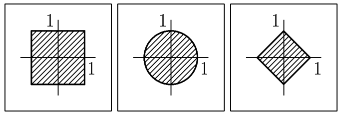


Obr. 1: Okolí bodu $(0,0)$ o poloměru 1 indukovaná normami $\|.\|_\infty$, $\|.\|_2$, $\|.\|_1$.

Podmínky 2. a 3. se někdy souhrnně nazývají sesquilineárnost.

Úmluva: Ve fyzikálních aplikacích bývá zvykem, že funkční hodnota skalárního součinu v bodě $[x,y]$, tj. $f(x,y)$, je označována stručně (x,y) (v kvantové fyzice pak braketovým zápisem) $\langle x|y\rangle$). Zde budeme skalární součin označovat (x,y), popř. $\langle x,y\rangle$.

Definice 2: Norma
Buď X vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel. Funkci $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ nazveme normou na X, pokud platí zároveň

1. $(\forall x \in X)\big((\|x\| \geq 0) \wedge (\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)\big)$,
2. $(\forall \lambda \in \mathbb{C})(\forall x \in X)(\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|)$ a
3. „trojúhelníková nerovnost“ $(\forall x, y \in X)(\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|)$.

Příklad: Často se používají tyto normy (závislé na volbě báze v X):

$$\forall x \in X,\ x = (x_1, \dots, x_n),\ \|x\|_p \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ pro dané } p \in \mathbb{R}^*,\ p \geq 1$$

$$p = 1:\ \|x\|_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \tag{1}$$

$$p = 2:\ \|x\|_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \tag{2}$$

$$p = \infty:\ \|x\|_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{i=1,\dots,n} |x_i|. \tag{3}$$

Úkol 1: Dokažte z definice, že tato zobrazení $X \to \mathbb{C}$ jsou normy.

Úkol 2: Dokažte, že $f(x,y) = \|x-y\|$ je metrika (definice byla probrána v minulém semestru) pro každou normu $\|.\|$.

Definice 3: Vektorový normovaný prostor
Uspořádanou dvojici (A,ν) nazveme vektorový normovaný prostor, pokud A je vektorový prostor a ν je norma na A. Obdobně definujeme vektorový prostor se skalárním součinem.

Poznámka: Připomeňme si, že v normovaných prostorech máme pro kladné ε a $a \in X$ pojem okolí definovaný takto: $U_\varepsilon(a) = \{x \in X |\ \|x-a\| < \varepsilon\}$. Tato okolí vypadají ovšem pro různé normy různě. Na obrázcích jsou znázorněna okolí bodu $(0,0)$ v E_2 s poloměrem 1.

Poznámka: Jak je nám známo z minulého ročníku, pomocí okolí je definována též limita, spojitost i konvergence. Zopakujme např. definici limity. Buď (X,ν) vektorový normovaný prostor nad $\mathbb{C}$. Buď $Y \in X$, $y_0 \in X$, $\Phi : X \to X$ a nechť $(\exists U^*(y_0) \subseteq D(\Phi))$. Řekneme, že limita Φ v bodě y_0 je Y, pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall y \in U^*_\delta(y_0)\big)(\Phi(y) \in U_\varepsilon(Y))$.

Poznámka: Eukleidovský prostor E_n nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ je s spolu se skalárním součinem $(x,y) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j$, kde $\{\alpha_{ij}\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$ je pozitivně definitní matice, skládající se z prvků tělesa $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$,

z definice ekvivalence norem plyne, že okolí, zadaná těmito různými ekvivalentími normami, lze do sebe „vpisovat“.

P o z n á m k a : Důsledkem věty (1) a obsahu úkolu (1) je skutečnost, že dokážeme-li konvergenci zobrazení na konečnědimenzionálním prostoru V nad tělesem T vůči normě d, pak můžeme prohlásit platnost této konvergence na prostoru V vůči libovolné normě definované na tomto prostoru, neboť tyto normy jsou ekvivalentní.

P o z n á m k a : Vyhraďme tyto symboly:

$$\mathbb{R}^\infty = \{\{x_i\}_{i=1}^\infty \mid \{x_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}\},$$

$$\ell_2 = \left\{\{x_i\}_{i=1}^\infty \mid \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < +\infty\right) \wedge \left(\{x_i\}_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty\right)\right\}$$

Pokud zjišťujeme, zda je ℓ_2 vektorový prostor, potřebujeme prozkoumat předně uzavřenost vzhledem ke sčítání (u $\mathbb{R}^\infty$ je toto triviální). Použijeme následující úvahu:

$$\left(\frac{1}{2}(|x_i| - |y_i|)^2 \geq 0\right) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i||\bar{y}_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty |y_i|^2\right),$$

tedy na ℓ_2 lze definovat také následující skalární součin, který indukuje příslušnou normu:

$$(\{x_i\}, \{y_i\}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^\infty |x_i||\bar{y}_i|. \tag{4}$$

Úkol 5: Proveďte důkaz, že ℓ_2 je uzavřený na sčítání (z definice normy indukované tímto skalárním součinem).

Definice 5: Cauchyovská posloupnost
Buď (X, ν) vektorový normovaný prostor. Posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, jejíž obor hodnot je podmnožinou X, nazveme cauchyovskou vůči ν, pokud platí: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq m_0)\big(\nu(x_m - x_n) < \varepsilon\big)$.

Lemma (konvergence implikuje cauchyovskost):
Buď (X, ν) vektorový normovaný prostor nad $\mathbb{C}$, $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ buď posloupnost prvků z X. Pokud x_m konverguje na (X, ν), pak je $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ cauchyovská vůči ν.

Důkaz lemmatu: Limitu x_m označme A. Víme, že $A \in X$. Buď $\varepsilon > 0$; z definice konvergence máme

$$\left(\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\right)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0)\left(\nu(x_m - A) < \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{5}$$

Buď $n \geq m_0$, pak opět z konvergence máme:

$$(\forall n \geq m_0)\left(\nu(x_n - A) < \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{6}$$

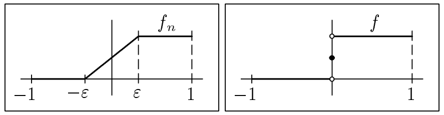
Pro každé m, n platí, že

$$\nu(x_m - x_n) = \nu(x_m - A - x_n + A) \leq \nu(x_m - A) + \nu(x_n - A), \tag{7}$$

jak plyne z vlastností normy (ověřte, které všechny vlastnosti byly nutné). Pro $m, n > m_0$ pak dosadíme do výrazu (7) výrazy (5,6). Dostaneme: $\nu(x_m - x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, čímž je cauchyovskost dokázána.

P o z n á m k a : Tvrzení obrácené k tvrzení lemmatu tedy neplatí — na X existuje vůči ν cauchyovská posloupnost, která není konvergentní na (X, ν). Sestrojme ji. Uvažme konvergenci na $X = \mathbb{Q}$ (množina všech racionálních čísel) vůči normě posloupnosti definované takto: $\nu(x) = |x|$ pro každé $x \in \mathbb{Q}$. Definujme posloupnost $x_n = [\sqrt{2}.10^n]/10^n$, kde $[x]$ značí tzv. celou část x (číslo x zaokrouhlené dolů). Obor hodnot takto definované posoupnosti je jistě podmnožinou množiny všech racionálních čísel. Lehce ukážete, že

Obsah



Obr. 2: Spojité funkce $f_n(x)$ a jejich nespojitá limita

Pokud se zajímáme o prostor X_2, stačí seřadit racionální čísla na intervalu $\langle 0,1)$ do posloupnosti a_n. Funkce $f_n(x)$ je pak rovna 1 ve všech bodech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a rovna 0 ve všech ostatních bodech. Limita posloupnosti f_n, tedy Dirichletova funkce, jak známo integrabilní není.

P o z n á m k a: Zamyslete se nad tím, v jakém smyslu mohou být normy (1,2,3) analogické normám v prostorech nespočetné dimenze.

§3. Abstraktní variační počet: Gâteauxův diferenciál. Variace funkcionálu. Eulerova a Lagrangeova nutná podmínka.

Definice 7: Gâteauxův diferenciál, druhý Gâteauxův diferenciál
Buďte $(X, \|.\|)$ vektorový normovaný prostor $h \in X$, $a \in X$ a funkcionál $\Phi : X \to \mathbb{R}$. Gâteauxovým diferenciálem funkcionálu Φ v bodě a ve směru h nazveme reálné číslo G, pokud existuje derivace $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Phi(a+th)]_{t=0}$ a je rovna G. Pro daný funkcionál Φ, daná a, h značíme toto G výrazem $\delta\Phi(a,h)$ nebo $\Phi_h(a)$. Zobrazení $\delta\Phi(a) : X \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \delta\Phi(a,h)$ nazveme variací funkcionálu Φ v a. Druhým Gâteauxovým diferenciálem míníme číslo $\delta^2\Phi(a;h,h) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[\Phi(a+th)]_{t=0}$.

P o z n á m k a: Je-li $X = \mathbb{R}^n$, pak $\delta\Phi(a,h) \equiv \mathrm{d}\Phi(a,h)$ a $\delta\Phi(a,e_i) = \partial\Phi(a)/\partial x_i$.

Věta 2: Eulerova nutná podmínka pro extrém variovatelného funkcionálu
Pro každý normovaný vektorový prostor $(X, \|.\|)$, pro každý funkcionál $\Phi : X \mapsto C$ a každé $a \in X$ platí následující tvrzení. Pokud existuje variace $\delta\Phi(a)$ na X a pokud Φ má v a lokální extrém, pak $\delta\Phi(a) \equiv 0$, tj. $(\forall h \in X)\big(\delta\Phi(a,h) = 0\big)$.

Důkaz: Pro každé $h \in X$ definujme funkci jedné reálné proměnné $\phi_h(t) = \Phi(a+th)$. Jelikož a je bod extrému Φ (berme například minimum), existuje okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že pro všechna $d \in U_\varepsilon(a)$, tj. pro d splňující $\|d-a\| < \varepsilon$, je
$$\Phi(a) \leq \Phi(d).$$
Pro toto ε a libovolné $h \in X$ potom existuje okolí $V_r(0) \subseteq \mathbb{R}$ o poloměru $r = \varepsilon/\|h\|$, v němž platí $\big(\forall t \in V_r(0)\big)(\|th\| < \varepsilon)$. Vektory $d \overset{\mathrm{df}}{=} a+th$ pak splňují $\|d-a\| = \|th\| < \varepsilon$, „jsou od a vzdáleny méně než o ε“, a tím pádem pro ně platí nerovnost: $\Phi(a) \leq \Phi(d) = \Phi(a+th)$. Přepíšeme-li tuto nerovnost pomocí definice ϕ, dostaneme $\phi_h(t) > \phi_h(0)$, pro $\forall t \in V_r(0)$ a $\forall h \in X$, ϕ_h nabývá minima v $t=0$ pro každé $h \in X$. Z předpokladu existence variace Φ v a plyne existence derivace funkce ϕ v bodě nula, $\phi_h'(0)$. V minulém ročníku byla vyslovena věta, která praví, že pokud funkce jedné reálné proměnné nabývá v některém bodě oboru hodnot extrému a v odpovídajícím bodě definičního oboru existuje její derivace, pak je tato derivace nulová. Proto pro každé $h \in X$ platí $\phi_h'(0) = 0$. Z definice Gâteauxova diferenciálu a funkce ϕ_h plyne závěr tvrzení věty (2) pro funkcionál Φ.

P o z n á m k a: Důkaz této věty byl proveden důkladně, abychom se důkazy vět analogických nemuseli příliš podrobně zabývat a přenechali práci čtenáři. Důkaz kopíruje ideu důkazu analogické věty[3] z teorie funkcí více proměnných: opět se provádí restrikce na „přímku“, a problém se tak převádí na větu o funkci jedné reálné proměnné. Doposud jsme se však zajímali pouze o přímky ve směrech bázových vektorů.

[3] Probrané v minulém semestru.

orientace všech těchto tečných prostorů je stejná.

P o z n á m k a: Orientovat vektorový prostor V dimenze n lze buď výběrem n lineárně nezávislých vektorů $v_1, \ldots, v_n$ z V nebo také výběrem nenulového prvku z $\Lambda^n(V) \simeq \mathbb{R}$. Pokud bychom v $\Lambda^n(V)$ zvolili bázi $\{\mathrm{d}x_i\}$, odpovídal by tento prvek 0-vektoru v, který splňuje $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = v\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ (zopakujte větu (33)).

Definice 30: Integrál diferenciální formy nezávislý na volbě parametrizace
Nechť S je orientovaná plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$, $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}_n$, $\omega \in E^k(\Omega)$. Pak pro libovolnou kladně orientovanou parametrizaci Φ plochy S položíme
$$\int_S \omega \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Phi \omega. \tag{51}$$

Věta 37: Nezávislost integrálu na parametrizaci
$\int_S \omega$ nezávisí na volbě parametrizace Φ.

Důkaz: Není téměř co dokazovat, práci jsme si odbyli ve větě (35). Stačí si uvědomit, že difeomorfizmus α, který mezi dvěma kladně (a tedy shodně) orientovanými parametrizacemi existuje, má kladný jacobián.

