a) $Tf(t) = tf(t)$, $f \in L_1([0,1]) \Rightarrow$

· $\|Tf\|_{L_1} = \int_0^1 |tf(t)| \le \int_0^1 |f(t)| = \|f\|_{L_1} \Rightarrow \|T\| \le 1$

· $f_n = n\chi_{(1-\frac{1}{n},1)} \Rightarrow \|f_n\| = 1$ & $\|Tf_n\| = n\int_{1-\frac{1}{n}}^1 t \ge n\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \|T\| = 1$

$f \in L_\infty([0,1]) \Rightarrow \|Tf\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}|tf(t)| \le \operatorname{ess\,sup}|f(t)| = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \|T\| \le 1$, $f \equiv 1$, pak $\|T1\|_\infty = \|t\|_\infty = 1$, tj. $\|T\| = 1$

· T izomorfismus L_1 do L_1 není, neboť:

$f_n = n\chi_{[0,1/n)}$, pak $\|f_n\| = 1$ a $\|Tf_n\| = n\int_0^{1/n} t \le n\int_0^{1/n} 1/n = \frac{1}{n}$. Tedy neexistuje $c > 0$, že $\|Tf\| \ge c\|f\|$

b) $t^2 \in L_2 \Rightarrow \varphi_1(f) = \int_0^1 t^2 f(t) \in (L_2)^*$

$1 \in L_2$ $\quad \varphi_2(f) = \int_0^1 1 \cdot f(t)$

$f_1 = x \in L_2$

$f_2 = x^2 \in L_2$ $\quad \Rightarrow Tf = f_1\varphi_1(f) + f_2\varphi_2(f) \in F(L_2([0,1]))$

$\Rightarrow T \in K(L_2)$, speciálně T spojitý

· $\sigma_p(T)$: stačí vzít $0 \neq f \in \ker\varphi_1 \cap \ker\varphi_2$, pak $Tf = 0$, tj. $0 \in \sigma_p(T)$

· $\lambda \neq 0$: $Tf = \lambda f$

$f_1\varphi_1(f) + f_2\varphi_2(f) = \lambda f = \lambda(a_1 f_1 + a_2 f_2)$

$\varphi_1(f) = a_1\varphi_1(f_1) + a_2\varphi_1(f_2) = a_1\frac{1}{4} + a_2\frac{1}{5}$

$\varphi_2(f) = a_1\varphi_2(f_1) + a_2\varphi_2(f_2) = a_1\frac{1}{2} + a_2\frac{1}{3}$

$f_1, f_2 \in N \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ (+)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 - \lambda & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow 0 = \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) - 1/10 = \frac{1}{12} - \lambda\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \lambda^2 - 1/10 =$

$= \lambda^2 - \lambda \frac{7}{12} - \frac{1}{60} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{7/12 \pm \sqrt{\left(\frac{7}{12}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{60}}}{2}$

Pokud $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, existuje $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq 0$ řešení (+), pak $a_1 f_1 + a_2 f_2$ je netriviální řešení rovnice $Tf = \lambda f$, tj. $\lambda \in \sigma_p(T)$

Jinak $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Tedy $\sigma_p(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$.

$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T) = \sigma_p(T)$, neboť T kompaktní