6 Řady

6.1 Číselné řady, absolutní konvergence

§1. Základní pojmy

V tomto oddílu se seznámíme s řadami čísel - s jedním z klasických témat matematiky, které stálo na jejím úsvitu, byť ve zcela jiné koncepci - v koncepci řecké vědy. Zájem o řady byl zájmem o zacházení (počítání) s nekonečným počtem veličin. Nekonečno bylo v tehdejších dobách (dobách Starého Řecka, tj. asi 6. st. př. Kr.) velice často zdrojem četných sporů, a tak není divu, že zájem o ně byl tak veliký, že při slýchání jmen starořeckých vědců-filozofů se nezřídka setkáváme s jejich vztahem k řadám samotným (Zenón, Xenofanés, Aristotelés). My se však za pořadovými čísly vět setkáme se jmény matematiků převážně století osmnáctého a devatenáctého: Gauss, d'Alembert, Cauchy, Abel, Dirichlet, Čebyšev).
Úmluva: Jelikož velice často budeme užívat $\lim_{n\to\infty} s_n$, pišme místo něj stručně: $\lim s_n$.

Definice 1: Číselná řada
Nechť a_n je posloupnost komplexních čísel. Posloupnost s_n nazveme **posloupností n-tých částečných součtů posloupnosti** a_n , právě když $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Řekneme, že **řada** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **konverguje, resp. diverguje, resp. osciluje**, právě když existuje $\lim s_n$ vlastní (tj. s_n konverguje), resp. nevlastní, resp. s_n nemá limitu (ani vlastní, ani nevlastní). Nechť $A \in \mathbb{C} \cup R^*$. Nechť řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje nebo diverguje. Řekneme, že **součtem řady** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **je** A, právě když $\lim s_n = A$, toto píšeme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A$.

Poznámka: Někdo může být překvapen, že říkáme (v definici druhé tučně vytištěné sousloví) něco o "řadě", když nevíme, co ona je (neznáme její definici), upozorňuji, že v definici se nedefinuje řada, ale sousloví "řada konverguje, resp. diverguje, resp. osciluje". Slovo řada bude použito ve větách dále jen v tomto sousloví. Je potřeba říci, že se nebudeme svazovat při užívání slova řada touto přísnou formálností.

Příklad: Nechť $q \in \mathbb{C}$. Uvažme posloupnost $\{q^k\}$. Zkoumejme konvergenci, divergenci, anebo oscilaci příslušné řady (geometrické) v závislosti na parametru q.
Využijeme známého vzorce

$$\forall q \in \mathbb{C} : 1 - q^{n+1} = (1 + q + q^2 + \ldots + q^n)(1 - q) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Hledejme nyní limitu posloupnosti částečných součtů geometrické řady. Vidíme, že pro libovolné $q, |q| < 1$ tato limita existuje a je rovna $1/(1 - q)$. Pro $q = 1$ nemůžeme použít náš vzoreček, ale vidíme, že n-tý částečný součet řady je roven n, tj. řada zřejmě diverguje. Pro ostatní q vzoreček použít můžeme a zjistíme, že řada diverguje pro $q \geq 1$ a osciluje pro $q \leq -1$ (tj. na $\{|q| \geq 1\} \setminus \{q \geq 1\}$).

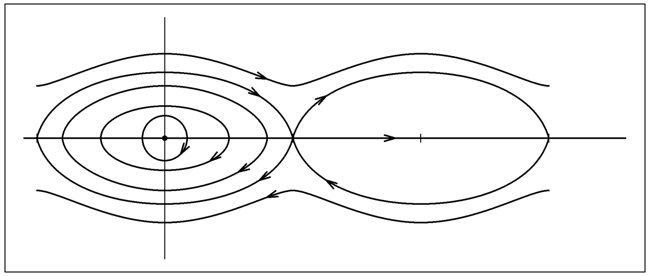
Příklad: Dokážeme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Tato řada se nazývá harmonická.

$$s_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+3.\frac{1}{2}.$$

„Domyslíme-li tento postup indukcí“, dostaneme, že $s_{2^k} \geq 1 + k.\frac{1}{2}$. Jelikož $\frac{1}{n}$ jsou kladná čísla, je příslušná s_n rostoucí, má tedy dle vět známých z minulého semestru limitu. Dle Heineho věty, má-li nějaká posloupnost limitu (vlastní či nevlastní), pak její každá vybraná podposloupnost má touž limitu, tj. jelikož (jak jsme se výše odvolali na větu z minulého semstru) pro harmonickou řadu existuje $\lim s_n$ (my pouze

Matematická analýza II.

Vladimír Souček a kol.



Každá řada s nezápornými členy má součet $s \in \mathbb{R}^*$.

Důkaz: Plyne okamžitě z věty o konvergenci monotonních posloupností z minulého semestru.

Věta 5: Srovnávací kriterium
Nechť platí alespoň jedna z podmínek

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq b_n)$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > 0, b_n > 0)(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{a_n})$.

Potom pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ konverguje; a pokud naopak $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ diverguje, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
Důkaz: Druhou část tvrzení (o divergenci) dokazovat nebudeme, neboť jde o obměnu (pojem z logiky) tvrzení prvního, jelikož víme, že pro řady s nezápornými členy mohou dle věty (4) nastat pouze dvě vzájemně se vylučující možnosti: buď řada konverguje, nebo diverguje (oscilace nenastává).
Nechť tedy platí 1, pak sčítáním příslušných výrazů dostáváme pro každé n přirozené, že: $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Limitní přechod v nerovnosti poskytne: $\sum_{k=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} b_n$, jelikož víme, že limity v $\mathbb{R}^*$ existují. Dále víme (dle předpokladu o konvergenci řady s členy a_n), že $\infty > \sum_{k=1}^{\infty} a_n$. Ve spojení s předchozí nerovností dostáváme, že řada s členy b_n konverguje.
Nechť platí nerovnost z podmínky 2 pro $n+1, n, ..., 1$ přirozená. Znásobme všechny tyto nerovnosti pro výše uvedené indexy. Dostáváme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} . \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} . \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_2}{b_1}.$$

Po vykrácení ($a_i \neq 0$) dostaneme: $\frac{a_{n+1}}{a_1} \geq \frac{b_{n+1}}{b_1}$, čímž zjistíme:$a_{n+1} \geq \frac{a_1}{b_1}.b_{n+1}$. Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak dle předchozího odstavce konverguje i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1}.b_{k+1}$ (zřejmě je i tato řada dle předpokladu řadou s nezápornými členy). Dle věty (3) ad 2., kde klademe $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$, dostáváme již požadované tvrzení.

Poznámka: Připomínáme, že věta (5) pojednává pouze o řadách s nezápornými členy, a to i v případě podmínky 1. Určete, kde byl tento předpoklad (mlčky) v důkazu použit!

Cvičení: Dokažte, že řada s členy $\frac{1}{n^2}$ konverguje. Návod: ukažte, že platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n.(n-1)}$, poté rozložte na "parciální zlomky" výraz $\frac{1}{n.(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ a ukažte, že tato řada konverguje (sčítejte členy na pravé straně výše uvedené rovnosti - příslušné se odečtou), tím jste však dle srovnávacího kriteria ukázali, že konverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Věta 6: Cauchyovo nelimitní odmocninové kriterium

1. $(\exists q \in (0,1))(\forall n \in \mathbb{N})(\sqrt[n]{a_n} \leq q) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} a_n)$ je konvergentní.
2. Jestliže existuje nekonečně mnoho členů a_n, že $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada diverguje.

Důkaz: První část věty: nechť takové $q \in (0,1)$ existuje, tj. pro každé přirozené n platí: $a_n \leq q^n$, avšak my již víme (viz úvodní příklad), že příslušná řada (geometrická) $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje, čímž je splněna 1. podmínka věty (5), s jejíž pomocí dostáváme požadované.
Druhá část tvrzení plyne snadno z věty (1) — má-li být nekonečně mnoho členů $a_n > 1$, nemůže být $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tedy řada nekonverguje (a dle (4) tím pádem diverguje).

Věta 7: d'Alembertovo nelimitní podílové kriterium

Ω, pokud má F na této množině spojité parciální derivace a jeho jakobián je všude na Ω nenulový.

Poznámka: Již jsme ukázali, že regulární zobrazení je lokálně prosté. Globálně být prosté nemusí.

Příklad: Významnou část regulárních zobrazení tvoří transformace souřadnic. Zde je požadavek na lokální prostotu pochopitelný.
Vezměme například souřadnice polární v $\mathbb{R}^2$. Transformační vztahy jsou $x = r\sin\varphi,\ y = r\cos\varphi$, jakobián

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos x & -r\sin x \\ \sin x & r\cos x \end{vmatrix} = r^2$$

je nenulový pro $r \neq 0$. To odpovídá našim zkušenostem — všechny souřadnice $(0,\varphi)$ skutečně popisují jediný bod. Také víme, že body o souřadnicích (r,φ), $(r,\varphi+2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ jsou totožné, a tedy polární souřadnice nejsou globálně jednoznačné (prosté).
Poznamenejme ještě, že mluvíme o křivočarých souřadnicích, pokud křivky $(x_1,y),(x,y_1),x_1,y_1 =$ konst. nejsou přímky a o souřadnicích pravoúhlých (ortogonálních), resp. kosoúhlých, pokud se tyto křivky protínají, resp. neprotínají pod pravými úhly.

Pokud $\lim\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\cdot n < 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz: Plyne ze srovnání s harmonickou řadou viz např. V. Jarník: Diferenciální počet II., Academia, Praha 1984, str. 115, kde je uvedeno v nelimitní podobě.

