9 Variační počet

§1. Historický úvod

Variační počet můžeme rozdělit, byť je vzniklá hranice neostrá, jak z obsahového, tak z historického hlediska na dvě části: klasický a abstraktní.

Svým vznikem sahá klasický variační počet až do 17. století. Mezi těmi, kteří se významně podíleli na jeho rozpracování, jmenujme alespoň Leonharda Eulera (1707-1783), Josepha Louise de Lagrangea (1736-1813); zrovna tak je ale možné jmenovat Isaaca Newtona či bratry Bernoulliovy, působící bezmála o sto let dříve.

Základní úloha klasického variačního počtu je analogická problému, který jsme řešili při hledání extrémů funkcí více proměnných. Ve variačním počtu však nehledáme extrém funkce na nějaké otevřené podmnožině $\mathbb{R}^n$, ale extrém funkcionálu, zobrazujícího podmnožinu (ne nutně konečnědimenzionálního) vektorového prostoru (převážně reálných funkcí) do množiny reálných čísel. Řešením tohoto problému je pak funkce, na které nabývá funkcionál svého extrému.

Metody této partie variačního počtu jsou četně užívány analytickou mechanikou. Jeden ze zákonů analytické mechaniky lze zapsat $\delta S = 0$: děj, který se uskuteční, je charakterizován extremální hodnotou akce S. Definice funkcionálu je $S = \int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t$, kde L je tzv. lagrangeián, definovaný

$$L\big(x, y, z, x'(t), y'(t), z'(t), t\big) = \frac{1}{2} m\big(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)\big) - U(x, y, z, t),$$

kde U je potenciální energie v daném bodě a čase $[x, y, z, t]$. Jiným příkladem je klasická úloha o brachistochroně[1], která v této kapitole bude probrána. Podmínka $\delta S = 0$ nápadně připomíná podmínku pro extrém funkce více reálných proměnných na otevřené množině. Klíčový je znak δ, který bude předmětem našeho dalšího šetření.

Abstraktní variační počet souvisí se jmény Banacha a Hilberta, kteří odhlédli od praktického užití klasického variačního počtu a vhodným zobecněním problémů se zasloužili o rozvoj funkcionální analýzy, jejíž je variační počet v jistém smyslu součástí.

§2. Prostory funkcí: Skalární součin. Norma. Ekvivalence norem. Cauchyovskost a konvergence. Úplnost. Hilbertovy a Banachovy prostory.

Definice 1: Skalární součin

Buď V vektorový prostor nad tělesem reálných (resp. komplexních) čísel. Funkci f nazveme skalárním součinem, pokud f je pozitivně definitní bilineární (resp. sesquilineární) forma na V nad tělesem reálných (resp. komplexních) čísel.

Poznámka: Proveďme podrobně reformulaci definice (1) pro vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel. Požadujeme, aby současně

1. f byla funkce s definičním oborem $D(f) = V \times V$ a oborem hodnot $R(f) \subseteq \mathbb{C}$,
2. $(\forall x, y, z \in V)(\forall \alpha, \beta \in C)\big(f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)\big)$ — lineárnost v 1. složce,
3. $(\forall x, y \in V)\left(f(x, y) = \overline{f(y, x)}\right)$ — antilineárnost ve 2. složce,
4. $(\forall x \in V)\big(x \neq 0 \Rightarrow f(x, x) > 0\big)$ — pozitivní definitnost.

[1] Mezi dvěma body A, B pevnými v prostoru máme natáhnout drátek tak, aby korálek vypuštěný z bodu A volně po drátku klouzající dorazil do bodu B za nejkratší možný čas. Předpokládáme, že na korálek působí kromě vazbových sil jen jeho vlastní tíha.

vektorovým prostorem se skalárním součinem. Skalární součin (x, y) generuje normu $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, a proto $(E_n, \|.\|)$ tvoří normovaný vektorový prostor.

Úkol 3: Dokažte, že platí následující tvrzení (o konvergenci po složkách): Nechť pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^m) \in \mathbb{R}^m$ vůči libovolné bázi B v $\mathbb{R}^m$, pak platí: $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})$ $(\exists \lim x_i^j) \Leftrightarrow (\exists \lim x_i)$.
Připomenutí: zopakujte si bod 3. v definici normy (2).
Ukažte, že navíc platí: pokud je splněna existence alespoň na jedné staně, pak je

$$\lim(x_i) = (\lim x_i^1, \ldots, \lim x_i^m)$$

Tuto rovnost uvažujeme opět vůči bázi B v $\mathbb{R}^m$.
Takovou větu známe již z minulého ročníku.

Poznámka: Připomeňme, že ve tvrzení o konvergenci po složkách je podstatná konečná dimenze X, ovšem pouze v jednom směru — ve kterém?

Definice 4: Ekvivalence norem
Buď X vektorový prostor, $\|.\|_1, \|.\|_2$ normy na X. Řekneme, že $\|.\|_1$ je ekvivalentní $\|.\|_2$, pokud $(\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in X)(c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1)$. Tuto skutečnost zapíšeme $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$.

Poznámka: Pokud X je vektorový prostor, pak relace $R = \{(\nu_1, \nu_2) | \nu_1, \nu_2$ jsou normy na X a $\nu_1 \sim \nu_2\}$ je relace ekvivalence, neboť:

1. pro reflexivnost stačí v definici výše položit $c_1 = c_2 = 1$,
2. pro symetrii uvážit, že pokud $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$, pak existují příslušná kladná c_1, c_2, aby pro každé $x \in X$ platilo: $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$. Z těchto nerovností plyne: $(1/c_2)\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq (1/c_1)\|x\|_2$, což bylo dokázat.
3. Tranzitivnost odvodíme stručněji: $a \sim b \Rightarrow c_1 a(x) \leq b(x) \leq c_2 a(x)$ a $b \sim c \Rightarrow d_1 b(x) \leq c(x) \leq d_2 b(x)$, proto $c_1 d_1 a(x) \leq c(x) \leq d_2 c_2 a(x)$, což značí $a \sim c$.

Věta 1: Ekvivalence norem na konečnědimenzionálních prostorech
Buď X vektorový prostor nad tělesem T, buď $n \in \mathbb{N}$ a $\dim_T X = n$, pak platí: Je-li a norma na X a b norma na X, pak $a \sim b$.

Důkaz: Na přednášce nebyl proveden. Sporem. Nechť pro každé $c > 0$ existuje $x \in X$, že $a(x) > cb(x)$ (zbylý případ je analogický). Z toho plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje $x_m \in X$, že $a(x_m) > mb(x_m)$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ a příslušná x_m položme $y_m \stackrel{\text{df}}{=} \frac{x_m}{a(x_m)}$. Platí, že $a(y_m) = a\left(\frac{x_m}{a(x_m)}\right) = \frac{1}{a(x_m)} a(x_m) = 1$, což dle výšeuvedeného značí, že

$$\frac{1}{a(x_m)} a(x_m) > \frac{1}{a(x_m)} mb(x_m) = \frac{1}{a(x_m)} mb(\frac{x_m}{a(x_m)} a(x_m)) = \frac{1}{a(x_m)} ma(x_m) b(\frac{x_m}{a(x_m)}) = mb(y_m),$$

$$\text{tedy } 1 > mb(y_m).$$

Takto odhadneme $b(y_m) < \frac{1}{m}$, a proto $\lim\limits_{m \to \infty} b(y_m) = 0$. Jelikož $\dim X = n$, existuje $\{e_1, ...e_n\} \subseteq X$ báze X, a proto existují pro každé $m \in N$ a každé $i \in \{1, ..., n\}$ čísla $f_i^m \in T$, že $y_m = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i^m e_i$. Z řešení úkolu[2] (3) je zřejmé, že $\lim f_i^m = 0$ pro každé $i \in \{1, ..., n\}$. Z toho (opět pomocí tvrzení úkolu (3), použitého tentokrát v opačném směru a pro jinou normu) plyne, že $\lim a(y_m) = 0$, což je spor s tím, že $a(y_m) = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$.

Poznámka: Dobře si všimněme, kdy jsme v důkazu věty 1 potřebovali, aby prostor X byl konečné dimenze. Ukazuje se, že klíčovou vlastností konečnědimenzionálních prostorů, která zaručuje platnost věty 1, je v tomto důkazu tvrzení o konvergenci po složkách (viz úkol (3)), které pro tyto prostory platí.

Úkol 4: Dokažte, že platí následující tvrzení. Pokud ν, μ jsou ekvivalentní normy na vektorovém prostoru X a platí-li, že $f \to a$ na (X, μ), pak $f \to a$ na (X, ν). Návod: přepište definici konvergence a ukažte, že

[2] Norma, s níž jsme v tomto úkolu počítali byla zcela obecná.

Poznámka: Počet všech možných orientací pro daný rozklad $M_1, \dots, M_s, N$ je roven 2^s.

Věta 38: Nezávislost integrálu na volbě rozkladu

$\int_M \omega$ nezávisí na volbě rozkladu zobecněné plochy M.

Důkaz: Budiž dimenze M rovna k. Uvažujme dva kladně orientované rozklady $\{M_i, N\}, i = 1, \dots, s$ a $\{M'_j, N'\}, j = 1, \dots, s'$ množiny M. Pro každé i, j jsou tedy dány kladně orientované parametrizace M_i, M'_j a intervaly I_j, I_i

$$\varphi_i : \mathbb{R}_k \subset I_i^0 \to \mathbb{R}_n,\ \varphi'_j : \mathbb{R}_k \subset I_j^0 \to \mathbb{R}_n.$$

Množinu M_i, resp. M'_j pro libovolné i zapíšeme ve tvaru

$$M_i = (M_i \cap M'_1) \cup \ldots \cup (M_i \cap M'_{s'}) \cup (M_i \cap N'),$$
$$M'_i = (M'_i \cap M_1) \cup \ldots \cup (M'_i \cap M_s) \cup (M'_i \cap N)$$

a provedeme integraci

$$\sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} \omega = \int_{I_i^0} \varphi_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap N')} \varphi_i^*(\omega) + \sum_{j=1}^{s'} \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap M'_s)} \varphi_i^*(\omega).$$

Bez důkazu ponecháme tvrzení, že množinu $M_i \cap M'_j$ lze regulárně parametrizovat pomocí zobrazení φ_i. Integrály přes oblasti $M_i \cap N'$ nebo $M'_i \cap N$ jsou zřejmě rovny nule, neboť množiny $\varphi^{-1}(N \cap X)$ pro libovolné X měřitelné mají v prostoru parametrů (v $\mathbb{R}_k$) míru nula. Celkem jsme tedy integrál přes M vyčíslili takto:

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s'} \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap M'_s)} \varphi_i^*(\omega).$$

Ke stejnému výrazu ovšem dojdeme, pakliže použijeme druhého rozkladu $\{M'_j, N'\}$, a věta je tím dokázána.

Příklad: Prozkoumejme, jak se právě naznačený postup aplikuje při parametrizaci již zmíněné sféry v $\mathbb{R}_3$. Budiž tedy plocha S a parametrizace φ následující:

$$S = \{[x_1, x_2, x_3] |\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},\ \varphi(\theta, \tau) = (\cos\theta\cos\tau, \cos\theta\sin\tau, \sin\theta),$$
$$(\theta, \tau) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) = I_1^0,\ \text{resp. } (\theta, \tau) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) = I_2^0.$$

Z rozkladu $M = \varphi(I_1^0) \cup \varphi(I_2^0) \cup N$, kde N je kružnice $\theta = \pi/2$, vidíme, že sféra je zobecněná plocha.

Poznámka: Dalším zobecňováním pojmu plochy bychom dospěli k varietám[35]. „Zmírnit nároky" lze například povolením i nedisjunktních rozkladů $\{M_i, N\}$. Ve fyzice se variety uplatňují například v obecné teorii relativity jako model prostoročasu.

[35] Angl. manifold.

$\{x_n\}$ je cauchyovská. Spočtete-li však její limitu, zjistíte, že je rovna $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Pamatujete si ještě důkaz z gymnázia?)

Definice 6: Úplný, Banachův a Hilbertův prostor

Buď (X, μ) metrický prostor. Řekneme, že (X, μ) je úplný, pokud každá posloupnost na X, která je vůči μ cauchyovská, je konvergentní v (X, μ) (tj. konverguje k nějakému $a \in X$).
Je-li (X, ν) vektorový normovaný prostor, který je navíc úplný, pak jej nazveme Banachův.
Vektorový prostor se skalárním součinem (X, f), který je úplný, nazveme Hilbertův.

