a) pozorování: $1 \le p < \infty$, $X = \ell_p$, (a_n) posloupnost. Pak

$\varphi(x) = \sum x_n a_n$, $x \in X$, je v $X^* \iff (a_n) \in \ell_q$.

Dk.: "$\Leftarrow$" věta o reprezentaci

"$\Rightarrow$" $\varphi \in X^* \Rightarrow$ ex. $(b_n) \in \ell_q$, že $\varphi(x) = \sum x_n b_n$.

Pak $\sum x_n a_n = \sum x_n b_n$, dosadíme bázové vektory a máme

$a_n = b_n$, tedy $(a_n) \in \ell_q$ $\blacksquare$

Tedy pro $p \in [1, \infty)$ je $\varphi_k \in (\ell_p)^* \iff \left(\frac{1}{n^k}\right) \in \ell_q \iff$

$$\iff \begin{cases} p>1: & \sum \frac{1}{n^{kq}} < \infty \iff kq > 1 \iff k > \frac{1}{q} \iff k \geq 1 \\ p=1: & \left(\frac{1}{n^k}\right) \in \ell_\infty \iff k \geq 0 \end{cases}$$

Norma pak je $\|\varphi_k\| = \begin{cases} p>1: & \left\|\left(\frac{1}{n^k}\right)\right\|_{\ell_q} = \left(\sum \frac{1}{n^{kq}}\right)^{1/q} \\ p=1: & \left\|\left(\frac{1}{n^k}\right)\right\|_{\ell_\infty} = 1 \end{cases}$ dle reprezentace.

• $p = \infty$: • $k > 1 \Rightarrow \sum x_n \frac{1}{n^k}$ dobře definovaná, neboť

$\left|\sum x_n \frac{1}{n^k}\right| \le \|x\|_\infty \sum \frac{1}{n^k}$, zjevně lineární předpis

Navíc máme $\|\varphi_k\| \le \sum \frac{1}{n^k}$

• $k \le 1 \Rightarrow$ pro $x \equiv 1$ platí $\varphi_k(x) = \sum \frac{1}{n^k} = \infty$, tj.

φ_k není dobře definovaný.

b) Zjevně $\|Tf\|_{L_1} = \int_{\mathbb R} |f(x-1)| = \int_{\mathbb R} |f(x)| = \|f\|$, T lineární ⇒

T izometrie do. $T^{-1} g(x) = g(x+1)$, $g \in L_1(\mathbb R)$, je zjevně

(jako výše) inverze k T, je to též izometrie.

Tedy $\sigma(T) \subset \mathbb T$

· $\sigma_p(T)$: $\lambda \in \mathbb T$, $\lambda f - Tf = 0$

$\lambda f(x) - f(x-1) = 0$ pro s.v. $x \in \mathbb R$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x-1) = \frac{1}{\lambda^2} f(x-2) = \frac{1}{\lambda^3} f(x-3) = \dots = \frac{1}{\lambda^n} f(x-n), \quad n \in \mathbb N$$

$f(x-1) = \frac{1}{\lambda} f(x-2)$ $\qquad \Rightarrow \quad f(x+n) = \frac{1}{\lambda^n} f(x), \ n \in \mathbb N$

$f(x-2) = \frac{1}{\lambda} f(x-3)$

$$\infty > \int_{\mathbb R} |f| \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} |f(x)| \underset{x-n=y}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f(y+n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left|\frac{1}{\lambda^n} f(y)\right| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f(y)| \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ s.v. na } (0,1)$$

$\Rightarrow \ f(x+n) = \frac{1}{\lambda^n} f(x)$, $n \in \mathbb N$ dává $f = 0$ s.v. na $(0, \infty)$

$\Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{\lambda^n} f(x-n)$, $n \in \mathbb N$ dává $f = 0$ s.v. na $(-\infty, 0)$

$\Rightarrow \ f \equiv 0 \ \Rightarrow \ \sigma_p(T) = \emptyset$

· $\sigma(T) = \mathbb T$: ať $\lambda \in \mathbb T$, $g = \chi_{(0,1)}$, pak neexistuje $f \in L_1(\mathbb R)$, že $(\lambda I - T) f = g$.

Ať f takové, pak $\lambda f(x) - f(x-1) = \begin{cases} 1 & \dots x \in (0,1) \\ 0 & \dots x \notin (0,1) \end{cases}$

$x \in (0,1)$: $f(x) = \frac{1}{\lambda}(1 + f(x-1))$

$x \in (1,2)$: $f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x-1) = \frac{1}{\lambda^2}(1 + f(x-2))$

$x \in (2,3)$: $f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x-1) = \frac{1}{\lambda^2} f(x-2) = \frac{1}{\lambda^3}(1 + f(x-3))$

$\vdots$

$$\infty > \int |f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} |f(x)| = \sum_{1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left|\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right| |1 + f(x-n-1)| \underset{x-n=y}{=} \sum_{1}^{\infty} \int_0^1 |1 + f(y-1)|$$

$\Rightarrow \ f(y-1) = -1$ s.v. $y \in (0,1)$ $\Rightarrow$ $f = -1$ na $(-1, 0)$ s.v.

$x \in (-1,0) \Rightarrow f(x-1) = \lambda f(x) \Rightarrow \quad f = -\lambda$ na $(-2,-1)$ s.v.

$x \in (-2,-1) \Rightarrow f(x-1) = \lambda f(x) \Rightarrow \quad f = -\lambda^2$ na $(-3,-2)$

$\vdots$

$x \in (-(n+1),-n) \Rightarrow \quad f = -\lambda^{n+1}$ na $(-(n+2), -(n+1))$

$\Rightarrow \quad |f| \in L_1(\mathbb{R})$, $|f| = 1$ na $(-\infty, 0)$ s.v. $\Rightarrow$ spor

Tedy $\sigma(T) = \mathbb{T}$. Tedy T není kpt.