Dokažme jednoduchý důsledek Raabeova kriteria.
Věta 10: Gaussovo kriterium
Nechť existují $p,q \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ taková, že pro každé n přirozené platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = p + \frac{q}{n} + \frac{t_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

kde t_n je omezená posloupnost reálných čísel. Pak platí následující implikace:

1. $p > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
2. $p < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.
3. $(p = 1 \wedge q > 1) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
4. $(p = 1 \wedge q < 1) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz: Dokážeme pouze implikaci číslo 3, ostatní analogicky přímým dosazením do Raabeova kriteria. $\lim n.(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim (n + q + \frac{t_n}{n^\varepsilon} - n) > 1$, čímž je důkaz proveden.

Poznámka: Všechna tato kriteria požadují, aby nějaký výrok byl splněn pro všechna přirozená čísla (pro všechny členy řady). Jak jsme již zmínili, konvergence je nezávislá na hodnotě konečného počtu členů, což (pro $\mathbb{N}$) znamená, že stačí, aby existovalo nějaké n_0 přirozené, že pro všechna $n > n_0$ výroky, jejichž platnost se požaduje, platí. Právě z výše uvedeného důvodu mají kriteria své limitní protějšky:

Věta 11: Limitní Cauchyovo odmocninové kriterium

1. $(\lim \sqrt[n]{a_n} \neq 1) \Rightarrow (\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n)$ je konvergentní.
2. Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada diverguje.

Věta 12: Limitní d'Alembertovo podílové kriterium

1. $(\exists q \in (0,1))(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. $(\forall n \in N)(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1) \Rightarrow \sum k = 1^\infty a_n$ konverguje.

Věta 13: Limitní srovnávací kriterium
Buďte a_n, b_n kladné pro každé n přirozené. Nechť existuje $q \in (0,+\infty)$, že $lim(\frac{a_n}{b_n}) = q$, pak je řada $\sum k = 0^\infty a_k$ konvergentní, právě tehdy když je konvergentní $\sum k = 0^\infty b_k$.

Raabeovo kriterium v nelimitní podobě si jistě každý sestaví sám.
Poznámka: Základem důkazů limitních variant je úvaha

$$\lim_{n\to\infty} a_n < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n < 1.$$

Dále si už jen uvědomíme, že konvergence řady (na rozdíl od součtu) nezávisí na konečném počtu členů (zde prvních n_0 členech).

rovnice nezávislé, což zaručí nenulový jakobián v a^0 (jelikož je jakobián spojitý v a^0, musí být nenulový také v určitém okolí a^0).

Poznámka: Samozřejmě není nutné, aby proměnné, jimž odpovídající jakobián je nenulový, byly seřazeny „na konci“. Pokud pro $F(x_1, \ldots, x_{n+p}) = (F_1, \ldots, F_p)$ existují indexy $i_1, \ldots, i_p$, pro něž je

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_p)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}(a^0) \neq 0,$$

lze vyjádřit $x_{i_j}, j = 1, \ldots, p$ jako funkce ostatních proměnných, aniž by to nezbytně musely být zrovna $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$.

§9. Věta o inverzním zobrazení

Poznámka: U funkcí jedné reálné proměnné jsme zjistili, že pro existenci inverzní funkce k f (tedy aby f bylo prosté) na nějakém okolí bodu x_0 stačí, aby $f'(x_0) \neq 0$. Nepřekvapí nás proto následující tvrzení pro funkce n reálných proměnných.

Věta 74: O inverzním zobrazení
Nechť $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelné v ${x_0}^{31}$. Nechť

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0) \neq 0.$$

Potom

1. $\exists U'(x^0)$ takové, že F je prosté na $U'(x^0)$,
2. $F(U'(x^0))$ je otevřená množina
3. označíme-li $G \equiv F^{-1}$ na $F(U'(x^0))$, pak G má spojité parciální derivace na $F'(U'(x^0))$,
4. na $U'(x^0)$ platí
$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) \cdot \frac{\partial(G_1, \ldots, G_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(F(x)) = 1,$$
5. Má-li F spojité derivace až do řádu k, platí totéž pro G.

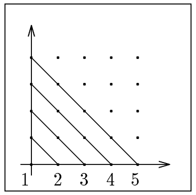
Poznámka: Jádrem důkazu bude obecnější věta o implicitním zobrazení, nepřehledné úvahy o různých okolích nejsou to úplně nejdůležitější.

Důkaz: Definujme zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto \Phi(x, y) = y - F(x)$. Je zřejmé, že $\Phi(x, F(x)) \equiv 0$. Z této podmínky bychom chtěli odvodit vztahy pro $x_1, \ldots, x_n$. Budeme se snažit použít větu o implicitním zobrazení. Prověřme, zda jsou splněny její předpoklady.
$\Phi(x^0, F(x^0)) = 0$ je splněno triviálně. Parciální derivace $\Phi(x, y)$ podle x_i jsou rovny $\partial F/\partial x_i$ a zřejmě $\partial F/\partial y_i = 1$, tedy všechny jsou spojité na nějakém okolí $(x^0, F(x^0))$. Konečně platí

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0) = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0) \neq 0,$$

tedy větu skutečně můžeme použít. Znamená to, že existuje funkce s patřičným počtem spojitých parciálních derivací (jak požadujeme v bodech 3 a 5), která zobrazuje okolí V bodu $F(x^0)$ do $\mathbb{R}^n$ a je inverzní k F.
Toto bohužel ještě neurčuje, zda je F na nějakém okolí x_0 prostá (viz příklad za důkazem). Musíme ještě použít předpoklad spojitosti F: víme, že G (jednoznačně) zobrazuje okolí $V(F(x^0))$ do okolí bodu x^0 (neboť G je spojitá); jistě existuje okolí $W(x^0)$ takové, že $F(W(x^0)) \subset V(F(x^0))$. Předpokládejme, že

[31] Tím máme na mysli existenci a spojitost všech parciálních derivací na nějakém okolí x^0, z čehož plyne existence totálního diferenciálu.



Obr. 2: Přečíslování řady pro $\exp(z_1)\exp(z_2)$.

konverguje pro všechna $|z| \geq 0$, neboť:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

Původní řada tedy konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Cvičení: Vyšetřete konvergenci pro $z \in \mathbb{C}$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ a řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Věta 15:
Exponenciála je jediná funkce splňující následující body:

1. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\ \exp(z_2)$
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$
3. $\exp(0) = 1$
4. $\forall\, x \in \mathbb{R} : (\exp(x))' = \exp(x)$
5. $H(\exp) = (0, +\infty)$, exponenciála je prostá a rostoucí funkce
6. $\forall\, a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} : \exp(\frac{p}{q} \ln a) = \sqrt[q]{a^p}$

Poznámka: Z bodů 1 a 3 vyplývá: $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

Poznámka: Z bodu 5 vyplývá existence inverzní funkce $(\ln x)$.

Poznámka: Lze též definovat mocninné funkce pro základ $a \neq e, a > 0$ předpisem $a^b = \exp(b \ln a)$.

Poznámka: Exponenciála je homomorfismus mezi groupou $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^+, .)$.

Důkaz:

1. $\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!}\right) = \sum_{k=0,l=0}^{\infty} \frac{z_1^k z_2^l}{k!l!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{(n-k)!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n = \exp(z_1 + z_2)$. Klíčovým krokem bylo přečíslování sčítané řady (záměna pořadí sčítanců) — v součinu se vyskytují všechny členy $a_k b_l, k, l \in \mathbb{N}$, otázkou je, v jakém pořadí je sčítat. Na obrázku představují body o souřadnicích (k, l) sčítance $a_k b_l$; místo abychom je sčítali „po řádcích“ (příp. sloupcích), sčítáme je po šikmých úsečkách. Že jsme k tomuto kroku oprávněni, ukážeme v následujícím. Vnitřní sumu přes k jsme odstranili s využitím binomické věty.
2. Podle 1 stačí ukázat $\exp(ix) = i \sin x + \cos x$. Ale $\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x$
3. Plyne z 1, neboť $0 \neq \exp(0) = \exp(0 + 0) = \exp(0)\exp(0) = (\exp(0))^2$, případně přímo z definice exponenciály.

dokázat.

Ověřovat samotnou monotonii může být poměrně pracné, proto vyslovíme poněkud méně obecnou, leč velmi praktickou větu.

Věta 71: O implicitně zadané funkci (postačující podmínka)
Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ je spojitá na okolí $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nechť platí

1. $F(x^0, y^0) = 0$,
2. existuje spojitá $\frac{\partial F}{\partial y}$ na okolí bodu (x^0, y^0) a
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U'(x^0, y^0)$, na němž podmínka $F(x, y) = 0$ určuje spojitou funkci $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$.

Důkaz: Dokazované tvrzení je shodné s tvrzením lemmatu, stačí tedy ukázat, že z předpokladů věty plynou předpoklady lemmatu. To je však snadné: je-li derivace $\partial F/\partial y$ nenulová v (x^0, y^0), plyne z její spojitosti, že je nenulová i na určitém okolí tohoto bodu U''. Pokud je například stále kladná (proč nemůže být někde kladná a někde záporná?), znamená to, že pro konstantní x je funkce $F(x, y)$ rostoucí (dbáme-li, aby $(x, y) \in U''$).

Příklad: U funkce $x^2 + y^2 - 1$ (resp. $x^2 - y^2$) se snadno přesvědčíme, že předpoklady právě dokázané věty jsou splněny ve všech bodech (resp. jsou splněny všude mimo $(0, 0)$).

Věta 72: Derivace implicitní funkce
Nechť $F(x, y)$ splňuje v $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ předpoklady předchozí věty a nechť má navíc spojité všechny parciální derivace (i smíšené) až do řádu k na $U(x^0, y^0)$. Potom i funkce $y = y(x)$ má na svém definičním oboru spojité všechny parciální derivace až do řádu k.

Důkaz: Budeme samozřejmě postupovat indukcí podle k. Klíčový bude důkaz pro první derivaci. Vezměme zřejmou rovnost $F(x, y(x)) = 0$ a derivujme ji podle x_i. Předpokládáme-li[29], že v (x^0, y^0) existuje derivace $\partial y/\partial x_i$, můžeme použít větu o derivaci složeného zobrazení:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

Stejným způsobem bychom dostali i vztahy pro libovolné vyšší derivace (nechť čtenář vyzkouší sám).