P o z n á m k a: Pro záporně orientovanou parametrizaci Φ bude samozřejmě $\int_\Phi \omega = -\int_S \omega$.

Celá teorie vypadá nyní uspokojivě. Bohužel množina všech regulárních ploch nezahrnuje některé užitečné exempláře.
Příklad: Kvádr, tedy plocha ohraničující interval v $\mathbb{R}_n$ není hladký. Pokud z něj ale vyjmeme všechny hrany, zbude soubor konečného počtu hladkých regulárních ploch.
Sféra není regulární plocha, neboť je kompaktní; prosté zobrazení nemůže otevřenou množinu zobrazit na kompaktní množinu. Je možné ji ale například rozdělit na dvě poloviny a z nich vyjmout „plochy řezu“ (v $\mathbb{R}_3$ je to kružnice).
Rýsuje se tedy řešení: z plochy S vyjmeme „problémovou“ množinu M, která je dostatečně „malá“, a formu zintegrujeme přes $S \setminus M$. Klasifikace „dostatečně malá“ v předchozím odpovídala tomu, že v M byl konečný počet ploch dimenze menší než $\dim S$. Pojem regulární plochy tedy zobecníme.

Definice 31: Zobecněná plocha, orientace zobecněné plochy, integrál přes zobecněnou plochu
Nechť $M \subset \mathbb{R}_n$, a dále nechť existují regulární plochy $M_1, \ldots, M_s \subset \mathbb{R}_n$ dimenze k a množina $N \subset \mathbb{R}_n$ takové, že

1. $M = N \cup \bigcup_i M_i$ a množiny $M_1, \ldots, M_s, N$ jsou po dvou disjunktní,
2. existují plochy $N_1, \ldots, N_t$ dimenze nejvýše $k-1$ takové, že $N \subset \bigcup_j N_j$.

Každý takový rozklad $\{M_i, N\}$ množiny M nazveme přípustný rozklad M. Plochu M nazveme zobecněnou plochou dimenze k, pokud existuje alespoň jeden její přípustný rozklad.
Orientovat M znamená orientovat každou z částí M_i. Dva rozklady $\{M_i, N\}$, $\{M_j', N'\}$ množiny M označíme jako souhlasně orientované, pokud jsou obě orientace $M_i \cap M_j'$ plynoucí z orientace M_i a M_j' stejné pro každé i, j. Za kladně orientovaný rozklad označím každý rozklad souhlasně orientovaný s rozkladem, jehož všechny části M_i jsou orientovány kladně.
Budiž $M \subset \mathbb{R}_n$ orientovaná zobecněná plocha, $\Omega \subset \mathbb{R}_n, M \subset \Omega$ otevřená množina a $\omega \in E^k(\Omega)$. Potom pro libovolný přípustný kladně orientovaný rozklad $\{M_i, N\}$ položíme
$$\int_M \omega \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} \omega. \tag{52}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi_f(y_0,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\Phi_f(y_0+th)\big]_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_a^b f\big(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big]_{t=0} = \\
&= \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f\big(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big[f\big(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\cdot\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=0} + \right. \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\big[f\big(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\big(y_0(x)+th(x)\big)\right]_{t=0} + \\
&\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial z}\big[f\big(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\big)\big]_{t=0}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\big(y_0'(x)+th'(x)\big)\right]_{t=0}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y_0(x),y_0'(x)\big)h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y_0(x),y_0'(x)\big)h'(x)\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Úmluva: Derivace funkce f podle první, resp. druhé, resp. třetí proměnné značme: f_x, resp. f_y, resp. f_z. Často nebudeme uvádět argument funkce — tehdy míníme argument $(x, y_0(x), y_0'(x))$.

Poznámka: Cílem našeho snažení bude uvést podmínku, kterou musí splňovat funkce, pokud v ní nabývá klasický funkcionál extrému. Podmínka je ve tvaru obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu pro tuto funkci. Nalezneme-li její řešení, neznamená to ovšem, že na něm typický funkcionál nabývá extrému, je to pouze jeden z podezřelých bodů (někdy též nazývaný kritický či stacionární bod), tedy bod, kde je variace typického funkcionálu nulovou funkcí. Využijeme samozřejmě větu (2).

Poznámka: Poučeni Eulerovou podmínkou víme, že pokud $y_0 \in C^1(\langle a,b\rangle)$ je bod extrému variovatelného funkcionálu Φ, pak $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)\big)\big(\delta\Phi_f(y_0,h) = 0\big)$. Pro typický funkcionál lze tento vztah přepsat v rovnost:

$$\int_a^b (f_y h + f_z h') = 0. \tag{10}$$

Použijeme-li integraci per partes, dostaneme podmínku:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (f_y h) + [f_z h]_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z h\right) &= \int_a^b \left(f_y h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z h\right) = \\
= \int_a^b \left[\left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z\right) h\right] &= 0,\ \forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Kdybychom se pohybovali na prostorech konečné dimenze (nikoliv na prostoru spojitých funkcí $\mathring{C}^1$) a integrál nahradili skalárním součinem na tomto prostoru (např. součinem generovaným eukleidovskou metrikou), pak by z rovnosti (11) již plynulo, že: $f_y - \mathrm{d}f_z/\,\mathrm{d}x = 0$. Jedna známá věta z lineární algebry totiž tvrdí, že pro konečně dimenzionální prostory se skalárním součinem existuje právě jeden vektor, který je kolmý ke každému vektoru — nulový vektor.
Další problém ovšem je, zda vůbec lze f_z derivovat podle x. K důkazu, že tomu tak je, použijeme dvou následujících lemmat.

Příklad: Nepovinně. Stejným „trikem s metodou per partes“ bychom mohli dokázat podmínku postačující pro to, aby nalezený kritický bod byl minimem (či maximem). Pokud užijeme Lagrangeovu větu (3), můžeme ukázat, že minimum nastává, pokud platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} > 0.$$

Vypočteme nejprve druhý Gâteauxův diferenciál. Do výsledku věty (4) znovu dosadíme $y_0 \mapsto y_0 + th$ a derivujeme podle t v bodě $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(\omega) &= f(\varphi(u))\,\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\,\mathrm{d}u_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u_k \\
\int_{O'} \alpha^*(\varphi^*(\omega)) &= \int_{O'} f\big[(\varphi\circ\alpha(u))\big]\,\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\,\mathrm{d}\alpha_1(u')\ldots\mathrm{d}\alpha_k(u'); \\
\int_O \varphi^*(\omega) &= \int_O f(\varphi(u))\,\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\,\mathrm{d}u_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u_k.
\end{aligned}
$$

Nyní dokončíme přenášení druhého řádku z O do O' (provedeme naznačené diferencování α_i a upravíme dle poznámky za větou (34)) a dále použijeme na třetí řádek větu o substituci v Lebesgueově integrálu (přejdeme z O do O').

$$
\begin{aligned}
\int_{O'} \alpha^*(\varphi^*(\omega)) &= \int_{O'} f\big[(\varphi\circ\alpha(u))\big]\,\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\,\frac{\partial u_1,\ldots,u_k}{\partial u_1',\ldots,u_k'}\,\mathrm{d}u_1'\ldots\mathrm{d}u_k', \\
\int_O \varphi^*(\omega) &= \int_{O'} f\big[(\varphi\circ\alpha)(u)\big]\,\frac{\partial x_1,\ldots,x_k}{\partial u_1,\ldots,u_k}\left|\frac{\partial u_1,\ldots,u_k}{\partial u_1',\ldots,u_k'}\right|\mathrm{d}u_1'\ldots\mathrm{d}u_k'.
\end{aligned}
$$

Podle lemmatu víme, že $\det J_\alpha$ nemění znaménko, a tedy můžeme zapsat

$$\int_{O'} \alpha^*(\varphi^*(\omega)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u_1,\ldots,u_k}{\partial u_1',\ldots,u_k'}\right)\int_O \varphi^*(\omega),$$

což při srovnání s definicí souhlasné, resp. nesouhlasné orientace dává tvrzení věty.

Poznámka (odjinud): Všimněte si, že místo věty o substituci jsme (alespoň formálně a až na znaménko, tj. absolutní hodnotu) mohli použít tvrzení $\det AB = \det A \det B$. Můžeme to chápat jako náznak, že použití determinantu ve větě o substituci mělo svůj význam.

Poznámka: V dalším budeme blíže zkoumat plochy v $\mathbb{R}_n$. Definujeme nejprve pojem křivkové souvislosti plochy, který patří do požadavků na „kulturnost“ plochy.

Definice 27: Souvislá množina
Řekneme, že otevřená množina $O \subset \mathbb{R}_n$ je souvislá, pokud pro libovolné dva její body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : \langle a,b\rangle \to O$ takové, že $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y$.

Označení: Množinu $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ nazveme oblast, pokud je otevřená a souvislá.

Cvičení: Dokažte tvrzení, že spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina.

Definice 28: Regulární plocha dimenze k
Množinu $S \subset \mathbb{R}_n$ nazveme plochou dimenze nejvýše k, pokud existuje oblast $O \subset \mathbb{R}_k$ a zobrazení $\varphi : O \to \mathbb{R}_n$ hladké takové, že $\varphi(O) = S$.
Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}_n$ je regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}_n$, pokud existuje interval $I \subset \mathbb{R}_k$ a zobrazení $\varphi : I \to \mathbb{R}_n$ prosté a hladké[32] takové, že $S = \varphi(I^0)$ a hodnost J_φ je na[33] I^0 rovna k.

Poznámka: Pokud se omezíme na regulární plochy, nabízí se samozřejmě otázka, kolik existuje tříd (rozdělených podle ekvivalence $\sim$) parametrizací dané plochy. Odpověď dává následující věta.

Věta 36: Třídy parametrizací regulární plochy
Existují právě dvě třídy ekvivalence regulárních parametrizací libovolné regulární plochy dimenze k v $\mathbb{R}_n$.

Lemma o difeomorfizmu mezi regulárními parametrizacemi:
Jsou-li $\varphi : I \to \mathbb{R}_n, \varphi' : I' \to \mathbb{R}_n$ regulární parametrizace téže regulární plochy dimenze k v $\mathbb{R}_n$, pak existuje difeomorfizmus $\alpha : I'^0 \to I^0$ takový, že $\varphi' = \varphi\circ\alpha$.

Důkaz lemmatu: Zřejmě stačí brát $\alpha = \varphi^{-1}\circ\varphi'$. Je ovšem třeba ještě ověřit, zda takové α je skutečně difeomorfizmus. Nejprve prověřme hladkost: zřejmě stačí, aby φ^{-1} bylo hladké. Je-li však φ regulární,

[32] Zopakujme: φ je hladké na neotevřené množině M, pokud existuje otevřená množina $O \supset M$, na níž je některé rozšíření φ hladké.
[33] I^0 značí vnitřek množiny I.

(neboť její derivace α je spojitá dle předpokladu), tak i β je spojitě diferencovatelná na $\langle a,b\rangle$. Snadno též spočteme, že $\beta'(x) = A'(x) = \alpha(x)$ na $\langle a,b\rangle$.

Nyní budeme formulovat větu se zásadním významem pro tuto kapitolu. Poskytne nám praktický prostředek, jak hledat stacionární body typického funkcionálu.

Věta 5: Eulerova–Lagrangeova rovnice

Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je prvek $C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$, Φ_f je typický funkcionál na $C(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$. Jestliže pro $y_0 \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$ platí $\big(\forall h \in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)\big)\big(\delta\Phi(y_0,h) = 0\big)$, pak

1. existuje derivace
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big)\right) \tag{16}$$

2. a pro y_0 platí tzv. Eulerova–Lagrangeova rovnice:
$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z = 0. \tag{17}$$

Důkaz: Stačí užít lemmatu 2 pro funkce:

$$\alpha(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial y} f\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) \tag{18}$$
$$\beta(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big). \tag{19}$$

P o z n á m k a : Uvažme dva speciální případy funkce f, úzce související s fyzikální problematikou. Věty nebudou formulovány zcela precizně. Pokud si čtenář nebude jist jejich významem, doporučujeme mu, aby si tvrzení přeformuloval přesněji — viz poznámku za následujícími dvěma větami.

Věta 6: 1. integrál Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro $f = f(x,z)$

Eulerova–Lagrangeova rovnice pro funkci $f(x,z)$ je tvaru:
$$\frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) = \text{konst.} \tag{20}$$

Důkaz: Stačí dosadit $f(x,z)$ do Eulerovy–Lagrangeovy rovnice a uvážit, že $f_y = 0$.

Věta 7: 1. integrál Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro $f = f(y,z)$

Eulerova–Lagrangeova rovnice pro funkci $f(y,z)$ je tvaru:
$$f - y' f_z = \text{konst.} \tag{21}$$

Důkaz: Zkoumejme derivaci rovnosti (21) pro $y = y_0$ s ohledem na $\partial f/\partial x = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f - y'\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{y=y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}y_0' + \frac{\partial f}{\partial z}y_0'' - y_0''\frac{\partial f}{\partial z} - y_0'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z} =$$
$$= y_0'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

jak plyne z obecné věty (5).

