

### 3. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(a) Necht'  $T : X \rightarrow Y$ , kde  $X = \ell_1$ ,  $Y = c_0$  a

$$Tx = T(x_n) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \sum_{k=2}^{\infty} x_k, \sum_{k=3}^{\infty} x_k, \dots \right), \quad x \in X.$$

(3 body) Ukažte, že  $T \in L(X, Y)$ .

(5 bodů) Nalezněte v rámci standardních dualit adjungovaný operátor  $T^*$ .

(2 body) Zjistěte, zda je  $T$  izomorfismus do.

(b) Necht'  $X = L_2([0, 1])$  uvažovaný jako prostor nad  $\mathbb{C}$ . Uvažujme předpis

$$Tf(t) = \int_0^t s^2 f(s) ds, \quad t \in [0, 1], f \in X.$$

(2 body) Ukažte, že  $T$  je spojitý lineární operátor na  $X$ .

(3 body) Zjistěte, zda je  $T$  kompaktní.

(4 body) Nalezněte bodové spektrum  $T$ .

(1 body) Nalezněte spektrum  $T$ .