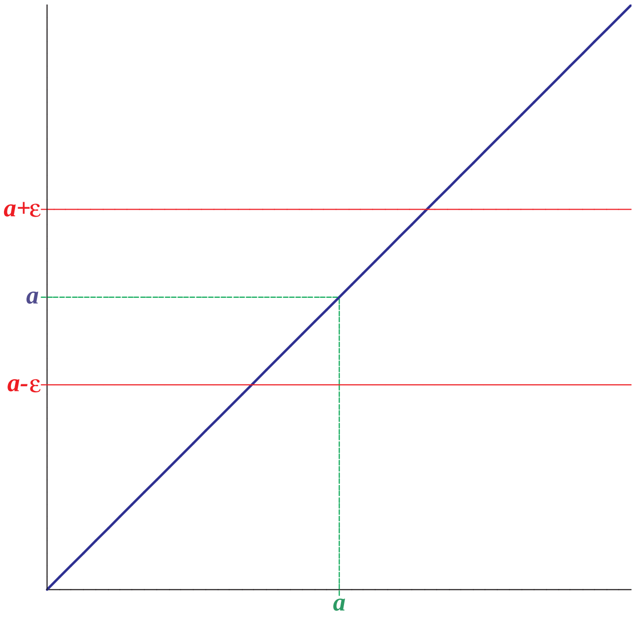

c+ε
c
c- ε
a

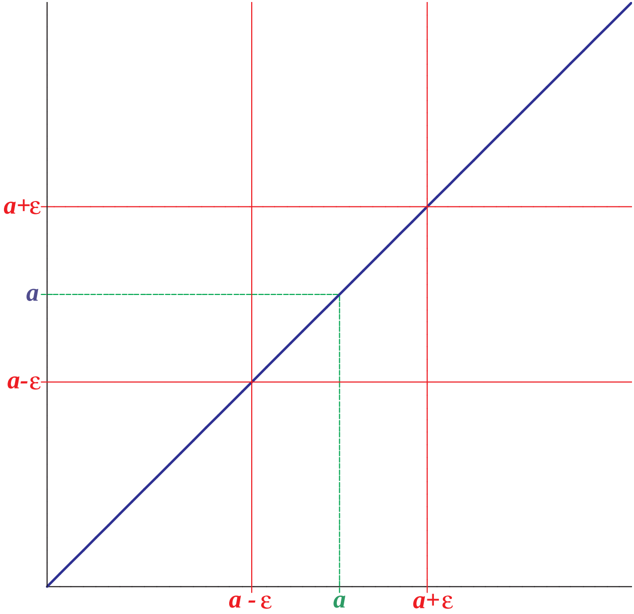

c+ ε
c
c- ε
a

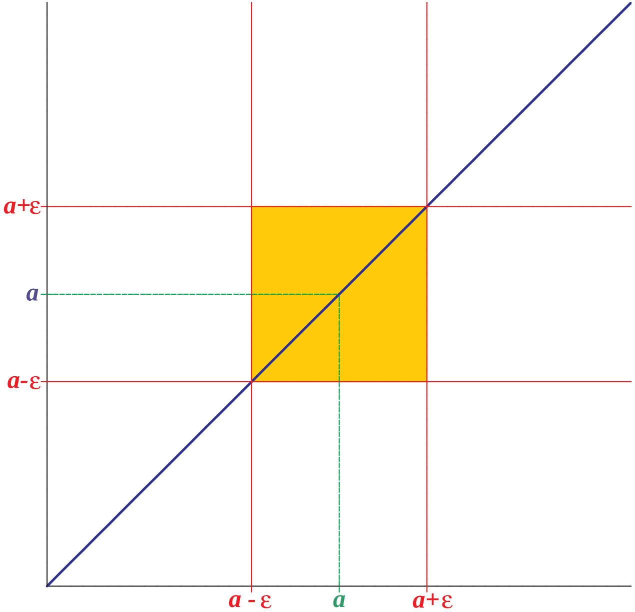



a


a
a


a+ε
a
a-ε
a


a+ε
a
a-ε
a - ε
a
a+ε


a+ε
a
a-ε
a - ε
a
a+ε

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- pravé okolí bodu $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- pravé okolí bodu $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- pravé okolí bodu $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- pravé prstencové okolí bodu $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c limitu zprava rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem limity zleva v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c limitu zprava rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem limity zleva v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

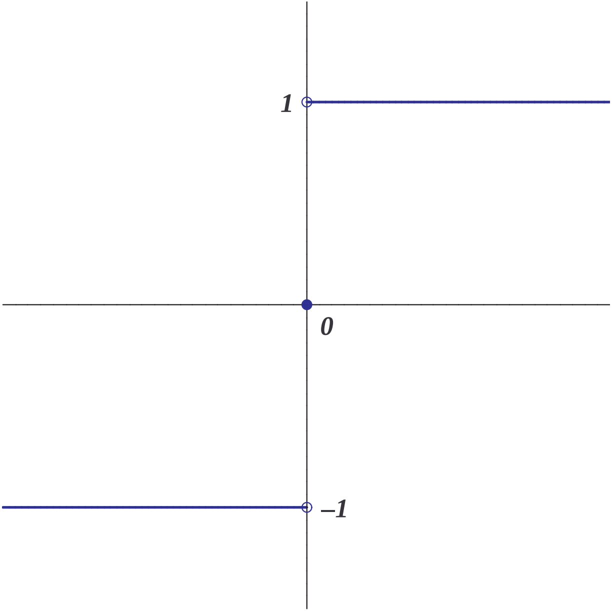
Poznámka

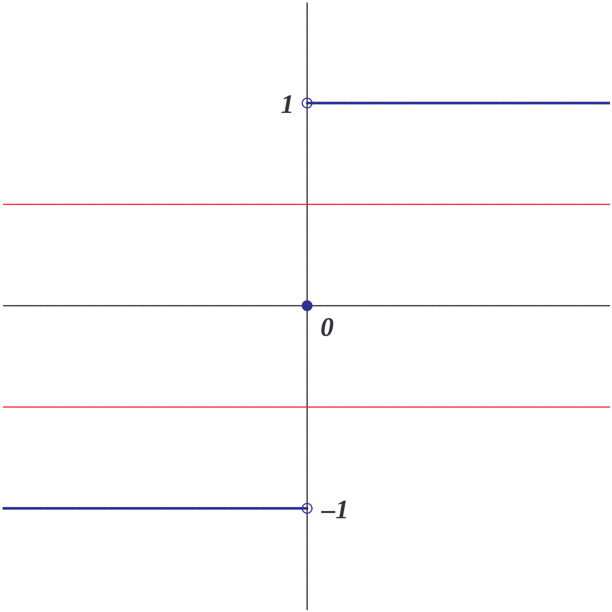
Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

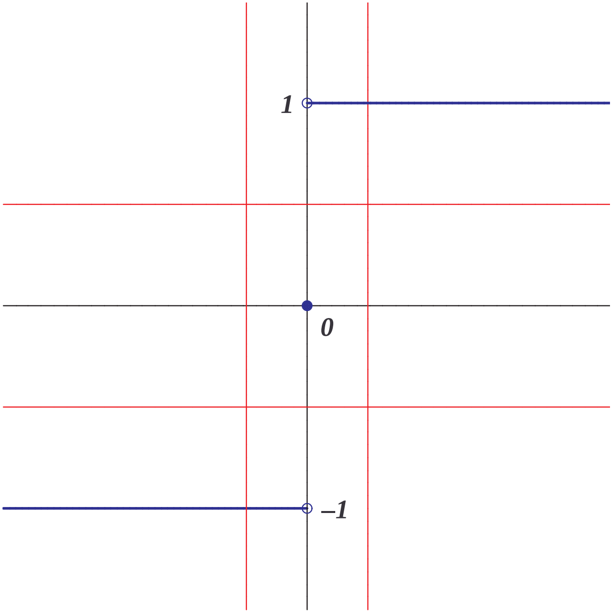
$$\lim_{x \to c} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to c+} f(x) = A \ \ \& \ \lim_{x \to c-} f(x) = A \right).$$

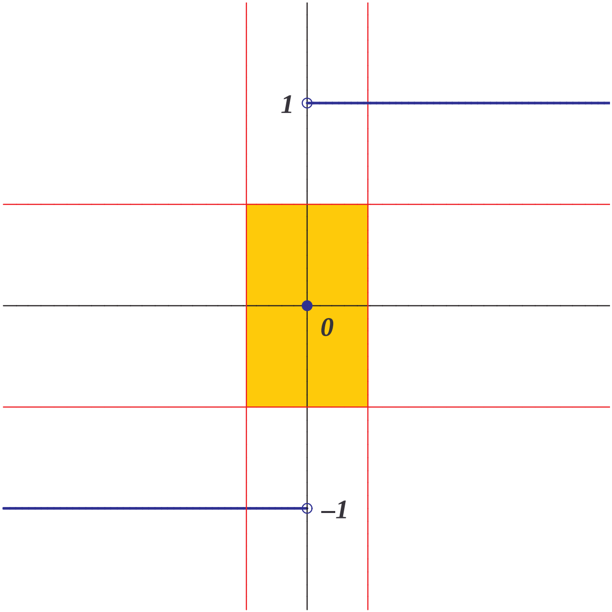
Definice

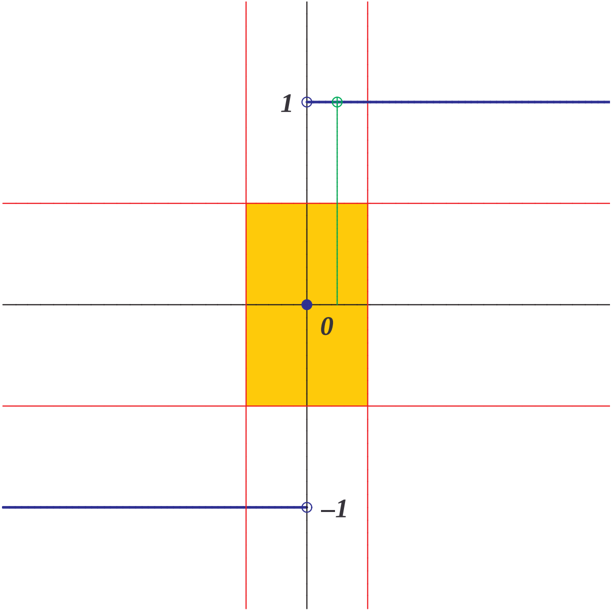
Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c spojitá zprava (resp. zleva), jestliže $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$).