P o z n á m k a : Uvědomte si, že věty tvrdí toto: Splňuje-li funkce y_0 Eulerovu–Lagrangeovu rovnici, pak splňuje rovnici jejího prvního integrálu. Obrácené tvrzení však obecně neplatí.

Na závěr tohoto paragrafu ukážeme, jak s pomocí Eulerovy–Lagrangeovy rovnice řešit klasický problém brachistochrony. Zopakujme zadání:

3. Použijeme-li body 1. a 2., vidíme, že stačí uvažovat formy $\omega = f \in E^0(\Omega)$ a $\tau = \mathrm{d}x_i \in E^1(\Omega)$. V prvním případě je
$$(\Phi\circ\Psi)^* f = f\circ(\Phi\circ\Psi) = (f\circ\Phi)\circ\Psi = \Psi^*\big(\Phi^*(f)\big).$$
Ve druhém případě budeme upravovat obě strany rovnosti:
$$(Phi\circ\Psi)^*(\mathrm{d}x_i) = \mathrm{d}(\Phi_i\circ\Psi) = \sum_{j=1}^{l}\frac{\partial(\Phi_i\circ\Psi)}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j = \sum_{j=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}\Big(\frac{\partial\Phi_i}{\partial v_s}\circ\Psi\Big)\frac{\partial\Psi_s}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j$$
$$\Psi^*\big(\Phi^*(\mathrm{d}x_i)\big) = \Psi^*\Big(\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial\Phi_i}{\partial v_s}\,\mathrm{d}v_s\Big) = \sum_{s=1}^{k}\left(\Big(\frac{\partial\Phi_i}{\partial v_s}\circ\Psi\Big)\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial\Psi_s}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j\right).$$
Oba výrazy jsou si zřejmě rovny. To, že v derivaci složené funkce zbyl místo parciálních derivací výraz $(\partial\Phi_i/\partial v_s)\circ\Psi$, znamená pouze, že po provedení derivace budeme do výsledné funkce dosazovat v proměnných u_j a nikoliv v_s.

4. Položíme $x_i = \Phi_i(u_1,\ldots,u_n)$ a podle bodu 2. se stačí zajímat pouze o $\tau = \mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n$. Uvedené tvrzení jsme potom dokázali ve větě (33), bodu 4. Nyní ji pouze používáme pro vektory $\mathrm{d}x_i = \sum_j \partial x_i/\partial u_j\,\mathrm{d}u_j$.

§5. Integrace diferenciálních forem

P o z n á m k a : Zatím jsme téměř výhradně definovali pojmy („forma“ a „parametrizace“) a ukazovali, jak se s novými objekty pracuje. Nyní se přesvědčíme, zda tyto definice dávají smysluplné výsledky.

Definice 24: Integrace přes parametrickou plochu

1. Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}_n$ je otevřená množina a $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n \in E^n(\Omega)$. Potom definujeme
$$\int_\Omega \omega \stackrel{\mathrm{df}}{=} (L)\int_\Omega f\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n, \tag{49}$$
pokud je výraz na pravé straně definován.

2. Pokud je $\Phi : \mathbb{R}_k \supset O \to \Omega \subset \mathbb{R}_n$ hladké a $\omega \in E^k(\Omega)$, definujeme
$$\int_\Phi \omega \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_O \Phi^*(\omega). \tag{50}$$

P o z n á m k a : Rozdíl mezi oběma definicemi je zřejmý: prvá část říká, jak vůbec integrovat objekt ω a ztotožňuje bázový vektor $\mathrm{d}x_i$ se stejným znakem v Lebesgueově integrálu. Druhá část dává návod jak počítat integrál po k-dimenzionální „rozumné“ ploše v n-dimenzionálním prostoru tak, aby nevyšel nula.

P o z n á m k a : Zatím jsme na parametrizaci Φ nekladli žádné požadavky kromě hladkosti. Φ takto například nemusí být regulární nebo může plochu Ω „proběhnout několikrát“, čímž se samozřejmě výsledná hodnota integrálu násobí. Chceme-li, aby integrál na parametrizaci nezávisel, musíme tedy volbu parametrizace poněkud omezit.

Příklad: Ověřme, zda podle definice vycházejí nám známé vztahy pro křivkový a plošný integrál (srovnejte s úvodním paragrafem). Pro $\omega = f_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + f_n\,\mathrm{d}x_n \in E^1(\Omega)$ a parametrizaci $\varphi : (a,b)\to\mathbb{R}_n$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ je
$$\int_\varphi \omega = \int_a^b \varphi^*(\omega) = \int_a^b \Big[f_1\big(\varphi_1(t)\big)\varphi_1'(t) + \ldots + f_1\big(\varphi_n(t)\big)\varphi_n'(t)\Big]\,\mathrm{d}t.$$

zobecněných rychlostech[5] a čase $q_1,\dots,q_n,\dot{q_1},\dots,\dot{q_n},t$, definujeme tzv. lagrangeián $L=T-U$. Nám bude stačit vědět, že obvykle $L\in C^1(\mathbb{R}^7)$. Hamiltonův princip říká, že funkcionál S (zvaný akce), definovaný $S(q)=\int_A^B L\big(t,q_i(t),\dot{q}_i(t)\big)\,dt$ a přiřazující každé trajektorii $q(t)$ reálné číslo, je pro realizovaný pohyb stacionární. Realizována je jen ta trajektorie, jež odpovídá stacionární hodnotě akce. Tuto podmínku lze pomocí našeho formalizmu zapsat: $\delta S=0$. Jelikož S je typický funkcionál pro funkci L, plyne z podmínky stacionárnosti, že lagrangeián L splňuje tzv. Lagrangeovu rovnici 2. druhu, v níž poznáváme Euler–Lagrangeovu rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0. \tag{22}$$

Pomocí lagrangeiánu lze definovat známé pojmy Newtonovy mechaniky:

1. $p_i=\partial L/\partial\dot{q}^i$ se nazývá kovektor hybnosti (zobecněná hybnost),
2. $f_i=\partial L/\partial q^i$ se nazývá kovektor síly (zobecněná síla),
3. $E(t,q,\dot{q})=\sum_{i=1}^n \dot{q}^i p_i - L$ se nazývá zobecněná energie.

Nechť nadále index značí příslušnou parciální derivaci.

Buď $h\in \mathring{C}^1(\langle a,b\rangle)$ a $q_i=he_i$ (tedy $q_i=h\delta_{ji}$). Ve fyzice bývá zvykem psát následující řetězec vztahů:

$$\delta S_h(q)=\delta\int L(t,q_i(t),\dot{q}_i(t))\big|_{q=he_i}\,\mathrm{d}t=\int(L_{q_i}h+L_{\dot{q}_i}h')\,\mathrm{d}t=\int L_{q_i}h+\int L_{\dot{q}_i}h'=$$
$$=\int L_{q_i}h+[L_{\dot{q}_i}h]_a^b-\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_{\dot{q}_i}h=\int(L_{q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_{\dot{q}_i})h=0.$$

Položíme-li integrand rovný nule, dostaneme Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro akci či, chcete-li, Lagrangeovy rovnice druhého druhu (i probíhá hodnoty $1,\dots,n$).

Zmiňme ještě zákony zachování a první integrály Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro jednoduchost při $n=1$.

1. Nechť lagrangeián nezávisí na čase, tj. $L=L(q,\dot{q})$. První integrál Eulerovy–Lagrangeovy rovnice dle věty (7) je: $L(q,\dot{q})-\dot{q}L_{\dot{q}}(q,\dot{q})=\text{konst.}$ Dosadíme-li do této rovnice, obdržíme po derivaci levé strany podle t: $\mathrm{d}\,(L-\dot{q}.p)/\,\mathrm{d}t=0$. Dle definice energie E dostáváme: $E=\text{konst.}$, tedy zákon zachování energie.

2. Pokud lagrangeián nezávisí na zobecněné souřadnici q, pak dle věty (6) získáme následující rovnici: $\mathrm{d}L_{\dot{q}}/\,\mathrm{d}t=0$. Tato rovnost podle předchozích definic značí: $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}t=0$, tedy $p=\text{konst.}$ Získali jsme zákon zachování hybnosti.

[5] $\dot{q}(t)\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{d}q(t)/\,\mathrm{d}t$

3. $k=n-1$. $E^{n-1}(\Omega)=\big\{\omega=f_1(x)\,\mathrm{d}x_2\wedge\dots\mathrm{d}x_n-f_2(x)\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\dots+\dots\big\}=\big\{\omega=\sum_i f_i(x)(-1)^{i+1}\,\mathrm{d}x_1\wedge\dots\mathrm{d}x_{i-1}\wedge\mathrm{d}\hat{x}_i\wedge\mathrm{d}x_{i+1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_n\big\}$ pro $f_i\in C^\infty(\Omega)$. Označení $\mathrm{d}\hat{x}_i$ znamená, že člen $\mathrm{d}x_i$ v součinu *chybí*. Co se týče střídání znamének, jedná se pouze o konvenci v označování souřadnic prvků E^{n-1}. Tato volba má význam později, když budeme chtít tyto souřadnice ztotožnit (v tomto případě) s rotací vektorového pole.
4. $k=n$. $E^n(\Omega)=\big\{\omega=f(x)\,\mathrm{d}x_1\wedge\dots\mathrm{d}x_n|f\in C^\infty\big\}\simeq C^\infty(\Omega)$. Prostor E^n je samozřejmě „podobný“[31] prostoru všech hladkých skalárních polí, proto tyto diferenciální formy nazýváme pseudoskaláry.

P o z n á m k a: Zabývali jsme se zatím pouze otázkou definice diferenciálních forem, nemluvili jsme ještě vůbec o tom, jak tyto objekty integrovat. Je-li plocha S parametrizována funkcí Φ, to jest $\Phi:\mathbb{R}_k\supset O\to\mathbb{R}_n$, O otevřená, $\Phi(O)=S\simeq$ k-dimenzionální plocha, pak očekáváme, že integrál z f přes S je rozumné definovat pomocí *přenesení do prostoru parametrů* nad O. Budou-li ovšem Φ a Φ' dvě různé parametrizace téže plochy, musí pak nutně platit rovnost integrálů?

$$\int_S f\overset{\mathrm{df}}{=}\int_O f\circ\Phi\overset{?}{=}\int_{O'}f\circ\Phi'.$$

Tušíme, že se jedná o určitou substituci, a tedy by nezávislost mohl za určitých předpokladů „zajistit nějaký jacobián“.

§4. Přenášení diferenciálních forem

P o z n á m k a: Uvažujeme-li formu $\omega=f(x)\,\mathrm{d}x_i\in E^1(\Omega), O\subset\Omega$ a parametrizaci $\Phi:O\to\mathbb{R}_n$, $x=\Phi(u)=\big(\Phi_1(u),\dots,\Phi_n(u)\big)$, kde $x=(x_1,\dots,x_n)\in S, u=(u_1,\dots,u_k)\in O$, získáme „formálním dosazením“ formu na O:

$$f\big(\Phi(u)\big)\,\mathrm{d}\Phi_i(u)=f\big(\Phi(u)\big)\sum_{j=1}^k\frac{\partial\Phi_i(u)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j.$$

Očekáváme, že obě formy by měly být „stejné“ — tedy alespoň po integraci přes S, resp. O dát stejný výsledek. Protože zatím nevíme, jak počítat integrál formy přes plochu, navrhneme toto jako jeho definici a bude nás samozřejmě zajímat, zda takto definovaný integrál závisí na volbě Φ.

Definice 22: Diferenciál funkce
Budiž $f\in C^\infty(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}_n, x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$. Diferenciálem $\mathrm{d}f$ funkce f nazveme následující prvek $E^1(\Omega)$:

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i. \tag{46}$$

Diferenciál je tedy zobrazení $E^0(\Omega)\to E^1(\Omega)$.

Příklad: Pro souřadnicovou funkci $\varphi_i:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}$, $\varphi_i(x)=x_i$ je zřejmě $\mathrm{d}\varphi_i=\mathrm{d}x_i$.

Definice 23: Přenášení diferenciálních forem
Budiž Φ hladké zobrazení otevřené množiny $O\subset\mathbb{R}_k$ do $\Omega\subset\mathbb{R}_n$. Nechť $\omega=\sum_{|I|=p}\omega_I(x)\,\mathrm{d}x_I\in E^p(\Omega)$. Pak definujme zobrazení $\Phi^*:E^p(\Omega)\to E^p(O)$, $\Phi(u_1,\dots,u_k)=\big(\Phi_1(\mathsf{u}),\dots,\Phi_n(\mathsf{u})\big)$ následovně:

$$\Phi^*(\omega)=\sum_{|I|=p}\omega\big(\Phi(u)\big)\,\mathrm{d}\Phi_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}\Phi_{i_p},\ \text{pokud } I=\{i_1,\dots,i_p\},\ i_1<\dots<i_p. \tag{47}$$

Příklad: Tento postup jsme již intuitivně používali v úvodu (viz poslední příklad úvodního paragrafu — tam jsme se pouze přenášeli $\mathbb{R}_3$ do $\mathbb{R}_3$). Nyní jsme jej pouze formálně definovali a následně o něm dokážeme některé věty.