Úmluva: Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\ X = \{f : \Omega \to \mathbb{R} |\ f$ spojitá a omezená na $D(f)\}$ označme $\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Pokud $X = \big\{f : \Omega \to \mathbb{R} |\ \big(f \in C^k(\Omega)\big) \wedge (\forall i \in \{1, \dots, k\})(f^{(i)}$ je omezená na $\Omega)\big\}$, položíme $\|f\|_k = \sum_{|\alpha|=k} \sup |D^\alpha f(x)|$, kde $|\alpha| = k$ značí, že sčítáme přes všechny $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, pro které jest $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, přičemž

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Například

$$\|f\|_2 = \sup_x \left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}\right| + \sup_x \left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right| + \sup_x \left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}\right| + \sup_x \left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}\right|.$$

Poznámka: $\left(\ell_2,\ (x, y) = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i\right)$ je Hilbertův prostor. Důkaz byl proveden na cvičeních. Pomocí nerovnosti

$$\varepsilon \geq \left\|\{x^{(n)}\} - \{x^{(m)}\}\right\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{(n)} - x_i^{(m)})^2\Big)^{1/2} \geq \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|$$

dokážeme konvergenci cauchyovské posloupnosti $\{x^{(k)}\}$ po složkách (každé $x^{(k)}$ je posloupnost): vybereme libovolné pevné i a $\{x_i^{(j)}\}_{j=1}^\infty$ je pak cauchyovská posloupnost *čísel*. Tuto limitu po složkách označíme $\{X_i\}$. Pak užíváme limitní přechody v nerovnostech; ty můžeme ovšem používat pouze pro posloupnosti čísel a nikoliv posloupností. Provedeme tedy následující obrat: pro libovolnou posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ označíme $\{\widetilde{x}_i\}_{i=1}^N$ „zkrácenou" posloupnost (členy x_i pro $i > N$ dodefinujeme např. nulami).

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)$$
$$\varepsilon \geq \left\|\{x^{(n)}\} - \{x^{(m)}\}\right\| \geq \left\|\{\widetilde{x}^{(n)}\} - \{\widetilde{x}^{(m)}\}\right\| \overset{m \to \infty}{\geq} \left\|\{\widetilde{x}^{(n)}\} - \{\widetilde{X}\}\right\|$$
$$\varepsilon \geq \left\|\{\widetilde{x}^{(n)}\} - \{\widetilde{X}\}\right\| \overset{N \to \infty}{\Rightarrow} \varepsilon \geq \left\|\{x^{(n)}\} - \{X\}\right\|.$$

Oba dva limitní přechody jsme tedy prováděli s čísly (norma je pro $\{\widetilde{x}\}$ jen konečný součet) a nikoliv limitami (nekonečnými součty).

Poznámka: Zvažme prostory analogické k ℓ_2 obsahující funkce na intervalu I místo posloupností:

$$X_1 = \Big\{f : I \to \mathbb{R} |(f \text{ spojitá na } \mathbb{R}) \wedge \Big(\int_I f(x)^2\, dx < +\infty\Big)\Big\},$$
$$X_2 = \Big\{f : I \to \mathbb{R} \Big| \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\, dx < +\infty\Big)\Big\}$$
$$\text{se skalárním součinem } \forall f, g \in X\ \langle f, g\rangle \overset{\text{df}}{=} \int_I f(x)\overline{g(x)}\, dx. \tag{8}$$

Pokud v těchto definicích použijeme Riemannův integrál, ukáže se, že ani jeden z takto zavedených prostorů není úplný. To nás povede k zavedení nového integrálu (Lebesgueova), který bude indukovat prostory úplné.

Příklad: Tvrzení v poznámce dokážeme snadno protipříkladem. O limitách posloupností spojitých funkcí víme, že jsou spojité, pokud posloupnost konverguje stejnoměrně. Tedy musíme hledat mezi nestejnoměrně konvergujícími posloupnostmi, např. $g_n(x) \overset{\text{df}}{=} 1/(1 + n^2x^2)$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ nebo $f_n(x)$ definovanou pro $\varepsilon = 1/n$ na obrázku.

znamená to podle definice, že hodnost příslušné Jacobiho matice je rovna k na I^0. V každém bodě $x \in I^0$ proto existují indexy $\{i_1, \ldots, i_k\}$ takové, že

$$\frac{\partial \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}}{\partial u_1, \ldots, u_k}(x) \neq 0.$$

Podle věty o inverzním zobrazení z minulého semestru to postačuje pro existenci hladkého zobrazení $\varphi_x^{-1} : \mathbb{R}_n \supset U \to I^0$ na určitém okolí U bodu $\varphi(x)$. Taková zobrazení existují v každém bodě $\varphi(O)$ a z jejich jednoznačnosti a ze souvislosti I^0 plyne, že je můžeme na sebe navázat a vytvořit tak jediné zobrazení $\varphi^{-1} : \varphi(I^0) \to I^0$. Skutečnost, že výběr indexů $i_1, \ldots, i_k$ mohl záviset na x nás nemusí znepokojovat. Díky výběru bychom byli dokonce schopni sestrojit zobrazení $\varphi_x^{-1}\mathbb{R}_k \to \mathbb{R}_k$, ale nám stačí zobrazovat z $\mathbb{R}_n$, s tím, že zobrazení si jednou „bude všímat“ některých k souřadnic x_i a jindy zase jiných.

Stejně bychom ověřili, že i φ'^{-1} je hladké, a tím pádem i zobrazení $\varphi'^{-1} \circ \varphi = \alpha^{-1}$ je hladké (čímž jsme ovšem také ukázali jeho existenci). Pak je ale α i prosté. α je také surjekce (zobrazení na), neboť φ i φ' parametrizují celou plochu S. Navržené α je tedy difeomorfizmus.

Důkaz věty: Dle lemmatu o „znaménku difeomorfizmu“ nyní víme, že každé dvě parametrizace jsou buď souhlasně, nebo nesouhlasně orientovány. Protože $\sim$ je ekvivalence[34], stačí vybrat libovolnou regulární parametrizaci φ a jednu, resp. druhou třídu vytvořit z parametrizací orientovaných souhlasně, resp. nesouhlasně s φ.

Definice 29: Orientace plochy
Nechť S je regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$. Orientovat S znamená vybrat jednu ze dvou tříd ekvivalence jejích parametrizací. Jakoukoliv regulární parametrizaci z této vybrané třídy označím za kladně orientovanou parametrizaci.

Plochu S nazveme orientovaná plocha.

Je-li S orientovaná plocha, pak $-S$ označíme tutéž množinu s opačnou orientací.

Pokud je $\tilde{S}$ regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$, $\tilde{S} \subset S$, pak orientací $\tilde{S}$ rozumíme výběr stejné třídy parametrizací jako u S pouze navíc zúžených na $\tilde{S}$.

Příklad: $k = 1$: křivka parametrizovaná $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}_n$. Opačnou orientaci má například $\tilde{\varphi} : \langle -b, -a\rangle \to \mathbb{R}_n$, $-\varphi(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$.

$k = 2$: ploše parametrizované pomocí $\Phi = \Phi(u, v)$ lze změnit orientaci například záměnou souřadnic (napište si determinant). $-\Phi \overset{\mathrm{df}}{=} \tilde{\Phi}(u, v) = \Phi(v, u)$.

P o z n á m k a : Pojem orientace plochy zřejmě souvisí s orientací vektorového prostoru V. Čemu odpovídá naše definice? Uvažujme množinu B všech bází V. Dva prvky z B nazveme ekvivalentní, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant. Množinu B lze podle této ekvivalence rozložit na dvě disjunktní třídy. Jednu z nich pak označíme $+$, druhou $-$.

Příklad: Jak zjistit orientaci bez použití determinantu?
$\dim V = 1$. Kladná orientace může být například zleva doprava.
$\dim V = 2$. Za kladně orientovanou označíme například dvojici v_1, v_2, u níž je orientovaný úhel od v_1 k v_2 proti směru hodinových ručiček menší než π.
$\dim V = 3$. Zde pomáhají různá „pravidla pravé ruky“ — za kladnou bereme pravotočivou bázi.

Příklad: Pokud je zadána normála n k prostoru W dimenze n ve V dimenze $n + 1$, můžeme za kladně orientovanou považovat takovou bázi $\{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_n\}$ ve W, pro níž je $\{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_n, \mathsf{n}\}$ kladně orientovaná ve V.

P o z n á m k a : Jak přejdeme od orientace vektorového prostoru dimenze k zpět k orientaci obecné plochy téže dimenze? Pro parametrizaci $\Phi = \Phi(u_1, \ldots, u_k)$ stačí zjistit orientaci tečného prostoru vytvořeného jako lineární obal vektorů $\partial\Phi/\partial u_j$, $j = 1, \ldots, k$. Z lemmatu o znaménku difeomorfizmu pak plyne, že

[34] Pamatujete si ještě definici ekvivalence? Zkuste $\sim$ prověřit.

Potíže nastanou, pokud budeme chtít extrém nalézt a X nebude konečné dimenze. Axiom výběru sice zaručuje existenci báze i v nekonečnědimenzionálním prostoru, ale rozepsání nekonečně mnoha (pro každý prvek báze jedné) podmínek $\phi'_h(t) = 0$ nebo snad jejich řešení obecně není technicky v našich možnostech. Proto zde požadujeme, aby derivace byla nulová v každém směru.

Následující větu formulujme již stručněji.

Věta 3: Lagrangeova
Nechť funkcionál Φ nabývá lokálního minima v $a \in X$ a nechť pro každé $h \in X$ existuje $\delta^2\Phi(a, h, h)$. Potom pro každé $h \in X$ je $\delta^2\Phi(a, h, h) \geq 0$.

Důkaz: je analogický důkazu věty předchozí, proto jej přenecháváme čtenáři.

Úkol 6: Obdobná věta platí i pro maximum. Dokažte přesně, jak analogie pro maximum plyne z Lagrangeovy věty (3). Uvědomte si, že pokud funkce f nabývá v nějakém bodě minima, pak funkce $-f$ nabývá v témže bodě maxima.

§4. Klasický variační počet: Výpočet variace typického funkcionálu. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice a jejich první integrály.

Typický problém variačního počtu lze formulovat takto: Nechť $f \in C^1(\langle a, b\rangle \times \mathbb{R}^2)$, $X = C^1(\langle a, b\rangle)$, $\Phi(y) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_a^b f\big(x, y(x), y'(x)\big)\, \mathrm{d}x$, kde $y \in X$, tj. $D(\Phi) = X$. Hledáme extrém (resp. maximum nebo minimum) funkcionálu Φ na X. Někdy bývá X modifikován dodatečnými okrajovými podmínkami: $\widetilde{X} = \big\{y \in C^1(\langle a, b\rangle) \big| \big(y(a) = A\big)\&\big(y(b) = B\big)\big\}$, pro nějaká $A, B \in \mathbb{C}$. Tehdy však $\widetilde{X}$ není[4] vektorovým prostorem právě tehdy, když $A \neq 0$ nebo $B \neq 0$.
Úmluva: Název „typický problém“ podržíme i níže. Pro funkcionál v typickém problému rezervujme název „typický funkcionál“ a značme jej pro danou f symbolem Φ_f. Jelikož velmi čato budeme užívat prostoru $\widetilde{X}$ nad $\langle a, b\rangle$ pro $A = B = 0$, rezervujme pro něj znak $\mathring{C}^1(\langle a, b\rangle)$.

Věta 4: Výpočet Gâteauxova diferenciálu typického funkcionálu
Buďte $f \in C^1(\langle a, b\rangle \times \mathbb{R}^2) : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, Φ_f odpovídající typický funkcionál a $x \in \langle a, b\rangle$, $y_0, h \in C^1(\langle a, b\rangle)$. Pak

$$\delta\Phi_f(y_0, h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)h'(x)\right) \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Důkaz: Podstatné bude užití tvrzení „o záměně integrálu a derivace“, o němž se již mluvilo v předchozím semestru (pro funkce dvou proměnných), a které řádně dokážeme v kapitole o Lebesgueově integrálu. Předpoklad věty (existence spojitých parciálních derivací podle všech proměnných) je splněn. Další větou, kterou užijeme, bude věta o derivaci složené funkce, či chcete-li (v algebraické verzi), o skládání totálních diferenciálů. Užitím těchto dvou tvrzení při zvážení $\partial x/\partial t = 0$ dostaneme pro Gâteauxův diferenciál dosazením do definice:

[4] Pak se jedná o afinní prostor.

Pro dvoudimenzionální plochu $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}_3$, parametrizaci $\varphi : \mathbb{R}_2 \supset O \to \Omega$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\varphi_i = \varphi_i(u_1, u_2)$, $\varphi(O) = S$ a například formu $\omega = \omega_1 \,\mathrm{d}x_{23} \in E^2(\Omega)$ je

$$\int_\varphi \omega = \int_O \big[\omega_1\big(\varphi(u)\big) \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u_1, u_2)}\big] \,\mathrm{d}u_1 \,\mathrm{d}u_2.$$

Poznámka: Na předchozím příkladu je vidět, jak lze jednoduchou změnou parametrizace docílit změny hodnoty integrálu. Pokud pro $(u_2, u_1) \in O$ bereme $\tilde{\varphi}(u_1, u_2) = \varphi(u_2, u_1)$, změní determinant jacobiánu znaménko, a bude tudíž $\int_{\tilde{\varphi}} \omega = -\int_\varphi \omega$.

Zjistili jsme tedy dva „problémové body". Poslední obtíž můžeme zřejmě odstranit, pokud budeme žádat, aby determinant jacobiánu měl na O neměnné znaménko. Otázku vícenásobného proběhnutí oblastí Ω potom řeší požadavek na prostotu parametrizace. Zdá se tedy účelné zavést následující dvě definice.

Definice 25: Difeomorfizmus

Zobrazení $\alpha : \mathbb{R}_k \supset O \to O' \subset \mathbb{R}_k$ nazveme difeomorfizmus, právě když je bijekce (tedy prosté a zobrazuje O *na* O'), hladké a α^{-1} je rovněž hladké.