1
0
–1


1
0
–1


1
0
–1


1
0
–1


1
0
–1

Věta 22

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 23 (Heine)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) *a* (ii) *ekvivalentní.*

(i) *Platí* $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

(ii) *Pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *splňující* $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, *platí* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Věta 24 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

————konec přednášky 6.11.————

Věta 24 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz A/B definován.*

————konec přednášky 6.11.————

Důsledek

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $c \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě c. Pokud navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce f/g je spojitá v bodě c.

Věta 25

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c, \eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}\big(f(x)/g(x)\big) = +\infty$.

Definice

Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají koeficienty polynomu P.

Definice

Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají koeficienty polynomu P.

Poznámka

Nechť $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$. Jestliže se polynomy P a Q rovnají (tj. $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$), pak $n = m$ a $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$.

Definice

Nechť P je polynom tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že P je polynom stupně n, jestliže $a_n \neq 0$. Stupeň nulového polynomu (tj. konstantní nulové funkce definované na $\mathbb{R}$) definujeme jako -1.

Věta 26 (limita a uspořádání)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$.
(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) > g(x).$$

Věta 26 (limita a uspořádání)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ *a existuje* $\lim_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim_{x\to c} g(x)$.
(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, *pak existuje* $\delta > 0$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) > g(x).$$

(ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ *takové, že* $\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \leq g(x)$, *potom platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

Věta 26 (limita a uspořádání)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$.
(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) > g(x).$$

(ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \leq g(x)$, potom platí

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

(iii) (o dvou policajtech) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\eta)\colon\ f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Je-li navíc $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Důsledek

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ *a nechť existuje* $\eta > 0$ *takové, že* g *je omezená na* $P(c, \eta)$*. Potom* $\lim_{x \to c} (f(x) g(x)) = 0$*.*

Věta 27 (limita složené funkce)

Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$*,* $\lim_{x\to c} g(x) = A$*,* $\lim_{y\to A} f(y) = B$ *a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(c, \eta)\colon g(x) \neq A$*,*

(S) *funkce* f *je spojitá v bodě* A*.*

Potom

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = B.$$

Věta 27 (limita složené funkce)

Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$ *a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta)\colon g(x) \neq A$,

(S) *funkce* f *je spojitá v bodě* A.

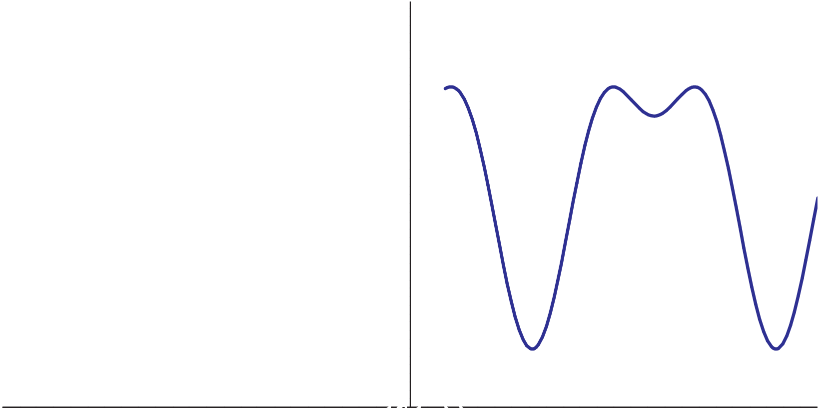
Potom

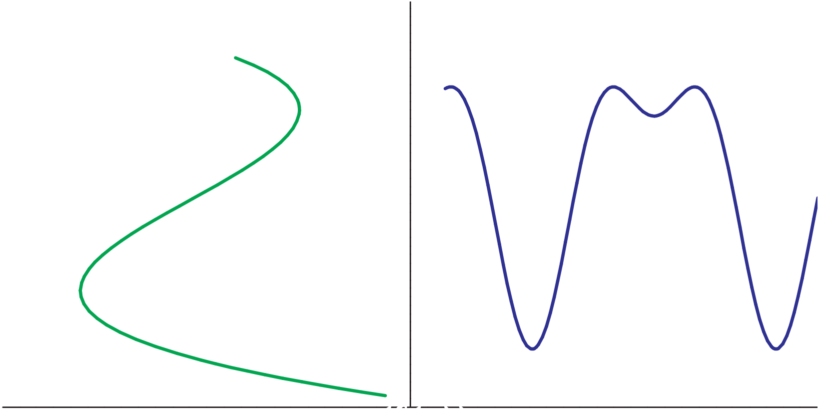
$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = B.$$

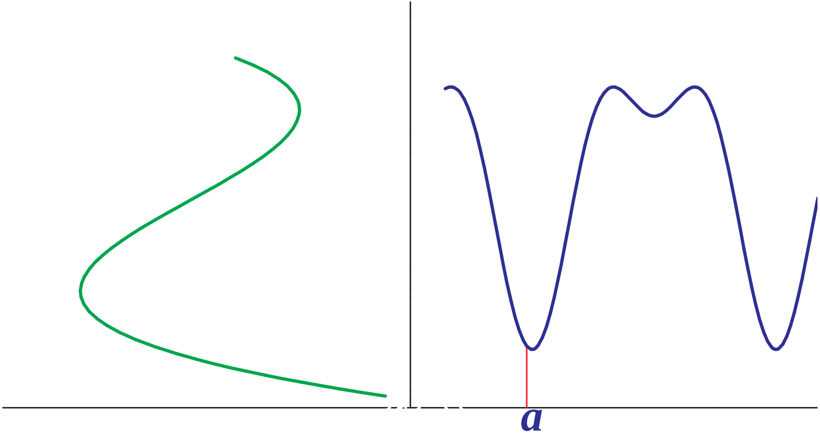
————konec přednášky 10.11.————

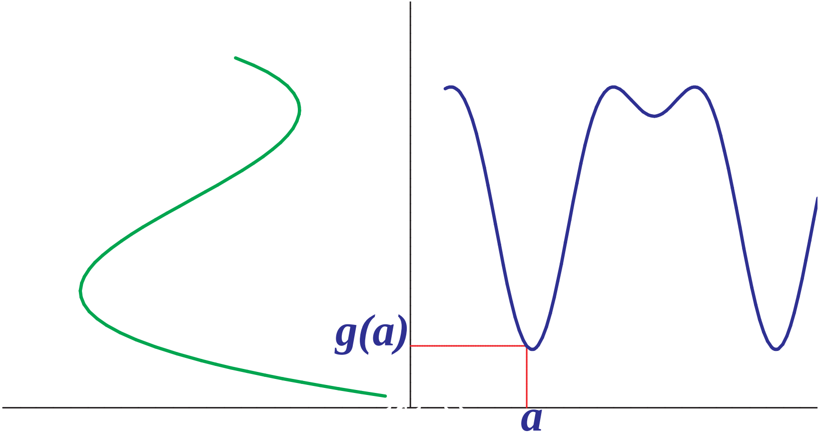
Důsledek

Nechť funkce g *je spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$ *a funkce* f *je spojitá v bodě* $g(c)$. *Potom je funkce* $f \circ g$ *spojitá v bodě* c.