[31] Rozuměj duální.

jeho dělení I_j a čísla $f_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$ taková, že

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_j \chi_{I_j}.$$

Zde χ_{I_j} označuje charakteristickou funkci intervalu I_j. Tato funkce je rovna jedné na tomto intervalu a nule všude jinde. Množinu všech schodovitých funkcí označíme H. Integrál ze schodovité funkce definujeme přirozeným vztahem

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{N} f_j V(I_j).$$

Poznámka: Rozšíříme-li dělení z intervalu I na větší interval J, integrál se nezmění, protože funkce je na množině $J \setminus I$ nulová (jsou zde nulové charakteristické funkce χ^{I_j}). Ani při zjemnění se integrál nezmění, jak každý hned vidí. Integrál tedy nezávisí na volbě dělení — pro dvě různá dělení stačí uvažovat jejich společné zjemnění.

Věta 8: O struktuře množiny H

1. Množina H je vektorový prostor.
2. Jestliže $f \in H$, pak $|f| \in H$.
3. $(\forall f, g \in H)\big(\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g\big)$.
4. $(\forall f \in H)\big((\forall x)(f(x) \geq 0)$[7] $\Rightarrow (\int f \geq 0)\big)$.
5. Buď $\{f_k\}_1^\infty$ posloupnost funkcí z H, $(\forall x)(f_k(x) \searrow 0)$[8], pak $\int f_k \to 0$.

Důkaz: První čtyři tvrzení této věty jsou natolik jednoduchá, že je čtenář po konfrontaci s definicí jistě prohlásí za zřejmá. Páté tvrzení je naproti tomu netriviální a jeho důkaz bude vyžadovat trochu opatrnější uvažování.

Označme I interval, mimo nějž je $f_1 = 0$. Z monotonie konvergence plyne, že žádná z funkcí f_k nemůže mimo tento interval nabývat nenulových hodnot. Dále označme I_j^k dělení intervalu I taková, že na každém podintervalu I_j^k je f_k konstantní (jedná se o dělení užitá v definici schodovité funkce). Každému takovému dělení přísluší konečná množina stěn S^k (zařaďme tam i vnější stěny intervalu I). Sjednocení všech S^k pro $k \in \mathbb{N}$ označíme Z. Množina Z je zjevně spočetná (obsahuje spočetně mnoho stěn).

Nejprve uvažme, že libovolnou stěnu je možné pro libovolně malé ε pokrýt intervalem K, jehož objem bude menší[9] než ε. Když potom seřadíme prvky spočetné množiny Z do posloupnosti indexované přirozenými čísly počínaje jedničkou a i-tý člen pokryjeme intervalem o objemu $V(K_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, podaří se nám tak pokrýt celé Z systémem intervalů o celkovém objemu menším než libovolné kladné $\varepsilon = \sum_i \varepsilon/2^i$.

Nyní obraťme naši pozornost k zatím nepokrytému zbytku. Nechť ε je pevné, K_i je spočetný systém intervalů pokrývajících dohromady stěny, pro nějž platí $V(\bigcup K_i) < \varepsilon$. Každá z množin $I \setminus S^k$ je otevřená ($I \setminus Z$ obecně není) a f_k je na ní spojitá. Pro každé $x \in I \setminus Z$ existuje $k_0(x)$ takové, že $f_{k_0}(x) < \varepsilon$ (nerovnost samozřejmě díky monotonii platí i pro každé $k > k_0(x)$). Díky spojitosti existuje taková otevřená množina $J_x \subset I \setminus S^{k_0}(x)$, na níž je funkce f_{k_0} konstantní, tedy menší než ε. Intervaly J_x a K_i tvoří otevřené (ne nutně spočetné) pokrytí kompaktní množiny $\bar{I}$. Z tohoto pokrytí lze vybrat spočetné [10] a ze spočetného na základě Borelovy věty konečné $\{J_{x_1}, \dots, J_{x_m}, K_{i_1}, \dots, K_{i_p}\}$. Množinám J_{x_1} až J_{x_m} přísluší čísla $k_0(x_1)$ až $k_0(x_m)$, jejichž maximum označíme N. Pro každé $x \in I \setminus Z$ je $h_N(x) < \varepsilon$, můžeme tedy integrál z h_n pro $n \geq N$ omezit nerovností

$$\int h_n(x) \leq \int h_N(x) < \varepsilon V(I) + \varepsilon M,$$

[7] V dalším textu budeme používat zkráceného zápisu $f \geq 0$

[8] Monotónní konvergence: $(\lim f_k = 0) \wedge \big((\forall k)(f_{k+1} \leq f_k)\big)$

[9] Stěnu $(a_1, b_1\rangle \times \dots \times \{c_i\} \times \dots \times (a_n, b_n\rangle$ vložíme do kvádru $(a_1, b_1\rangle \times \dots \times (a_n, b_n\rangle$, v němž $c_i \in (a_i, b_i)$ a $b_i - a_i < \varepsilon/(b_1 - a_1) \dots (b_{i-1} - a_{i-1})(b_{i+1} - a_{i+1}) \dots (b_n - a_n)$.

[10] To jsme zatím nedokázali. Nepovinně: tvrzení souvisí s existencí spočetné husté podmnožiny $\mathbb{R}^n$, což může být například $\mathbb{Q}^n$, pomocí níž můžeme sestrojit spočetnou tzv. bázi otevřených množin. To je systém, z něhož lze pomocí operace sjednocení vygenerovat libovolnou otevřenou množinu. Nejsnazší je konstrukce takové báze jakožto množiny všech otevřených koulí s racionálním poloměrem a středem v oné spočetné husté podmnožině. Máme-li pak nějaké otevřené pokrytí, můžeme každou z množin rozvinout podle této báze a obdržet tak celé pokrytí zapsané jako sjednocení nějaké podmnožiny báze, která je spočetná.

Prostor s bází $\{e_I\}_I \subset \{1, \dots, n\}$ označíme $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$:

$$\Lambda^*(\mathbb{R}_n) = \Big\{a = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} a_I e_I \Big| \; a_I \in \mathbb{R}\Big\} \simeq \mathbb{R}^{2^n}.$$

Násobení prvků z $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$ je dáno předpisem (41).

Definujeme podprostory $\Lambda^k(\mathbb{R}_n) \subset \Lambda^*(\mathbb{R}_n)$ a jejich prvky nazveme k-vektory:

$$\Lambda^k(\mathbb{R}_n) = \Big\{a = \sum_{|I|=k} a_I e_I \Big| \; a_I \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Poznámka:

1. Pro libovolné I je $e_\emptyset \wedge e_I = e_I = e_I \wedge e_\emptyset$. Odpovídá to představě, že 0-vektory jsou „čísla“ (tj. $\Lambda^0 \simeq \mathbb{R}$).
2. V $\mathbb{R}_3$ „vypadají“ vektory a 2-vektory podobně; obecně je $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}_n) \simeq \Lambda^1(\mathbb{R}_n) \simeq \mathbb{R}_n$. Bereme-li např. $a, b \in \Lambda^1(\mathbb{R}_3)$ a $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}_3 \simeq \Lambda^1(\mathbb{R}_3)$, pozorujeme podobnost mezi 2-vektorem $a \wedge b$ a vektorem $\mathsf{x} \times \mathsf{y}$. $\Lambda^k(\mathbb{R}_n)$ je ve skutečnosti duální prostor (kovektorů) k prostoru vektorů $\mathbb{R}_{\binom{n}{k}}$.

Věta 33: Vlastnosti vnější algebry $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$

1. $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}_n) = \binom{n}{k}$, $\dim \Lambda^*(\mathbb{R}_n) = 2^n$.
2. Operace $\wedge$ je asociativní.
3. $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}_n), \tau \in \Lambda^l(\mathbb{R}_n) \Rightarrow \omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$.
4. Je-li $v_1, \dots, v_n \in \Lambda^1(\mathbb{R}_n)$, pak $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \det(v_i^j) e_{1\dots n}$.

Poznámka:

1. Teprve díky druhému bodu věty můžeme psát $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = e_I$ pro $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ bez závorek.
2. Jsou-li $v_1, \dots, v_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}_n)$ zapsány v bázi jako $v_j = \sum_i v_j^i e_i$, pak platí

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{|I|=k} e_I \det V_I,$$

kde pro $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ je $\{V_I\}_{i \in I}$ minor matice $\{v_j^i\}, j = 1, \dots, k, \; i = 1, \dots, n$ (ponecháváme pouze sloupce s indexy z I).

3. Pozor, podle bodu 3. vidíme, že obecně neplatí $\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = -\mathrm{d}x_J \wedge \mathrm{d}x_I$, a tudíž násobení $\wedge$ na $E^*(\Omega)$ není ani komutativní ani antikomutativní! Nicméně, antikomutativita je splněna například pro 1-formy (1-vektory).

K vlastnímu rozmyšlení předkládáme čtenáři následující tvrzení:

Lemma:

Pro každé tři množiny $I, J, K \subset \{1, \dots, n\}$ (po dvou disjunktní) platí

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J, K \end{pmatrix} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}, \text{ a } \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J, K \end{pmatrix}.$$

Důkaz:

1. bylo již zadáno jako úkol (7).
2. Zapíšeme-li libovolné dva prvky z $\Lambda^*(\mathbb{R}_n)$ pomocí bázových vektorů, je patrné, že díky distributivitě $\wedge$ vůči sčítání stačí pouze dokázat asociativitu právě pouze u bázových vektorů. Nechť $I, J, K \subset \{1, \dots, n\}$ jsou po dvou disjuktní (pokud by tomu tak nebylo, součin by vyšel samozřejmě nulový). S pomocí lemmatu pak odvodíme

$$(e_I \wedge e_J) \wedge e_K = e_{I \cup J} \wedge e_K \, \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} =$$

$$= e_{I \cup J \cup K} \, \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} = e_{I \cup J \cup K} \, \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}.$$

Ke stejnému výrazu dospějeme i pro $e_I \wedge (e_J \wedge e_K)$ (zkuste).

$\max\{-\alpha, 0\}$. Zjevně jsou to nezáporné funkce a α lze psát jako $\alpha^+ - \alpha^-$.

Věta 10: Vlastnosti schodovitých funkcí
Nechť $h, k, \{h_i\}_1^\infty \in H$. Pak

1. $\max\{h, k\}$, $\min\{h, k\} \in H$
2. $h \leq k \Rightarrow \int h \leq \int k$
3. $\left|\int h\right| \leq \int |h|$
4. $h_i \searrow 0$ s.v. $\Rightarrow \lim \int h_i = 0$
5. $h = k$ s.v. $\Rightarrow \int h = \int k$
6. $h \leq k$ s.v. $\Rightarrow \int h \leq \int k$

Důkaz:

1. Rozepíšeme $\max\{h, k\} = \frac{1}{2}[|h - k| + h + k]$ a použijeme větu (8), $\min\{h, k\} = -\max\{-h, -k\}$.
2. Platí $k - h \geq 0$, tedy podle věty (8) $\int (k - h) \geq 0$ a opět dle věty (8) $\int k \geq \int h$.
3. Plyne z $(-h \leq |h|) \wedge (h \leq |h|)$ a předchozího bodu.
4. Nechť je nejprve $h_i \geq 0$ nerostoucí všude, tedy $\lim \int h_i \geq 0$ a dále $\lim h_i = 0$ skoro všude. Označme Z inkriminovanou množinu míry nula. Dále označme $M \equiv \max h_1$. Dle definice $\exists \{k_i\}_1^\infty \in H$ nezáporná neklesající, že $(\forall i)\big(\int k_i < \varepsilon/M\big)$, $(\forall x \in Z)\big(\sup k_i(x) \geq 1\big)$. Tedy funkce $h_i - Mk_i$ tvoří nerostoucí posloupnost. O této posloupnosti tvrdíme, že $\lim(h_i - Mk_i) \leq 0$. To je jistě pravda, neboť pro body z $\mathbb{R}^n \setminus Z$ jde h_i do nuly a $Mk_i \geq 0$ a pro body ze Z je pro všechna i od určitého indexu výše $Mk_i \geq M$, tedy větší nebo rovno než jakákoliv z funkcí h_i kdekoliv. Pomocí posledního bodu věty (8) můžeme usoudit, že
$$\lim_{i\to\infty} (h_i - Mk_i)^+ = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int (h_i - Mk_i)^+ = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int (h_i - Mk_i) \leq 0,$$
odkud roztržením integrálu na dva členy plyne $\lim \int h_i \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

   K důkazu obecnější verze budeme potřebovat tvrzení následujících bodů, proto napřed dokážeme je.
5. Definujme konstantní posloupnost funkcí $\{|k - h|\}_1^\infty$. Je to posloupnost nerostoucí a nezáporná a dle předpokladu $|k - h| = 0$ s.v. Můžeme na ni tedy použít slabší verzi předchozího bodu, kterou jsme již dokázali, podle níž $\int |k - h| = 0$. Podle bodu 3 této věty $\left|\int (k - h)\right| \leq \int |k - h| = 0$, čili $\int k = \int h$.
6. Podle předpokladů $|k - h| = k - h$ s.v., zároveň dle věty (8) $|k - h| \geq 0 \Rightarrow \int |k - h| \geq 0$. Užitím předchozího bodu pak $0 \leq \int |k - h| = \int (k - h) = \int k - \int h$.
7. Nyní se vrátíme k obecné verzi bodu 4. Nechť existuje množina Z míry nula taková, že $(\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z)(h_i \searrow 0)$. Definujme novou posloupnost $\{\widetilde{h}_i\}_1^\infty$ vztahy $\widetilde{h}_1 = h_1^+$, $\widetilde{h}_i = \min\{\widetilde{h_{i-1}}, h_i^+\}$ Pro tuto posloupnost platí předpoklady slabší verze bodu 4, neboť je nerostoucí a má nulovou limitu skoro všude, tedy $\lim \int \widetilde{h}_i = 0$. Navíc ovšem $\widetilde{h}_i = h_i$ s.v., což podle bodu 5 znamená, že $\lim \int h_i = 0$.

