

7. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(a) Uvažujme $T: L_1([0, 2\pi]) \rightarrow c_0$, kde

$$(Tf)(n) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{N}, f \in L_1([0, 2\pi]).$$

(3 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor z $L_1([0, 2\pi])$ do c_0 .

(4 body) Nalezněte v rámci standardních dualit duální operátor T^* .

(3 body) Je obor hodnot T hustý v c_0 ?

(b) Necht' $X = L_2(\mathbb{R})$ uvažovaný jako prostor nad \mathbb{C} a

$$g(x) = \max\{0, \sin x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uvažujme předpis

$$(Tf)(x) = g(x)f(x), \quad f \in X.$$

(3 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X a spočítejte jeho normu.

(2.5 bodu) Nalezněte bodové spektrum T .

(3.5 bodu) Nalezněte spektrum T .

(1 bod) Zjistěte, zda je T kompaktní.