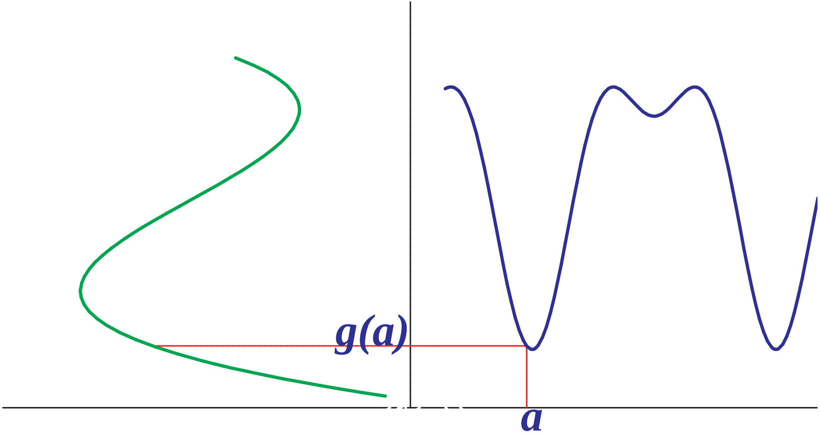


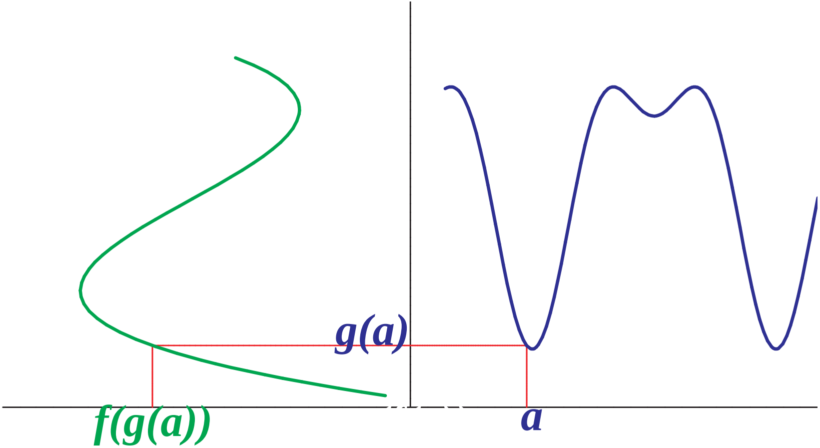


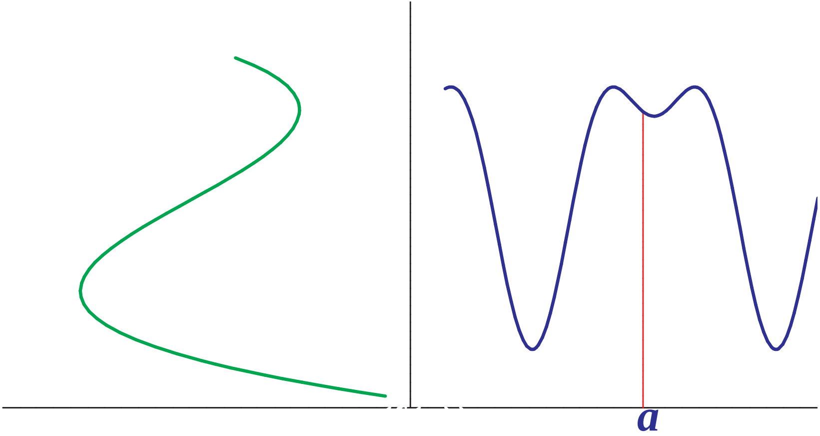

a

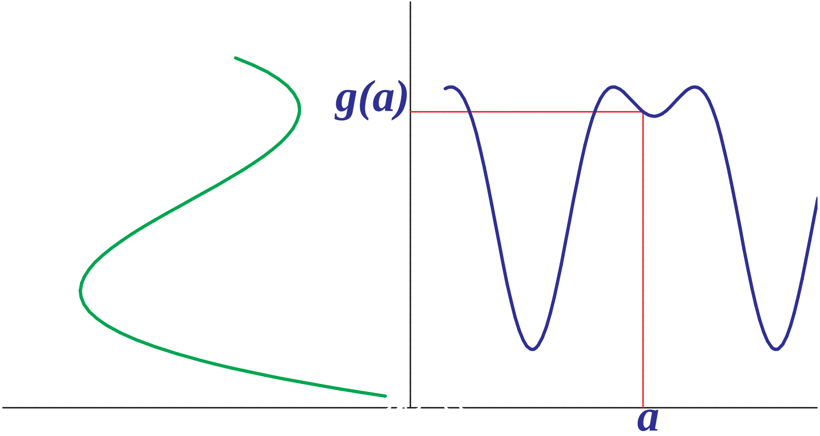


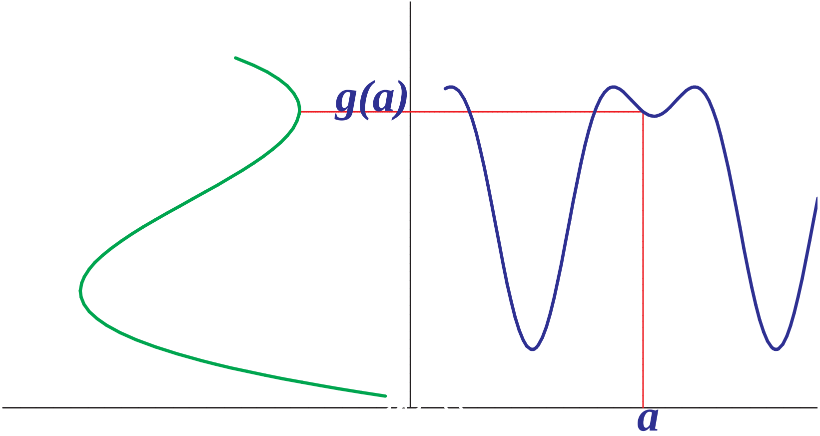
g(a)
a

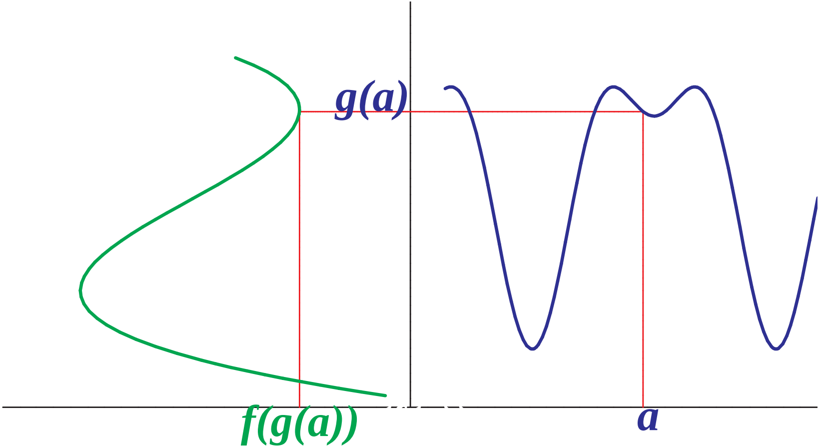

g(a)
a


g(a)
f(g(a))
a

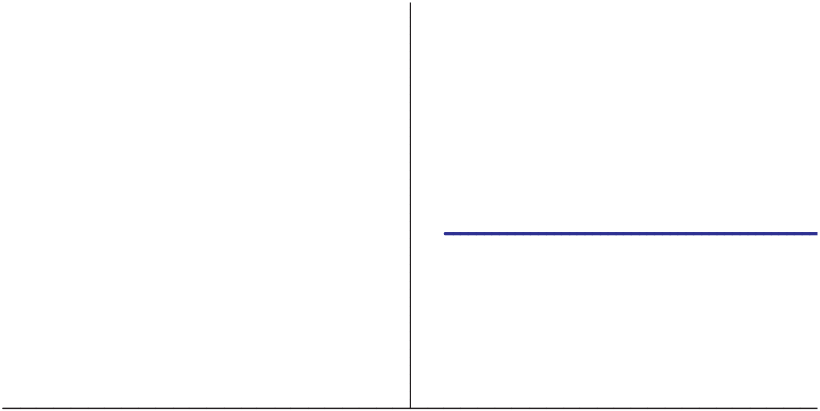

a

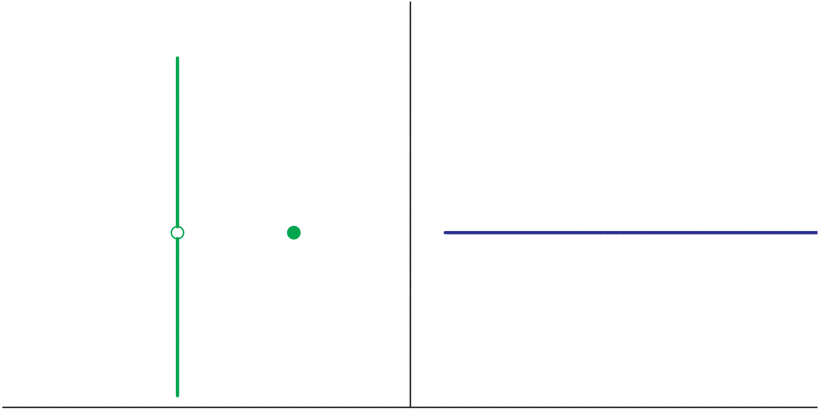

g(a)
a

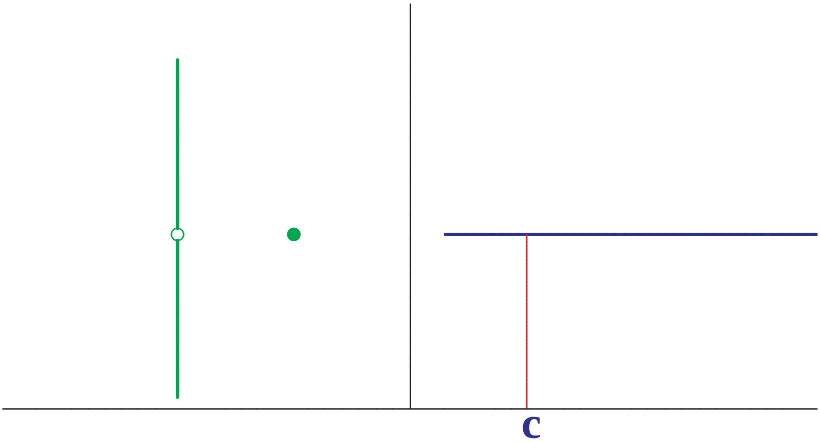