Poznámka (nepovinná): Existenci derivace je ovšem třeba dokázat. Víme, že na určitém okolí (x^0, y^0) platí $F(x, y(x)) = 0$, což můžeme také zapsat jako

$$0 = F(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i)) - F(x^0, y(x^0)), e^i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots), \text{ tj. } e^i_j = \delta_{ij}, t \in U(0).$$

Předpoklady zaručují existenci totálního diferenciálu F na okolí (x^0, y^0), tedy tento fakt můžeme také zapsat

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^0, y(x^0))\delta_{ij}t + \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)\left(y(x^0 + te^i) - y(x^0)\right) + \xi(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i)),$$

kde ξ je zbytek velikosti $o(t)$[30]. Nyní již určíme vztah pro $\partial y/\partial x_i$:

$$\frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0, y(x^0)) - \frac{\xi(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i))}{t}\right) = \frac{y(x^0 + te^i) - y(x^0) + \xi(x^0 + te^i, y(x^0 + te^i))}{t};$$

stačí zkoumat limitu této rovnosti pro $t \to 0$.
Tuto úvahu bychom mohli provést nejen v bodě $(x^0, y(x^0))$, ale i v libovolném bodě $U(x^0, y^0)$ — dle

[29] Viz poznámka.
[30] Přesněji řečeno $o(||\eta||)$, kde $\eta = (0, \ldots, t, \ldots, 0, y(x^0 + te^i) - y(x^0))$.

nimž tyto řady konvergují se rovnají.

Důkaz: Nejprve dokažme absolutní konvergenci přerovnání $a_n = b_{\varphi(n)}$. Chci ukázat $\exists\, C \in \mathbb{R}; \forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} |b_k| \leq C$, o posloupnosti a_n to vím. Nechť $m = \max\{\varphi(k), k \leq n\}$, potom $\sum_{k=0}^{n} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| \leq C$, což se mělo ukázat.
Pro shodnost obou hodnot stačí ukázat, že platí: $\sum_{k=0}^{\infty}(b_k - a_k) = 0$. Zkoumejme, zda lze nějak omezit částečné součty této řady. Z absolutní konvergence řad s a_n a b_n vyplývá (přes Bolzano-Cauchyovu podmínku): $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_a; \forall p \in \mathbb{N} \sum_{n=n_a}^{n_a+p} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, podobně pro n_b. Zvolím-li $n_0 = \max(n_a, n_b)$, budu moci omezit všechny součty podle trojúhelníkové nerovnosti:

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p}(a_k - b_k)\right| < \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p}|a_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p}|b_k| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Takto však potřebujeme omezit částečné součty pro k od jedné. Volme $n_1 = \max_{k \leq n_0}\{\varphi(k), \varphi^{-1}(k)\}$; tvrdím, že pak

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}(b_k - a_k)\right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{n_1}|a_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n_1}|b_k|. \tag{2}$$

Vskutku: podmínka pro n_1 mi zaručila, že se v sumě nalevo budou ke všem $a_1, \ldots, a_{n_0}$ vyskytovat jejich „přerovnané“ protějšky v řadě b_k, tj. $b_{\varphi(1)}, \ldots, b_{\varphi(n_0)}$, které se s nimi odečtou, čímž v sumě zbudou z řady a_k pouze členy s indexem $n_0 + 1$ a vyšším. Stejně mám ale zaručeno, že i ke členům $b_1, \ldots, b_{n_0}$ budou existovat protějšky $a_{\varphi^{-1}(1)}, \ldots, a_{\varphi^{-1}(n_0)}$ v řadě se členy a_k. V sumě nalevo se tedy budou vyskytovat pouze členy a_k i b_k s indexy většími než n_0 (a možná ještě ne všechny). Vztah (2) pak již dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti.
Z Bolzano-Cauchyovy podmínky (viz výše) pro $p = n_1 - n_0 - 1$ pak máme

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}(b_k - a_k)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což sečteno s (1) dává

$$2\varepsilon > \left|\sum_{k=1}^{n_1}(b_k - a_k)\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p}(a_k - b_k)\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{n_0+p}(a_k - b_k)\right|, \forall p \in \mathbb{N},$$

neboť jistě $n_1 \geq n_0$ (sumy na sebe buď těsně navazují, nebo se dokonce překrývají). Pro každé $\varepsilon > 0$ jsme tedy nalezli způsob, jak omezit všechny částečné součty číslem 2ε — to ale znamená, že $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k) = 0$, což bylo dokázati.

Definice 5: Řady s prvky „očíslovanými“ jinak než přirozenými čísly
Nechť M je spočetná množina. Řekneme, že $\sum_{m \in M} a_m$, kde $a_m \in \mathbb{C}$, je absolutně konvergentní, pokud existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to M$ taková, že $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{\varphi(i)}|$ konverguje. Pak definujeme $\sum_{m \in M} a_m$ jako $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)}$.

Poznámka: Minulá věta zajišťuje korektnost definice - tzn., že hodnota $\sum_{m \in M} a_m$ nezávisí na volbě φ.

Poznámka: Speciálně lze sečíst absolutně konvergentní řadu $\sum_{m \in M} a_m$ pro $M = \mathbb{N}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Věta 17: Konvergence součinu řad
Nechť řady $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně, potom řada $\sum_{m=1, n=1}^{\infty} a_m b_n$ konverguje absolutně a platí:

Věta 69: Nutná podmínka existence potenciálu
Nechť je U je potenciál k T na nějaké množině $B \subset \mathbb{R}^n$, spojitě diferencovatelný do druhého řádu. Pak platí $\partial T_i/\partial x_j = \partial T_j/\partial x_i$[27].

Důkaz: Plyne ihned z věty o záměně smíšených derivací:

$$\text{Je-li } T_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ a } \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i}.$$

Poznámka: Takto vyslovená „nutná podmínka“ pro existenci potenciálu U je poměrně slabá, neboť požaduje existenci druhých derivací U, tj. prvních derivací T. Ve fyzice se ovšem často setkáváme s případy, kdy tyto derivace neexistují (např. elektrické pole homogenně nabité koule). Vektorová pole[28], jejichž potenciál nemá druhé derivace, tedy nejsou nijak „neobvyklá“, a tedy pokud není splněna uvedená „nutná“ podmínka, mnoho jsme ve skutečnosti nezjistili.

Lemma : Nechť f je spojitá v $J = (\alpha, \beta) \times \langle A, B\rangle$, kde meze A, B jsou konečné.
Pak $F(x) = \int\limits_A^B f(x,y)\ \mathrm{d}y$ je spojitá v (α, β).

Důkaz: $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int\limits_A^B [f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)]\ \mathrm{d}y.$
Zvolíme $h_0 > |h|$ kladné takové, že $\langle x_0 - h_0, x_0 + h_0\rangle \subset (\alpha, \beta)$ Na intervalu $\langle x_0 - h_0, x_0 + h_0\rangle \times \langle A, B\rangle$ je funkce f spojitá a stejnoměrně spojitá, protože se jedná o uzavřený interval. Integrand tedy můžeme odhadnout nějakým univerzálním ε a celý integrál je menší než $\varepsilon(B - A)$, odtud F je spojitá.

Věta 70: Postačující podmínka pro existenci potenciálu
Nechť $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ je pole a nechť všechny složky mají spojité parciální derivace v otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}^n$, které splňují podmínku $\partial T_i/\partial x_j = \partial T_j/\partial x_i$ pro všechna i, j. Pak T má potenciál.

Důkaz: Provedeme pro $n = 2$ a bude trochu trikový. Nechť $a, b \in J \subset \mathbb{R}^2$. Definujme

$$U(x,y) = \int_a^x T_1(\xi, b)\ \mathrm{d}\xi + \int_b^y T_2(x, \eta)\ \mathrm{d}\eta$$

Dokážeme o U, že je potenciálem (T_1, T_2). Podle pravidla o derivování podle proměnné v integrační mezi dostáváme

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = T_2(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = T_1(x,b) + \int_b^y \frac{\partial T_2}{\partial x}(x,\eta)\ \mathrm{d}\eta$$

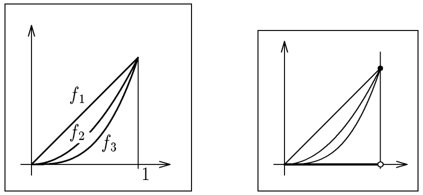
Integrál upravíme v souladu s podmínkou $\partial T_1/\partial y = \partial T_2/\partial x$:

$$T_1(x,b) + \int_b^y \frac{\partial T_1}{\partial y}(x,\eta)\ \mathrm{d}\eta = T_1(x,b) + T_1(x,y) - T_1(x,b) = T_1(x,y)$$

Tedy U je potenciálem T.

Definice 32: Integrační faktor
Funkci $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme integračním faktorem funkce T, jestliže $\tilde{T} \equiv \mu T$ má potenciál.

[27] Ve třech rozměrech to znamená, že rotace vektorového pole T ($\nabla \times T$) je nulová.
[28] Pojmem skalární, resp. vektorové pole rozumějme zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.



Obr. 5: Posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ na $(0,1)$ a její limita

- Řekneme, že $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ konverguje stejnoměrně k $S(x)$, právě když $S_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} S(x)$.

