

The 100 Integrals

Filippo Spaggiari

Studentato NEST, Trento
11 Dicembre 2020

Regole. Leggere attentamente le seguenti istruzioni.

- (a) **Non** sono ammessi appunti, formulari, calcolatrici e dispositivi elettronici di qualunque genere;
- (b) Consegnare **sia svolgimento che risultato**. Quest'ultimo dovrà essere espresso nella forma algebrica più semplice possibile (i.e. usare proprietà delle potenze, dei logaritmi, formule trigonometriche...);
- (c) Per gli integrali indefiniti ricordare la **costante additiva**. Per gli esercizi del **Livello 10** è richiesta la **dimostrazione**;
- (d) Si possono consegnare solo i **livelli completi**, non i singoli esercizi. Una volta consegnato un livello, esso non sarà più modificabile dal gruppo;
- (e) Il primo gruppo che consegnerà un livello completo (indipendentemente dalla correttezza dei risultati) otterrà un **suggerimento**;
- (f) Ogni gruppo con almeno due studenti DEM otterrà un fattore moltiplicativo **1.5** sul punteggio finale;
- (g) Gli integrali da (1) e (99) valgono **1 punto**. L'integrale (100) vale **100 punti**;
- (h) Il tempo di gara è di **3 ore**.

Notazioni. Indicheremo, nel seguito, con

- (i) \log il *logaritmo naturale*. Nelle soluzioni sarà accettato anche \ln ;
- (j) x, y, z, t le variabili reali;
- (k) $|\cdot|$ la funzione *valore assoluto*.

Buon divertimento!

Livello 1. Calcolare i seguenti integrali.

$$(1) \int \pi \, dx$$

$$(6) \int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{x^3} \, dx$$

$$(2) \int e^{\pi x} \, dx$$

$$(7) \int x \log x \, dx$$

$$(3) \int \frac{1+x}{x} \, dx$$

$$(8) \int (4x-1) \log x \, dx$$

$$(4) \int \sqrt[3]{x} + 8x^5 \, dx$$

$$(9) \int \tan x \, dx$$

$$(5) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{7} \, dx$$

$$(10) \int 3 \log x \, dx$$

Livello 2. Calcolare i seguenti integrali.

$$(11) \int e^x \sin x \, dx$$

$$(16) \int \frac{4 \cos(\log x)}{x} \, dx$$

$$(12) \int \frac{3x^3 - 3}{x-1} \, dx$$

$$(17) \int \frac{1}{\cos^2(5x+9)} \, dx$$

$$(13) \int \frac{\cos x}{3} e^{\sin x} \, dx$$

$$(18) \int x^2 e^{2x} \, dx$$

$$(14) \int \frac{1/3}{\sqrt{3x+1}} \, dx$$

$$(19) \int \cos^2 x \, dx$$

$$(15) \int \frac{1}{x\sqrt{\log x}} \, dx$$

$$(20) \int_1^3 \frac{\log x}{x} \, dx$$

Livello 3. Calcolare i seguenti integrali.

$$(21) \int \tan^2 x \, dx$$

$$(26) \int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$$

$$(22) \int_0^{-\infty} (2x - 1)e^{-x} \, dx$$

$$(27) \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} \, dx$$

$$(23) \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3} \, dx$$

$$(28) \int \frac{1}{x \log^3 x} \, dx$$

$$(24) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + \log(x)}}{x} \, dx$$

$$(29) \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 1} \, dx$$

$$(25) \int e^{x+e^x} \, dx$$

$$(30) \int \frac{2x + 1}{x + 2} \, dx$$

Livello 4. Calcolare i seguenti integrali.

$$(31) \int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \, dx$$

$$(36) \int \frac{1}{\cos x} \, dx$$

$$(32) \int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx$$

$$(37) \int \sqrt{e^x - 1} \, dx$$

$$(33) \int \frac{\sin x}{e^x} \, dx$$

$$(38) \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx$$

$$(34) \int \frac{1}{1 + e^x} \, dx$$

$$(39) \int e^{\pi x} \, dy$$

$$(35) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$$

$$(40) \int x \sin x \cos x \, dx$$

Livello 5. Calcolare i seguenti integrali.