§3. Systém lebesgueovsky integrovatelných nezáporných funkcí: věty o limitních přechodech

Definice 12: Systém L^+
Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ náleží do L^+ (systém lebesgueovsky integrovatelných nezáporných funkcí), právě když existuje posloupnost nezáporných schodovitých $h_i \nearrow f$ s.v. a $(\exists K \in \mathbb{R})(\int h_i \leq K)$. Pro takovou funkci definujeme horní Lebesgueův integrál
$$(L) \int f = \lim \int h_i$$

Toto je známá Laplaceova rovnice vyjadřující například průběh elektrostatického potenciálu v prostoru bez nábojů. Její řešení se nazývají harmonická a mohou například záviset pouze na radiální souřadnici $(y = y(r))$ a být pak ve tvaru $\ln |r|$ pro $n = 2$ a $|r|^{2-n}$ pro ostatní n.

Příklad: Na $M \subset \mathbb{R}_4$ (časoprostoru) definujme klasický funkcionál pomocí $f(x_i, y, z_i) = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - my^2$, $i = 0, \ldots, 3$. Definice skalárního součinu na M je jiná, než jsme doposud používali:
$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3) = a_0 b_0 - \sum_{i=1}^{3} a_i b_i.$$
Funkcionál a Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pak mají tvar
$$\Phi(y) = \int_\Omega \left(\|\nabla y\|_M^2 - my^2\right) \mathrm{d}x,$$
$$-2my - 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = 0, \text{ definujeme-li } \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta = \nabla_M^2,$$
$$(\Box - m)y = 0.$$
V posledním řádku je uvedena tak zvaná Klein–Gordonova vlnová rovnice.

Příklad: Na $\mathbb{R}_n$ budiž $f(x_i, y, z_i) = \sqrt{1 + |z|^2}$. Příslušný funkcionál pak dává obsah plochy $y = y(x_i)$ v $\mathbb{R}_{n+1}$. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pak vedou k určení extremální plochy (takto lze zjistit například plochu s minimálním obsahem).
$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla y|^2}}\right) = 0.$$

Cvičení: Zkuste sestavit Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionály definované funkcemi $\tilde{f}$:
$$\tilde{f}(x_i, y, z_i) = f(x_i, y, z_i) - 2ky, \ k = \text{konst.}$$
kam za f dosazujeme funkci z některého ze tří předchozích příkladů. Takto „započítáme“ do našich úloh potenciální energii v gravitačním poli $(k = mg/2)$.

§2. Vnější algebry vektorového prostoru

Označení: Je-li I konečná množina, označíme $|I|$ počet jejích prvků (potenci množiny I).
Píšeme-li pro dvě množiny $A \simeq B$, máme tím na mysli, že mezi A a B existuje bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení). Množiny si tedy navzájem určitým způsobem „odpovídají“, například jako prostor a jeho duální prostor.

Poznámka: Algebrou nazýváme (neprázdnou) množinu A nad tělesem T s dvěma vhodně definovanými operacemi mezi prvky z A: sčítáním $(+)$ a násobením $(\cdot)$. Na všechny operace klademe požadavek uzavřenosti a dále přidáváme asociativitu, distributivitu, případně i komutativitu.

Příklad: Algebra polynomů nebo racionálních lomených funkcí. Rozmyslete si, jak je to s neutrálními a inverzními prvky sčítání a násobení u těchto algeber.

Poznámka: Máme-li daný vektorový prostor V, je zřejmé, že jediná překážka, která brání vytvoření algebry z V, je operace násobení mezi prvky V. Uvažujme ve V bázi $\{e_\alpha\}_{\alpha \in M}$. Prostor V pak lze zapsat
$$V = \left\{a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha e_\alpha | a_\alpha \in \mathbb{R}\right\} \simeq \mathbb{R}^{|M|}.$$

Konvergence jsou samozřejmě míněny s.v. Platí tedy $H_j \nearrow f$ s.v. Funkce H_j jsou schodovité a $\int H_j \le f_j \le K$, splňují tedy podmínky z definice (12). Nyní stačí jen provést další dva limitní přechody:

$$\begin{array}{ccccc}
\int h_{ij} & \le & \int H_j & \le & \int f_j \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow j \to \infty \\
\int f_i & \le & \int f & \le & \lim \int f_j \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow i \to \infty \\
\lim \int f_i & \le & \int f & \le & \lim \int f_j
\end{array}$$

§4. Lebesgueův integrál

Definice 13: Lebesgueovsky integrovatelné funkce

Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je lebesgueovsky integrovatelná, pakliže $(\exists f_1, f_2 \in L^+)(f = f_1 - f_2 \text{ s.v.})$. Pak definujeme $\int f = \int f_1 - \int f_2$ a označíme L množinu všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

Věta 13: Vlastnosti funkcí z L

Nechť $f, g \in L$. Pak platí:

1. Hodnota $\int f$ nezávisí na rozkladu $f = f_1 - f_2$.
2. $(f \ge 0 \text{ s.v.}) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists f_1, f_2 \in L^+)\big((f = f_1 - f_2) \wedge (\int f_2 < \varepsilon)\big)$.
3. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g \in L$ a $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.
4. $f \ge g$ s.v. $\Rightarrow \int f \ge \int g$, $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$
5. $|f|$, f^+, f^-, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} \in L$
6. Funkce f je konečná s.v.

Důkaz:

1. Uvažujme dva rozklady $f_1 - f_2 = f = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$, $f_1, f_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in L^+$. Pak $(f_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + f_2 \in L^+) \Rightarrow (\int f_1 + \int \tilde{f}_2 = \int \tilde{f}_1 + \int f_2) \Rightarrow (\int \tilde{f}_1 - \int \tilde{f}_2 = \int f_1 - \int f_2)$, což je dle definice $\int f$.
2. $(\exists f_1, f_2 \in L^+)(f = f_1 - f_2) \Rightarrow (\exists K \in \mathbb{R})\big[\big((\exists f_{1i} \in H)(f_{1i} \nearrow f_1 \text{ s.v.})(\int f_{1i} \le K)\big) \wedge \big((\exists f_{2i} \in H)(f_{2i} \nearrow f_2 \text{ s.v.})(\int f_{2i} \le K)\big)\big]$. Pro dané $\varepsilon > 0$ lze zvolit $m \in \mathbb{N}$, aby $\int f_2 - \int f_{2m} < \varepsilon$. Potom ovšem nově definované funkce $\tilde{f}_1 \equiv f_1 - f_{2m}$, $\tilde{f}_2 \equiv f_2 - f_{2m}$ splňují kritéria hledaného rozkladu: $f_1 - f_{2m} \in L^+$, neboť $(\exists p_0)(\forall p > p_0)(f_{1p} - f_{2m} \ge 0)$, a $\int \tilde{f}_2 < \varepsilon$.
3. Uvažujme rozklady $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$ z definice. Pak rozklad $f + g$ můžeme psát jako $(f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ a $\int(f + g) = \int(f_1 + g_1) - \int(f_2 + g_2) = \int f_1 - \int f_2 + \int g_1 - \int g_2$. Pro $\alpha \ge 0$ je možným rozkladem $f = (\alpha f_1) - (\alpha f_2)$, pro $\alpha < 0$ je to $f = (-\alpha f_2) - (-\alpha f_1)$.
4. Podle předchozího bodu můžeme definovat funkci $\varphi \equiv f - g \in L$, která má rozklad $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in L^+$, a $\varphi \ge 0$ s.v. Podle věty (11) $(\varphi_1 \ge \varphi_2 \text{ s.v.}) \Rightarrow (\int \varphi_1 \ge \int \varphi_2)$, což nám po úpravě dává první tvrzení tohoto bodu. Druhé tvrzení je už jen triviální důsledek.
5. Pro f zapsané rozkladem $f_1 - f_2$ je rozklad $|f|$ možné psát ve tvaru $\max\{f_1, f_2\} - \min\{f_1, f_2\}$ (podle věty (11) jsou obě z L^+). Zbylá tvrzení postupně odvodíme pomocí tohoto a bodu 3: $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, $\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$, $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$.
6. Funkce f_1 a f_2 z rozkladu jsou podle věty (11) konečné s.v., tedy i f je konečná s.v.

Poznámka: V důkazu posledního bodu jsme nezmínili případ, kdy budou obě funkce f_1 i f_2 nekonečné a jejich rozdíl nebude definován. Tehdy ovšem můžeme (díky tomu, že takové body tvoří množinu míry nula) funkci f nadefinovat libovolným číslem — podle definice totiž chceme aby $f = f_1 - f_2$ jen skoro všude.

Poznámka: Bod 5 říká velmi důležitou věc — Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní, čímž se výrazně odlišuje od integrálu Newtonova. Newtonův integrál například zintegruje funkci $\frac{\sin(x)}{x}$ v mezích od

kde $\mathsf{n} = (n_1, \ldots, n_n)$ značí normálový vektor elementu plochy $\mathrm{d}S$. Toto tvrzení je snadným důsledkem Greenovy věty, podle níž dokonce platí pro každé $i = 1, \ldots, n$ a hladkou funkci g na Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \int_{\partial\Omega} g n_i\,\mathrm{d}S. \tag{37}$$

Tuto větu nyní dokážeme v $\mathbb{R}_2$ pro speciální volbu Ω za předpokladu $g \equiv 0$ na $\partial\Omega$. Čtenář se již pravděpodobně s tímto důkazem dříve seznámil, a následující odstavec slouží tedy spíše jako opakování. Později dokážeme obecnou Stokesovu větu, jejímž speciálním případem je i Gaussova věta.

Poznámka: Vidíme opět analogii mezi Greenovou větou a Newtonovým vzorcem $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Greenovu větu budeme dokazovat např. pro $i = 2$. Předpokládejme, že lze hranici $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ rozdělit na dvě části, které jsou grafy určitých funkcí $a_1(x_1), a_2(x_2)$ na $\langle a, b\rangle$ a že $a_1(a) = a_1(b) = P$. Oblast Ω rozdělíme přímkou $x_2 = P$ na „horní" a „dolní" část Ω_1, Ω_2. Pro výpočet integrálu na levé straně (37) použijeme Fubiniho věty

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_P^{a_1(x_1)} \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_a^b \big[g\big(x_1, a_1(x_1)\big) - g(x_1, P)\big]\,\mathrm{d}x_1 = -\int_a^b g(x_1, P)\,\mathrm{d}x_1.$$

Analogicky vypočteme integrál přes Ω_2, celkem získáme

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_1} \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(-g(x_1, P) + g(x_1, P)\big)\,\mathrm{d}x_1 = 0,$$

což je samozřejmě rovno integrálu z g po $\partial\Omega$, kde je g identicky nulová.

Pro dvě funkce hladké funkce g, h dává tato věta společně s větou o integraci per partes jednoduché tvrzení:

$$\forall x \in \partial\Omega : h(x) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i} h\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g\frac{\partial h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g h n_i\,\mathrm{d}S = -\int_\Omega g\frac{\partial h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Proberme ještě pojem funkcionálu pro funkce více proměnných. Předně uvažujme „kulturní"[28] množiny Ω. Budiž $f = f(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_n)$ hladká funkce na $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_{n+1}$. Funkcí hladkou na uzavřené množině $\overline{\Omega}$ máme na mysli funkci hladkou na nějaké otevřené nadmnožině $\overline{\Omega}$:

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \Big\{y : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_n \big| (\exists O \supset \overline{\Omega})\ (\exists \tilde{y} : O \to \mathbb{R}_n)\big(\tilde{y} \in C^\infty(\Omega)\big) \& \big(y = \tilde{y} \text{ na } \overline{\Omega}\big)\Big\}.$$

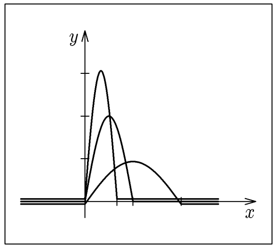
Stejně jako v kapitole o variačním počtu definujeme ještě $\mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$ jako funkce hladké na $\overline{\Omega}$ s nulovými hodnotami na $\partial\Omega$. Klasický funkcionál nad výše uvedeným prostorem má pak tvar

$$\forall y \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \ \Phi(y) = \int_\Omega f\Big(\mathsf{x}, y, \nabla y\Big)\,\mathsf{d}\mathsf{x} = \int_\Omega f\Big(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\Big)\,\mathsf{d}\mathsf{x}.$$

Spočítejme nyní Gateauxův diferenciál $\Phi(y)$ a pokusme se sestavit příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice. Postup bude téměř shodný jako v kapitole o variačním počtu. Pro první krok (derivace ve směru h, $h \in \mathring{C}^\infty(\overline{\Omega})$) použijeme definici:

$$\begin{aligned}\delta\Phi_h(y) = \frac{\partial\Phi(y + th)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \int_a^b f_h\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f\Big(\mathsf{x}, y + th, \frac{\partial}{\partial x_1}(y + th), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y + th)\Big)\bigg|_{t=0}\,\mathrm{d}x = \\ = \int_a^b \Big(h\frac{\partial}{\partial y} f(\mathsf{x}, y, \nabla y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i} f(\mathsf{x}, y, z_1, \ldots, z_n)|_{(z_1, \ldots, z_n) = \nabla y}\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

[28] Kompaktní a souvislé.