Definice 26: Parametrizace, orientace parametrizací

Parametrizací plochy $S \subset \mathbb{R}_k$ v $\mathbb{R}_n$ nazveme každé hladké zobrazení $\Phi : \mathbb{R}_k \supset O \to \mathbb{R}_n$ takové, že $\Phi(O) = S$. Parametrizace $\Phi(u_1, \ldots, u_k) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ je regulární, pokud hodnost příslušné Jacobiho matice $\{\partial\Phi_i/\partial u_j\}$ je k *všude* na O.
Dvě parametrizace $\varphi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$, $\varphi' : \mathbb{R}_k \supset O' \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ nazveme souhlasně orientované ($\varphi \sim \varphi'$), pokud existuje difeomorfizmus $\alpha : O' \to O$, $\det J_\alpha > 0$ na O' takový, že $\varphi' = \varphi \circ \alpha$.
Pokud tento difeomorfizmus splňuje na O' podmínku $\det J_\alpha < 0$, nazveme parametrizace nesouhlasně orientované ($\varphi \not\sim \varphi'$).

Poznámka: Regulární parametrizace $\varphi : O \to \mathbb{R}_n$ je „difeomorfizmem" mezi O a $\varphi(O)$.

Věta 35: Nezávislost integrálu na parametrizaci až na znaménko

Buďte $\varphi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$, $\varphi' : \mathbb{R}_k \supset O' \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ souhlasně, resp. nesouhlasně orientované hladké parametrizace téže plochy S a $\omega \in E^k(\Omega)$. Pak platí

$$\int_{\varphi'} \omega = \int_\varphi \omega, \text{ resp. } \int_{\varphi'} \omega = -\int_\varphi \omega.$$

Lemma o znaménku difeomorfizmu:

Nechť $\alpha : O' \to O$ je difeomorfizmus. Pak $\operatorname{sgn}(\det J_\alpha)$ je konstantní na O'.

Důkaz lemmatu: Protože je α hladké zobrazení, je $\det J_\alpha$ spojitý. Protože je α^{-1} hladké, je spojitý i $\det J_{\alpha^{-1}}$. Z rovnosti $\det J_\alpha(x) J_{\alpha^{-1}}\big(\alpha(x)\big) \equiv 1$ na O' („součin determinantů je stále 1") pak plyne, že $\det J_\alpha$ je na O' nenulové. Že spojitá funkce nenabývající nikde nulové hodnoty nemůže měnit znaménka, je již zřejmé.
Lemma využijeme na konci důkazu věty.

Důkaz věty: Víme, že v obou případech existuje difeomorfizmus $\alpha : O' \to O$, $\varphi' = \varphi \circ \alpha$. Z definice (24) a věty (34) pak můžeme psát

$$\int_{\varphi'} \omega = \int_{O'} (\varphi')^*(\omega) = \int_O (\varphi \circ \alpha)^*(\omega) = \int_O \alpha^*\big(\varphi^*(\omega)\big).$$

Dále již jen přenášíme formy; opět díky větě (34) stačí bez újmy na obecnosti uvažovat například $\omega = f(x) \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \mathrm{d}x_k$.

$$\delta^2\Phi_f(y_0, h, h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\big)h(x) +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\big)h'(x)\Big)\,\mathrm{d}x\Big] =$$
$$= \int_a^b \big(f_{yy}h^2 + f_{yz}hh' + f_{zy}h'h + f_{zz}(h')^2\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(f_{yy}h^2 - h^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{yz} + f_{zz}(h')^2\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \Big(h^2\frac{\partial}{\partial y}\Big(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_z\Big) + f_{zz}(h')^2\Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(h')^2\,\mathrm{d}x.$$

f_{yz} značí samozřejmě druhou parciální derivaci f nejprve podle y a pak podle z (předpokládáme ovšem záměnnost). Ve zmizivším členu čtenář zajisté poznal výraz, který jsme v minulé poznámce prohlásili za nulový v kritických bodech y_0 funkcionálu Φ_f.

Lemma 1:

Buď $\beta \in C(\langle a, b\rangle)$. Pokud $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a, b\rangle)\big)\big(\int_a^b \beta(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = 0\big)$, pak $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b\rangle)(\beta(x) = c)$.

Důkaz: Ukážeme, že stačí volit konstantu c jako střední hodnotu β na $\langle a, b\rangle$, tj. $c \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x$. Definujme $H(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_a^x \beta(\xi)\,\mathrm{d}\xi - c(x-a)$; $\beta(x)$ je spojitá, a tedy integrál existuje.

1. Ukažme, že $H \in \mathring{C}^1(\langle a, b\rangle)$: lehce zjistíme, že $H(a) = H(b) = 0$. Spočtěme ještě derivaci H: $H'(x) = \beta(x) - c$. Z předpokladu o funkci β plyne, že β je spojitá, a proto $H(x)$ náleží do třídy spojitě diferencovatelných funkcí.

2. Užijeme-li předpoklad lemmatu pro funkci $H(x)$ (to, že H splňuje vlastnosti požadované v lemmatu bylo ukázáno v prvním bodě důkazu), dostaneme, že $\int_a^b \beta(x)H'(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dosadíme-li za $h = H(x)$, obdržíme rovnost
$$\int_a^b \beta(x)(\beta(x) - c)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$
Uvědomme si ale také, že platí
$$\int_a^b c(\beta - c)\,\mathrm{d}x = c\Big(\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b c\,\mathrm{d}x\Big) = c\Big(\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b \beta(x)\,\mathrm{d}x\Big) = 0. \tag{13}$$
Odečteme-li výrazy (12) a (13) od sebe, získáme nulový výraz, a navíc bude platit:
$$0 = \int_b^a \big(\beta(\beta - c) - c(\beta - c)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\beta - c)^2\,\mathrm{d}x \tag{14}$$
Protože $\beta - c$ je spojitá, značí výraz (14) na základě známého tvrzení z teorie Riemannova integrálu, že $(\forall x \in \langle a, b\rangle)(\beta(x) = c)$, což bylo dokázati.

Lemma 2:

Jsou-li $\alpha, \beta \in C(\langle a, b\rangle)$ a pokud $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a, b\rangle)\big)\big(\int_a^b \big[\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)\big]\,\mathrm{d}x = 0\big)$, pak

1. $\beta \in C^1(\langle a, b\rangle)$,
2. $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\big(\alpha(x) = \beta'(x)\big)$.

Důkaz: Buď $A(x)$ jedna z primitivních funkcí k $\alpha(x)$ na $\langle a, b\rangle$, tj. $A'(x) = \alpha(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Užitím metody integrace per partes a faktu, že $h(a) = h(b) = 0$ dostaneme, že:

$$0 = \int_a^b (\alpha h + \beta h') = \int_a^b (A'h + \beta h') = [Ah]_a^b - \int_a^b Ah' + \int_a^b \beta h' = \int_a^b (\beta - A)h' \tag{15}$$

Zjistili jsme, že pro každé $h \in \mathring{C}^1$ platí (15). Tím jsme ověřili platnost předpokladů lemmatu 1. Jeho závěr říká, že existuje $c \in \mathbb{R}$, že $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\big(c = \beta(x) - A(x)\big)$. Jelikož A je spojitě diferencovatelná

Pro zopakování zkusme převést následující formu z $E^2(\mathbb{R}_3)$ do prostoru parametrů u, v:

$$\omega = xy\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y - xz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\ \Phi(u,v) = (u^2, v-u, 2v)$$
$$\Phi^*(\omega) = u^2(v-u)\,\mathrm{d}(2v) \wedge \mathrm{d}(v-u) - u^2 2v\,\mathrm{d}(u^2) \wedge \mathrm{d}(2v) = 2u^2(v-u)\,\mathrm{d}v \wedge (\mathrm{d}v - \mathrm{d}u) - 2u^2 v \cdot 4u\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v =$$
$$= -2u^2(v-u)\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u - 8u^3 v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \big(2u^2(v-u) - 8u^3 v\big)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

Poznámka: Víme, že pro libovolnou hladkou funkci f je $\mathrm{d}f \in E^1(\Omega)$. Dále pro libovolnou $\omega \in E^1(\Omega)$ platí $\omega \wedge \omega = 0$, jak plyne například z bodu 3. věty (33). Čtenář si může zkusit jako cvičení rozepsat násobení 1-vektoru sebou samým zapsaným pomocí báze.

Cvičení: Formy $\omega_1 = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ a $\omega_2 = x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z$ přeneste do prostoru parametrů σ, τ, pokud platí

$$x = \cos\sigma\cos\tau, \quad y = \cos\sigma\sin\tau, \quad z = \sin\sigma.$$

Věta 34: Vlastnosti zobrazení Φ^*
Nechť $\Phi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ je hladké a $\omega, \tau \in E^k(\Omega)$. Potom

1. $\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\tau)$,
2. $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau)$,
3. pro libovolné $\Psi : \mathbb{R}_l \supset U \to O \subset \mathbb{R}_k$ hladké je
$$\big(\Phi \circ \Psi\big)(\omega) = \Psi^*\big(\Phi^*(\omega)\big),\ \text{tedy}\ (\Phi \circ \Psi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*,$$
4. je-li $k = n$ a $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \in E^n(\Omega)$, pak
$$\Phi^*(\omega) = f\big(\Phi(u)\big)\det\Big(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\Big)\,\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \mathrm{d}u_n.$$

Označení: Determinant jacobiánu zobrazení $\Phi : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ zapisujeme také takto:

$$\det J_\Phi = \det\Big(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\Big) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}. \tag{48}$$

Poznámka: Bod 4. lze samozřejmě zobecnit i pro $k \le n$. Pokud $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, pak analogicky jako pro $k = n$ odvodíme

$$\Phi^*(\omega) = f\big(\Phi(u)\big)\frac{\partial x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}}{\partial u_1, \ldots, u_k}\,\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_k.$$

Důkaz:

1. Dosazením do definice.
2. Díky předchozímu bodu stačí tvrzení dokázat pro formy $\omega = f_I\,\mathrm{d}x_I$, $\tau = g_J\,\mathrm{d}x_J$. Budiž $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$:
$$\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\big(f_I\,\mathrm{d}x_I \wedge g_J\,\mathrm{d}x_J\big) = \Phi^*\big(f_I\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}\big) =$$
$$= (f_I \circ \Phi)(g_J \circ \Phi)\,\mathrm{d}\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Phi_{i_p} \wedge \Phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \Phi_{j_q} = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\tau).$$
Striktně vzato jsme nebyli zcela přesní: poté, co jsme spolu vynásobili formy ω a τ, měli jsme přeuspořádat $\mathrm{d}x_i$ a $\mathrm{d}x_j$ podle rostoucích indexů. Definice (23) je napsána pouze pro formy v tomto tvaru. Po přenesení ovšem musíme činitele $\mathrm{d}\Phi_i$, $\mathrm{d}\Phi_j$ přeuspořádat zase zpět, abychom mohli součin „rozdělit“, přičemž obě provedená přeuspořádání jsou „stejná“, tedy případná změna znaménka po prvním z nich se vykompenzuje. Skutečnost, že formy f_I a g_J volně „proplouvají“ celým součinem, odráží fakt, že $f_I, g_J \in E^0(\Omega)$, a tedy komutují se všemi formami.

Příklad: Mezi dvěma body A, B v různé výšce (A je výše) je natažen drátek, po němž může volně klouzat hmotný korálek. Jaký má mít drátek tvar, aby korálek pouze působením tíhy sklouzl z A do B za nejkratší možný čas?

Tvar drátku popíšeme funkcí $y(x)$ na $\langle 0, b\rangle$, přičemž $y(0) = 0$ a $y(a) = b$. Skutečnost, že tvar lze popsat funkcí (drátek nevytváří smyčku, ale ani není v žádném úseku rovnoběžný s osou y) vezmeme jako „přijatelný předpoklad“ — viz obrázek. Nejprve potřebujeme získat funkcionál T, který udává čas, za který korálek sklouzne, má-li drátek tvar podle $y(x)$. Abychom nemuseli vycházet přímo z pohybových rovnic pro korálek, pokusíme se při výpočtu využít zákon zachování energie. Označíme-li m hmotnost korálku, $v(x)$ jeho rychlost v bodě $[x, y(x)]$ a g tíhové zrychlení, pak platí $mv^2(x)/2 = -mgy(x)$. Dále použijeme několik úprav, které se důsledný čtenář může pokusit precizovat, my se však spokojíme s náznakem myšlenky. Označme $t(x)$ čas, za nějž dosáhne korálek bodu $[x, y(x)]$, $s(x)$ dráhu od počátku do $[x, y(x)]$, tedy délku příslušné části křivky y.

$$T(y) = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}t}\Big)^{-1} = \frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}t}v^{-1}(x).$$

Pro délku křivky platí vztah

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \big[y'(\xi)\big]^2}\,\mathrm{d}\xi, \quad \frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \big[y'(x)\big]^2},$$

a tím pádem

$$T(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \big[y'(x)\big]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že $T(y)$ není explicitně závislý na x, tedy pro nalezení kritických bodů lze použít věty (7). Jednodušší tvar diferenciální rovnice ovšem poskytuje věta (6), pro jejíž použití lze $T(y)$ upravit záměnou závislé a nezávislé proměnné. Budiž tedy dále y nezávislá proměnná a $x = x(y)$ — bereme-li toto jako substituci, dostáváme

$$T(x) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + 1/\big[x'(y)\big]^2}}{\sqrt{2gy}}x'(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \frac{\sqrt{\big[x'(y)\big]^2 + 1}}{\sqrt{2gy}}\,\mathrm{d}y; \quad f(x, z) = \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{2gx}}.$$

Podle věty (6) (nenechte se zmást změnou písmen — x je v této větě nezávislá proměnná, podle níž se integruje) nyní máme najít řešení rovnice (k je konstanta):

$$k = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{2gx(1 + z^2)}}, \quad \text{tj. } k^2 2gx\big(1 + (x')^2\big) = (x')^2, \text{ po úpravě}$$
$$(x')^2\Big(1 - \frac{x}{2c}\Big) = \frac{x}{2c}, \quad c = \frac{1}{4k^2 g}.$$

Dosazením se můžeme přesvědčit (proveďte), že řešení této rovnice procházející bodem $[0, 0]$ v parametrickém tvaru je

$$x(\tau) = c(\tau - \sin\tau), \quad y(\tau) = c(1 - \cos\tau).$$

Konstantu c (potažmo k) nastavíme tak, aby řešení procházelo koncovým bodem B (je ovšem ještě třeba nalézt takové $\tau \in (0, \pi)$, že $x(\tau) = a, y(\tau) = b$.