Příklad: Uvažujme posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ na intervalu $I = (0,1)$. Všechny tyto funkce (viz obrázek) mají grafy začínající v bodě $[0,0]$ a končící v bodě $[1,1]$, přičemž krajní body do zkoumané množiny nepatří. S rostoucím n je graf x^n stále prohnutější a stále více se blíží bodu $[1,0]$. Snadno nahlédneme, že daná posloupnost bodově konverguje ke konstantní funkci $f(x) = 0, \quad x \in (0,1)$, pro každé x z tohoto intervalu tvoří hodnoty $f_n(x)$ geometrickou posloupnost, která má při kvocientu $|x| < 1$ limitu nula.
Jak je tomu se stejnoměrnou konvergencí? Když si pořádně prohlédneme definice bodové a stejnoměrné konvergence, seznáme, že se liší pouze pořadím kvantifikátorů — kvantifikátor $\forall x$ je u stejnoměrné konvergence „vsunut více do definice“. Jinými slovy, ε musíme zvolit dříve než x a musí tudíž vyhovovat na celé množině. Pokud si nakreslíte graf funkce, k níž se má posloupnost limitně blížit a kolem této funkce pás o pološířce ε, zjistíte, že definice neznamená nic jiného, než že od jistého indexu n_0 musí mít všechny funkce s vyšším indexem graf celý uvnitř tohoto pásu.
V našem konkrétním případě je z této geometrické představy patrné, že $f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně k funkci $f(x) = 0$. Pro libovolné $\varepsilon < 1$ grafy funkcí v okolí jedničky vzrostou nad ε a tedy vyskočí z příslušného pásu kolem nuly. Vzápětí dokážeme větu, kterou tento postup zpřesníme a zobecníme.

Poznámka:

1. Jestliže $\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, pak $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$. Toto tvrzeníčko se stane zřejmým, uvážíme-li, že pokud pro každé ε dokážeme najít univerzální index n_0, od něhož už se pro všechna x žádné $f_n(x)$ neliší od $f(x)$ o více než ε, tím spíše ho najdeme pro každé x jednotlivě.
2. Nechť $\varphi_n(x) \overset{M_i}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ platí pro každý index od 1 do n. Pak $\varphi_n(x) \overset{\bigcup M_i}{\rightrightarrows} \varphi(x)$. Toto tvrzení je opět velmi jednoduché – pokud máme zadáno ε a jsme k němu schopni najít na každé M_i odpovídající $n_0 i$, pak na sjednocení $\bigcup\limits_1^n M_i$ stačí vzít za n_0 maximum z těchto čísel. Pozor, tvrzení platí pouze pro konečné sjednocení.
3. Ze stejné úvahy plyne také, že pro M konečnou ztrácí pojem stejnoměrné konvergence svou zajímavost, neboť $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x)$
4. Je-li $M' \subset M$, pak $\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_n(x) \overset{M'}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Věta 18: Ekvivalentní podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost funkcí $\varphi_n : M \mapsto \mathbb{C}$, $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$. Označme $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$. Pak

$$\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim \sigma_n = 0$$

(i smíšené) derivace mají v a diferenciál prvního řádu. Značíme jej $\mathrm{d}^{(k)} f(a)(h^1, h^2, \dots h^n)$.

Věta 66: Existence totálního diferenciálu k-tého řádu, postačující podmínka
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má na okolí $U(a) \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny k-té derivace. Pak f má v a diferenciál k-tého řádu.

Důkaz: Provedeme pro $k = 2$. Označme $g_i(x) \equiv \partial f / \partial i(x)$, pak $\forall j$ jsou $\partial g_i / \partial x_j$ spojité v a, a tudíž všechny g_i mají v a diferenciál prvního řádu.

Definice 29: Totální diferenciál
Totálním diferenciálem funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ řádu k v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ rozumíme k-lineární formu danou předpisem

$$\mathrm{d}^{(k)} f(a)(h^1, h^2, \dots, h^n) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h^1_{i_1} h^2_{i_2} \dots h^k_{i_k}.$$

Poznámka: Pozor. Vyšší diferenciály jsou multilineární formy, tedy jednotlivé vektory $h^1, h^2, \dots, h^n$ jsou vzájemně nezávislé. V dalším paragrafu o Taylorově rozvoji budeme pokládat $h = h^1 = h^2 = \dots = h^n$, takže tam už půjde o formu kvadratickou, kubickou apod.

Poznámka: Pro matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

vyčíslenou v bodě a se někdy užívá názvu hessián a označuje se $Hf(a)$.

Poznámka: Čtenář si možná všiml logického skoku mezi definicí existence totálního diferenciálu a definicí totálního diferenciálu samotného. Bylo by korektní nějak ověřit, zda tyto dvě definice nejsou v rozporu. My toto ověření provádět nebudeme, lze ho nalézt v Jarníkově Diferenciálním počtu II. Podobně diskusi, kdy lze zaměňovat pořadí parciálního derivování podle různých proměnných, ponecháme zájemcům k nastudování z jiných zdrojů.

§6. Taylorovy řady

Definice 30: Konvexní množina
Konvexní kombinací dvou vektorů x a y rozumíme vektor $\lambda x + (1-\lambda) y$ pro $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ [25]. Konvexní množina je pak taková množina, která s každými svými dvěma body obsahuje i všechny jejich konvexní kombinace.

Věta 67: O střední hodnotě funkce více proměnných, jinak
Nechť B je otevřená[26] konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nechť $f : B \to \mathbb{R}$ má na B spojité první derivace. Pak $\forall a, b \in B \quad \exists t \in (0, 1) \quad f(a) - f(b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial f / \partial x_i (a + t(b-a))(b_i - a_i)$.

Důkaz: Definujme funkci $F(t) \equiv f(a + t(b-a))$. Z pravidel o derivování složené funkce plyne, že pokud má f spojité derivace na B, má F spojitou derivaci na $\langle 0, 1 \rangle$. Můžeme tedy aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě, podle níž existuje t_0, že $F(1) - F(0) = F'(t_0)$. Dosadíme-li sem za $F(t)$ zpátky $f(a + t(b-a))$ a aplikujeme-li větu o derivaci složené funkce, získáváme

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + t(b-a))(b_i - a_i).$$

[25] Jedná se o body na úsečce spojující x a y

[26] Připomeňme, že otevřená množina je taková množina, která s každým svým bodem obsahuje i nějaké jeho okolí.

Pak ale $\forall x \in M \quad |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Označíme-li $m - n = p$, potom $\left| \sum\limits_{n+1}^{n+p} v_n(x) \right| = |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

$\Longleftarrow$: Předpoklady si můžeme přepsat do tvaru

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m, n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Z Bolzano-Cauchyho podmínky pro číselné posloupnosti je jasné, že pokud pro určité x_0 a $m, n \geq n_0$ je $|S_m(x_0) - S_n(x_0)|$ menší než ε, pak posloupnost $S_n(x_0)$ konverguje k nějakému $S(x_0)$. Protože toto platí pro všechna $x = x_0$ z vyšetřované množiny, má posloupnost $S_n(x)$ bodovou limitu, kterou označíme $S(x)$. Z předpokladů plyne tvrzení

$$\sup_{m \geq n_0} S_m(x) - \inf_{n \geq n_0} S_n(x) \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Protože posloupnost $S_n(x)$ má limitu a ta nutně leží mezi supremem a infimem této posloupnosti, lze toto přepsat na

$$\sup_{m \geq n_0} S_m(x) - S(x) < 2\varepsilon \quad \wedge \quad S(x) - \inf_{n \geq n_0} S_n(x) < 2\varepsilon$$

Všechny hodnoty $S_n(x)$, $n \geq n_0$ náleží intervalu $\langle \inf\limits_{n \geq n_0} S_n(x), \sup\limits_{n \geq n_0} S_n(x) \rangle$, tudíž platí

$$\forall n \geq n_0 \quad S_n(x) - S(x) < 2\varepsilon \quad \wedge \quad S(x) - S_n(x) < 2\varepsilon$$

čili

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |S_n(x) - S(x)| < 2\varepsilon$$

v čemž poznáváme definici stejnoměrné konvergence.

Věta 21: Weierstrassova
Uvažujme $\sum\limits_1^\infty v_n(x) \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_1^\infty w_n(x) \in \mathbb{R}_0^+$ dvě řady funkcí definovaných na množnině M. Nechť pro každé n platí $|v_n(x)| \leq w_n(x)$ a nechť $\sum\limits_1^\infty w_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M. Pak $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M a $\sum\limits_1^\infty |v_n(x)| \leq \sum\limits_1^\infty w_n(x)$.

Důkaz: Z Bolzano-Cauchyovy podmínky. Protože řada $\sum\limits_1^\infty w_n(x)$ je nezáporná a stejnoměrně konvergentní, platí podle definice

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \sum_{n+1}^{n+p} w_n(x) < \varepsilon$$

Odtud pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} v_n(x) \right| \leq \sum_{n+1}^{n+p} |v_n(x)| \leq \sum_{n+1}^{n+p} w_n(x) < \varepsilon$$

plyne stejnoměrná konvergence $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$. Nerovnost $\sum\limits_1^\infty |v_n(x)| \leq \sum\limits_1^\infty w_n(x)$ je triviálním důsledkem nerovností mezi částečnými součty.

Poznámka:

1. Řada $\sum\limits_1^\infty w_n(x)$ bývá někdy nazývána *majorantní řada*.
2. Často je výhodné převést problém týkající se řad funkcí na problém číselných řad. V souvislosti s Weierstrassovou větou se užívá řada suprem původní nebo majorantní řady $\sum\limits_1^\infty \sigma_n$, kde $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} |v_n(x)|$ respektive $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} w_n(x)$. Je důležité si uvědomit, že věta platí jen jedním směrem a není tedy možné z divergence řady $\sum\limits_1^\infty \sigma_n$ dělat jakékoli závěry ohledně řady $\sum\limits_1^\infty w_n(x)$.

existuje $\mathrm{d}f(g(a))$.
Pak existuje $\mathrm{d}(f\circ g)(a) = \mathrm{d}f(g(a)) \circ \mathrm{d}g(a)$ a navíc

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(a))\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a).$$

Lemma : Nechť $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení, $L_i(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}h_j$. Pak L je spojité a $\exists C\in\mathbb{R} \quad \forall h\in\mathbb{R} \quad \|L(h)\| \le C\|h\|$

Důkaz lemmatu: Spojitost L je zcela zřejmá, druhé tvrzení dokážeme pomocí jednoduchých odhadů:

$$\|L(h)\| \le \sum_{i=1}^{k}|L_i(h)| = \sum_{i=1}^{k}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}h_j\right| \le \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\|h\| = C\|h\|.$$

Poznámka: Tvrzení o spojitosti lineárních zobrazení platí pouze v konečné dimenzi.