Obr. 5: Příklad $f_n \to f$, $\int f_n \not\to \int f$.

odkud odečtením konstanty $\lim \int f_1$ dostáváme tvrzení věty.

P o z n á m k a : Podle věty (13) víme, že $f = 0$ s.v. implikuje $\int f = 0$. Jde tato implikace obrátit?

Věta 16:
Nechť $f \in L$, $f \geq 0$, $\int f = 0$. Pak $f = 0$ s.v.

Důkaz: Definujme posloupnost $F_k \equiv kf$. Tato posloupnost splňuje předpoklady věty (15) (je neklesající, $F_k \in L$, $\int F_k = k \int f = 0$), podle věty (13) je tedy její limita F skoro všude konečná. Jelikož ale $F(x) = \lim F_k(x) = \infty$, je-li $f(x) > 0$, je množina $\{x | f(x) > 0\}$ míry nula, tudíž $f = 0$ s.v.

Věta 17: Fatouovo lemma

1. Nechť $f_k \geq 0$, $f_k \in L$, $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{N})(\int f_k \leq K)$, $f_k \to f$ s.v.. Pak $f \in L$, $\int f \leq K$.
2. Nechť $f_k \in L$, $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{N})(\int |f_k| \leq K)$, $f_k \to f$ s.v.. Pak $|f| \in L$, $\int |f| \leq K$.

Lemma:
Nechť $f_k, g_k \in L$, $f_0, g_0 \in L$, $(\forall k \in \mathbb{N})\big((f_k \geq f_0) \wedge (g_k \leq g_0)\big)$. Pak $F \equiv \inf\{f_1, f_2, \dots\} \in L$, $G \equiv \sup\{g_1, g_2, \dots\} \in L$.

Důkaz: Definujme posloupnost $G_k \equiv \max\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$. Podle věty (13) $G_k \in L$, dále zřejmě $G_k \nearrow G$. Protože $(\forall k)(g_k \leq g_0)$, je i $G_k \leq g_0$, což podle věty (13) znamená $\int G_k \leq \int g_0$. Posloupnost G_k splňuje požadavky věty (15), tedy $G \in L$. Symetrické tvrzení se dokáže obdobně.

Důkaz věty:

1. Definujme posloupnost $F_k \equiv \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\}$. Podle lemmatu $F_k \in L$, zřejmě $F_k \nearrow f$ s.v. a $\int F_k \leq \int f_k \leq K$. To jsou opět předpoklady věty (15), tudíž $f \in L$, $\int f = \lim \int F_k \leq K$.
2. Stačí použít bod 1 pro posloupnost $\{|f_k|\}_1^\infty$.

Příklad: Pro použití Fatouova lemmatu stačí, aby posloupnost f_i pouze konvergovala (nikoliv tedy monotónně konvergovala). Za to ovšem dokážeme $\int f$ pouze omezit a nikoliv spočítat jeho hodnotu. Příkladem budiž posloupnost $f_n = n \sin nx$ s tím, že f_n je nenulové pouze na intervalu $(0, \pi/n)$ (viz obrázek). Jak brzy ukážeme, lze Lebesgueův integrál počítat pomocí Riemannova integrálu. Vidíme, že $f_n \to 0$, ale zatímco $\int f = 0$, neplatí $2 \equiv \int f_n \not\to 0$.

Věta 18: Lebesgue
Nechť $\{f_k\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí z L, $f_k \to f$, se společnou integrovatelnou majorantou $g \in L$, $(\forall k)(|f_k| \leq g)$. Pak $f \in L$ a $\int f = \lim \int f_k$.

Důkaz: Označme $F_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f$ s.v., $G_k = \sup\{f_k, f_{k+1}, \dots\} \searrow f$ s.v.. Podle předpokladů $-g \leq F_k \leq f_k \leq G_k \leq g$, přejdeme-li k integrálům, pak $-\int g \leq \int F_k \leq \int f_k \leq \int G_k \leq \int g$. Podle věty

Cvičení: Přeformulujte Gaussovu a Stokesovu větu pro $\mathbb{R}_2$.

P o z n á m k a : Vraťme se ještě k plošnému integrálu druhého druhu. Pokud integrujeme vektorové pole $\mathsf{T} = (T_1, T_2, T_3)$ a položíme $\mathrm{d}\mathsf{S} = (\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2)$, nabude zřejmě integrál tvaru

$$\int_S \big(T_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + T_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 + T_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\big). \tag{33}$$

Při přechodu od x_1, x_2, x_3 k u, v použijeme (podle věty o substituci a poznámky výše) determinant Jacobiho matice

$$\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} & \dfrac{\partial x_j}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} & \dfrac{\partial x_j}{\partial v} \end{pmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{34}$$

Pozorný čtenář možná namítne, že ve větě o substituci byl determinant v absolutní hodnotě. Tam byl ale na $\Phi : (u, v) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ kladen požadavek regularity. V jednorozměrném případě $(f(x)\,\mathrm{d}x \mapsto f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t)$ tento požadavek[25] nebyl, a jacobián (tj. $\varphi'(t)$) zde potom *není* v absolutní hodnotě. Podmínka $\varphi'(t) \neq 0$ by zajistila, aby paramtrizace φ nemohla křivku (úsečku v $\mathbb{R}_1$), přes kterou integrujeme, proběhnout vícekrát (aby se nemohla „vracet“).

V případě plošného integrálu má také smysl hovořit o orientaci plochy, tj. směru normály $\mathrm{d}\mathsf{S}$ kvůli tomu, že $\mathsf{T} \cdot \mathrm{d}\mathsf{S} \neq \mathsf{T} \cdot (-\,\mathrm{d}\mathsf{S})$. Odpovídá to tomu, že při výpočtu $\mathrm{d}\mathsf{S}$ pomocí (27) záleží na pořadí souřadnic u, v, což se v (34) projeví změnou znaménka při výměně řádků v determinantu. Stejného efektu ovšem docílíme při výměně sloupců, tedy zjišťujeme, že $\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i$. Přicházíme tak k myšlence zavést mezi elementy $\mathrm{d}x_i$ nový druh násobení. Kromě výšeuvedené antikomutativity by ovšem mělo mít všechny vlastnosti obyčejného násobení.

Nové násobení (brzy jej nazveme vnější součin) bude mít zajímavou vlastnost:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \quad \Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} : \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0. \tag{35}$$

Příklad: Ukážeme, jak naopak jen z této definice „násobení diferenciálů“ vyplyne vztah pro přechod mezi x_i, x_j a u, v. Bereme-li $x_i = x_i(u, v)$, $x_j = x_j(u, v)$, můžeme psát

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial v}\,\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}x_j = \frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

Nyní dosaďme

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) \wedge \left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) =$$
$$= \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u + \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v =$$
$$\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} & \dfrac{\partial x_j}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} & \dfrac{\partial x_j}{\partial v} \end{pmatrix} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

Shrňme nyní naše poznatky o způsobech, jak integrovat skalární či vektorová pole (f či T) po plochách, a pokusme se je rozšířit i na plochy v $\mathbb{R}_4$.

[25] Regularita, tj. nenulovost jacobiánu zde znamená triviálně $\varphi'(t) \neq 0$.

Uvažujme cauchyovskou posloupnost $\{f_i\}_1^\infty$ funkcí z $L_1(\mathbb{R}^n)$, čili $(\forall\varepsilon>0)(\exists i_0\in\mathbb{N})(\forall i,j\geq i_0)(\|f_i-f_j\|<\varepsilon)$. Nejprve sestrojíme kandidáta na její limitu. Jistě existuje rostoucí posloupnost indexů $\{i_k\}_1^\infty$, splňující $(\forall i\geq i_k)(\|f_i-f_{i_k}\|<\frac{1}{2^k})$, speciálně $\|f_{i_{k+1}}-f_{i_k}\|<\frac{1}{2^k}$. Definujme posloupnost $F_r\equiv\sum\limits_{k=1}^{r}|f_{i_{k+1}}-f_{i_k}|$ To je rostoucí posloupnost z $L_1(\mathbb{R}^n)$, respektive z L, chápeme-li symboly f_i jako reprezentanty a ne jako třídy. Navíc

$$\int F_r=\sum_{k=1}^{r}\int|f_{i_{k+1}}-f_{i_k}|=\sum_{k=1}^{r}\|f_{i_{k+1}}-f_{i_k}\|<1,$$

což podle Beppo–Leviho věty znamená, že $F\equiv\lim F_r\in L$. Podle trojúhelníkové nerovnosti a věty o limitním přechodu v nerovnosti

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(f_{i_{k+1}}-f_{i_k})\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|f_{i_{k+1}}-f_{i_k}|=F\in L,$$

Funkce vlevo je s.v. rovna $|\lim f_{i_{k+1}}-f_{i_1}|$ a je z L, což podle věty (13) znamená, že je s.v. konečná. Tedy existuje $\lim f_{i_{k+1}}$ s.v. Tuto limitu nazveme f a ukážeme o ní, že je z $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Zvolme p pevné. Posloupnost $\{f_{i_p}-f_{i_k}\}_1^\infty$ konverguje k $\{f_{i_p}-f\}$ s.v. Pro $k>p$ můžeme její členy v absolutní hodnotě omezit nerovnostmi

$$|f_{i_p}-f_{i_k}|\leq\sum_{m=p}^{k-1}|f_{i_m}-f_{i_{m+1}}|\leq F.$$

Funkce F je integrovatelná, posloupnost tedy splňuje předpoklady Lebesgueovy věty, z níž plyne $f_{i_p}-f\in L$ neboli $f\in L$. Funkce f_{i_k} jsme si zavedli tak, aby $\|f_{i_p}-f_{i_k}\|<\frac{1}{2^p}$. Lebesgueův integrál je podle věty (13) absolutně konvergentní, díky čemuž můžeme použít Lebesgueovu větu i na posloupnost absolutních hodnot:

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{i_p}-f_{i_k}\|=\lim_{k\to\infty}\int|f_{i_p}-f_{i_k}|=\int\left|f_{i_p}-\lim_{k\to\infty}f_{i_k}\right|=\|f_{i_p}-f\|\leq\frac{1}{2^p}$$

V závěru jsme učinili limitní přechod v nerovnosti.

Konečně ukažme, že f je limitou celé posloupnosti. Ta je cauchyovská — $(\forall\varepsilon>0)(\exists i_0\in\mathbb{N})(\forall i,j\geq i_0)(\|f_i-f_j\|<\frac{\varepsilon}{2})$. Zároveň jsme ukázali, že $(\forall\varepsilon>0)(\exists k_0\in\mathbb{N})(\forall k\geq k_0)(\|f_{i_k}-f\|<\frac{\varepsilon}{2})$. Z trojúhelníkové nerovnosti potom plyne $\forall i\geq i_k\geq i_0,\ k\geq k_0$

$$\|f_i-f\|\leq\|f_i-f_{i_{k_0}}\|+\|f_{i_{k_0}}-f\|<\varepsilon.$$

§7. Jak se Lebesgueův integrál počítá

Poznámka: Dosud jsme se zabývali zejména otázkou, za jakých přepdokladů je funkce lebesgueovsky integrovatelná. Jediný způsob výpočtu Lebesgueova integrálu, který zatím známe, je výpočet přímo z definice. Následující věta říká, že lebesgueovsky integrovatelné funkce jsou nadmnožinou funkcí riemannovsky integrovatelných (zde máme na mysli vlastní Riemannův integrál) a hodnoty obou integrálů jsou stejné.

Věta 21: Souvislost Riemannova a Lebesgueova integrálu

Nechť jsou $a,b\in\mathbb{R}$ a funkce $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ je omezená. Nechť dále existuje Riemannův integrál funkce f na $\langle a,b\rangle$ (značme $(R)\int\limits_a^b f$). Definujme funkci F na intervalu $\langle a,b\rangle$ rovnu funkci f a jinde rovnu nule. Potom je $F\in L$ a platí $(L)\int\limits_a^b F=(R)\int\limits_a^b f$.

