Limita funkce

1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

2. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\quad (n\in\mathbf{N}),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

3. Spočtěte:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0_+}(e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

4. Spočtěte:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2},\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}},\qquad \lim_{x\to\infty}\log(1+2^x)\log\Big(1+\frac{3}{x}\Big).$$

5. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}.$$

6. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\Big)^n,\qquad \lim_{n\to\infty} n\big(\sqrt[n]{2}-1\big).$$

7. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\operatorname{cotg} \pi x},\qquad \lim_{x\to\infty} x\Big(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\Big),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

8. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\Big(2\pi\sqrt{n^2+1}\Big).$$

9. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+e^x)}{\log(x^4+e^{2x})},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+xe^x)}{\log\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)},\qquad \lim_{x\to 0_+} x\log x,\qquad \lim_{x\to 0_+}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log\big(1+\sqrt{x}\big)}.$$

Výsledky a některá řešení

1. 2, $1/2$, -1

2. $-1/16$, $3/2$, $1/n$, $1/4$

3. $7/3$, $-1/2$, 1

4. 0, $1/e$, $2/3$, $\log 8$

5.1. Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Víme, že

(i) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(iii) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$,
(iv) $\sin$ je prostý na $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$,
(v) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\sin x)}{\sin x} = 1$.

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

5.2. Pišme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.
\end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Použili jsme

- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- $\sin$ je prostá funkce na jistém okolí 0,
- $\arcsin$ je prostá funkce,
- $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}=1.$$

5.3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme
$$\begin{aligned}\frac{e^x-2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x}&=\frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-2\sin(\pi/6+x)}{x}\right)\\
&=\frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)\\
&=\frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}-\frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)\\
&=\frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x}-\frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right).\qquad(\star)\end{aligned}$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$,
(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
(3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$,
(4) $\lim_{x\to 0}\cos x=1$.

Z $(\star)$, (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x}=1-\sqrt{3}.$$

6.1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x.$$
Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:
$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x\\
&=\exp\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x\right)\right)\\
&=\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)\right)\\
&=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)\\
&=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}\right)\\
&=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}}\right).\qquad(\star)\end{aligned}$$
Dále platí:

- $\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}=1$,

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}$
  $= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0,$
- funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,
- $\exp$ je spojitá na $\mathbf{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \qquad (\star\star)$$

Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}} = 1. \qquad (\star\star\star)$$

Z $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ a (4) plyne

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e,$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

6.2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x) = x(2^{\frac{1}{x}}-1)$ v ∞. Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n\to\infty} f(n) = A$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{\log 2}{x}}-1}{\frac{\log 2}{x}} \cdot \log 2 = \log 2.$$

Užili jsme

- $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1,$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\log 2}{x} = 0,$
- $\frac{\log 2}{x} \neq 0$ pro každé $x > 0$,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

7. $1/e$, $1/2$, $4/3$

8. 0

9. $\frac{1}{2}$, 1, 0, 1.