g(a)
a

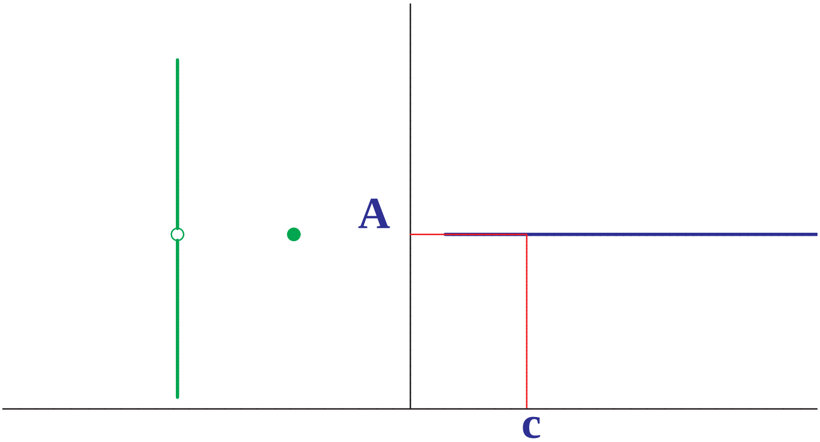

g(a)
f(g(a))
a

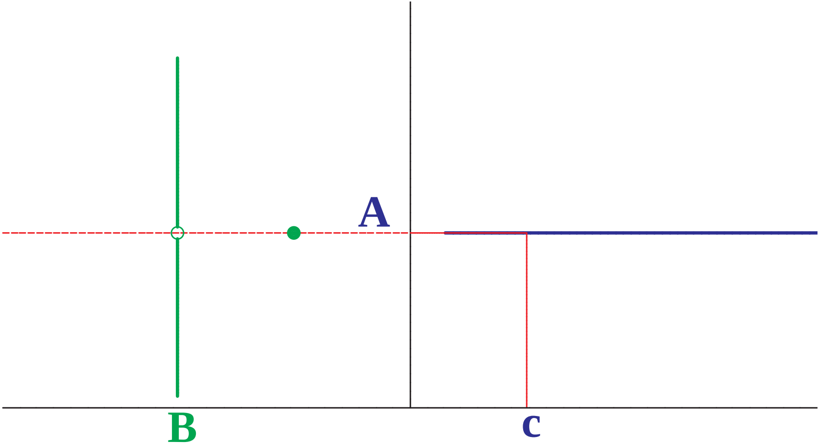
IV.2. Limita funkce

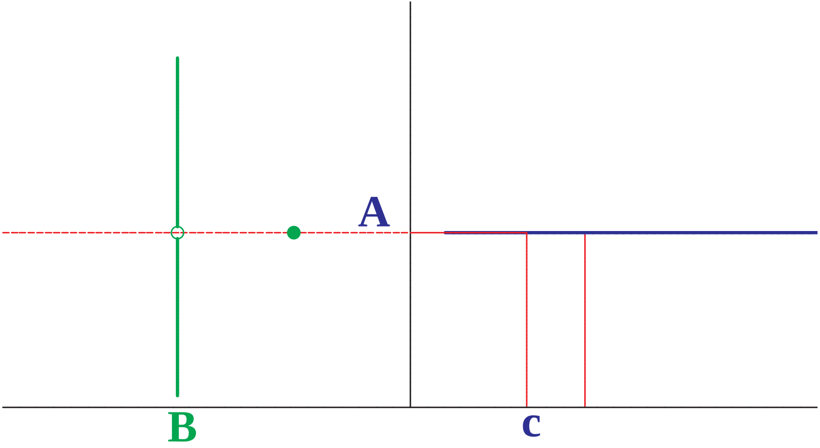


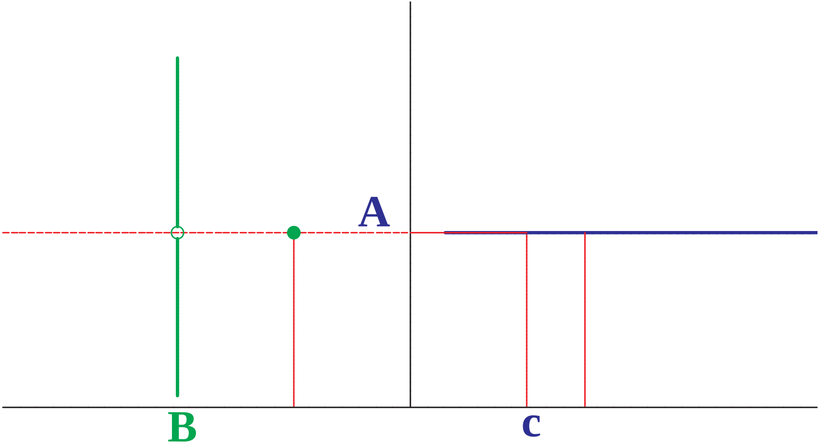


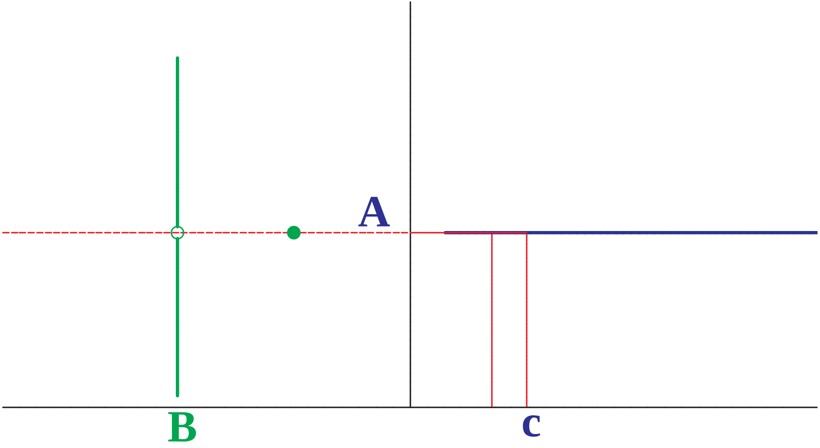

c

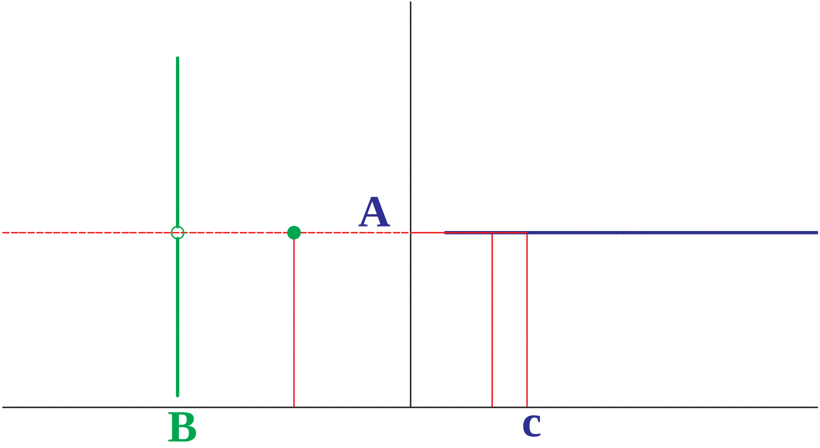

A
c

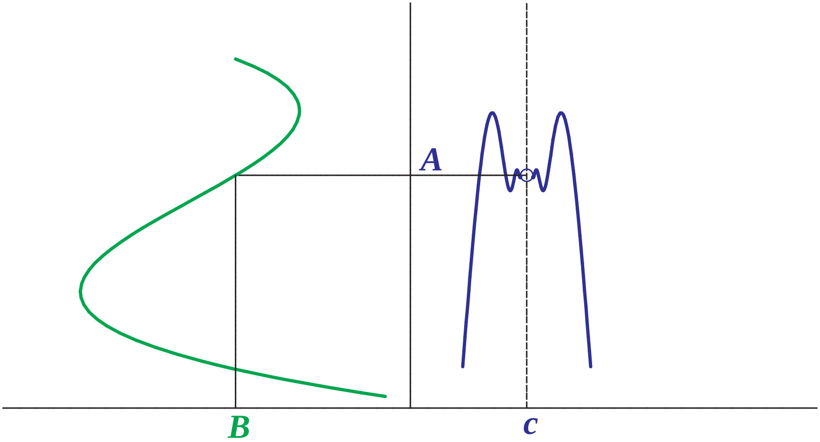

A
B
c

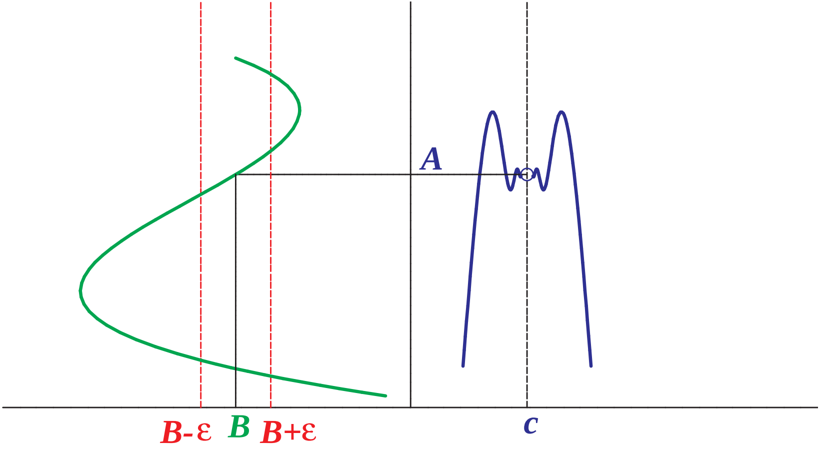

A
B
c

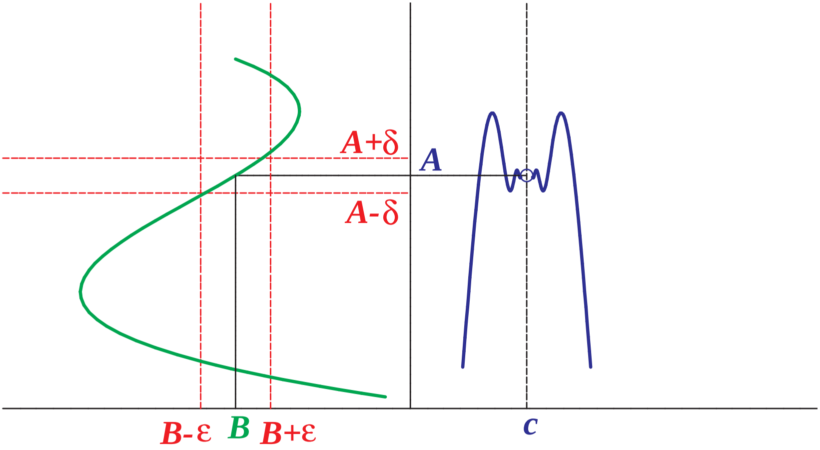