Důkaz věty: Nejprve napíšeme, co znamená fakt, že funkce má diferenciál:

$$\exists\ \mathrm{d}g(a) \Rightarrow \exists\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k \text{ spojitá},\quad \varphi(0)=0 \quad g(a+h)-g(h) = \mathrm{d}g(a)(h) + \varphi(h)\|h\|$$

$$\exists\ \mathrm{d}f(g(a)) \Rightarrow \exists\psi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R} \text{ spojitá},\quad \psi(0)=0 \quad f(g(a)+l)-f(g(a)) = \mathrm{d}f(g(a))(l) + \psi(l)\|l\|$$

Chceme dokázat obdobnou vlastnost pro diferenciál složené funkce, tedy dospět k

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(g(a+h)) - f(g(a)) - \mathrm{d}f(g(a))[\mathrm{d}(g(a)(h))]|}{\|h\|} = 0$$

Rozepišme tedy rozdíl složené funkce pomocí funkce $\psi(x)$:

$$f(g(a+h)) - f(g(a)) = \mathrm{d}f(g(a))[g(a+h)-g(a)] + \psi(g(a+h)-g(a))\|g(a+h)-g(a)\|$$

Úlohu l zde hraje výraz $g(a+h)-g(a)$ Podobně můžeme rozepsat i tento výraz pomocí funkce $\varphi(h)$:

$$\mathrm{d}f(g(a))[\mathrm{d}g(a)(h) + \varphi(h)\|h\|] + \psi\left[(\mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|\right]\cdot\|dg(a)(h)+\varphi(h)\|h\|\|$$

Totální diferenciál je lineární forma, tudíž tento výraz lze upravit na

$$\mathrm{d}f(g(a))[\mathrm{d}g(a)(h)] + \|h\|\,\mathrm{d}f(g(a))[\varphi(h)] + \psi\left[(\mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|\right]\cdot\|\,\mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\|h\|\|$$

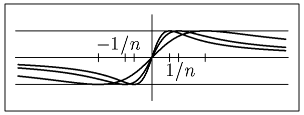
Teď už stačí, aby

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|h\|\,|\,\mathrm{d}f(g(a))[\varphi(h)]| + |\psi(\,\mathrm{d}g(a)(h)+\varphi(h)\,\|h\|)\cdot(\|\,\mathrm{d}g(a)(h)\| + \|\varphi(h)\|\,\|h\|)|}{\|h\|} = 0$$

První výraz ve jmenovateli má i po vydělení $\|h\|$ limitu nulovou, protože $\varphi(0)=0$ a také $\mathrm{d}f(g(a))(0)=0$. Druhý sčítanec je tvořen dvěma činiteli. První má limitu nula, druhý je opět tvořen součtem dvou sčítanců $\|\,\mathrm{d}g(a)(h)\|$ a $\|\varphi(h)\|\|h\|$. První výraz je podle lemmatu omezen $C\|h\|$, druhý jde do nuly i po vydělení $\|h\|$. Celý součin jde tedy také do nuly i po vydělení $\|h\|$ a limita celého zlomku je skutečně rovna nule. Druhá část věty je už jen přepisem totálních diferenciálů pomocí parciálních derivací:

$$\mathrm{d}f(g(a))(l) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_j}(g(a))l_j,\qquad \mathrm{d}g(a)(h) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)h_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}f(g(a))(\,\mathrm{d}g(a)(h)) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)h_i.$$



Obr. 7: Posloupnost funkcí $f_n(x) = x/(1+n^2x^2)$ na $\mathbb{R}$.

Mějme posloupnost funkcí $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$. Jaké podmínky musíme na tyto funkce naklást, aby byla jejich limita spojitá funkce? Stačí, když budou všechny spojité? Evidentně ne, jak ukazuje příklad posloupnosti x^n. Odpověď na tuto otázku dávají následující věty:

Věta 22: O limitním chování posloupnosti funkcí (záměna sumy a limity)
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost komplexních funkcí na intervalu (a,b), která stejnoměrně konverguje k $\varphi(x)$, nechť $\forall n$ existuje $\lim\limits_{x\to b-}\varphi_n(x) = c_n$. Pak

1. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$
2. existuje $\lim\limits_{x\to b-}\varphi(x)$ a rovná se c

Důkaz:

1. Použijeme Bolzano-Cauchyho podmínku a definici limity. Stejnoměrná konvergence $\varphi_n(x)$ je ekvivalentní s
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0 \quad \forall m,n\ge n_0 \quad \forall x\in(a,b) \quad |\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\varepsilon$$
K tomuto ε můžeme najít $U^{*-}(b)$, že pro všechna x z tohoto okolí je $|\varphi_n(x)-c_n|$ i $|\varphi_m(x)-c_m|$ menší než ε. Potom
$$|c_n-c_m| \le |c_n-\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x)-\varphi_m(x)| + |\varphi_m(x)-c_m| < 3\varepsilon$$
což nám dává Bolzano-Cauchyho podmínku pro posloupnost c_n a tudíž limita existuje[2].
2. Z definice limity vím, že $\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_1 \quad n\ge n_1 \quad |c_n-c|<\varepsilon$.
Dále ze stejnoměrné konvergence $\varphi_n(x)$ plyne, že k tomuto ε existuje n_2 tak, že $\forall n\ge n_2 \quad \forall x\in(a,b) \quad |\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$
Zvolím nyní $n\ge\max\{n_1,n_2\}$ a pak takové redukované okolí $U^{*-}(b)$, že pro všechna x z tohoto intervalu je $|\varphi_n(x)-c_n|<\varepsilon$.
Pak podle trojúhelníkové nerovnosti platí na tomto okolí
$$|\varphi(x)-c| \le |\varphi(x)-\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x)-c_n| + |c_n-c| < 3\varepsilon$$
v čemž poznáváme definici limity $\varphi(x)$ v bodě b zleva.

Věta 23: O limitním chování řad funkcí
Nechť $\sum\limits_{1}^{\infty} v_n(x)$ je řada komplexních funkcí definovaných na (a,b), která stejnoměrně konverguje k $S(x)$ na tomto intervalu. Nechť pro každé n existuje $\lim\limits_{x\to b-} v_n(x) = c_n$. Pak

1. existuje $\sum\limits_{1}^{\infty} c_n = c$
2. $\lim\limits_{x\to b-} S(x)$ existuje a rovná se c

Důkaz: Plyne z předchozí věty aplikované na posloupnost částečných součtů. Ověřte si sami platnost všech předpokladů.

Věta 24: O spojitosti limity posloupnosti a součtu řady
Buď I interval.

[2] Na nerovnost $|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|$ lze také přímo aplikovat limitní přechod $x\to b^-$, čímž dostaneme přímo poslední Bolzano-Cauchyovu podmínku pro limitu c_n.

Podle lemmatu a trojúhelníkové nerovnosti

$$|f(x)-f(a)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^{(i)})\right| |x_i - a_i|$$

Předpoklady věty říkají, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou v obdélníčku omezené nějakou konstantou C, proto

$$|f(x)-f(a)| \leq C \sum_{i=1}^{n} \leq Cn\|x-a\|$$

odkud už přímo plyne spojitost f v a.

§3. Totální diferenciál

Definice 26: Totální diferenciál
Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v a totální diferenciál L, pokud existuje *lineární* zobrazení $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a existují okolí $U(0)$ a zobrazení $\eta : U(0) \mapsto \mathbb{R}^k$ taková, že

1. $\forall h \in U(0) \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + \eta(h)$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\eta(h)}{\|h\|} = 0$

Poznámka: Zobrazení $h \mapsto f(a)+L(h)$ (častěji se L značí $\mathrm{d}f(a)$, jeho hodnota $\mathrm{d}f(a)(h)$) je nejlepší lineární aproximace funkce f v bodě a (ve stejném smyslu jako jsou Taylorovy polynomy nejlepšími polynomiálními aproximacemi funkcí jedné proměnné). Je reprezentováno maticí a_{ij} tvaru $n \times k$. Koeficienty této matice nejsou jen tak ledajaká čísla, jak brzy uvidíme.

Věta 61: Totální diferenciál zobrazení
Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f \equiv (f_1, f_2, \dots, f_k)$. Pak

1. $\exists\, \mathrm{d}f(a) \Leftrightarrow \forall i = (1,\dots,k) \quad \exists\, \mathrm{d}f_i(a)$
2. $\mathrm{d}f(a) = (\,\mathrm{d}f_1(a),\ \mathrm{d}f_2(a), \dots,\ \mathrm{d}f_k(a))$

Důkaz: Věta plyne přímo z věty o limitním přechodu po složkách a definice totálního diferenciálu.

