

## 5. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(a) Uvažujme  $\ell_2$  jako prostor nad  $\mathbb{C}$  a vektory

$$x = \left\{ \frac{1}{n} \right\}, \quad y = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}, \quad z = \left\{ \frac{1}{n^3} \right\}.$$

3.5 bodu Ukažte, že jsou vektory  $x, y, z$  lineárně nezávislé.

3.5 bodu Nalezněte nějakou ortonormální bázi prostoru  $Y = \text{span}\{x, y\}$ .

3 body Nalezněte prvek  $u \in Y$  splňující  $\|z - u\| = \text{dist}(z, Y)$ .

(b) Necht'  $X = \ell_2(\mathbb{Z})$  uvažovaný jako prostor nad  $\mathbb{C}$ . Uvažujme předpis

$$(Tx)_n = i^{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, x \in X.$$

(1.5 bodu) Ukažte, že  $T$  je spojitý lineární operátor na  $X$ .

(1.5 bodu) Zjistěte, zda je  $T$  kompaktní.

(3 body) Nalezněte bodové spektrum  $T$ .

(4 body) Nalezněte spektrum  $T$ .