Celkem vzato, celý postup takto není proveden příliš pečlivě, ale doufáme, že o to názorněji; nalezli jsme například pouze kritický bod, o němž ještě nevíme, zda je extrémem, natož pak minimem.

§5. Aplikace variačního počtu: analytická mechanika

Velice užitečným principem analytické mechaniky je Hamiltonův princip nejmenší akce. Tento princip (plynoucí z d'Alembertova principu, který je důsledkem Newtonových zákonů pohybu) je velmi obecný a má značný rozsah užití. Umožňuje takříkajíc mechanicky řešit velmi různorodé fyzikální problémy. Známe-li potenciální U a kinetickou energii T hmotného bodu, vyjádřenou v daných zobecněných souřadnicích,

3. Opět stačí uvažovat pouze bázové vektory. Zkoumejme součiny e_I, e_J, $|I| = k$, $|J| = l$, $I \cap J = \emptyset$.

$$e_I \wedge e_J = e_{I\cup J} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} = e_{J\cup I} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J, I \\ J \cup I \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix} = e_J \wedge e_I \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix}. \qquad (43)$$

   Zbývá se přesvědčit, že signum v posledním výrazu je rovno $(-1)^{kl}$. Čtenář však snadno nahlédne, že na „prohazení“ k-prvkové množiny „skrz“ l-prvkovou množinu je třeba právě $k \cdot l$ prohození.
4. Přímým výpočtem a přeuspořádáním e_k:

$$\Big(\sum_{i_1=1}^{n} v_1^{i_1} e_{i_1}\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{i_n=1}^{n} v_n^{i_n} e_{i_n}\Big) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} =$$
$$e_{1\ldots n} \sum_{i_1,\ldots,i_n} v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_n \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

   Znaménko v posledním výrazu je definováno stejně jako dosud s tím, že pokud se některý z indexů i_k opakuje, je znaménko 0. Výsledná suma pak ovšem přesně odpovídá definici determinantu matice $\{v_i^j\}$.

   Tvrzení v poznámce (pro součin k vektorů) se odvodí stejným způsobem.

§3. Diferenciální formy na R_n

Definice 21: Vnější algebra diferenciálních forem
Označme $T^*(\mathbb{R}_n)$ vektorový prostor s bází $\{\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$, tj. $T^*(\mathbb{R}_n) = \Big\{a = \sum_i a_i \,\mathrm{d}x_i | a_i \in \mathbb{R}\Big\} \simeq \mathbb{R}_n$. Definujeme vnější algebru $\Lambda^*\big(T^*(\mathbb{R}_n)\big)$. Diferenciální formou na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ nazveme libovolné hladké zobrazení $\omega : \Omega \to \Lambda^*\big(T^*(\mathbb{R}_n)\big)$, ve složkách:

$$\forall x \in \Omega: \ \omega(x) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \omega_I(x) \,\mathrm{d}x_I, \ \omega_I \in C^\infty(\Omega). \qquad (44)$$

Množinu všech diferenciálních forem na Ω označíme $E^*(\Omega)$, množinu diferenciálních forem k-tého řádu na Ω definujeme a značíme takto:

$$E^k(\Omega) = \Big\{ \sum_{|I|=k} \omega_I(x) \,\mathrm{d}x_I | \omega_I \in C^\infty(\Omega)\Big\}. \qquad (45)$$

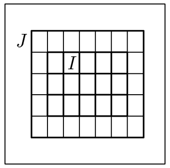
Poznámka o hladkosti: V dalším budeme požadovat, aby různá zobrazení byla hladká, tedy nekonečně diferencovatelná. Většinou stačí slabší podmínka (spojitá diferencovatelnost), vzhledem k praktickému použití budeme ovšem používat tento silnější předpoklad, čímž se také důkazy vět poněkud zpřehlední.

Příklad: Co jsou diferenciální formy $\omega \in E^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$?

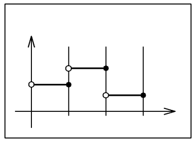
1. $k = 0$. $E^0(\Omega) \simeq C^\infty(\Omega) = \{f\}$, tedy množina všech hladkých funkcí $\Omega \to \mathbb{R}$, neboť $\mathrm{d}x_\emptyset = 1$.
2. $k = 1$. $E^1(\Omega) = \{\omega = f_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + f_n(x)\,\mathrm{d}x_n | f_i \in C^\infty(\Omega)\} \simeq \big[C^\infty(\Omega)\big]^n$. $E^1(\Omega)$ lze chápat jako pole kovektorů k $\big[C^\infty(\Omega)\big]^n$[30]: je to prostor všech lineárních forem nad $\big[C^\infty(\Omega)\big]^n$. Libovolné funkci (vektoru) $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ je jednoznačně přiřazena lineární forma $\omega(\mathsf{f}) : \Omega \to \mathbb{R}$. Pro $\mathsf{f} \in \big[C^\infty(\Omega)\big]^n$ a vektor $\tilde{x} = (\tilde{x_1}, \ldots, \tilde{x_n}) \in \Omega$ si můžeme pod zápisem (44) představit například takto: $\omega(\mathsf{f})(\tilde{x}) = f_1\tilde{x_1} + \ldots + f_n\tilde{x_n}$.

   Pokud ovšem v tomto zápisu bereme $\partial f/\partial x_i$ místo f_i, nabude ω „tvaru totálního diferenciálu“ a číslo $\omega(f(\mathsf{x}))(\tilde{\mathsf{x}})$ pak znamená lineární aproximaci hodnoty funkce $f(\mathsf{x} + \tilde{\mathsf{x}}) - f(\mathsf{x})$ pomocí hodnot a parciálních derivací v bodě x.

[30] Tedy prostoru všech hladkých vektorových polí na Ω.



Obr. 3: Interval v $\mathbb{R}_2$ a jeho dělení



Obr. 4: Elementární funkce nad intervalem v $\mathbb{R}$

10 Lebesgueův integrál

V minulém semestru jsme rozvinuli teorii funkcí více proměnných. Definovali jsme u nich pojmy více či méně analogické pojmům vztahujícím se k funkcím jedné proměnné — okolí, limitu, derivaci, naučili jsme se počítat parciální derivace, gradient, rozvíjet tyto funkce v Taylorovy řady. Integrovat je zatím korektně neumíme. Mohli bychom tedy rozšířit naše definice z kapitoly o Riemannově integrálu do více dimenzí. Byla by to ale práce zcela formální a ničím nová a přinesla by také jen malý užitek. Množina riemannovsky integrovatelných funkcí je totiž relativně malá, a co je podstatné, netvoří úplný metrický prostor — tuto vlastnost budou zanedlouho po integrálu požadovat fyzikové. Proto vybudujeme integrál nový — tzv. Lebesgueův.

Definice 8: Interval v $\mathbb{R}^n$ a jeho části
Intervalem I v $\mathbb{R}^n$ nazveme množinu $(a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \times \ldots \times (a_n, b_n\rangle$; $a_i < b_i$. Stěnou intervalu I nazveme množinu $(a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \{b_i\} \times \ldots \times (a_n, b_n\rangle$, přičemž jednobodová množina se v kartézském součinu vyskytuje právě jednou. Objem intervalu definujeme $V = \prod_i (b_i - a_i)$. Dělení intervalu I je takový systém disjunktních intervalů, jejichž sjednocením je celý I a množiny jejich krajních bodů v i-té složce tvoří dělení intervalu (a_i, b_i) ve smyslu definice dělení pro jednorozměrný Riemannův integrál. Zjemněním dělení intervalu rozumíme dělení, jehož všechna složková dělení zjemňují složková dělení původního dělení. Dělení intervalu $J \supset I$ je rozšířením dělení intervalu I, mají-li obě dělení stejné krajní body.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ je interval obdélník a dělení intervalu „čtvercová síť“, viz obrázek.

§1. Prostor schodovitých funkcí: elementární funkce a jejich vlastnosti

Definice 9: Schodovitá funkce
Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá schodovitá (též elementární nebo jednoduchá)[6], pokud existují interval I,

[6] Čtenář se může setkat i s jinou definicí jednoduché funkce, ať už v rámci jiné metody budování Lebesgueova integrálu, nebo při výstavbě jiných integrálů.

Pokud požadujeme, aby hledané násobení mělo „rozumné vlastnosti“ (bylo např. distributivní vůči sčítání), převedeme problém, čemu je roven součin $a \cdot b$ pro libovolná a, b, na otázku jak definovat $e_i \cdot e_j$, $\forall i, j \in M$.

Příklad: V $\mathbb{R}_2$ s kanonickou bází e_1, e_2 uvažujme antikomutativní násobení $\wedge$. Jednou z možností je *rozšířit* prostor $\mathbb{R}_2$ o prvek $e_{12} \overset{\mathrm{df}}{=} e_1 \wedge e_2$ a dále o jednotkový prvek násobení $1 \overset{\mathrm{df}}{=} e_\emptyset$. Nový prostor pak bude lineární obal

$$\Lambda^*(\mathbb{R}_2) = L(\{e_\emptyset, e_1, e_2, e_{12}\}).$$

Násobení v tomto prostoru bude dáno tabulkou, kterou již snadno odvodíme z asociativity a antikomutativity

$\wedge$	$e_\emptyset$	e_1	e_2	e_{12}
$e_\emptyset$	$e_\emptyset$	e_1	e_2	e_{12}
e_1	e_1	0	e_{12}	0
e_2	e_2	$-e_{12}$	0	0
e_{12}	e_{12}	0	0	0

Například $e_{12} \wedge e_1 = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = -e_2 \wedge (e_1 \wedge e_1) = 0$.

Všimněme si ještě, že prvky báze Λ^* jsou indexovány podmnožinami $M = \{1, 2\}$. Prostor Λ^* lze tedy rozložit podle počtu prvků těchto podmnožin:

$$\begin{gathered}
\text{0-vektory (čísla): } \Lambda^0(\mathbb{R}_2) = \{a \cdot 1 = a e_\emptyset |\ a \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_2),\\
\text{1-vektory: } \Lambda^1(\mathbb{R}_2) = \{a e_1 + b e_2 |\ a, b \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}_2 \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_2),\\
\text{2-vektory: } \Lambda^2(\mathbb{R}_2) = \{a e_{12} |\ a \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_2),\\
\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2.
\end{gathered}$$

Příklad: Proveďme analogický postup v $\mathbb{R}_3$.

$$\begin{gathered}
\text{0-vektory (čísla): } \Lambda^0(\mathbb{R}_3) = \{a \cdot 1 = a e_\emptyset |\ a \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3),\\
\text{1-vektory: } \Lambda^1(\mathbb{R}_3) = \{a e_1 + b e_2 + c e_3 |\ a, b, c \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}_3 \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3),\\
\text{2-vektory: } \Lambda^2(\mathbb{R}_3) = \{a e_{12} + b e_{23} + c e_{31} |\ a, b, c \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}_3 \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3),\\
\text{3-vektory: } \Lambda^0(\mathbb{R}_3) = \{a e_{123} |\ a \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_3).\\
\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \Lambda^3.
\end{gathered}$$

Pro násobení bázových vektorů nepoužijeme již tabulku, ale zapíšeme obecné pravidlo:

$$\forall I, J \subset \{1, 2, 3\} : \left\{ \begin{array}{lll} I \cap J \neq \emptyset & \Rightarrow & e_I \wedge e_J = 0 \\ I \cap J = \emptyset & \Rightarrow & e_I \wedge e_J = e_{I \cup J} \cdot \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} \end{array} \right. . \tag{41}$$

Učiňme úmluvu, že indexy v I u vektoru e_I budou uspořádány vzestupně. Při násobení $e_I \wedge e_J$ zřejmě oba činitele rozepíšeme do součinů bázových 1-vektorů a postupnými záměnami pořadí se budeme snažit docílit správného pořadí indexů. Pokud se přitom v celém součinu vyskytují dva stejní činitelé, těmito záměnami je „dostaneme k sobě“, čímž celý součin vynulujeme. Znaménko $\operatorname{sgn}(\cdot)$ tedy porovnává množiny I a J zapsané za sebou (I, J) a sjednocené, a tudíž již správně seřazené. Nabývá hodnoty $+1$, pokud je při přechodu $I, J \to I \cup J$ třeba provést sudý počet výměn sousedních prvků, a je rovno -1 pokud je tento počet lichý.