Věta 62: Souvislost totálního diferenciálu a spojitosti
Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť existuje totální diferenciál v a. Potom

1. f je spojitá v a
2. $\mathrm{d}f(a)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

Důkaz: Ad 1. Podle definice $f(a+h)-f(a) = df(a)(h) + \eta(h) = \sum \alpha_j h_j + \eta(h)$. Jde-li h k nule, jdou oba členy vpravo k nule a tudíž $f(a+h) \to f(a)$.
Ad 2. Napišme druhou podmínku z definice

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-df(a)(h)}{\|h\|}$$

a interpretujme ji speciálně na $h_t = t\mathbf{e}^{(i)}$[22], tedy ve směru bázových vektorů:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{|f(a+h_t)-f(a)-df(a)(h_t)|}{\|h\|} = \lim_{t\to 0}\left|\frac{f(a+t\mathbf{e}^{(i)})-f(a)}{t} - \alpha_i\right|$$

Absolutní hodnoty, které přibyly oproti podmínce, samozřejmě limitní proces v nule neovlivňují. V prvním členu uvnitř poslední absolutní hodnoty poznáváme definici derivace ve směru vektoru $\mathbf{e}^{(i)}$ neboli parciální

[22] $\mathbf{e}^{(i)} = (\underbrace{0,\dots,0,1}_{i},0,\dots,0)$

kde x není pravým krajním bodem intervalu. Tato posloupnost funkcí má bodovou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(h) = \phi(h)$, jak plyne z již dokázané druhé části věty. Zároveň $\lim\limits_{h\to 0+} \phi_n(h) = \varphi'_{n+}(x)$ podle definice derivace. Abychom splnili předpoklady věty o limitním chování posloupnosti funkcí, musíme dokázat, že na nějakém pravém okolí nuly je $\phi(h)$ stejnoměrnou limitou $\phi_n(h)$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (0,\varepsilon_0)$ takové, že

$$\phi_n(h) - \phi(h) = \frac{[\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)] - [\varphi(x+h)-\varphi(x)]}{h} =$$
$$= \frac{(\varphi_n - \varphi)(x+h) - (\varphi_n-\varphi)(x)}{h} = (\varphi'_n - \varphi')(x+\xi)$$

Je tedy $\sup\limits_{(0,\varepsilon_0)} (\phi_n(h) - \phi(h)) \leq \sup\limits_{(x,x+\varepsilon_0)} (\varphi'_n(y) - \varphi'(y)) \longrightarrow 0$ a $\phi_n(h)$ skutečně stejnoměrně konvergují k $\phi(h)$. Potom ovšem

$$\lim_{n\to\infty} \varphi'_{n+}(x) = \lim_{h\to 0+} \phi(h) = \varphi'_+(x)$$

a věta je dokázána.

Příklad: Předpoklad o konvergenci alespoň v jednom x_0 je ve větě naprosto nutný. Uvažujme posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + n$ na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Derivace jednotlivých členů posloupnosti stejnoměrně konvergují k nule, ale derivace limity není vůbec definovaná, protože není definovaná ani tato limita, je v každém bodě nevlastní.

Věta 27: O integrálu posloupnosti funkcí
Nechť $f_n(x)$ jsou spojité funkce na $\langle a,b\rangle$, a nechť tato posloupnost stejnoměrně konverguje k $f(x)$ na tomto intervalu. Pak existuje $\int\limits_a^b f(x)dx$ a rovná se $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Důkaz: Odhadneme integrál pomocí suprema integrandu:

$$\left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \sup_{\langle a,b\rangle} |f_n(x)-f(x)|\,(b-a) \longrightarrow 0$$

Věta 28: Derivace řady po členech
Nechť $v_n(x)$ jsou definovány na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, nechť existuje $v'_n(x)$ na I, nechť existuje $x_0 \in I$ takový, že $\sum\limits_1^\infty v_n(x_0)$ konverguje, nechť $\sum\limits_1^\infty v'_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Pak

1. $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ konverguje na I a konverguje stejnoměrně na libovolném omezeném $I' \subset I$.
2. $\left[\sum\limits_1^\infty v_n(x)\right]' = \sum\limits_1^\infty v'_n(x)$, $x \in I$.

Věta 29: Integrál řady po členech
Nechť $v_n(x)$ jsou spojité na $\langle a,b\rangle$ a $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ konverguje stejnoměrně na tomto intervalu. Pak

$$\int_a^b \sum_1^\infty v_n(x) = \sum_1^\infty \int_a^b v_n(x)$$

Důkaz: Obě věty jsou jednoduchými důsledky analogických vět pro posloupnosti.

§4. Mocninné řady

Poznámka: S řadami funkcí jsme se setkali již dříve v paragrafu o Taylorových řadách. Funkci $f(x)$ s

1. $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in M \quad \rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in M \quad \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Toto zobrazení se nazývá metrika (vzdálenost, distance). Okolí v metrickém prostoru je množina $\{y \in M | \rho(y,x) < \varepsilon\}$.

Věta 57: Limitní přechod po složkách
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$, kde $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Pak $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_k) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_i(x) = y_i$

Důkaz: Pro jednoduchost zkoumejme funkci $g(x) \equiv f(x) - y$ se složkami $g_i(x) = f_i(x) - y_i$. Pro každý bod m-rozměrného prostoru platí nerovnosti

$$|z_i| \le \|z\| \le \sum |z_i| \le m \max |z_i|$$

Odtud snadno plynou oba směry implikace. Pokud $\lim g(x) = 0$, pak ke každému ε najdeme δ, že $\|x\| < \delta \Rightarrow \|g(x)\| < \varepsilon$. Podle první části nerovnosti platí, že potom pro tato x také $|g_i(x)| < \varepsilon$. Naopak, pokud pro každé i $\lim g_i(x) = 0$, pak ke každému ε najdeme $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$, že $\|x\| < \delta_i \Rightarrow |g_i(x)| < \varepsilon$. Pro $\|x\| < \min \delta_i$ pak podle druhé části nerovnosti platí $\|g(x)\| \le k\varepsilon$.

Definice 24: Spojitost zobrazení
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je spojité v a, pokud

$$\forall U(f(a)) \quad \exists U(a) \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \in U(f(a)).$$

Věta 58: Zachování spojitosti při operacích se spojitými zobrazeními, limita spojitého zobrazení
Nechť $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^l$ zobrazení, f spojité v $x_0 \in \mathbb{R}^n$, g spojité v $f(x_0) \in \mathbb{R}^k$. Pak $g \circ f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$ je spojité v x_0.
Nechť $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ zobrazení spojitá v a, pak

1. $(f + g)(x)$ spojité v a,
2. $(fg)(x)$ spojité v a,
3. $g(a) \neq 0 \Rightarrow (\frac{f}{g})(x)$ spojité v a.

f je spojité v $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Důkaz: Je opět zcela stejný jako pro funkce jedné proměnné.

Poznámka: Poslední dvě věty nám dávají prostředky pro konstrukci poměrně velké třídy spojitých funkcí více proměnných. Víme například, že polynomy jedné reálné proměnné jsou spojité funkce. Tedy budou spojité i polynomy více proměnných, protože ty jsou v každé své složce polynomem jedné proměnné. Spojité jsou tedy i racionální funkce, jejich logaritmy, exponenciely ...

§1. Parciální derivace

Definice 25: Derivace ve směru
Nechť $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{l}$ vektor z $\mathbb{R}^n$ [21] Derivací ve směru $\mathbf{l}$ v bodě a rozumíme

$$\partial_{\mathbf{l}} f(a) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\mathbf{l}) - f(a)}{t}$$

[21] Algebraik by asi přesněji rozlišil, že a je element *afinního* prostoru (prostoru bodů), zatímco $\mathbf{l}$ náleží jeho *zaměření*, tedy příslušnému vektorovému prostoru nad tímto afinním prostorem. Pro naše účely je rozdíl nepodstatný.

3. $\forall \rho < R$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)$ stejnoměrně na $K(z_0, \rho)$ a
4. pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, pak je rovna R.

Poznámka: Připomeňme, že limita suprem posloupnosti vždy existuje (vlastní nebo nevlastní), a tedy poloměr konvergence je definován pro každou mocninnou řadu.

Důkaz: Položme opět pro pohodlí $z_0 = 0$ a zkoumejme výraz $|z|/R$:

$$c = \frac{|z|}{R} = \limsup \sqrt[n]{a_n}|z|.$$

Vidíme, že pro $c < 1$ musí například pro $d = (c + 1)/2 \in (c, 1)$ existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$: $\sqrt[n]{a_n}|z| < d$, tedy $a_n|z|^n < d^n$. Protože řada s členy d^n zřejmě konverguje, konverguje i mocninná řada v libovolném bodě $z \in K(0, R)$. Pro důkaz tvrzení o stejnoměrné konvergenci stačí pro žádané ρ položit $z \in (\rho, R)$, ukázat konvergenci v z a použít předešlou větu.
Pokud naopak volíme $c > 1$, znamená to, že existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro něž $\sqrt[n]{a_n}|z| > 1$, tj. $a_n|z|^n > 1$, pročež nemůže být splněna podmínka $\lim n \to \infty a_n z^n = 0$, a řada tudíž musí divergovat.
K ověření posledního tvrzení použijeme d'Alembertova kriteria pro konvergenci řad:

$$c = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} = \frac{|z|}{\rho}.$$

Písmenem ρ jsme označili limitu, o níž chceme dokázat, že je rovna R, a o níž předpokládáme, že existuje. Vidíme, že původní řada konverguje absolutně pro $c < 1$, tj. $|z| < \rho$ a diverguje pro $c > 1, |z| > \rho$. Číslo ρ má tedy také vlastnosti 1 a 3 jako R. Přitom jsme ukázali, že R spočítané jako limita suprem je jediné číslo splňující vlastnosti 1 a 3, tedy nezbývá než $\rho = R$.

Cvičení: d'Alembertovo kriterium jsme formulovali pro řady reálných čísel. V předchozím důkazu jsme používali „rozšířenou“ verzi s absolutními hodnotami. Bylo to oprávněné?

Cvičení: Rozšiřte důkaz pro případ $R = +\infty$ (jedná se spíše o formální problém).

Poznámka: Všimněme si, že se ve větě nic nepraví o konvergenci na hranici kruhu (*nakružnici*$|z - z_0| = R$). Zde může být situace složitá, řada může konvergovat například jen na části kružnice. Tento problém budeme demonstrovat v článku o neabsolutní konvergenci u řady pro $\ln(1 + x)$.

Cvičení: Nalezněte poloměr konvergence Taylorovy řady funkce $\ln(1 + x)$ v obecném bodě $x_0 \in \mathbb{C}$.

§5. Derivace a integrace mocninné řady

Poznámka: Vyslovíme nyní znovu věty (26), (29), tentokrát speciálně pro mocninné řady.