Důkaz: Označme D_n posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ z definice Riemannova integrálu, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že následující dělení je vždy zjemněním předchozího. Norma dělení $\nu(D_n)$ jde

11 Křivkový a plošný integrál

§1. Úvod

V této kapitole se budeme zabývat integrací v $\mathbb{R}_n$ po množinách „dimenze" menší než n — název napovídá, co je tím myšleno. Pro funkci definovanou například na ploše nemá smysl použít metody z předchozí kapitoly, totiž dodefinovat ji všude mimo plochu nulou. Integrál by byl samozřejmě roven nule (zopakujte větu (26)). Pokud by plocha „dimenze"[22] k byla podmnožinou nějakého $\mathbb{R}_k$ (tedy byla „rovná"), věděli bychom si rady. V opačném případě tušíme, že vhodnou (nelineární) transformací souřadnic, by bylo v některých případech možné plochu „narovnat". Očekáváme proto obdobu věty o substituci, která nám umožní dát takovým integrálům smysl.

Druhým významným poznatkem bude souvislost mezi integrálem přes oblast M a integrálem přes hranici této oblasti, tj. ∂M. S příslušnými vzorci již čtenář umí zacházet, proto se nejprve pokusíme systematizovat naše vědomosti v této oblasti a vyslovit obecné tvrzení, které později dokážeme.

Poznámka: Čtenáři jsou jistě známy termíny „skalární pole", „vektorové pole". „Polem" máme obecně na mysli zobrazení $F:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_m$, přičemž přes $\mathbb{R}_n$ zamýšlíme pole nějakým způsobem integrovat a m bývalo často rovno 1 nebo n (což odpovídá dvěma výšeuvedeným příkladům polí).

Poznámka o křivkových integrálech: Za křivku v $\mathbb{R}_n$ považujme množinu $C\subset\mathbb{R}_n$, pro niž existuje spojitě diferencovatelné zobrazení $\varphi:\langle a,b\rangle\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_n$ takové, že $\varphi(\langle a,b\rangle)=C$. Pomocí φ je křivka parametrizována, každému „času" $t\in\langle a,b\rangle$ je přiřazena poloha na křivce $\varphi(t)$. Čtenář patrně používal křivkový integrál ze skalárního, resp. vektorového pole f, resp. F, které počítal podle vzorců[23]:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s=\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n\varphi'(t)}\,\mathrm{d}t,\tag{23}$$

$$\int_C \mathsf{F}\cdot\mathrm{d}\mathsf{s}=\int_a^b\textstyle\sum_{i=1}^n F_i\big(\varphi(t)\big)\varphi_i'(t)\,\mathrm{d}t.\tag{24}$$

Znaky $\mathrm{d}s$ a $\mathrm{d}\mathsf{s}$ značily element dráhy po křivce (jeho délku nebo jeho vektor). Výraz na pravé straně (23) připomíná vzorec pro délku křivky v $\mathbb{R}_n$ použitý na „křivku" $\mathrm{d}\mathsf{s}$. Z formálního hlediska zde můžeme vidět analogii s větou o substituci v Newtonově integrálu: $\mathrm{d}s\mapsto||\varphi'||\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mathsf{s}=\varphi'\,\mathrm{d}t$ (tedy vyjádření $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}\mathsf{s}$ pomocí parametrizační funkce φ a $\mathrm{d}t$).

Pokud v případě vektorového pole F nezávisel integrál na průběhu samotné křivky, ale jen na jejích krajních bodech, bylo skrze něj možné jednoznačně (až na konstantu) definovat potenciál U tohoto pole:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_n:\int_x^y\mathsf{F}\,\mathrm{d}\mathsf{s}\overset{\mathrm{df}}{=}U(x)-U(y)\tag{25}$$

Vzpomeňme si na Newtonův vzorec v $\mathbb{R}_1$: $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$. Integrál z derivace f přes křivku v $\mathbb{R}_1$ (úsečku) souvisí s hodnotami f v krajních bodech. Očekáváme proto, že F by mohlo být také v jistém smyslu „derivace" U. Tuto derivaci označujeme symbolem ∇U a po dosazení do (25) je možné (25) považovat za definici operátoru ∇.

Poznámka: Integrály (23), (24) se nazývají křivkové integrály prvního a druhého druhu.

Cvičení: Zkuste si rozmyslet, jak z této definice ukážete, že v kartézských souřadnicích má ∇ skutečně tvar

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).\tag{26}$$

Poznámka o plošných integrálech: Plochu v $\mathbb{R}_n$ definujme opět pomocí spojitě diferencovatelného zobrazení $\Phi:\mathbb{R}_2\supset O\to\mathbb{R}_n$, tentokrát pro *otevřenou* množinu O. Samotná plocha S bude potom množina

[22] Precizněji řečeno, má-li množina P (plocha) v $\mathbb{R}_k$ nenulovou míru.

[23] Pokud integrujeme po „rovné" oblasti, čemuž lze samozřejmě napomoci vhodnou volbou souřadnic, derivace φ vymizí (budou identicky rovny konstantě, často jedničce).

rovna jedné, a integrál Dirichletovy funkce se dle věty o souvislosti Riemannova a Lebesguova integrálu rovná 1.

Věta 23: Postačující podmínka pro integrovatelnost
Nechť $f \geq 0$, nechť existují $h_n \in H$, které $h_n \to f$ s.v. . Nechť je dále $\int\limits_{\mathbb{R}_k}\int\limits_{\mathbb{R}_p} f(x', x'')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''$ konečný. Potom je f Lebesguovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_{k+p}$.

Idea důkazu: Při integraci v $\mathbb{R}_n$ jsme často odkázáni pouze na Fubiniho větu a počítání Riemannových integrálů v $\mathbb{R}$. Přitom ovšem nevíme, zda původní funkce v $\mathbb{R}_n$ byla integrovatelná, což je předpoklad Fubiniho věty. Proto je užitečná věta (23). Zkonstruujeme nejprve posloupnost funkcí $f_n \to f$, o které ukážeme, že $f_n \in L$. Můžeme pak použít jednak Fubiniho větu a dále větu Lebesgueovu.

Důkaz: Označme $H_n = \max\{h_1, \ldots, h_n\} \in L$. Dále označme $\varphi_n = \min\{f, H_n\} \in L$ (podle Lebesgueovy věty), neboť $|\varphi_n| \leq H_n$ (přičemž $H_n \nearrow f^* \geq f$) a $\varphi_n = \lim\limits_{m\to\infty} \min\{h_m, H_n\}$. Nyní si povšimněme, že $\varphi_n \nearrow f$. Abychom dokázali platnost $f \in L$ stačí dle Beppo–Leviho věty ověřit omezenost integrálu z φ_n, což ukážeme za použití Fubiniho věty následovně:

$$\int \varphi_n(x', x'')\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}_k}\int\limits_{\mathbb{R}_p} \varphi_n(x', x'')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x'' \leq \int\limits_{\mathbb{R}_k}\int\limits_{\mathbb{R}_p} f(x', x'')dx'dx'' \in \mathbb{R}.$$

§8. Míra: měřitelné funkce, měřitelné množiny, míra, σ-algebry

Poznámka: Zabývejme se nyní následující otázkou: je-li f funkce lebesgueovsky integrovatelná na $\mathbb{R}_n$, za jakých podmínek bude platit, že pro množinu $M \subset \mathbb{R}$, je funkce F definovaná předpisem $F(x) = f(x)\chi_M(x)$ integrovatelná? Funkce F je definovaná na množině M hodnotami funkce f a vně této množiny je rovna nule. Množina M nemůže být libovolná — protipříklad již brzy zkonstruujeme.

Definice 15: Měřitelná funkce
Funkci $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}^*$ nazveme měřitelnou, pokud existuje taková posloupnost jednoduchých funkcí $h_n \in H$, že platí $h_n \to f$. Množinu všech měřitelných funkcí budeme značit M.

Poznámka k větě (19): Je-li f měřitelná a existuje-li její integrovatelná majoranta, je f i lebesgueovsky integrovatelná.

Poznámka o množině M: M je lineární vektorový prostor, jak jistě čtenář sám snadno z definice ověří. L je podmnožinou M.

Věta 24: Základní vlastnosti měřitelných funkcí

1. $f_n \in \mathrm{M}, f_n \to f \Longrightarrow f \in \mathrm{M}$,
2. $f, g, \{h_n\} \in \mathrm{M} \Longrightarrow |f|, \max\{f,g\}, \min\{f,g\}, \sup\{h_n\}, \inf\{h_n\}, \liminf h_n, \limsup h_n, f+g, fg \in M$

Nechť $F(x_1, \ldots, x_n)$ je spojitá na $\mathbb{R}_n$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{M}(\mathbb{R}_p)$ s.v. konečné, potom funkce $F(f_1(y), \ldots, f_n(y)) \in \mathrm{M}(R_p)$.

3.
4. Je-li funkce spojitá je i měřitelná.

Poznámka: Důkaz této věty je vynechán. Z větší části je tvořen pouze mechanickým užíváním definic a jednoduchých vlastností zkoumaných funkcí. Tomuto konstatování se však vymyká třetí část věty, jejíž důkaz může čtenář nalézt v příslušné literatuře.

Poznámka o skládání měřitelných funkcí: Každou funkci lze vyjádřit jako složení dvou měřitelných

§12. Hilbertův prostor $L_2(M)$

Poznámka o konstrukci $L_2(M)$: Nyní zkonstruujeme Hilbertův prostor nad prostorem M. Budeme postupovat analogicky konstrukci Banachova prostoru $L_1(M)$.

Definice 18: Prostor $L_2(M)$
Nechť $M \in \Lambda$, potom označme $L_2 = \{f \in M(M); |f|^2 \in L(M)\}$. Zaveďme na této množině rovnost dvou funkcí, jestliže se tyto funkce rovnají skoro všude. Označme $L_2(M)$ množinu tříd funkcí z $L_2(M)$, které se rovnají dle zavedené rovnosti.

Poznámka o prostoru $L_2(M)$: Prostor $L_2(M)$ je lineární vektorový prostor — linearitu lze dokázat například za použití KA–nerovnosti[20].

Definice 19: Skalární součin na $L_2(M)$
Definujme skalární součin funkcí f a g z $L_2(M)$ jako $\langle f|g\rangle = \int\limits_M f\overline{g}$.

Poznámka o skalárním součinu na $L_2(M)$: Čtenář jistě snadno ověří, že skalární součin, který jsme definovali má vlastnosti skalárního součinu:

1. $\langle \alpha f_1 + \beta f_2 | g\rangle = \alpha\langle f_1|g\rangle + \beta\langle f_2|g\rangle$
2. $\langle f|g\rangle = \overline{\langle g|f\rangle}$
3. $\langle f|f\rangle = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

Dále je samozřejmě potřeba ověřit, že skalární součin na tomto prostoru je dobře definován — tj. je konečný. Plyne to přímo z KG–nerovnosti[21]:

$$|f\overline{g}| \leq \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2.$$

Poznámka o normě prostoru $L_2(M)$: Dle poznatků z lineární algebry je tedy $||f|| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$ normou prostoru $L_2(M)$.

Věta 31: o úplnosti $L_2(M)$
Prostor $L_2(M)$ je Hilbertův prostor.

Poznámka k důkazu věty: Doporučujeme, aby čtenář porovnal důkaz této věty s důkazem Riesz-Fischerovy věty. Čtenář se též může zamyslet, zda má smysl konstruovat prostory $L_p(M)$, kde $p \geq 1$.

Důkaz: Nechť f_n je libovolná cauchyovská posloupnost funkcí z $L_2(M)$, tj. platí $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(||f_n - f_m|| < \varepsilon)$.

1. Sestrojme rostoucí posloupnost přirozených n_k takových, že platí $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$ (lze díky cauchyovskosti posloupnosti funkcí). Definujme funkci $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$.

   Platí:
   $$\left(\int |F_n|^2\right)^{1/2} = ||F_n|| \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 1.$$

   Dále označme
   $$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

[20] $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

[21] $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy}$.

jednoduché — ty však nabývají jednu hodnotu nikoliv na intervalu, ale na měřitelné množině. Ty využiji k definici Lebesgueova integrálu.

Poznámka o množinách míry nula: Již dříve jsme definovali význam výroku „množina je míry nula". Nyní máme funkci, kterou označujeme jako míra. Ověřme, že pouze pro množiny míry nula nabývá míra nulové hodnoty:

$$\mu(M)=0 \iff \int \chi_M = 0 \iff \chi_M = 0 \text{ s.v.} \iff M \text{ je míry nula}$$

Úmluva: Je-li funkce f definována s.v. na množině M, poté ji automaticky dodefinujeme nulou vně množiny M a případně i v bodech množiny M, kde není definována. Hodnota integrálu takto nově definované funkce přes $\mathbb{R}_n$ bude stejná jako hodnota integrálu původní funkce f přes množinu M.