A
B
c

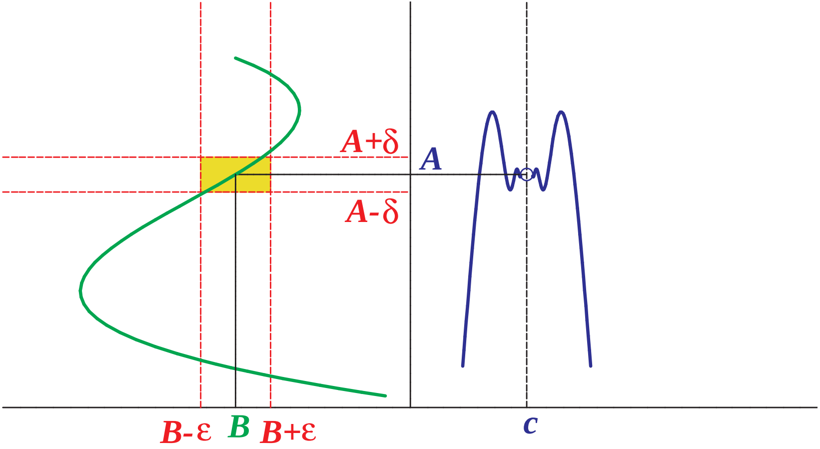

A
B
c


A
B
c

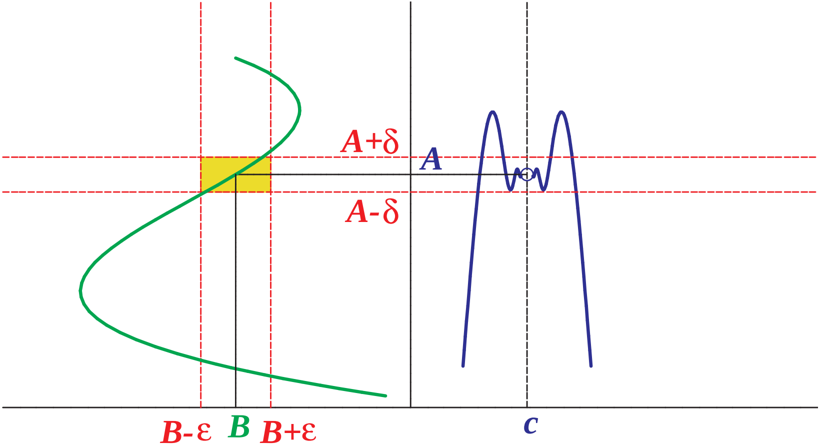

A
B
c

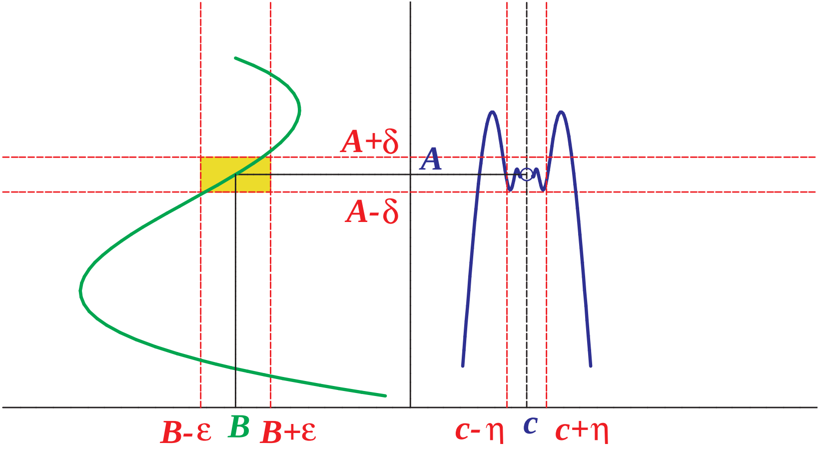

A
B-ε
B
B+ε
c

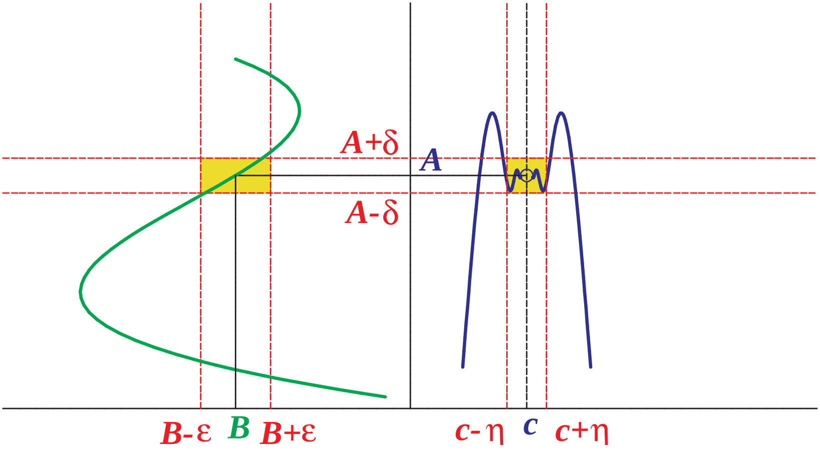

A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c

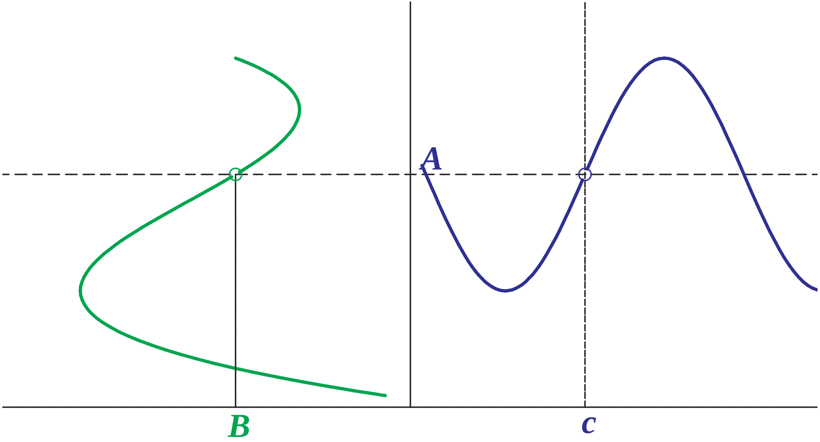


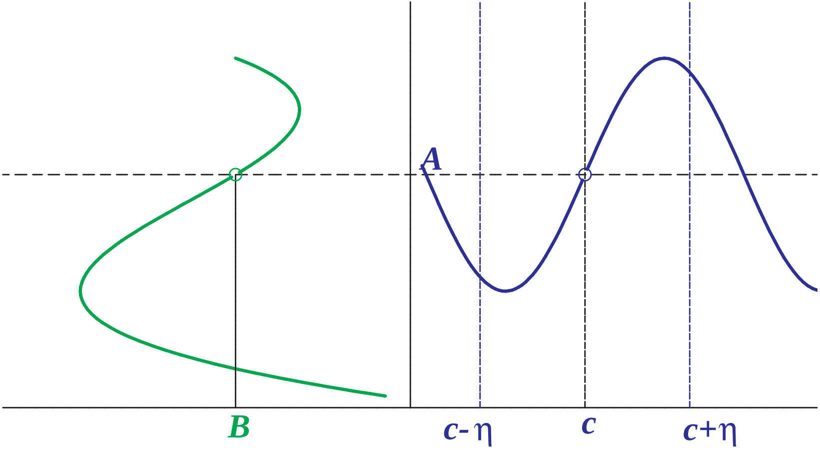
A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c