Věta 32: Integrace mocninné řady
Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, x_0 \in \mathbb{R}$ nechť má poloměr konvergence R. Pak platí

1. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + c$ a
2. $\forall a, b \in (x_0 - R, x_0 + R) : \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x - x_0)^n.$

Důkaz: První část tvrzení ověříme pomocí věty o derivaci řady (26) — zjistíme, že derivace předložené primitivní funkce vskutku dává původní řadu (jeden bod, v němž má nederivovaná řada konvergovat, může být například x_0).
Pro tvrzení 2 můžeme přímo použít větu o integraci řady funkcí, neboť integrovaná řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $(x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta)$, $\delta > 0$ (dle (31)); pro libovolná $a, b \in (x_0 - R, x_0 + R)$ potom jistě najdeme takové δ, že a, b budou ležet i ve zmenšeném intervalu.

Věta 33: Poloměry konvergence mocninné řady a její derivace

8 Funkce více proměnných

Poznámka: Zajímáme se o zobrazení $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$. Toto zobrazení můžeme chápat jako uspořádanou n-tici $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, v níž je každá komponenta zobrazení $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$. Pod $\mathbb{R}^n$ budeme rozumět n-rozměrný Euklidovský prostor, čili reálný vektorový prostor se skalárním součinem zavedeným následující definicí:

Definice 20: Skalární součin
Skalární součin na $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $[x, y] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Tento skalární součin indukuje normu $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Poznámka: Takto zavedená norma má následující vlastnosti:

1. $\|x\| \geq 0$, přičemž rovnost nastává pouze pro $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tyto vlastnosti jsou dokonce zcela obecné axiomy pro zavedení jakékoli normy, nemusí jít jen o normu indukovanou skalárním součinem.
Definice 21: Okolí bodu
Každou množinu tvaru $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} | \|x - y\| < \varepsilon\}$, kde $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ nazýváme *okolím* bodu x o poloměru ε.
Množinu tvaru $U^*_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \backslash \{x\}$ nazýváme *redukované okolí* bodu x.

Poznámka: Někdy se množině $U_\varepsilon(x)$ říká též *otevřená koule* a *okolím* se pak míní jakákoliv množina obsahující nějakou otevřenou kouli jako podmnožinu.
Upřesněme ještě, co se míní pod pojmem otevřená, resp. uzavřená množina. Tedy:

Definice 22: Otevřená množina, uzavřená množina
Množina M se nazývá otevřená, pokud $x \in M \Rightarrow \exists U(x) : U(x) \subset M$.
Množina M je uzavřená ve V, $M \subset V$, pokud doplněk M do V je otevřená množina.

Poznámka: Nejlépe si lze toto představit na otevřených a uzavřených intervalech. Nezapomeňme, že interval z jedné strany otevřený a z druhé uzavřený není ani otevřená ani uzavřená množina.

Definice 23: Limita funkce více proměnných
Nechť $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\exists \delta \quad U^*_\delta(x_0) \subset D_F$. Číslo $A \in \mathbb{R}^n$ nazveme *limitou* funkce F v bodě x_0, právě když

$$\forall U(A) \quad \exists U^*(x_0) \quad \forall x \in U^*(x_0) \quad F(x) \in U(A).$$

Takto zavedený pojem limity je přímočarým zobecněním pojmu limity funkce jedné proměnné. Jak ale uvidíme na následující sérii příkladů, výpočet limit se přechodem do vyšších dimenzí velmi komplikuje.
Rozmysleme si ještě předem drobné tvrzení. Nechť existuje limita zobrazení f v bodě x_0 a nechť je rovna A. Zvolíme-li libovolnou spojitou křivku c procházející bodem x_0, musí v x_0 existovat i limita zobrazení f na množině $D_f \cap c$ rovná A. Názorně řečeno: limita musí vyjít A, ať se k bodu x_0 blížíme po jakékoliv křivce.
Příklad: Hledejme limitu funkce $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ v bodě $(0, 0)$. Nejprve si uvědomme, že tato limita nemůže být různá od nuly. Sledujeme-li chování funkce f na množině $(x, 0)$, $x \neq 0$ (první souřadná osa bez počátku), seznáme, že je na této množině nulová, a tudíž limita f zúžené na tuto množinu je nula. Pak ale $\lim\limits_{(x_1, x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$ buď neexistuje, nebo je nulová.
Chceme nyní dokázat, že limita je nula. Rozepišme tento požadavek podle definice:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x = (x_1, x_2) \quad 0 < \|x\| < \delta \quad \|f(x)\| = |f(x)| < \varepsilon$$

Místo řady číselné vezmeme řadu funkcí $\sum_{n=1}^{i} nftynx^n$. Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této řady je 1 (věta (31)) a že lze použít větu (32):

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left[\int \left(\sum_{n=1}^{i} nftynx^n\right) \mathrm{d}x\right]' = \left[\sum_{n=1}^{i} nfty \int nx^n \mathrm{d}x\right]' = \left[\sum_{n=1}^{i} nftyx^{n+1}\right]' =$$
$$= [x^2(1 + x + x^2 + \ldots)]' = \left[\frac{x^2}{1-x}\right] = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

Pro $x = 1/2$ pak zjistíme, že součet původní řady jsou 3.

§6. Taylorovy řady

Definice 8: Taylorova řada
Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0^\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

nazveme Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0.

Poznámka: Takto definovaná řada samozřejmě může mít poloměr konvergence nulový.

Poznámka: Připomeňme také, že existují funkce, jejichž Taylorova řada není identicky rovna f na žádném okolí x_0, ačkoliv zde (na některých těchto okolích) konverguje. Již dříve jsme uváděli například funkci $f(x) = \exp(-1/x^2)$ s dodefinovanou spojitou hodnotou $f(0) = 0$. Jednostranné derivace v nule jsme vyšetřovali jako limity oboustranných derivací a při jejich počítání jsme substitucí $z = 1/x$ přešli k výrazům upravitelným pomocí l'Hôspitalovy věty (podíl exponenciály a polynomu). Všechny derivace takto vyšly nulové, a tedy Taylorova řada též, i když zjevně $f(x) = 0$ pouze pro $x = 0$.

Označení: Označme C^0 množinu všech spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a C^k množinu všech těchto funkcí s derivacemi až do k-tého řádu. Zřejmě platí $C^0 \supset C^1 \supset \ldots \supset C^k \supset \ldots \supset C^\infty$.

Věta 35: Souvislost Taylorových a obecných mocninných řad
Nechť na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ platí $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Taylorovou řadou funkce f bodě x_0.

Důkaz: Dosadíme-li do předpokládané rovnosti $x = x_0$, zjistíme, že $f(a) = a_0$. Pokud tuto rovnost k-krát zderivujeme a použijeme větu (34), získáme stejným trikem vztah $f^{(k)}(x_0) = a_k k!$, což bylo dokázati.

Příklad: Pokud si vzpomeneme na tuto větu, můžeme Taylorovy řady počítat různými triky, aniž bychom pracně počítali obecné k-té derivace.
Například funkce $1/(1 + x^2)$ je zřejmě součtem geometrické řady $1, -x^2, x^4, \ldots$, a tedy tato řada je Taylorovou řadou pro $1/(1 + x^2)$.
Podobně, navíc s užitím věty o integraci mocninné řady získáme Taylorovu řadu pro logaritmus:

$$(\ln(1 + x))' = \frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \Rightarrow \ln(1 + x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n \mathrm{d}x = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Hodnotu integrační konstanty určíme např. při $x = 0$, kdy vyjde $c = 0$.
Tento postup můžeme zobecnit pro $\ln(a + x), a \in \mathbb{R}^+$:

$$(\ln(a + x))' = \frac{1}{a + x} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{a}\right)^n \Rightarrow \ln(a + x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{a}\right)^n,$$

$$\dot y_2 = y_1$$

Tedy:

$$\dot y = Ay, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

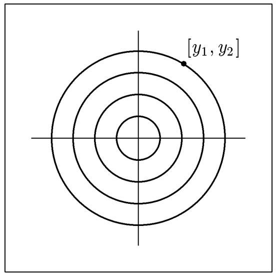
Povšimněme si, že $A^2 = 1$. Výpočet exponenciály bude tedy možno provést přímo:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 \cosh t + A \sinh t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Pro počáteční podmínky udané sloupcovým vektorem $y(0)$ je řešením soustavy $y(t) = e^{At}y(0)$. V prvním příkladu je tedy obecné řešení s počátečními podmínkami $y(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ udáno jako:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \cos t + y_2 \sin t \\ -y_1 \sin t + y_2 \cos t \end{pmatrix}$$

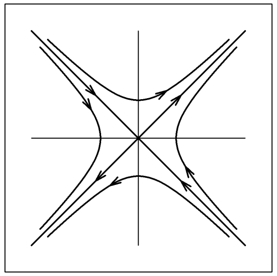
Povšimněme si, že platí: $y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = y_1^2 + y_2^2$, tedy trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ tvoří kružnice se středem v počátku, viz obrázek.



Ve druhém případě:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \cosh t + y_2 \sinh t \\ y_1 \sinh t + y_2 \cosh t \end{pmatrix}$$

Povšimněme si, že platí: $y_1(t)^2 - y_2(t)^2 = y_1^2 - y_2^2$. Trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ jsou znázorněny na obrázku.



4. $f(0) = a_0 \in U(0) \Rightarrow \exists U_\delta(0), \forall x \in U_\delta(0) : g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, kde d_n je definováno takto:

$$d_0 = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_0^n b_n,\ d_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n = 0 \\ k_1 + \ldots + k_n = m}}^{\infty} b_n a_{k_1} \ldots a_{k_n}.$$

Poznámka: Následující důkaz bude pouze rámcový.