Úkol 7: Rozmyslete si, proc je $\dim \Lambda^*(\mathbb{R}_n) = 2^n$ a $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}_n) = \binom{n}{k}$.

Definice 20: Vnější algebra $\mathbb{R}_n$

Nechť $e_1, \ldots, e_n$ je kanonická báze $\mathbb{R}_n$. Pro libovolnou $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ označme

$$e_I = e_{i_1 \ldots i_k} = e_{i_1} \wedge \ldots e_{i_k},\ e_\emptyset = 1 \in \mathbb{R}, \quad \text{je-li } i_1 < \ldots < i_k. \tag{42}$$

kde M je maximum funkce f_1.

Poznámka: V dalších důkazech budeme využívat pouze výsledků této věty a vlastností integrálu z jednoduché funkce jakožto zobrazení $H \to \mathbb{R}$. Tím dosáhneme určité nezávislosti našeho integrálu na volbě konkrétní definice jednoduché funkce. Čtenář zajímající se o danou problematiku pak bude moci vybudovanou teorii snadno užít i ke studiu jiných integrálů.

§2. Množiny míry nula: vlastnosti platné skoro všude

Integrál na konci předchozího důkazu je omezen součtem dvou členů. První z nich pochází z vyšetřování chování funkce na množině jen nepatrně se lišící od celého intervalu I, zatímco při určování druhého jsme s funkcí vůbec nepracovali. Množina stěn je v nějakém smyslu malá, k chování funkce zde je možné nepřihlížet, aniž bychom tím změnili hodnotu integrálu. Pojem „malá“ bychom chtěli matematicky zpřesnit. Jak vidno z předchozího důkazu, množiny s dimenzí menší než n malé jsou, dokonce i spočetné sjednocení takových množin je malé. To znamená, že vezmeme-li za body dělení ve všech složkách racionální čísla, dostaneme také malou množinu, a to i přesto, že bude tato množina hustá (v $I \setminus Z$ nezbyde žádné okolí) a bude mít „stejnou mohutnost“ jako celý prostor. Budeme tedy muset najít nějaký rafinovaný postup, jak se vypořádat i s takovýmito zákeřnostmi.

Ve zmiňovaném důkazu jsme pokrývali množinu Z intervaly K_i, které mohly mít libovolně malý objem. Objem intervalu můžeme zapsat pomocí jeho charakteristické funkce, která je zjevně schodovitá, jako $\int \chi^{K_i}$. Objem sjednocení můžeme omezit součtem objemů, chceme-li tedy, aby byl objem sjednocení menší či roven libovolnému kladnému ε, stačí, aby $(\forall k \in \mathbb{N})\big(\sum_1^k \int \chi_{K_i} < \varepsilon\big)$. Funkce $h_k \equiv \sum_1^k \chi^{K_i}$ jsou schodovité, tvoří neklesající posloupnost a jejich limita pro $k \to \infty$ (která je zároveň i jejich supremem) je v každém bodě Z větší nebo rovna jedné, protože v každém bodě je alespoň jedna $\chi^{K_i} = 1$.

Tyto úvahy nyní zobecníme formou definice.

Definice 10: Množina míry nula

Řekneme, že Z je množina míry nula, právě když $(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists \{h_k\}_1^\infty \in H\big)$ splňující:

1. $0 \le h_1 \le h_2 \le \ldots \le h_k \le \ldots$
2. $(\forall k \in \mathbb{N})(\int h_k < \varepsilon)$
3. $(\forall x \in Z)\big(\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} h_k(x) \ge 1\big)$

Věta 9: Spočetné sjednocení množin míry nula

Sjednocení spočetně mnoha množin míry nula je množina míry nula.

Důkaz: Seřaďme množiny M_i míry nula do posloupnosti a sestrojme ke každé M_i funkce h_{ij} splňující požadavky definice, konkrétně pro pevné i budeme požadovat $(\forall j \in \mathbb{N})(\int h_{ij} < \frac{\varepsilon}{2^i})$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{h_{11}} & \le & h_{12} & \le & h_{13} & \le & \cdots & \nearrow F_1 \ge \chi_{M_1} \\
h_{21} & \le & h_{22} & \le & h_{23} & \le & \cdots & \nearrow F_2 \ge \chi_{M_2} \\
\vdots & \le & \vdots & \le & h_{33} & \le & \cdots & \nearrow F_3 \ge \chi_{M_3}
\end{array}$$

Na základě naznačeného schématu volme funkce H_j jakožto maxima z funkcí uzavřených v plně vyznačených obdélnících, tedy $H_j = \max\limits_{1 \le i \le j} h_{ij}$. Zároveň jsou to maxima přes čárkované čtverce (vyznačili jsme jen jeden). Integrál z maxima k nezáporných funkcí je menší nebo roven integrálu z jejich součtu (rozmyslete) tedy $\int H_j < \varepsilon$. Jelikož posloupnost $\{H_j\}_1^\infty$ je neklesající a platí i $\sup H_j \ge \sup h_{ij} \ge 1$ (pokud $x \in M_j$, pak $h_{ij}(x) \to F_j(x) \ge 1$), splňuje tato posloupnost požadavky v definici množiny míry nula.

Definice 11: Platnost skoro všude

Řekneme, že určitá vlastnost platí skoro všude (s.v.), platí-li na $\mathbb{R}^n \setminus Z$, kde Z je množina míry nula.

Označení: Označme kladnou část funkce α symbolem $\alpha^+ \equiv \max\{\alpha, 0\}$, zápornou část $\alpha^- \equiv$

Cvičení: Prozkoumejte, zda byly splněny předpoklady pro použití věty o záměny integrálu a derivace. Pokud některé chybí, zamyslete se, zda je „rozumné“ je skutečně požadovat.

Nyní použijeme „metodu per partes“, přesněji každou složku v sumě zvlášť upravíme pomocí (38) — zde tedy přichází k užití Greenova věta. Dostaneme opět sumu

$$\delta\Phi_h(y) = \int_a^b \Big(h\frac{\partial}{\partial y}f(\mathsf{x},y,\nabla y) - h\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial}{\partial z_i}f(\mathsf{x},y,z_1,\dots,z_n)|_{(z_1,\dots,z_n)=\nabla y}\Big]\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{39}$$

Lemma:
Nechť $f \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ je pevná funkce a nechť pro každé $g \in \mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$ platí

$$\int_\Omega fg\,\mathrm{d}x = 0.$$

Potom $f \equiv 0$ na Ω.

Důkaz: provedeme pro Ω jednorozměrné (rovné $\langle a,b\rangle$), čtenář nechť myšlenku sám rozšíří na dvourozměrné „kulturní“ množiny Ω.

Budeme postupovat sporem. Nechť existuje $x_0 \in \Omega$ takové, že např. $f(x_0) = A > 0$. Pak ze spojitosti f plyne, že existuje okolí $U_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, na němž je všude $f(x) > A/2$. Nyní už jen stačí najít vhodnou funkci g (například nezápornou), která bude nabývat nenulových hodnot pouze na $U_\varepsilon(x_0)$ a jejíž integrál B přes Ω bude kladný. Pak bude zřejmě $\int gf \geq \int gA/2 = AB/2 > 0$, což je spor. Je zřejmé, že jediný problém je požadavek hladkosti (jinak by stačilo brát funkci identicky rovnou nule mimo $U_\varepsilon(x_0)$ a identicky rovnu $B/2\varepsilon$ uvnitř). Ke konstrukci využijeme funkci $\exp(-1/x^2)$. Přesný postup v konkrétním případě ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad: Sestrojme hladkou funkci na $I = (-2,2)$, která nabývá nenulových hodnot pouze na $(-1,1)$, a jejíž integrál přes I je větší než dvě.

Naším cílem bude funkce, která má na $(-1/2,1/2)$ hodnoty větší než dvě a mimo $(-1,1)$ je identicky rovna nule. Pokud bude nezáporná, bude její integrál tím pádem větší než 2. Stačí už jen najít „hladké propojení“ mezi body $-1,-1/2$ a $1/2,1$. Již víme, že funkce $\exp(-1/x^2)$ dodefinovaná v $x=0$ nulou je v tomto bodě spojitá a všechny její derivace jsou zde nulové[29]. Tím pádem je ale i hladká na $\mathbb{R}$. Podobně bude hladká i funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } |x| < 1 \\ 0 & \text{pro } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Protože je tato funkce sudá a na $(-1,0)$ rostoucí, můžeme z $f(-1/2) > 1/e^2$ usoudit, že funkce $2e^2 f(x)$ je určitě na $(-1/2,1/2)$ větší než dvě. Tato funkce proto splňuje všechny naše požadavky.

Nyní již vidíme, že pro kritický bod y funkcionálu Φ (tj. $\delta\Phi_h(y) = 0$ pro každé h) musí na Ω platit

$$\frac{\partial}{\partial y}f(\mathsf{x},y,\nabla y) - h\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial}{\partial z_i}f(\mathsf{x},y,z_1,\dots,z_n)|_{(z_1,\dots,z_n)=\nabla y}\Big] = 0. \tag{40}$$

Toto je Eulerova–Lagrangeova rovnice pro funkcionál nad prostorem funkcí n-proměnných. Jedná se ovšem o parciální diferenciální rovnici druhého řádu, a její řešení v obecném případě je tím pádem velmi obtížné.

Příklad: Buď funkce f klasického funkcionálu dána $f(x_i,y,z_i) = |z|^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i$. Hledáme tedy minimum funkcionálu

$$\int_\Omega |\nabla y|^2\,\mathrm{d}x.$$

Z Eulerových–Lagrangeových rovnic získáme podmínku

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = 2z_i \;\Rightarrow\; -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(2\frac{\partial y}{\partial x_i}\Big) = 0,\ \text{ to jest } \nabla^2 y = 0.$$

[29] Opakování z prvního semestru: místo jednostranné derivace v nule vyšetřujeme limitu oboustranných derivací do nuly, používáme l'Hôspitalova pravidla.

Poznámka: Systém L^+ je podmnožinou systému M^+ měřitelných nezáporných funkcí, který má obdobnou definici, ale chybí v ní požadavek omezenosti.

Věta 11: Vlastnosti funkcí z L^+
Nechť $f,g \in L^+$. Pak

1. $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
2. $f = g \Rightarrow \int f = \int g$
3. $\int f$ nezávisí na volbě posloupnosti $\{h_i\}_1^\infty$.
4. f je konečná s.v.
5. $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^+$
6. $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\} \in L^+$

Poznámka: V bodě 5 jsou $\alpha,\beta \geq 0$! L^+ proto není vektorový prostor.

Důkaz: Označme $\{h_i\}_1^\infty$, $\{k_i\}_1^\infty$ posloupnosti schodovitých funkcí, $h_i \nearrow f$ s.v., $k_i \nearrow g$ s.v., $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall i \in \mathbb{N})\big((\int h_i \leq K) \wedge (\int k_i \leq K)\big)$.

1. Nechť $i,j \in \mathbb{N}$, položme i pevné, potom $h_i - k_j \searrow h_i - g \leq 0$ s.v. Podle věty (10) $(h_i - k_j)^+ \searrow 0$ s.v. $\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty}\int(h_i-k_j)^+ = 0$, čili $\lim\limits_{j\to\infty}\int(h_i-k_j) \leq 0$. Protože $\lim\int k_j$ existuje (rozmyslete), můžeme tento výraz roztrhnout na $\int h_i \leq \lim\int k_j$ a pomocí věty o limitním přechodu v nerovnosti a definic $\int f$, $\int g$ snadno dokončit důkaz.
2. $(f = g)$ s.v. $\Leftrightarrow \big((f \leq g \text{ s.v.}) \wedge (g \leq f \text{ s.v.})\big) \Rightarrow \big((\int f \leq \int g) \wedge (\int g \leq \int f)\big) \Rightarrow (\int f = \int g)$
3. Formálně můžeme f definované pomocí dvou různých posloupností považovat za dvě funkce, které se sobě rovnají, a použít tvrzení předchozího bodu.
4. Označme $Z_1 = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \text{Neplatí } h_n(x) \nearrow f(x)\}$ a budiž $\int h_i < K$ pro všechna i. Množina Z_1 je míry nula, na níž může mít f jakékoliv hodnoty, tedy i nekonečné. Dále označme $Z_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_1 |\ f(x) = \infty\}$ a definujme posloupnost funkcí $H_i \equiv \frac{\varepsilon}{K}h_i$, pro kterou na základě vlastností h_i platí:

   (a) H_i je neklesající a nezáporná.
   (b) $\int H_i = \frac{\varepsilon}{K}\int h_i \leq \varepsilon$
   (c) $(\forall x \in Z_2)(\sup H_i = \lim \frac{\varepsilon}{K}h_i = \infty \geq 1)$

   Tedy Z_2 je míry nula a podle věty (9) $Z_1 \cup Z_2$ je míry nula.
5. Z definice.
6. $\max\{h_i,k_i\} \nearrow \max\{f,g\}$, $\int \max\{h_i,k_i\} \leq 2K$.

