1. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(a) Nechť ℓ_p, $p \in [1, \infty]$, jsou uvažované jako prostory nad $\mathbb{R}$. Uvažujme pro $k \in \mathbb{Z}$ předpis

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{n^k}, \quad x \in \ell_p.$$

(6 bodů) Zjistěte, pro která $k \in \mathbb{Z}$ a $p \in [1, \infty)$ je $\varphi_k \in \ell_p^*$. Spočtěte pro tato k normu φ_k.

(4 body) Zjistěte, pro která $k \in \mathbb{Z}$ a $p = \infty$ je $\varphi_k \in \ell_\infty^*$.

(b) Nechť $X = L_1(\mathbb{R})$ uvažovaný jako prostor nad $\mathbb{C}$. Uvažujme předpis

$$Tf(x) = f(x-1), \quad x \in \mathbb{R}, f \in X.$$

(2 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X o normě 1.

(1 bod) Ukažte, že existuje T^{-1} a má též normu 1.

(3 body) Nalezněte bodové spektrum T.

(3 body) Ukažte, že $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (uvažte funkci $g = \chi_{(0,1)}$).

(1 bod) Zjistěte, zda je T kompaktní.