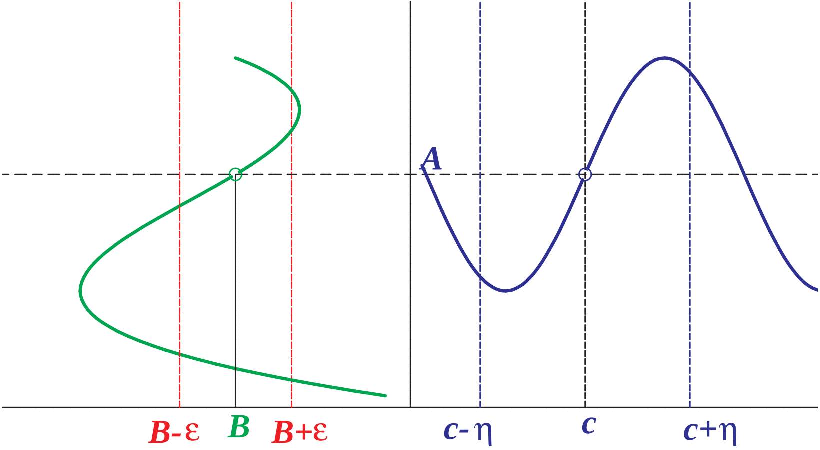

A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c-η
c
c+η

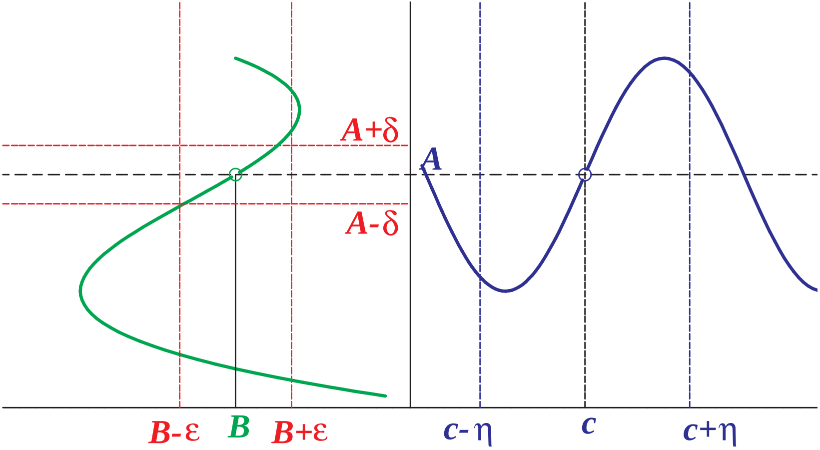

A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c-η
c
c+η


A
B
c

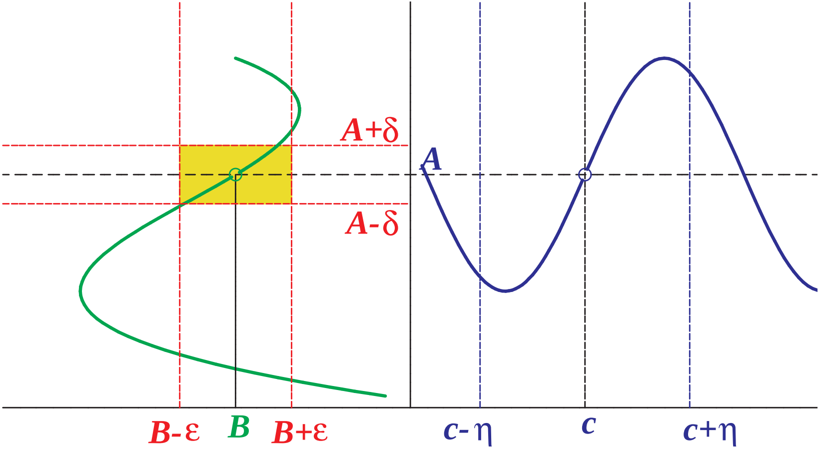

A
B
c- η
c
c+η

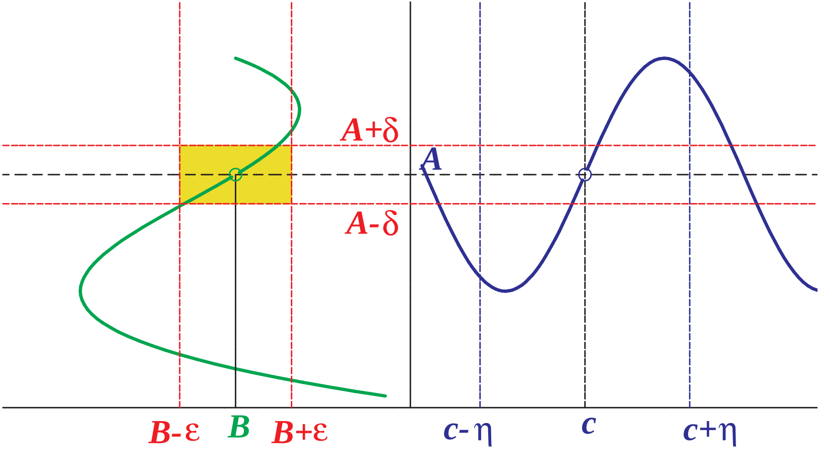


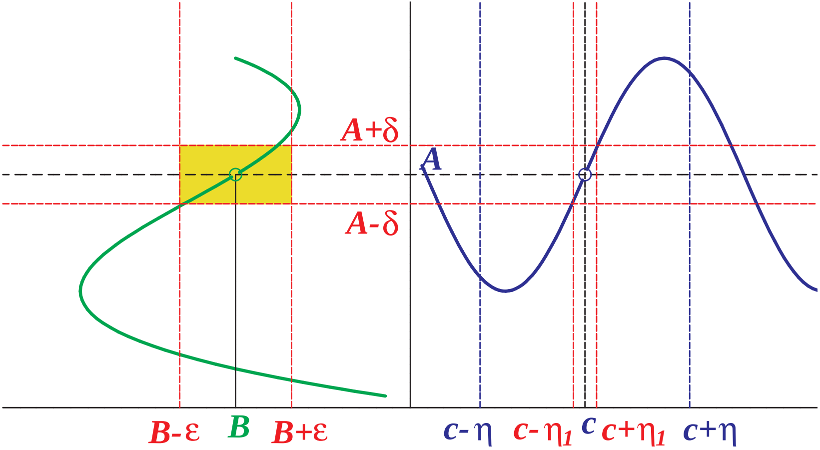
A
$B-\varepsilon$
B
$B+\varepsilon$
$c-\eta$
c
$c+\eta$

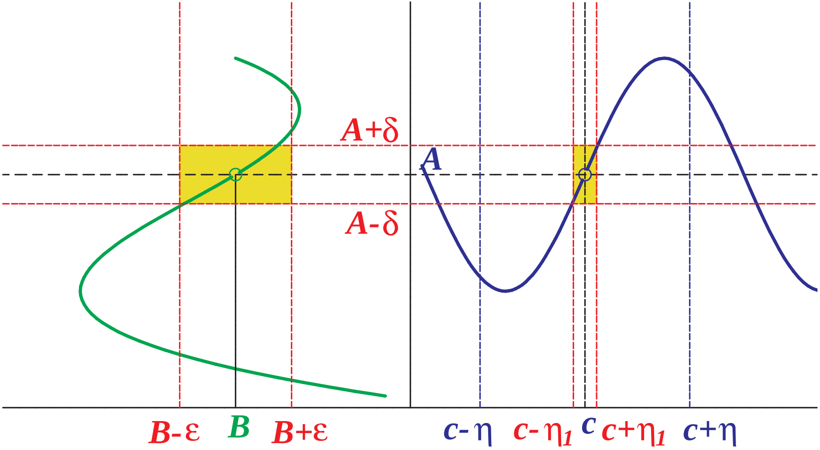


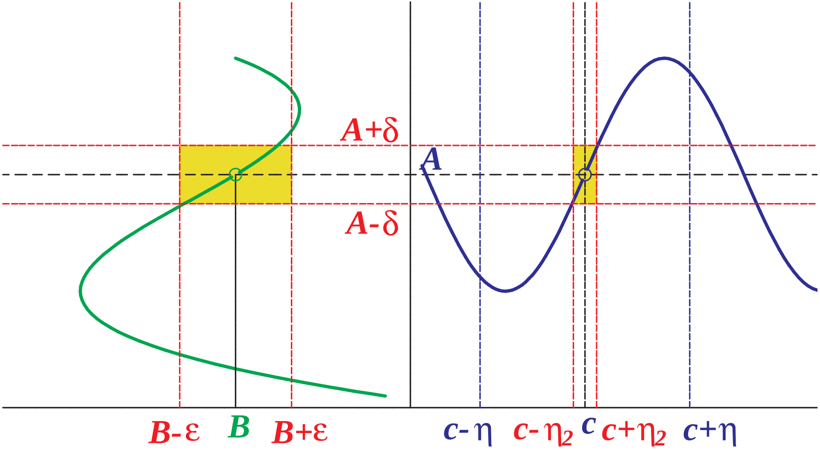
A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c-η
c
c+η


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c-η
c
c+η


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c
c+η


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c- η1
c
c+η1
c+η


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c- η1
c
c+η1
c+η


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c- η2
c
c+η2
c+η

Věta 28 (limita monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Budiž funkce f monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$, přičemž platí:

- *Je-li f na (a, b) neklesající, pak*
  $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f\big((a, b)\big)$ *a*
  $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f\big((a, b)\big)$.
- *Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak*
  $\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f\big((a, b)\big)$ *a*
  $\lim_{x\to b-} f(x) = \inf f\big((a, b)\big)$.

Definice

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu J**, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Věta 29 (spojitost složené funkce na intervalu)

Nechť I a J jsou intervaly, $g\colon I \to J$, $f\colon J \to \mathbb{R}$, g je spojitá na I a f je spojitá na J. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá na I.

Věta 30 (Heineova věta pro spojitost)

Nechť funkce f je definovaná na nějakém okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Pak jsou výroky (i) *a* (ii) *ekvivalentní.*

(i) *Funkce f je spojitá v c.*

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D_f$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.*

Věta 31 (Bolzano, o nabývání mezihodnot)

Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Věta 32 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)

Nechť J je interval a funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce f na množině M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje). Body maxima či minima souhrnně označujeme jako body extrému.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$,
- lokální minimum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \leq f(x)$,
- lokální minimum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \geq f(x)$,
- ostré lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta) \cap M \colon f(y) < f(x)$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \leq f(x)$,
- lokální minimum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \geq f(x)$,
- ostré lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta) \cap M \colon f(y) < f(x)$,
- ostré lokální minimum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta) \cap M \colon f(y) > f(x)$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$,
- lokální minimum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)$,
- ostré lokální maximum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) < f(x)$,
- ostré lokální minimum vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) > f(x)$.

Bodem lokálního extrému rozumíme bod lokálního maxima či lokálního minima.

Věta 33 (o nabývání extrémů)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 33 (o nabývání extrémů)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Důsledek 34 (omezenost spojité funkce)

Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f na $\langle a, b\rangle$ omezená.

————konec přednášky 13.11.————

Věta 35 (spojitost inverzní funkce)

Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Věta 36 (zavedení logaritmu)

Existuje jediná funkce (značíme ji log *a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$,

(L2) *funkce* log *je na* $(0, +\infty)$ *rostoucí,*

(L3) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon\ \log xy = \log x + \log y$,

(L4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Vlastnosti funkce logaritmus

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon\ \log(1/x) = -\log x$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log x^n = n \log x$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \log x^n = n \log x$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \log x = -\infty$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log x^n = n \log x$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce log je spojitá na $(0, +\infty)$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon\ \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon\ \log x^n = n \log x$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce log je spojitá na $(0, +\infty)$,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \log x^n = n \log x$,
- $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce log je spojitá na $(0, +\infty)$,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$,
- existuje právě jedno číslo $e \in (0, +\infty)$ splňující $\log e = 1$.