$$(41) \int x^2 \log(3x + 1) dx$$

$$(46) \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} dx$$

$$(42) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(47) \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 4x - 1}{3x^2 + 7x + 2} dx$$

$$(43) \int \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x} dx$$

$$(48) \int x^6 e^x dx$$

$$(44) \int \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$(49) \int \cos^4 x dx$$

$$(45) \int \frac{1}{2x^3 + 3x} dx$$

$$(50) \int \frac{e^x \log(\arctan e^x)}{1 + e^{2x}} dx$$

Livello 6. Calcolare i seguenti integrali.

$$(51) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx$$

$$(56) \int_0^1 \frac{1}{x \log x} dx$$

$$(52) \int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2} dx$$

$$(57) \int \arctan x dx$$

$$(53) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{|\sin x|}{\cos x} dx$$

$$(58) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$(54) \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1 - \sin x} dx$$

$$(59) \int \frac{1}{e^{2x} + 9} dx$$

$$(55) \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x + 1)} dx$$

$$(60) \int \frac{1}{e^x \sinh x} dx$$

Livello 7. Calcolare i seguenti integrali.

$$(61) \int \frac{2x^4 + 3}{x(x+1)^2} dx$$

$$(66) \int_1^e \frac{\log^3 x}{x\sqrt{1+\log^4 x}} dx$$

$$(62) \int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} dx$$

$$(67) \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x + \sin(2x) + 2\cos^2 x} dx$$

$$(63) \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$(68) \int_0^1 \frac{4}{(1+x)^2(1+x^2)} dx$$

$$(64) \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

$$(69) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx$$

$$(65) \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(70) \int \arctan x dx$$

Livello 8. Calcolare i seguenti integrali.

$$(71) \int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$(76) \int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x dx$$

$$(72) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

$$(77) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$(73) \int x\sqrt{x^2+x+1} dx$$

$$(78) \int \sin x \log(\sin x) dx$$

$$(74) \int \arcsin x dx$$

$$(79) \int \sqrt{9+x^2} dx$$

$$(75) \int x \arctan(1+16x) dx$$

$$(80) \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$$

Livello 9. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri, eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (non necessariamente calcolandone la primitiva).

$$(81) \int_0^{+\infty} e^{-x} \arctan x \, dx$$

$$(82) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}\sqrt{x}} \, dx$$

$$(83) \int_1^{+\infty} \frac{1 + xe^x + x^2 \log x}{(1 + e^x)(x^3 + x\sqrt{1+x})} \, dx$$

$$(84) \int_0^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{(e^{2x} - 1 - 2x - x^2)\sqrt{\sin x}} \, dx$$

$$(85) \int_0^{+\infty} \frac{x + x\sqrt{x} + \arctan x}{(1 + e^{-x})(1 + x^2\sqrt{1+x^2})} \, dx$$

$$(86) \int_2^3 \frac{x \sin^\alpha(x-2)}{\sqrt{x^2-4}} \, dx$$

$$(87) \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \, dx$$

$$(88) \int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x} \, dx$$

$$(89) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}} \, dx$$

$$(90) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} \, dx$$

Livello 10. Risolvere i seguenti problemi.

(91) Calcolare

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^n} dx$$

per il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ tale per cui l'integrale converge.

(92) Calcolare per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \log^n x dx.$$

(93) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $s \in \mathbb{R}, s > 0$ vale che

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-sx} dx = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(94) Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_a^b |t - x| dt.$$

Dimostrare che f è continua in $[a, b]$.

(95) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Assumiamo che f sia *sommabile*, cioè tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. Dimostrare che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$$

converge per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

(96) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\arctan(-1)}^{\arcsin(\sqrt{2}/2)} \frac{x^3 - x \cos x + \sin(xe^{x^2})}{\log(x^2 + 1) + 2 \cos x} dx$$

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo $\varphi(x): (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

(cioè $\varphi(x)$ è la media integrale di f sull'intervallo $[0, x]$).

(97) Dimostrare che φ è continua in $(0, +\infty)$ e che essa si può prolungare con continuità nell'origine.

Indicheremo, d'ora in poi, il prolungamento continuo di φ nell'origine semplicemente con φ (tale funzione è detta *funzione massimale di Hardy*).

(98) Dimostrare che se f è crescente in $[0, +\infty)$ allora $\varphi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0, +\infty)$.

(99) Dimostrare che φ è derivabile in $(0, +\infty)$ e che se f è derivabile in $x = 0$ da destra, allora anche φ lo è. Assumendo f derivabile in $x = 0$ da destra, calcolare $\varphi'_+(0)$.

(100) Sia $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Calcolare il seguente integrale

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx.$$