

5. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(a) Uvažujme $L_p([0, 1])$, $p \in [1, \infty]$, jako prostory nad \mathbb{C} . Uvažujme předpis

$$Tf = \int_0^1 f(t^2) dt, \quad f \in L_p([0, 1]).$$

Zjistěte, pro jaká $p \in [1, \infty]$ je $T \in (L_p([0, 1]))^*$, a spočtěte pro tato p normu T .

(b) Necht' $X = C([-1, 1])$ uvažovaný jako prostor nad \mathbb{C} . Uvažujme předpis

$$Tf(t) = if(t) + t^2 \int_{-1}^1 f(s) ds, \quad t \in [-1, 1], f \in X.$$

(2 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X .

(2 body) Zjistěte, zda je T kompaktní.

(2.5 bodu) Nalezněte bodové spektrum T .

(3.5 bodu) Nalezněte spektrum T a pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ vyjádřete $(\lambda I - T)^{-1}$.