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\text{exp}} = \mathbb{R}$, $H_{\text{exp}} = (0, +\infty)$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\text{exp}} = \mathbb{R}$, $H_{\text{exp}} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\text{exp}} = \mathbb{R}$, $H_{\text{exp}} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$,
- $\forall r \in \mathbb{Q}\colon\ \exp r = e^r$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Obecnou mocninu a^b definujeme jako
$$a^b = \exp(b \log a).$$

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Obecnou mocninu a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Definice

Nechť $a, b \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Obecný logaritmus $\log_a b$ definujeme jako

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

———konec přednášky 20.11.———

Věta 37 (zavedení funkce sinus a čísla π)

Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit sin*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbb{R}$,

(S2) sin *je rostoucí na* $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Věta 37 (zavedení funkce sinus a čísla π)

Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit sin*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbb{R}$,

(S2) sin *je rostoucí na* $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice

Funkcí kosinus rozumíme funkci $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+\pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$
- Funkce sin je rovna nule právě v bodech množiny $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, funkce cos je rovna nule právě v bodech množiny $\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice

Funkci tangens značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definice

Funkci tangens značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci kotangens, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$,
  $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$,
  $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
- $H_{\mathrm{tg}} = H_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R}$

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$.

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$.
- Funkcí arkuskosinus (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$.

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$.
- Funkcí arkuskosinus (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$.
- Funkcí arkustangens (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$.
- Funkcí arkuskosinus (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0,\pi\rangle}$.
- Funkcí arkustangens (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.
- Funkcí arkuskotangens (značíme arccotg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)}$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle\colon\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
  $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1\rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\forall x \in \langle -1, 1\rangle\colon\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
  $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- derivací funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- derivací funkce f v bodě a zprava budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- derivací funkce f v bodě a zleva budeme rozumět

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud příslušné limity existují.

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Tečnou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ nazveme přímku

$$T_a = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\right\}.$$

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Tečnou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ nazveme přímku

$$T_a = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\right\}.$$

Věta 38

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

————konec přednášky 24.11.——————

Věta 39 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

Věta 39 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

Věta 39 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

(iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

Věta 39 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

(iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iv) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 40 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 40 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 41 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní a má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Derivace elementárních funkcí

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\text{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\text{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\text{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\text{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\text{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\text{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Věta 42 (nutná podmínka lokálního extrému)

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.

———konec přednášky 27.11.———

Věta 43 (Rolle)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ splňující $f'(\xi) = 0$.

Věta 43 (Rolle)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ splňující $f'(\xi) = 0$.

Věta 44 (Lagrange, o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 45 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.*

Věta 45 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.*

Věta 45 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.*

Věta 45 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 46 (výpočet jednostranné derivace)

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

——————konec přednášky 1.12.——————

Věta 47 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$,

Věta 47 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Věta 47 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,

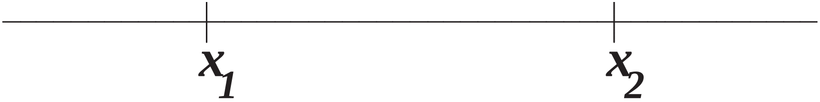
(ii) $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Konvexní kombinace

Konvexní kombinace



$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = x_1 + 0 \cdot (x_2 - x_1) = x_1$$

Konvexní kombinace

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_1 + 1 \cdot (x_2 - x_1) = x_2$$

Konvexní kombinace

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

Konvexní kombinace

$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = x_1 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$$

Konvexní kombinace

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = x_1 + \frac{3}{4}(x_2 - x_1)$$

Konvexní kombinace

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_1 + (1-\lambda)(x_2 - x_1), \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

Definice

Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

Definice

Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- konkávní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

Definice

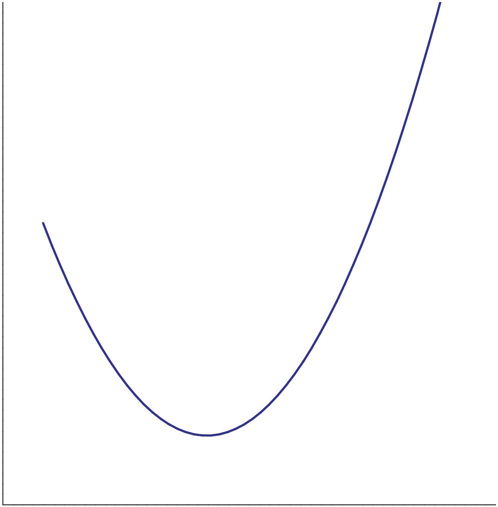
Řekneme, že funkce f je na intervalu I

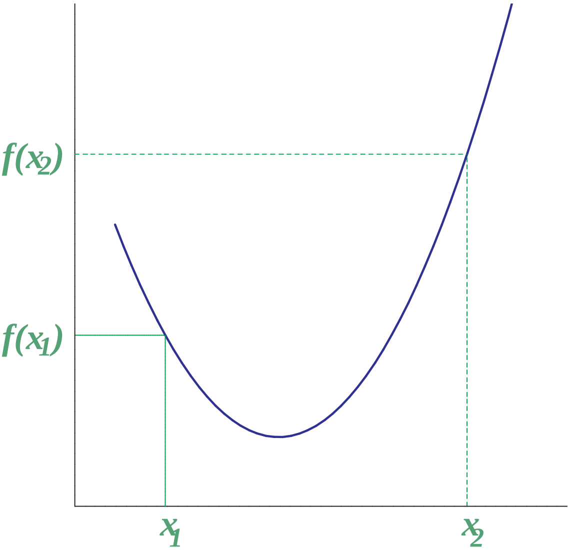
- **konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- **konkávní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- **ryze konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

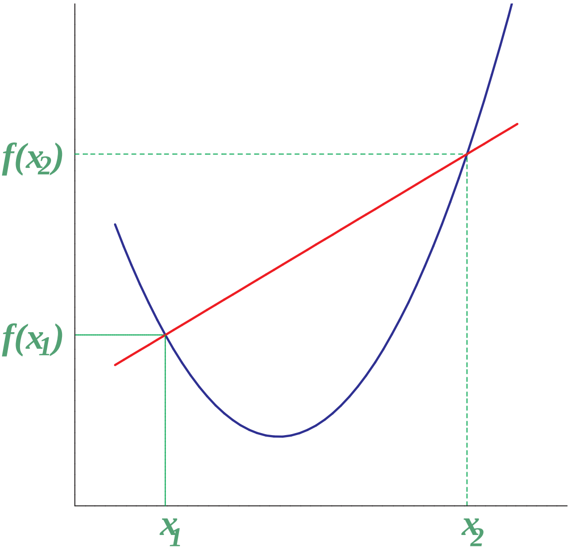
Definice

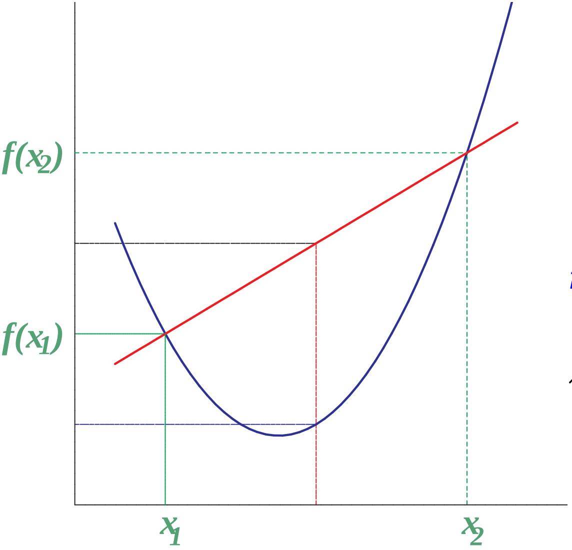
Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- **konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- **konkávní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- **ryze konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- **ryze konkávní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$




f(x2)
f(x1)
x1
x2

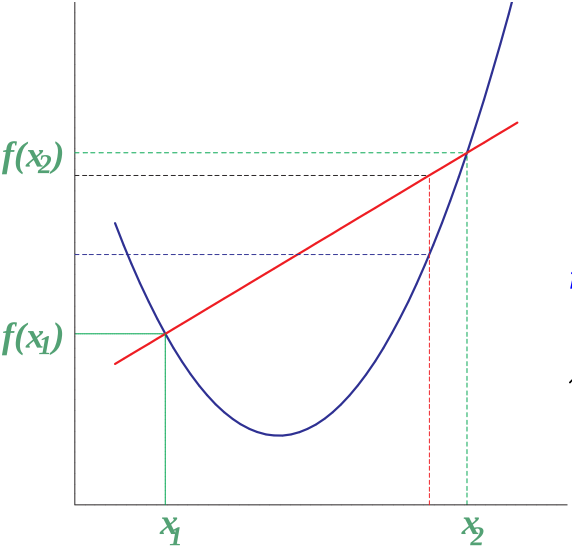

$f(x_2)$
$f(x_1)$
x_1
x_2



$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$



$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Lemma 48

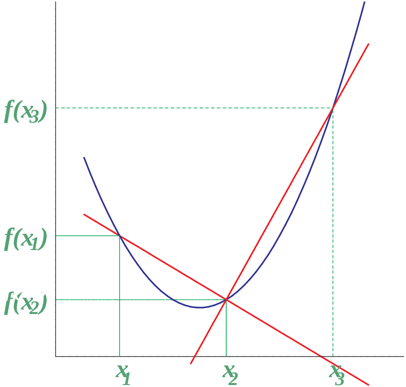
Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Lemma 48

Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$



Definice

Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Druhou derivací funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Definice

Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Druhou derivací funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n-tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n+1)$-ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

———konec přednášky 4.12.———

Věta 49 (druhá derivace a konvexita)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* f *má na intervalu* (a, b) *vlastní druhou derivaci.*

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

———konec přednášky 4.12.———

Věta 49 (druhá derivace a konvexita)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* f *má na intervalu* (a, b) *vlastní druhou derivaci.*

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a, b).

