

## 2. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(a) Necht'  $X = L_2((0, \infty))$  je uvažovaný jako prostor nad  $\mathbb{R}$ . Necht'  $Y = \text{span}\{e^{-t}, e^{-2t}\} \subset X$  a  $f(t) = e^{-3t}$ .

(5 bodů) Nalezněte nějakou ortonormální bázi prostoru  $Y$ .

(5 bodů) Nalezněte prvek  $g \in Y$  splňující  $\|f - g\| = \text{dist}(f, Y)$ .

(b) Necht'  $X = \ell_1$  uvažovaný jako prostor nad  $\mathbb{C}$ . Uvažujme předpis

$$T(x_n) = \left( 2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2, \frac{x_4}{4}, \frac{x_5}{5}, \frac{x_6}{6}, \frac{x_7}{7}, \dots \right), \quad x = (x_n) \in X.$$

(2 body) Ukažte, že  $T$  je spojitý lineární operátor na  $X$ .

(2 body) Zjistěte, zda je  $T$  kompaktní.

(5 bodů) Nalezněte bodové spektrum  $T$ .

(1 body) Nalezněte  $\sigma(T)$ .