Věta 12: Limitní přechod v L^+
Nechť $\{f_i\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí z L^+, $f_n \nearrow f$ s.v., $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall i \in \mathbb{N})(\int f_n \leq K)$. Pak $f \in L^+$ a $\int f = \lim\int f_i$.

Důkaz: Označme $\{h_{ij}\}_1^\infty$ posloupnosti schodovitých funkcí z definice (12) $(h_{ij} \nearrow f_i$, $\int h_{ij} \leq K)$. Podle schématu analogického schématu v důkazu věty (9) definujme funkce $H_j \equiv \max\limits_{1\leq i\leq j} h_{ij}$. Označme dále $f^* \equiv \lim H_j$. Podle věty o limitním přechodu v nerovnosti můžeme pro $i \leq j$ psát

$$\begin{array}{ccccc} h_{ij} & \leq & H_j & \leq & f_j \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\ j\to\infty \\ f_i & \leq & f^* & \leq & f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\ i\to\infty \\ f & \leq & f^* & \leq & f. \end{array}$$

Prostor	Dimenze plochy	Integrovaný výraz
	0	f, místo integrálu bereme jen funkční hodnotu v bodě
V $\mathbb{R}_2$:	1	$T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2$,
	2	$f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$[26]
	0	f,
V $\mathbb{R}_3$:	1	$T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3$,
	2	$T_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + T_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + T_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$,
	3	$f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$
	0	$T_\emptyset$,
	1	$T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3 + T_4\,\mathrm{d}x_4$,
V $\mathbb{R}_4$:	2	$T_{12}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + T_{13}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \ldots$,
	3	$T_{123}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + T_{134}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 + \ldots$,
	4	$T_{1234}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$.

V případě $\mathbb{R}_4$ jsme již přešli k výhodnějšímu značení složek pole T. Vidíme, že pokud integrujeme přes „k-rozměrnou" plochu v $\mathbb{R}_n$, sestavujeme integrand jako lineární kombinaci součinů typu $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, přičemž množinu indexů I vybíráme z $\{1,\ldots,n\}$. Nezávislé součiny budou ty, které se liší alespoň jedním indexem. Pokud se dva součiny liší pouze pořadím indexů (např. $a\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + b\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2$), můžeme je snadno s využitím (35) sečíst. Koeficienty této lineární kombinace jsou pak složky integrovaného pole, a je tedy logické je označovat všemi indexy příslušného součinu. To, zda za složku pole budeme považovat např. T_{123} nebo T_{213}, které se liší znaménkem, je jen otázka konvence. Zapsáno formálně jsme se tedy rozhodli definovat

$$\varphi : \mathbb{R}_k \supset O \to \mathbb{R}_n, \qquad \int_{\varphi(O)} T \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\varphi(O)} \sum_I^n T_{i_1,\ldots,i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x_{i_k}, \qquad I = \{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}. \tag{36}$$

Výraz, jehož strukturu jsme právě „uhádli", se nazývá diferenciální forma.

Ve druhém kroku se pokusíme určit, co se skrývá za pojmem „nějaká derivace". Inspirováni Newtonovým vzorcem, potažmo formálním zápisem (32), zkusíme vzít $\mathrm{d}T$ jako totální diferenciál T.

Příklad: Ve Stokesově větě o rotaci je $T = T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3$. Bereme-li $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_i) = 0$ ($\mathrm{d}x_i$ nezávisí na žádné ze souřadnic x_j), můžeme $\mathrm{d}T$ zapsat následovně:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T &= \mathrm{d}\big(T_1\,\mathrm{d}x_1 + T_2\,\mathrm{d}x_2 + T_3\,\mathrm{d}x_3\big) = \mathrm{d}T_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}T_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}T_3 \wedge \mathrm{d}x_3 = \\ &= \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_2 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

Použijeme-li definici násobení diferenciálů (35), po roznásobení závorek se některé členy anulují a jiné bude možno sečíst za cenu změny znaménka. Dospějeme k výrazu

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1,$$

který má správný tvar pro integraci přes dvoudimenzionální plochu v $\mathbb{R}_3$. Integrované pole lze chápat jako vektorové pole se složkami vektoru $\nabla \times \mathsf{T}$.

Pochopili jsme již význam vnějšího násobení „$\wedge$", pokusíme se proto nyní vybudovat příslušnou teorii precizně. Před tím ale ještě učiníme malou odbočku jako ukázku užití Gaussovy věty ve variačním počtu. Zopakujme, co říká Gaussova věta. Pro vektorové pole $\mathsf{f} = (f_1,\ldots,f_n)$ hladké na $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}_n$ platí[27]

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathsf{f}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \cdot \mathsf{n}\,\mathrm{d}S,$$

[27] $\overline{\Omega}$ značí uzávěr množiny Ω (tj. Ω sjednocena s $\partial\Omega$).

0 do ∞, ale $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} = \infty$.[11] Naproti tomu Lebesgueův integrál nekonverguje pro žádnou z těchto funkcí. Je to různými metodami sčítání. Newtonův integrál postupuje podél osy a přičítá přírůstky primitivní funkce. V případě prvního integrálu mu díky oscilacím nad a pod osu nakonec vyjde konečné číslo. Naproti tomu Lebesgue nejprve sečte všechno nad osou a odečte od toho součet všeho pod osou, jelikož jsou to obě nekonečna[12] , není integrál z celé funkce definován.

Zklamaného čtenáře, který má pocit, že budoval nový integrál jen proto, aby s ním zintegroval méně funkcí než se starým, můžeme utěšit Dirichletovou funkcí, která je reprezentantem bohaté třídy funkcí, jež jsme doposud integrovat neuměli, a to ani Riemannovým integrálem. Jako demonstraci nadvlády naší nové Lebesgueovy teorie nad starou Riemannovou uveďme bez důkazu ještě jeden teoretický výsledek, tzv. Lebesgueovu větu[13]: funkce je Riemannovsky integrovatelná, právě když je spojitá až na množinu nulové míry[14].

§5. Věty o limitním přechodu

Věta 14: Beppo–Levi

Nechť $\{f_i\}_1^\infty$ je posloupnost nezáporných funkcí z L, $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{N})\left(\int \sum_1^m f_i \le K\right)$. Pak existuje součet řady $F \equiv \sum_1^\infty f_i$ s.v. a $\int F = \sum_1^\infty \int f_i$.

Důkaz: Definujme $F_m \equiv \sum_1^m f_i$. Podle předpokladů a věty (13) víme, že $F_m \in L$, $F_m \nearrow F$ s.v. a $(\forall m)(\int F_m \le K)$. Dále víme, že $(\exists g_i, h_i \in L^+)\big((f_i = g_i - h_i \text{ s.v.}) \wedge (h_i \ge 0) \wedge (\int h_i < \frac{1}{2^i})\big)$.

Dále definujme $H_m \equiv \sum_1^m h_i \nearrow H$. Podle věty (12) $(H \in L^+) \wedge (\int H = \sum_1^\infty \int h_i < 1)$. Poslední nerovnost plyne ze způsobu zavedení funkcí h_i. Protože $g_i = f_i + h_i \ge 0$ s.v., můžeme do třetice zavést $G_m \equiv \sum_1^m g_i \nearrow G$. Na základě předpokladů a definice funkcí h_i platí nerovnost

$$\int G_m = \sum_1^m \int g_i = \sum_1^m \int f_i + \sum_1^m \int h_i < K + 1$$

a podle věty (12) $G \in L^+$ a $\int G = \sum_1^\infty \int g_i$. Definiční rozklad funkce F tedy může být $G - H$, čímž je definován i integrál

$$\int F = \int G - \int H = \lim_{m\to\infty} \int \left(\sum_1^m g_i - \sum_1^m h_i\right) = \lim_{m\to\infty} \int \sum_1^m (g_i - h_i) = \sum_1^\infty \int f_i$$

Věta 15: Monotónní limita funkcí z L

Uvažujme posloupnost $\{f_i\}_1^\infty$ funkcí z L, $f_i \nearrow f$ s.v., $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall i \in \mathbb{N})(\int f_i \le K)$. Pak $f \in L$ a $\int f = \lim \int f_i$

Důkaz: Pro $k \in \mathbb{R}$ definujme funkce $\varphi_k \equiv f_{k+1} - f_k \ge 0$ s.v., čili $f_k - f_1 = \sum_1^k \varphi_i$. Na řadu $\sum_1^\infty \varphi_i$ můžeme použít Beppo–Leviho větu (ověřte předpoklady) a obdržíme tak

$$\int (f - f_1) = \int (\lim f_k - f_1) = \int \sum_1^\infty \varphi_i = \sum_1^\infty \int \varphi_i = \lim \left(\int f_k - \int f_1\right),$$

[11] Obě tato tvrzení jsme ověřovali v minulém ročníku.

[12] Není-li vám to zřejmé, dokažte si to. Zvolte k f^+ vhodnou minorantu, například vepisujte do oblouků sinusovky rovnoramenné trojúhelníky, převeďte problém na součet řady a ukažte, že tato řada diverguje.

[13] Po Lebesgueovi, podobně jako například po Cauchym nebo Eulerovi, je pojmenováno několik vět, proto nebuďte zmateni, budeme-li o kus dál říkat Lebesgueova věta něčemu docela jinému.

[14] Pozor! To neznamená, že se liší od nějaké spojité funkce na množině nulové míry! Viz Dirichletova funkce.

$\Phi(O)$. Pro $n=3$ bude mít Φ tvar $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \Phi(u,v)$, $u, v \in \mathbb{R}$. I v tomto případě lze uvažovat plošné integrály prvního, resp. druhého druhu přes skalární, resp. vektorová pole. Je třeba ovšem vymyslet, jak vyjádřit element plochy $\mathrm{d}S$ pomocí Φ (čtenář doposud pravděpodobně používal ortogonální parametrizace[24], kde platilo „$\mathrm{d}S = |\mathrm{d}u| \cdot |\mathrm{d}v|$“, „délka“ $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ mohla případně záviset na u, v — viz příklad). Pro obecné souřadnice u, v je přirozené brát

$$\mathsf{dS} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\mathrm{d}u \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{27}$$

neboť, jak jsme viděli u křivkového integrálu druhého druhu, vektor $\partial\Phi(u_0, v_0)/\partial u\,\mathrm{d}u$ má význam vektoru elementu dráhy po křivce $v = v_0 =$ konst. v bodě u_0. Plošné integrály (v $\mathbb{R}_3$) je pak přijatelné počítat pomocí vzorců

$$\textstyle\int_S f\,\mathrm{d}S = \int_O f \left\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{28}$$

$$\textstyle\int_S \mathsf{F} \cdot \mathsf{dS} = \int_O \mathsf{F} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{29}$$

Cvičení: Analogie s větou o substituci (tentokrát již spíše s větou probranou v kapitole o Lebesgueově integrálu) vysvitne, pokud vektorový součin v (28) rozepíšeme do složek. Předpokládejte, že $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ je zapsáno ve vhodné bázi: ortonormální, aby bylo možno vektorový součin počítat známým jednoduchým vzorcem, a takové, že $\partial\Phi/\partial u$ i $\partial\Phi/\partial v$ jsou kolmé na $(0,0,1)$. Výsledkem by měl být determinant Jacobiho matice.

Příklad: Ve fyzice se často používají cylindrické a sférické souřadnice. Zvolme v obou případech plochy $\rho =$ konst., resp. $r =$ konst. a vzpomeňme si na vyjádření plošných elementů na těchto plochách (tyto elementy byly označovány $\mathrm{d}S_\varrho$, resp. $\mathrm{d}S_r$).

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \mathrm{d}S_\varrho = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z' \qquad \left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \mathrm{d}S_r = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Poznámka: Zopakujme ještě věty, které hovořily o plošných a objemových integrálech v $\mathbb{R}_3$. Gaussova věta o divergenci tvrdila, že pro „rozumnou“ oblast $\Omega \subset \mathbb{R}_3$ (objem), její hranici $\partial\Omega$ a „rozumné“ vektorové pole T jsou si rovny integrály

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathsf{T}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \mathsf{T} \cdot \mathsf{dS}. \tag{30}$$

Stokesova věta naopak ukazovala souvislost mezi rotací T na ploše S a T na hranici ∂S této plochy:

$$\int_S (\nabla \times \mathsf{T}) \cdot \mathsf{dS} = \int_{\partial S} \mathsf{T} \cdot \mathsf{ds}. \tag{31}$$

Obě tyto věty společně s (25) mají jednotný tvar, totiž

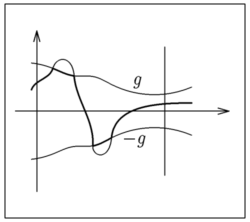
$$\int_M \mathrm{d}T = \int_{\partial M} T. \tag{32}$$

Integrál z vektorového pole přes hranici oblasti M je roven integrálu „nějaké derivace“ pole přes vnitřek M, to vše v prostoru $\mathbb{R}_n$. Tuto (zatím) myšlenku nazveme později obecnou Stokesovou větou.

