

4. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(a) Necht' $X = \ell_1$ a $Y = \ell_2$ uvažované jako prostory nad \mathbb{C} . Uvažujme předpis

$$Tx = T(x_n) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_3 + x_4, \dots, x_{2n-1} - x_{2n}, x_{2n-1} + x_{2n}, \dots), \quad x \in X.$$

(4.5 bodu) Ukažte, že $T \in L(X, Y)$.

(4.5 bodu) V rámci standardních dualit nalezněte T^* .

(1 bod) Zjistěte, zda je T^* surjektivní.

(b) Necht' $X = L_2([0, \infty))$ uvažovaný jako prostor nad \mathbb{C} . Uvažujme předpis

$$Tf(t) = e^{-t} \int_0^\infty f(s)e^{-2s} ds + e^{-2t} \int_0^\infty f(s)e^{-s} ds, \quad t \in [0, \infty), f \in X.$$

(2 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X .

(2 body) Zjistěte, zda je T kompaktní.

(5 bodů) Nalezněte bodové spektrum T .

(1 bod) Nalezněte spektrum T .