———konec přednášky 4.12.———

Věta 49 (druhá derivace a konvexita)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

———konec přednášky 4.12.———

Věta 49 (druhá derivace a konvexita)

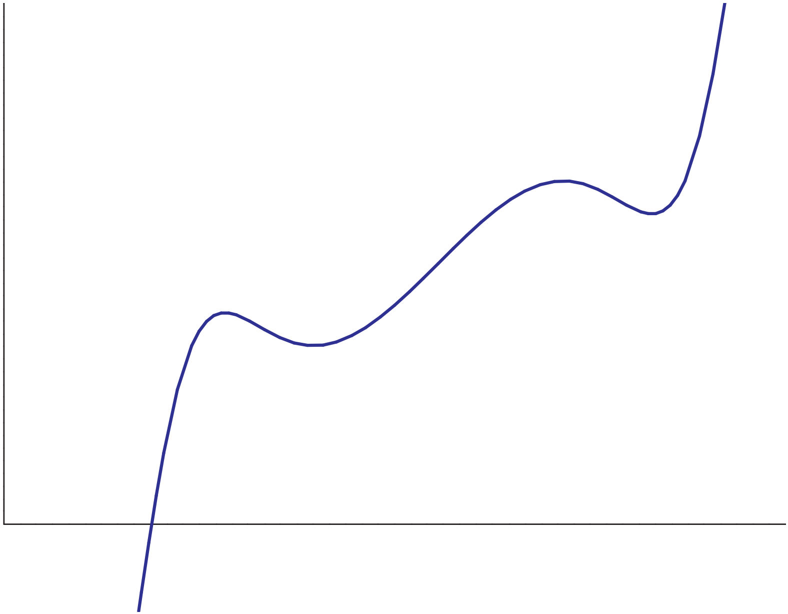
Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

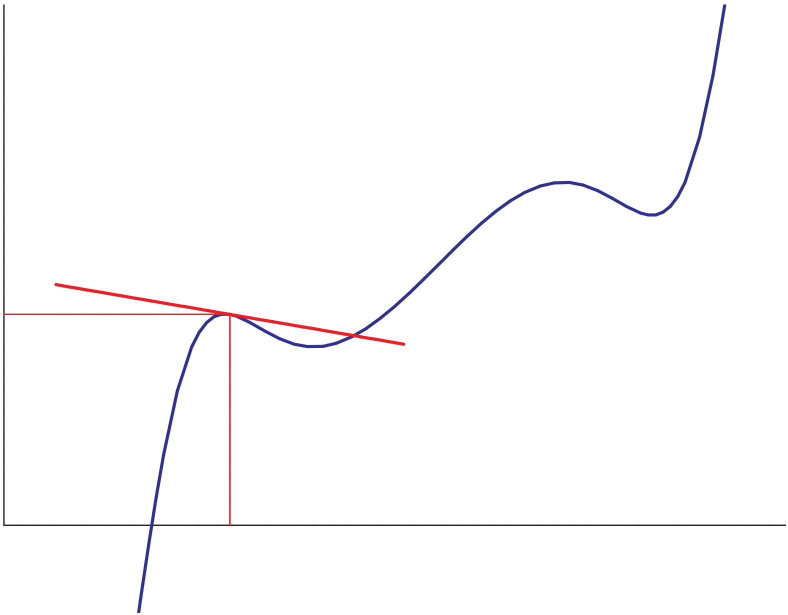
(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

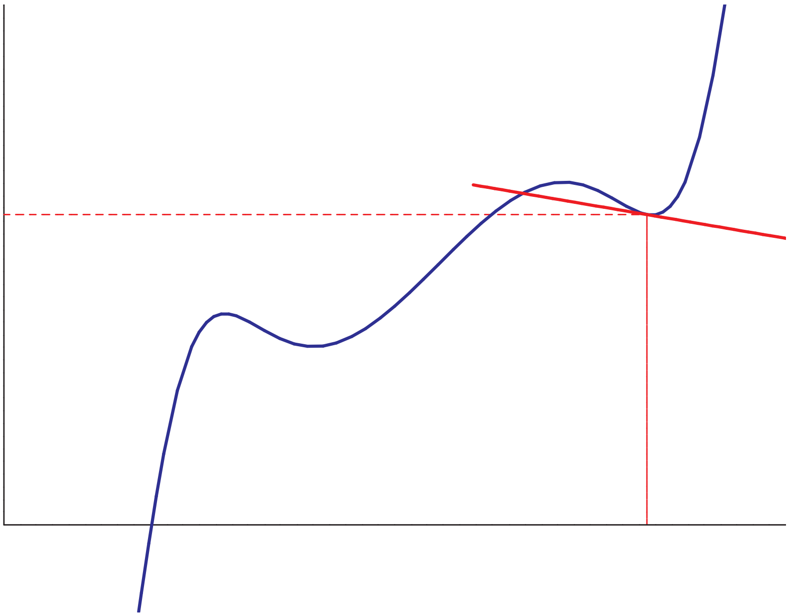
(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

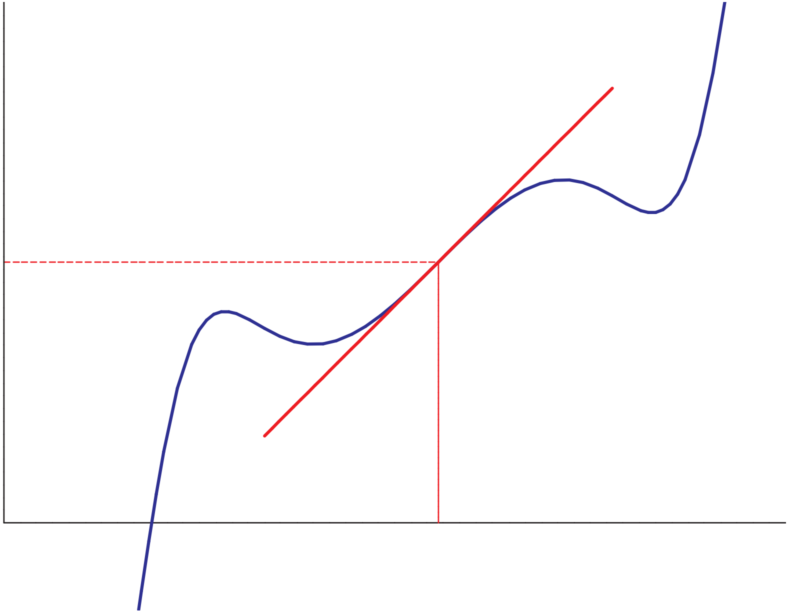
(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

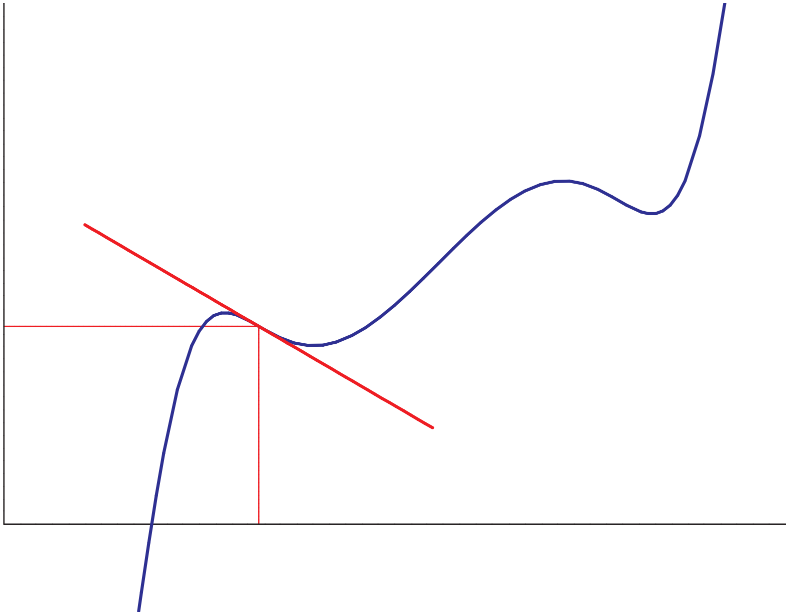
(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).*

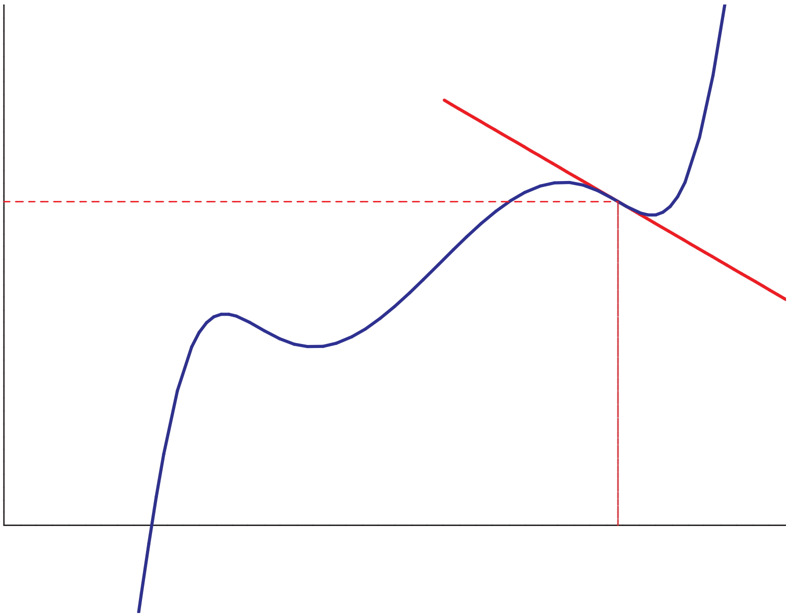












Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a T_a označuje tečnu ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a.

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je inflexním bodem funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je inflexním bodem funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 50 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 50 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 51 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:

- $\forall x \in (a, z)\colon f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b)\colon f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

Definice

Přímku, která je grafem afinní funkce $x \mapsto kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme asymptotou funkce f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - q) = 0\text{)}.$$

Definice

Přímku, která je grafem afinní funkce $x \mapsto kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme asymptotou funkce f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - q) = 0).$$

Tvrzení 52

Funkce f má asymptotu v $+\infty$ popsanou afinní funkcí $x \mapsto kx + q$, právě tehdy, když

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

——————konec přednášky 8.12.——————

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru".
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.