Poznámka o integrálu komplexních funkcí: Integrálem komplexní funkce $f:\mathbb{R}_n \to \mathbb{C}$ bude součet následujících dvou integrálů, pokud má pravá strana rovnosti smysl:

$$\int_M f = \int_M \mathrm{Re}(f) + i\int_M \mathrm{Im}\ \mathrm{f}.$$

8.1 Vlastnosti míry a měřitelných množin

Věta 25:
Množina všech měřitelných množin Λ je σ-algebra a μ je míra na Λ.

Důkaz: Nechť provede čtenář sám tím, že ověří platnost jednotlivých podmínek v definici (17).

Důsledek:

1. $\forall M,N\in\Lambda : M\subset N \Longrightarrow \mu(M)\le\mu(N)$
2. $\forall M,N\in\Lambda : \mu(M\cup N)+\mu(M\cap N)=\mu(M)+\mu(N)$
3. $\forall M_n\in\Lambda : M_n\subset \mathrm{M}_{n+1} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(M_n)$
4. $\forall M_n\in\Lambda : M_{n+1}\subset \mathrm{M}_{n} \Longrightarrow \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(M_n)$

Tyto důsledky si mohou zájemci zkusit dokázat jako cvičení. Rovnosti zkuste dokazovat jako dvě neostré nerovnosti.
Poznámka: Platí, že $\mathbb{R}_n\in\Lambda$, ale neplyne to z konstrukce Lebesgueova integrálu. K tomu, aby funkce $f(x)=1$ byla měřitelná, je postačující následující podmínka:

1. $\forall h\in H : \min\{h,1\}\in H$
2. $\exists h_n\ge 0, h_n\in H, \int h_n>0; \forall x : \sup\limits_n h_n(x)>0$

Poznámka o borelovských množinách: Je-li množina M otevřená nebo uzavřená, je měřitelná. Vzhledem k tomu, že Λ je σ-algebra, je i spočetné sjednocení nebo průnik těchto množin měřitelný. Nechť tedy O_n jsou otevřené množiny, množinu všech spočetných průniků otevřených množin označme G_δ — G se obvykle označuje otevřená množina, δ v indexu reprezentuje průnik[17]. Množinu všech spočetných sjednocení prvků G_δ označme $G_{\sigma\delta}$ — σ reprezentuje sjednocení[18]. Takto můžeme postupovat dále a tvořit množiny $G_{\delta\sigma\delta}\dots$ Množinu všech množin, které vzniknou konečným počtem sjednocení nebo průniků

[17] Z něm. Durchschnitt.
[18] Opět z něm. Summe.

3. $\varphi'(\alpha)=\int\limits_M \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$

Důkaz: Nejprve ukažme první bod tvrzení. Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platí:

$$g(x,\alpha)=\frac{f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi),\ \xi\in(\alpha_0,\alpha)$$

Odtud však okamžitě plyne odhad pro absolutní hodnotu funkce $f(x,\alpha)$, pro α pevné:

$$|f(x,\alpha)|\le\left|f(x,\alpha_0)+\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi(\alpha))\right||\alpha-\alpha_0|\right|\le|f(x,\alpha_0)+|g(x)||\alpha-\alpha_0|,$$

čímž jsme nalezli integrovatelnou majorantu pro $f(x,\alpha)$, opírajíce se ovšem o 5. předpoklad. Nyní již můžeme předpokládat, že $\forall\alpha\in M : f(x,\alpha)\in L(M)$. K důkazu věty stačí ukázat, že existuje derivace funkce $\varphi(\alpha)$ v α_0. Dle definice derivace platí: $\varphi'(\alpha_0)=\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} g(x,\alpha)$. Ale funkce $g(x,\alpha)$ splňuje předpoklady věty o limitě vzhledem k parametru a tím je předchozí věta dokázána.

Poznámka o vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu: Vyšetřit konvergenci Lebesgueova integrálu znamená zjistit, zda existuje Lebesgueův integrál z dané funkce, případně ukázat, že neexistuje. Ve většině případů se integrační obor nejprve rozloží na několik (konečně) podmnožin. Na těchto jednotlivých podmnožinách se vyšetřuje konvergence integrálu zvlášť — nejčastěji se používá věta o existenci Lebesgueova integrálu funkce na omezeném intervalu, existuje-li zde integrál Riemannův. Na okrajích podmnožin, na nichž leží obvykle singularity funkce, zejména pokud zde limita funkce není konečná, se vyšetří porovnáním funkce s funkcemi, o nichž je známo, zda konvergují nebo nekonvergují.

Příklad: Vyšetříme nyní konvergenci integrálu $\int\limits_0^1 1/x^\alpha\,dx$ pro $\alpha\in\mathbb{R}$ pevné. Je-li $\alpha<1$ existuje zobecněný Riemannův integrál funkce, tedy speciálně je $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}$ konečná. Pro $\varepsilon>0$ je tedy funkce $f_\varepsilon(x)$ definovaná na $\langle\varepsilon,1\rangle$ jako $\frac{1}{x^\alpha}$, vně nulou, lebesgueovsky integrovatelná (spojitá funkce) a dle Beppo–Leviho věty pro posloupnost funkcí $f_{1/n}$ i vyšetřovaná funkce lebesgueovsky integrovatelná.
Je-li nyní naopak $\alpha\ge 1$, potom $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}$ diverguje k $+\infty$. Jestliže by funkce $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ byla lebesgueovsky integrovatelná, označme její hodnotu K. Potom pro $\varepsilon>0$ dostatečně malé je hodnota integrálu f_ε větší než K, což je ovšemže ve sporu s monotonií Lebesgueova integrálu. Tedy vyšetřovaná funkce není lebesgueovsky integrovatelná pro $\alpha\ge 1$.

Cvičení: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

Poznámka o vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu: Nyní můžeme dále zpřesnit návod k vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu. Určitý interval, kde je vyšetřovaná funkce spojitá, si rozdělíme na tři části. Prostřední část bude tvořit uzavřený interval, kde je funkce lebesgueovsky integrovatelná. Na krajích intervalu, se vyšetřovaná funkce porovnává s násobky funkcí tvaru $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$; je-li funkce menší než násobek integrovatelná funkce f, získáme po úvahách obdobných úvahám v předchozím příkladu, výsledek, že integrál funkce konverguje. Je-li však větší než násobek neintegrovatelná funkce f, potom integrál funkce nekonverguje.

Poznámka o souvislosti zobecněného Riemannova integrálu a Lebesgueova integrálu: V minulém příkladu jsme viděli, že Lebesgueův integrál existoval právě tehdy, když existoval zobecněný Riemannův integrál. V obecném případě však tato implikace neplatí, jak již bylo ukázáno v některé z předchozích poznámek. Platí ale následující tvrzení: nechť existuje (zobecněný) Riemannův integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $f\ge 0$, potom existuje Lebesgueův integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a rovnají se. Čtenář jistě snadno toto tvrzení dokáže jako důsledek Beppo–Leviho věty.

Poznámka o vyšetřování konvergence Lebesgueova integrálu: Vyšetřujme konvergenci $\int\limits_M f$, spojité

(b) Důkaz se provede analogicky jako v předchozí části použitím Beppo–Leviho věty, neboť $\sum\limits_{i=1}^{k} \chi_{M_i} f \nearrow \chi_M f$ a omezenost je zaručena předpokladem konečnosti sumy $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f$.

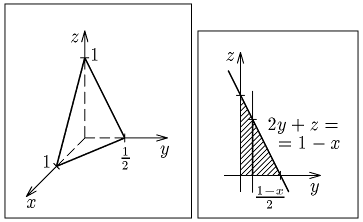
2. Triviální z definice.
3. Důkaz se provede přechodem k množinám $\widetilde{M_i} = M_i \setminus M_{i-1}$ a $\widetilde{M_1} = M_1$ a užitím již dokázané první části věty.
4. Plyne přímo z první a třetí části věty.
5. Existence integrálu je zaručena dle Lebesgueovy věty. Na množině M platí, že $|f(x)| \leq K$, a tedy
$$\left| \int\limits_M f \right| \leq \int\limits_M |f| \leq K \int \chi_M \leq K\mu(M).$$
6. Plyne přímo z nezápornosti f a následující rovnosti:
$$\int\limits_N f \leq \int\limits_N f + \int\limits_{M\setminus N} f = \int\limits_M f.$$

§10. Výpočet Lebesgueova integrálu: věta o substituci

Poznámka o substituování: Nejprve si připomeňme substituovaní při integrování funkcí jedné proměnné:
$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$
za jistých předpokladů. Lze tedy očekávat, že při integrování funkcí více proměnných bude platit analogicky vztah:
$$\int\limits_M f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\phi^{-1}(M)} f(\phi(x))(?)\,\mathrm{d}x$$
Předpokládejme nyní, že bychom integrovali funkci rovnou jedné po objemu rovnoběžnostěnu A. Tento rovnoběžnostěn bychom popsali funkcí ϕ z $\langle 0,1\rangle^n$. Poté by substituovaný integrál vypadal následovně ($|A|$ značí objem rovnoběžnostěnu).
$$|A| = \int\limits_A 1\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\langle 0,1\rangle^n} 1|A|\,\mathrm{d}x.$$
O výpočtu objemu rovnoběžnostěnu hovoří následující poznámka.

Poznámka o objemu rovnoběžnostěnu: Uvažme rovnoběžnostěn, parametricky popsaný jako $x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i A_i$, kde $0 \leq c_i \leq 1$, $x, A_i \in \mathbb{R}_n$. Označme A matici se sloupci A_i. Grammovou maticí odpovídající matici A budeme rozumět maticí skalárních součinů jednotlivých sloupců matice A, tj. matici:
$$G = \begin{pmatrix} \langle A_1, A_1\rangle & \dots & \langle A_n, A_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_1, A_n\rangle & \dots & \langle A_n, A_n\rangle \end{pmatrix} = A^T A$$
Pro objem $V(A)$ rovnoběžnostěnu poté platí $V(A) = \sqrt{\det G} = |\det A|$, jak známo z lineární algebry.

Věta 27: o substituci
Nechť $\phi : \mathbb{R}_n \mapsto \mathbb{R}_n$ je prosté regulární zobrazení z $O \subset \mathbb{R}_n$ na $\Omega = \phi(O) \subset \mathbb{R}_n$, O a Ω otevřené. Nechť M je měřitelná množina funkce f je měřitelná na Ω, potom platí:
$$\int\limits_{\phi(M)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_M f(\phi(x))|\det\ \mathrm{Jac}\ \phi(x)|\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 8: Čtyřstěn a řez kolmo na osu x

Poznámka: Větu dokazovat nebudeme, důkaz je poměrně složitý.

k výpočtu Lebesgueova inetgrálu Uvažujme funkci $f \in L(\mathbb{R}_k \times \mathbb{R}_p)$ a mějme za úkol spočítat $\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}_p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$. Nechť je funkce f nenulová pouze na měřitelné množině M — je ovšemže možné, že $M = \mathbb{R}_k \times \mathbb{R}_p = \mathbb{R}_m$. Potom platí $\int\limits_{\mathbb{R}_m} f = \int\limits_M f$. Označme dále $P(M)$ průmět množiny M do $\mathbb{R}_p$, tj. $M = \{y \in \mathbb{R}_p |\ \exists x \in \mathbb{R}_k; (x,y) \in M\}$, potom je původní integrál roven $\int\limits_{P(M)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$. Dále označme M_{y_0} řez množiny M (nad)rovinou o rovnici $y = y_0$, tj. množiny $M_y = \{x \in \mathbb{R}_k |\ (x,y) \in M\}$. Integrál je potom roven i $\int\limits_{P(M)} \left(\int\limits_{M_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$, čímž jsme výrazně zmenšili množinu, přes kterou integrujeme.

Příklad: Zkusme nyní vypočítat x-ovou souřadnici těžiště homogenního čtyřstěnu, jehož podstavu tvoří pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách délky 1 a 1/2. Jeho výška je 1 a hrana vycházející z vrcholu podstavy naproti přeponě je kolmá k rovině podstavy (viz obrázek). Tento čtyřstěn je určen tedy rovnicemi:
$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad z \geq 0 \qquad x + 2y + z \leq 1$$
Integrál přes celý prostor lze pak upravovat (řez kolmo na x viz též na obrázku):
$$\int_{\mathbb{R}^3} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{1-x}{2}} \int\limits_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{1-x}{2}} x - x^2 - 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [xy - x^2y - xy^2]_0^{\frac{1-x}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_0^1 (x - x^2)\frac{1-x}{2} - x\frac{(1-x)^2}{2^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 (2x - x)(1 - 2x + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x - 2x^2 + x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.$$
Pokud výsledek vydělíme objemem čtyřstěnu, získáme hledanou polohu těžiště.

§11. Integrály závislé na parametru: záměna integrálu a limity či derivace

Poznámka o integrálu závislém na parametru: Uvažujme měřitelné množiny M, A, $M \subset \mathbb{R}_n$ a $A \subset \mathbb{R}_p$. Nechť funkce $f \in L(M \times A)$, potom definujme funkci $\varphi(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$. Funkce $\varphi(\alpha)$ je hodnota integrálu funkce f, přičemž se funkce f, a tedy i hodnota integrálu z ní se může měnit v závislosti na parametru α.

Věta 28: Záměna limity a integrálu
Nechť