Jak jsme již naznačili v úvodu, stojí před námi tedy dva úkoly:

1. Najít způsob, jak „rozumně“ integrovat přes oblast $\Omega \subset \mathbb{R}_k$ v $\mathbb{R}_n$.
2. Zjistit, jak má být definována „nějaká derivace“ v (32).

[24] Křivky $u =$ konst. a $v =$ konst. na S jsou na sebe vždy kolmé.



Obr. 6: Funkce $\max\big\{\min\{f,g\}, -g\big\}$.

(15) $\lim \int F_k = \lim \int G_k = \int f$ a podle věty o dvou strážnících pak $\lim \int f_n = \int f$.

Věta 19:
Nechť $f_i \in L$, $f_i \to f$ s.v.

1. Nechť $(\exists g, h \in L)(\forall i \in \mathbb{N})(g \le f_i \le h)$. Pak $f \in L$, $\int f = \lim \int f_i$.
2. Nechť $(\exists g \in L)(|f| \le g)$. Pak $f \in L$.

Důkaz:

1. Důsledek Lebesgueovy věty.
2. Definujme $F_i \equiv \max\{\min\{f_i, g\}, -g\}$. Geometricky to znamená, že z f_i „ořízneme“ úseky vybočující z pásu od $-g$ do g a funkční hodnoty tam nahradíme funkčními hodnotami g resp. $-g$ (viz obrázek). Sporem se snadno ukáže, že $F_i \to f$ s.v. Posloupnost $\{f_i\}_1^\infty$ splňuje předpoklady Lebesgueovy věty, z níž plyne kýžené tvrzení.

§6. Prostor s normou definovanou pomocí Lebesgueova integrálu

Definice 14: Prostor $L_1(\mathbb{R}^n)$
Nechť L je prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^n$. Na tomto prostoru zavedeme relaci ekvivalence[15] $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.v.. Tato relace definuje jednoznačný rozklad na třídy ekvivalence. Prostor $L_1(\mathbb{R}^n) \equiv L/\sim$ definujeme jako prostor tříd ekvivalence, na němž definujeme algebraické operace pomocí reprezentantů.[16] Podobně definujeme $|f|, f^+, f^-, \max\{f,g\}, \sup\{f_i\}$ pro spočetnou množinu $\{f_i\}$. Na $L_1(\mathbb{R}^n)$ definujeme normu prvku f vztahem $\|f\|_1 \equiv \int |f| \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Striktně vzato bychom měli ověřit korektnost definice, ale čtenář jistě chápe, že by to byla jen zdlouhavá formální práce. Ověříme pouze, že $\|.\|_1$ je skutečně norma:

1. $\|f\|_1 \ge 0$, $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ plyne z vět (13) a (16).
2. Linearita $\|\alpha f\|_1 = \alpha\|f\|_1$ plyne z věty (13).
3. Trojúhelníkovou nerovnost obdržíme také z věty (13): $\|f+g\|_1 = \int|f+g| \le \int|f| + \int|g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$

Úmluva: Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme index u normy vynechávat a psát jen $\|.\|$.

Věta 20: Riesz–Fischer
Prostor $L_1(\mathbb{R}^n)$ je úplný normovaný vektorový prostor (Banachův prostor).

Důkaz: Dokážeme pouze vlastnost úplnosti, zbytek je triviální. Chceme ověřit, zda všechny cauchyovské posloupnosti konvergují k nějakému prvku z prostoru.

[15] Tj. relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
[16] Součet tříd je třída příslušná součtu libovolných dvou funkcí ze sčítanců apod.

Zřejmě platí $\lim\limits_{n\to\infty}|F_n|^2 = |F|^2$, přičemž ovšem $|F_n|^2 \nearrow |F|^2$ a $\int|F_n|^2 < 1$, a dle Beppo–Leviho věty tedy platí $|F|^2 \in L(M)$. $|F|^2$ je potom konečná s.v., a tím pádem i $|F|$ je s.v. konečná. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ proto konverguje, a tedy konverguje i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$. Potom ale existuje

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) + f_{n_1} \stackrel{\text{df}}{=} f.$$

2. Nyní ukažme, že je $f \in L_2(M)$. Platí: $|f - f_{n_k}|^2 = \lim\limits_{p\to\infty}|f_{n_p} - f_{n_k}|^2$. Pro každou z funkcí náleží $|f_{n_p} - f_{n_k}|^2 \in L(M)$ a dle Lebesgueovy věty i pro jejich limitu platí $|f - f_{n_k}|^2 \in L(M)$. Tedy $f - f_{n_k} \in L_2(M)$ a $f_{n_k} \in L_2(M)$. Potom ale $f \in L_2(M)$, neboť $L_2(M)$ je lineární vektorový prostor.
3. Poslední krok je ukázat platnost $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Ovšemže platí:

$$||f_n - f|| \le ||f_{n_k} - f_n|| + ||f_n - f||.$$

Oba členy na pravé straně jsou však pro n a n_k dostatečně menší než libovolné $\varepsilon > 0$; odhad prvního plyne z cauchyovskosti posloupnosti a odhad druhého plyne zejména z úvah v prvním bodě důkazu.

12.1 Obecná konstrukce Lebesgueova integrálu

Věta 32:
Nechť X je libovolná množina. Nechť A je libovolný systém množin z X, pro který platí:

1. $(\forall B, C \in A)(B \cup C) \Rightarrow (B \cap C \in A)$
2. $(\forall B, C \in A)(B \subset C) \Rightarrow (C \setminus B \in A)$
3. $(\forall B_n \in A, n \in \mathbb{N})\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = X\right)$

Nechť $\mu : A \to \mathbb{R}$ je množinová funkce s následujícími vlastnostmi:

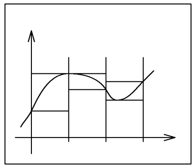
1. $\forall B \in A : \mu(B) \ge 0$
2. $\forall B_n \in A, B_n$ disjunktní, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in A : \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$

μ je elementární míra na A.
Označme H lineární vektorový prostor tvoření funkcemi tvaru $h(x) = \sum\limits_{j\in J}\alpha_j\chi_{A_j}$, kde J je konečná množina a $A_j \in A$. Integrál této funkce definujme jako $\int h = \sum\limits_{j\in J}\alpha_j\mu(A_j)$. Prostor H s takto definovaným integrálem má vlastnosti 1 až 5 z věty (8). Zopakujeme-li konstrukci Lebesgueova integrálu zůstanou v platnosti limitní věty a věty o závislosti na integračním oboru.

P o z n á m k a o Fubiniho větě a větě o substituci: Fubiniho věta platit nebude, neboť obsahuje jisté požadavky na tvar množin, přes které se integruje — vyžaduje, aby se daly zapsat jako kartézský součin jiných množin. Věta o substituci je typická pro $\mathbb{R}^n$, a tedy platit také obecně nebude.

P o z n á m k a o pravděpodobnosti a integrálu: Pravděpodobnost, jak již bylo řečeno v předešlých poznámkách, lze vyjádřit jako trojici (X, A, μ), kde X je množina jevů, A systém jejich podmnožin a μ funkce, která jim přiřazuje pravděpodobnosti. Lze ověřit, že tato množina má vlastnosti Lebesgueova integrálu.

P o z n á m k a o Stieltjesově míře a integrálu: Nechť F je neklesající zprava spojitá funkce. Definujme $\mu(\langle\alpha,\beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$. Takto zavedenou míru lze využít ke konstrukci Lebesgue–Stieltjesova integrálu. Speciálně, je-li $F' = g$ spojitá, potom $\int\limits_M f\,\mathrm{d}F \stackrel{\text{df}}{=} \int\limits_M fg\,\mathrm{d}x$ — funkce g tedy vyjadřuje „hustotu“.
Je-li $F(x) = 0$ pro $x < c$ a $F(x) = 1$ pro $x \le c$, potom platí $\mu(M) = 1 \iff c \in M$, jinak je $\mu(M) = 0$.



Obr. 7: Jednoduché funkce m_i, M_i v $\mathbb{R}_1$.

(monotónně) k nule. Definujme jednoduché funkce h_n a H_n následujícím předpisem (viz obrázek):

$$h_n = \sum m_i\chi_{\langle x_{i-1},x_i)} \qquad m_i = \inf_{\langle x_{i-1},x_i)} f(x) \qquad D_n = \langle x_0,\ldots,x_{k_n}\rangle$$

$$H_n = \sum M_i\chi_{\langle x_{i-1},x_i)} \qquad M_i = \sup_{\langle x_{i-1},x_i)} f(x) \qquad D_n = \langle x_0,\ldots,x_{k_n}\rangle$$

Z definice integrálu jednoduchých funkcí ihned plynou rovnosti:

$$\int h_n = s(f, D_n) \qquad \int H_n = S(f, D_n)$$

Posloupnost funkcí $h_n \in L$ (resp. $H_n \in L$) jde monotónně (D_n jsou postupná zjemnění) k funkci F_1 (resp. F_2), neboť $h_n \le H_0$ ($H_n \ge h_0$). Lebesgueův integrál z těchto funkcí je omezen (například Riemannovým integrálem funkce f), tedy funkce $F_1 \in L$ (resp. $F_2 \in L$) a navíc platí $(L)\int F_1 = \lim\limits_{n\to\infty}(L)\int h_n = (R)\underline{\int} f$ (resp. $(L)\int F_2 = \lim\limits_{n\to\infty}(L)\int H_n = (R)\overline{\int} f$) dle Beppo–Leviho věty.
Vzhledem k tomu, že $h_n \le F \le H_n$, musí platit pro limity posloupností funkcí h_n a H_n platit: $F_1 \le F \le F_2$. Funkce $F_2 - F_1$ je nezáporná lebesgueovsky integrovatelná funkce, jejíž integrál je roven nule (horní a dolní Riemannův integrál si jsou rovny). Potom ale musí dle věty (16) platit $F_2 - F_1 = 0$ s.v. a tedy $F_1 = F_2 = F$ s.v. Potom ale už F je lebesgueovsky integrovatelná funkce a její integrál je roven integrálu funkce F_1, který je roven Riemannovu integrálu funkce f.

Věta 22: Fubiniho
Nechť jsou $n, k, p \in \mathbb{N}$, že platí $n = k + p$. Zápisem $x = (x', x'')$, kde $x \in \mathbb{R}_n, x' \in \mathbb{R}_k, x'' \in \mathbb{R}_p$ budeme rozumět, že prvních k složek x je rovno složkám x' a zbylé jsou rovny x''. Nechť je dále $f(x) : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}^*$, lebesgueovsky integrovatelná. Potom platí:

1. Pro každé $x'' \in \mathbb{R}_p$ pevné, je funkce $\varphi(x') = f(x', x'')$ lebesgueovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_k$.
2. Označím-li $F(x'') = \int\limits_{\mathbb{R}_k}\varphi(x', x'')\,\mathrm{d}x'$, potom je F jako funkce x'' lebesgueovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_p$.
3. Pro integrál původní funkce platí:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}_p} F(x'')\,\mathrm{d}x'' = \int\limits_{\mathbb{R}_p}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_k}\varphi(x', x'')\,\mathrm{d}x'\Big]\,\mathrm{d}x''.$$

Idea důkazu: Větu dokážeme nejprve pro elementární funkce (jádrem bude rovnost $V(I) = V(I')\cdot V(I'')$ pro $I = I' \times I''$), pak použijeme limitní přechod. Formální důkaz provádět nebudeme.

Příklad: Uvažme Dirichletovu funkci, která je definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ předpisem $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a $f(x) = 0, x \in \mathbb{Q}$. Vzhledem k tomu, že množina, kde je funkce nulová na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je spočetná, je míry nula. Potom ale je integrál Dirichletovy funkce roven integrálu funkce, která je na tomto intervalu

mimo konečně mnoha bodů — singularit. Nechť $\bigcup_{i\in I} M_i = M$ a funkce je na každé množině M_i spojitá. Dle věty o závislosti integrálu na integračním oboru platí $\int_M f = \sum_{i\in I} \int_{M_i} f$. Singularity budou obvykle body, kde funkce nemá vlastní limitu — v opačném případě ji zde spojitě dodefinuji. Nechť b je vyšetřovaná singularita. Nechť platí:

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \in \mathbb{R}, \alpha < 1$$

Potom je násobek funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ integrovatelnou majorantou funkce f na levém okolí bodu b a dle Beppo–Leviho věty zde integrál funkce konverguje. Nechť naopak platí:

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} > 0, \alpha \geq 1$$

Potom by na levém okolí bodu b byla funkce f integrovatelnou majorantou násobku funkce $\frac{1}{x^\alpha}$, a tedy by dle Lebesgueovy věty integrál funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ na levém okolí bodu b konvergoval, což je ovšem spor. Integrál funkce f tedy na levém okolí b nekonverguje.

Příklad: Vypočtěme

$$I(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\,\mathrm{d}x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Určete $I'(b)$, je-li $a > 0$. Nejprve proveďme následující výpočet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b} e^{-ax^2} \cosh(bx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} \sinh(bx)\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{e^{-ax^2}}{2a}\sinh(bx)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{b}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cosh(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{b}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cosh(bx)\,\mathrm{d}x$$

Nyní ověřme předpoklady věty o derivaci podle parametru:

1. $\frac{\partial}{\partial b} f(x,b)$ existuje pro všechny $x, b \in \mathbb{R}$
2. Funkce $f(x,b)$ je pro b pevné spojitá, a tedy měřitelná.
3. Potřebujeme nalézt integrovatelnou majorantu funkce $\frac{\partial}{\partial b} f(x,b) = x e^{-ax^2}\sinh(bx)$. Tu se nám nepodaří nalézt pro všechny b najednou, ale dle věty o derivaci podle parametru, se pro libovolné b stačí omezit na netriviální interval obsahující b — například $(-B, B)$. Majorantou je pak například $\sup_{b\in(-B,B)} |xe^{-ax^2}\sinh(bx)| = |xe^{-ax^2}\sinh(Bx)|$, která je spojitá, a tudíž integrovatelná.
4. Ověření posledního předpokladu o konvergenci integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cosh(bx)\,\mathrm{d}x$ pro alespoň jedno $b \in (-B, B)$ je snadné, například pro $b = 0$.

Dle věty o derivaci funkce podle parametru tedy platí:

$$I'(b) = \frac{b}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cosh(bx)\,\mathrm{d}x$$

Zkusme ještě určit hodnotu integrálu nebo jeho derivace. Především si povšimněme, že platí $I'(b) = (b/2a)I(b)$, potom ale nutně platí $I(b) = Ke^{b^2/4a}$, $K \in \mathbb{R}$. Velikost K určíme z hodnoty integrálu pro $b = 0$, která je $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Zjistili jsme tedy, že:

$$I(b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

funkcí. Ne každé složení měřitelných funkcí je tedy měřitelná funkce.

Poznámka o integrovatelnosti posunuté funkce: Je-li funkce f integrovatelná (na $\mathbb{R}_n$) je i funkce $f_a(x) = f(x + a)$ integrovatelná a hodnoty integrálů jsou si rovny.

Příklad: Sestrojme nyní neměřitelnou funkci:
Uvažujme interval $\langle 0, 1\rangle$. Uvažme systém podmnožin M tohoto intervalu takový, že platí $\big[(\forall N \in M)(x \in N, y \in N)\big] \iff (x - y \in \mathbb{Q})$. Čtenář jistě snadno ověří, že prvky tohoto systému podmnožin jsou vesměs disjunktní. Z každé takové množiny vyberu jeden prvek a množinu těchto prvků označím A. Dále označím $A_q = \{x + q | x \in A\}$ pro $q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1, 1\rangle$. Vzhledem ke spočetnosti $\mathbb{Q}$ je systém množin A_q spočetný. Pro jeho (spočetné) sjednocení $B = \cup_q A_q$ tedy platí:

$$\langle 0, 1\rangle \subset B \subset \langle -1, 2\rangle$$

Ověřte levou inkluzi. Zajímá nás nyní hodnota integrálu funkce χ_B (předpokládejme, že B je měřitelná; pak χ_B je integrovatelná). Je-li hodnota integrálu χ_A nulová, je A množina míry nula, potom ale spočetné sjednocení A_q je také míry nula, což je spor, neboť interval $\langle 0, 1\rangle$, který určitě není míry nula, je jeho (nevlastní) podmnožinou.
Nechť naopak je hodnota tohoto integrálu nenulová — označme ji K. Potom integrál funkce χ_B není konečný, neboť je větší než nK, pro libovolné přirozené n. Což je spor, neboť tento integrál lze odhadnout shora integrálem z funkce $\chi_{\langle -1, 2\rangle}$, který je roven třem.

Definice 16: Měřitelná množina, míra
Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}_n$ je měřitelná, pokud je funkce χ_M měřitelná. Míru (měřitelné) množiny pak definujeme následovně: $\mu(M) = \int \chi_M$, pokud je $\chi_M \in L$, jinak $\mu(M) = +\infty$. Systém všech měřitelných množin označme $\Lambda(\mathbb{R}_n)$. Dále označme $L(M)$ lebesgueovsky integrovatelné funkce na M.

Poznámka: Je-li $M \in \Lambda$ a $f \in L$, potom je i $\chi_M f \in L$, dle Lebesgueovy věty (f je integrovatelná majoranta).

Poznámka: Míra množiny μ je funkce z jistého systému podmnožin $\mathbb{R}_n$ do $\mathbb{R}^*$.

Definice 17: Systémy podmnožin a funkce na nich
Nechť X je daná množina, Σ systém jejích podmnožin. Řekneme, že Σ je σ-okruh, pokud platí:

1. $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \setminus B, A \cup B \in \Sigma$,
2. $A_n \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$.

Pokud navíc $X \in \Sigma$, pak je Σ σ-algebrou. Řekneme, že množinová funkce $\phi : X \to \mathbb{R}^*$ je

1. nezáporná, pokud $\phi(M) \geq 0, \forall M \in \Sigma$,
2. σ-aditivní, pokud $\phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i)$ pro $A_i \in \Sigma$ po dvou disjunktní,
3. míra, pokud je nezáporná a σ-aditivní,
4. úplná míra, pokud platí $(A \subset B \in \Sigma) \wedge \big(\phi(B) = 0\big) \Longrightarrow (A \in \Sigma)$.

Poznámka o Kolmogorově modelu pravděpodobnosti: Je-li (X, Σ, μ) σ-algebra a μ úplná míra na Σ, kde X je množina všech možných elementárních jevů, Σ množina podmnožin X (například potenční množina), pak pravděpodobnost, že nastane daný jev $M \in \Sigma$, lze definovat jako $\mu(M)$.

Poznámka o alternativní definici Lebesgueova integrálu: Alternativně lze nejprve vybudovat pojem míry v $\mathbb{R}_n$, tj. vytvořit trojici $(X, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}_n, \Lambda, \mu)$, následně definovat měřitelné funkce a poté i funkce

1. $A = U^*(\alpha_0) \subset \mathbb{R}_p, M \subset \mathbb{R}_n, M \in \Lambda$
2. $\forall \alpha \in A : f(x,\alpha)$ je měřitelná na M
3. Existuje $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(x,\alpha)$ s.v., její hodnotu označme $f(x)$
4. $\exists g(x) \in L(M); \forall A : |f(x,\alpha) \leq g(x)|$ s.v. na M

Potom platí $f(x) \in L(M)$ a navíc $\int f = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: Pro libovolnou posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$ jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty. Zejména $f(x)_\alpha \in L(M)$, $f_\alpha(x)$ jako limita je dle Heineho věty stejná pro libovolnou posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$, a dále platí $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_M f(x,\alpha_n)\,\mathrm{d}x$. Nyní ovšem z Heineho věty, chápeme-li hodnotu integrálu jako funkci α, plyne i druhá část tvrzení věty.

Poznámka o spojité funkci závislé na parametru: Nechť funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá pro každé $\alpha \in A$ a existuje funkce $g(x) \in L(M)$, že $|f(x,\alpha)| \leq |g(x)|$. Potom jsou již splněny předpoklady předchozí věty a $\varphi(\alpha) = \int f\,\mathrm{d}x$ je spojitá v α_0.

Věta 29: Záměna limity a integrálu jinak
Nechť

1. $\alpha_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A = U^*_-(\alpha_0)$, $M \subset \mathbb{R}_n, M \in \Lambda$
2. $\forall \alpha : f(x,\alpha) \in L(M)$
3. $\forall \alpha, \beta \in A, \alpha \leq \beta : f(x,\alpha) \leq f(x,\beta)$ s.v. na M
4. $\exists K \in \mathbb{R}; \forall \alpha \in A : \int f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x \leq K$

Potom existuje $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)$ s.v. na M, označme ji $f(x)$ a dále platí $f(x) \in L(M)$ a navíc $\int f = \lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: Pro libovolnou neklesající posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$ jsou splněny předpoklady Beppo–Leviho věty. Zejména $f(x) \in L(M)$, $f(x)$ jako limita je dle Heineho věty stejná pro libovolnou posloupnost $\alpha_n \to \alpha_0$, a protože je lebesgueovsky integrovatelná, je i konečná s.v. na M. Dále platí $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_M f(x,\alpha_n)\,\mathrm{d}x$. Nyní ovšemže z Heineho věty, chápeme-li hodnotu integrálu jako funkci α plyne i druhá část tvrzení věty.

Poznámka o přechozí větě: Čtenář si jistě snadno sám zformuluje zbylé tři analogie předchozí věty, kdy posloupnost funkcí je klesající, resp. se počítá limita parametru zprava.

Věta 30: O derivaci podle parametru
Nechť

1. $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, $M \subset \mathbb{R}_n$ je měřitelná
2. $\forall \alpha \in I$ je $f(x,\alpha)$ měřitelná
3. $\exists N \subset M$, $\mu(N) = 0$, $\forall x \in M \setminus N : \partial f / \partial \alpha(x,\alpha)$ je konečná $\forall \alpha \in I$
4. **důležité:** $\exists g \in L(M); \forall x \in M \setminus N : \forall \alpha \in I : |\partial f / \partial \alpha(x,\alpha)| \leq g(x)$
5. **a ještě navíc:** $\exists \alpha_0 \in I; f(x,\alpha_0) \in L(M)$

Potom platí:

1. $\forall \alpha \in I : f(x,\alpha) \in L(M)$
2. $\varphi(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha) dx$, funkce $\varphi(\alpha)$ je diferencovatelná na I

spočetně otevřených množin označme B a tyto množiny nazvěme borelovské množiny. Všechny borelovské množiny jsou měřitelné, neboť Λ je σ-okruh. Místo otevřených množin lze uvážit i množiny uzavřené a získáme stejnou množinu množin. Množina B je nejmenší vzhledem k inkluzi σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny. Stejně tak je nejmenší σ-algebra obashující všechny uzavřené množiny.

Poznámka o měřitelnosti množin míry nula: Každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná a má míru nula. Navíc však lze dokázat, že kdyby některá podmnožina M množiny míry nula nebyla měřitelná, lze ji do daného σ-okruhu přidat, tj. nahradit uvažovaný σ-okruh nejmenším σ-okruhem, který jej obsahuje a navíc obsahuje množinu M, a definovat míru všech množin N, které neobsahoval původní σ-okruh jako míru množiny $N \setminus M$.

Poznámka o množinách míry nula: Je-li $F : \Omega \to \mathbb{R}_n$, $\Omega \subset \mathbb{R}_k$, $k < n$, F spojitě diferencovatelné, potom platí, že $\mu\big(F(\Omega)\big) = 0$.

Poznámka (Sardova věta): Nechť $F : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_k$, $k < n$, $F \in C^1(\mathbb{R}_n)$. Potom množina $M = \{x \in \mathbb{R}_n |\ h\big[\mathrm{Jac}\big(F(x)\big)\big] < k\}$, tj. množina obrazů kritických bodů[19] zobrazení F, má míru nula, tj. $\mu(M) = 0$. Předchozí poznámka je důsledkem této věty.

Poznámka o hranicích množin: Označme hranici množiny M jako ∂M. Často je ∂M hladká, tzn. je lokálně grafem funkce $f : \mathbb{R}_{n-1} \to \mathbb{R}_n$, většinou má i nulovou míru (ne vždy). Platí, že je-li $\mu(\partial M) = 0$ a M je otevřená, potom libovolná množina N taková, že $M \subset N \subset \overline{M}$, je měřitelná.

Poznámka - varování: Existuje spojité zobrazení z $\langle 0,1\rangle$ do $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Toto zobrazení není bijektivní a nesplňuje podmínky jedné z předchozích poznámek, neboť není spojitě diferencovatelné.

§9. Závislost integrálu na integračním oboru

Věta 26:

1. (a) $f \in L(M)$, $M \in \Lambda$, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$ po dvou disjunktní, potom platí: $\int\limits_M f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f$

   (b) f měřitelná,$M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$ po dvou disjunktní, $f \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f$ konečná, potom platí, že $f \in L$
2. f měřitelná, M míry nula, potom $\int\limits_M f = 0$
3. $f \in L(M)$, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$, $M_i \subset M_{i+1}$, potom platí $\int\limits_M f = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{M_i} f$
4. $f \in L(M)$, $M = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \Lambda$, $M_{i+1} \subset M_i$, potom platí $\int\limits_M f = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{M_i} f$
5. f měřitelná, $M \in \Lambda$, $\mu(M)$ konečná a existuje $K \in \mathbb{R}^+$, že $\forall x \in M : |f(x)| \leq K$, potom platí, že $f \in L(M)$ a $|\int\limits_M f| \leq K\mu(M)$.
6. $f \in L(M)$, $f \geq 0$, M měřitelná, $N \subset M$ měřitelná, potom $\int\limits_N f \leq \int\limits_M f$.

Důkaz:

1. (a) Integrály $\int\limits_{M_i} f$ existují dle Lebesgueovy věty, neboť funkce $|f|$ je pro ně integrovatelnou majorantou. Tvrzení o rovnosti $\int\limits_M f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f$, plyne z téže věty, neboť $\sum\limits_{i=1}^{k} \chi_{M_i} f \to \chi_M f$.

[19] Jacobián má hodnost menší než k.