Důkaz: První tvrzení je triviální (zkoumáme řadu pomocí jejích částečných součtů, tam lze měnit pořadí sčítanců bez omezení).
Druhé tvrzení se objasní, pokud se pokusíme „skutečně násobit“ dva nekonečné součty a budeme zjišťovat, jaké budou koeficienty u x^0, x^1, x^2, atd.:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \ldots.$$

Třetí tvrzení je pouze přeformulované tvrzení druhé: říkáme, že součinem řad s koeficienty b a c je řada s koeficienty a. Je však dobré si uvědomit, že pomocí tohoto předpisu jsme skutečně schopni *postupně* určit c_n (začneme s $n = 0$, při $n = 1$ použijeme již vypočítané c_0 atd.). Nové okolí $U_\delta(0)$ je nutno volit proto, abychom zajistili $g(x) \neq 0$ (víme, že g je spojitá a v nule nenulová, tedy toto okolí existuje).
Čtvrté tvrzení objasníme opět tak, že do výrazu $g(f(x))$ řady zkrátka dosadíme:

$$g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1} x^{k_1} \right) \ldots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_n} x^{k_n} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1} \ldots a_{k_n} x^{k_1 + \ldots + k_n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n = 0 \\ k_1 + \ldots + k_n = m}}^{\infty} a_{k_1} \ldots a_{k_n} \right) x^m.$$

Poslední úprava spočívala pouze v tom, že zvolíme nový způsob (novou cestu) jak sčítat v sumách přes k_i — nejprve projdeme všechny případy, kdy součet všech k_i je roven 0, pak ty, kde je roven jedné, atd. V závěru již vidíme, že koeficient stojící u x^m odpovídá dokazovanému vzorci.
Mnohé úvahy výše využívají záměnnosti sum v nekonečných součtech. Měli bychom mít na paměti, že toto je možné pouze pokud příslušné řady konvergují absolutně. O tom však mluví například věta (31).

Poznámka (uklidňující): pokud se čtenář ztratil při ověřování čtvrtého tvrzení, nemusí být neklidný, stačí, pokud pochopí následující příklad.

Příklad: Položme $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ a hledejme prvních pět členů Taylorovy řady pro funkci $g(f(x))$ se středem v nule.
Nechceme-li pracně počítat derivace, můžeme zkusit právě naznačenou metodu. Víme, že

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots.$$

Po dosazení dostáváme

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)^4 - \ldots.$$

Provedeme nyní naznačené mocnění a budeme se zajímat pouze o členy řádu x^4 a nižšího:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + 0x^5 + \ldots.$$

5. Rovnice $F(y,\dots,y^{(n)}) = 0$, tedy rovnice kde se nevyskytuje nezávisle proměnná t, lze řešit následujícím způsobem: Budu hledat $p(z)$ tak, aby platilo $y'(t) = p(y(t))$. Takže:

$$y(t) = z$$
$$y'(t) = y'(y^{-1}(y(t))) = p(y(y^{-1}(y(t)))) = p(y(t)) = p(z)$$
$$y''(t) = (p(y(t)))' = p'(y(t))y'(t) = p'(z)p(z)$$
$$y'''(t) = (p'(z)p(z))' = p''(z)p(z)p(z) + (p'(z))^2 p(z)$$

atd.
Příklad: Řešte: $y'' = 2yy'$

$$p'(z)p(z) = 2zp(z)$$
$$p'(z) = 2z$$
$$p = z^2 + C$$
$$y' = y^2 + C$$

6. Rovnice $F(t,y,y',\dots,y^n) = 0$, přičemž platí $F(t,\mu z_0,\dots,\mu z_n) = \mu^\alpha F(t,z_0,\dots,z_n)$, tj. F je homogenní funkce stupně α v $(z_0,\dots,z_n)$, lze řešit substitucí $z(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$. Takže:

$$y'(t) = z(t)y(t)$$
$$y''(t) = z'(t)y(t) + z(t)y'(t) = z'(t)y(t) + z(t)^2 y(t) = y(t)(z(t)^2 + z'(t))$$
$$y'''(t) = y(t)(z''(t) + 3z(t)z'(t) + z(t)^3)$$
$$y^{(k)}(t) = y(t)P_k(z(t),\dots,z^{(k-1)}(t))$$

kde P_k je polynom. Potom lze původní rovnici upravit na rovnici nižšího řádu:

$$F(t,y,yP_1(z),\dots,yP_k(z,\dots,z^{(k-1)})) = y^\alpha F(t,1,P_1(z),\dots,P_k(z,\dots,z^{(k-1)})) = 0, \text{ tedy}$$
$$F(t,1,P_1(z),\dots,P_k(z,\dots,z^{(k-1)})) = 0.$$

7. Rovnice, kde $F(\mu,\mu^m z_0,\dots,\mu^{(m-n)}z_n) = F(1,z_0,\dots,z_n)\mu^\beta$, kde $\mu > 0, \beta \in R, m \in N$, lze řešit zavedením substituce $z(\xi) = y(e^\xi)e^{-m\xi}$, kde $t = e^\xi$, tedy $\xi = \ln t$. Potom platí:

$$y(t) = z(\ln t)t^m$$
$$y'(t) = z'(\xi)t^{-1}t^m + zmt^{m-1} = (z'(\xi) + mz)t^{(m-1)}$$

Po dosazení do rovnice se podobně jako v bodě 6 podaří vyloučit t; řád rovnice se sníží a rovnice bude převedena do tvaru diskutovaného v bodě 5.

Poznámka: Zkoumejme řešení soustavy rovnic zapsané jako $\dot y = Ay$, kde A je matice a y a $\dot y$ představují n-tice funkcí zapsané jako sloupcové matice. Označím-li $Y(t) = e^{At}$, $e^B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ je exponenciála matice B, potom platí $\dot Y(t) = Ae^{At}$ a sloupce $Y(t)$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy rovnic, tj. jsou nezávislé, což lze snadno ověřit pro $t = 0$. Označím λ_i vlastní čísla matice A, tj. kořeny rovnice $\det(A-\lambda) = 0$; dále označme ν_i jejich násobnosti a m jejich počet. Nulové prostory $V_i = \{v \in R^n, (A-\lambda_i)^{\nu_i} = 0\}$ vytváří, viz lineární algebra, celý prostor R^n, tj. $R^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$, a jejich jediným společným prvkem je nulový prvek, tj. $\forall j \neq k : V_j \bigcap V_k = 0$. Je-li $v_i \in V_i$, potom $e^{At}v_i = e^{(\lambda_i + A - \lambda_i)t}v_i = e^{\lambda_i t}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(A-\lambda_i)^j}{j!}v_i$, kde pro $j \geq \nu_i$ je výraz $\frac{(A-\lambda_i)^j}{j!}$ v sumě nulová matice, tj. součet je tvořen pouze konečně mnoha nenulovými členy. Každý $v \in R^n$ lze jednoznačně rozložit na $v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j$, kde $v_j \in V_j$. K určení e^{At} stačí nyní najít

Příklad: Vyšetřeme, pro která x konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\imath nx}}{n}. \tag{3}$$

Snadno zjistíme, že tato řada není absolutně konvergentní (již dříve jsme ukázali, že harmonická řada $(1/n)$ diverguje). Vzhledem k tomu, že se jedná o řadu v $\mathbb{C}$, nelze ani použít Leibnizovu větu. Vyslovíme proto větu, která nám pomůže tento a některé další případy řešit. Nejprve však jedno důležité lemma:

Lemma Abelovo: Nechť $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,\dots,k$. Označme $B_j = \sum_{k=1}^{j}\beta_k$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = \alpha_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)B_k. \tag{4}$$

Důkaz lemmatu: Platí $\beta_k = B_k - B_{k-1}$ při $k \geq 2$, pro $k = 1$ je $B_1 = \beta_1$, tedy lze psát:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = \alpha_1\beta_1 + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k(B_k - B_{k-1}) = \alpha_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{k+1}B_k = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{k+1}B_k =$$
$$= \alpha_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1})B_k = \alpha_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)B_k.$$

Celý trik spočívá v tom, že sumu, v níž bylo v k-tém členu číslo α_k a nějaká další čísla B_j jsme přeuspořádali tak, aby v k-tém členu bylo číslo B_k a nějaká čísla[4] α_j.

Poznámka: zajímavý postřeh a zároveň pomůcka k zapamatování. Uvědomíme-li si, že Riemannův integrál byl definován jako určitá suma funkčních hodnot (násobených vždy délkou intervalu) a derivace jako rozdíl funkčních hodnot na kraji intervalu (dělený délkou intervalu), zajisté nám vztah (4) připomene vzorec pro integraci per partes.
Tuto myšlenku lze **poněkud** precizovat: Riemannův integrál byl alternativně definován přes limitu integrálních součtů. Mějme tedy funkce $f(x), g(x)$ spojité na $\langle a, b\rangle$ a volme ekvidistantní dělení (délky všech intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ jsou stejné a rovné h, $n = (b-a)/h$). Položme $\xi_i = x_i$ a $f(\xi_i) = f(x_i) = \alpha_i, g(\xi_i) = g(x_i) = \beta_i$. Výraz

$$\sum_{k=1}^{n} h\alpha_i\beta_i = h\sum_{k=1}^{n}\alpha_i\beta_i$$

potom skutečně konverguje k Riemannovu integrálu $f(x)g(x)$ na daném intervalu. Pokud rovnost (4) vynásobíme h, konverguje tedy levá strana k tomuto integrálu. Členy na pravé straně pro $h \to 0, n \to \infty$ upravíme s použitím Newtonovy věty[5] takto:

$$\alpha_n h B_n \to f(b)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)G(b), \text{ kde } G'(x) = g(x), G(a) = 0,$$

$$h\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)B_k = \sum_{k=1}^{n-1} h\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{h}hB_k \to \int_a^b\left(f'(x)\int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z tohoto lemmatu by bylo skutečně možné dokázat větu o integraci per partes. Lemma je dokonce silnější než tato věta, neboť hlásá rovnost v nelimitních případech (představme si, že na levé i na pravé straně stojí n-té členy nějakých posloupností). A jak jsme se již dávno přesvědčili, platí $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, nikoliv však naopak.

Věta 39: Abelovo a Dirichletovo kritérium

Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Označme $B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$ posloupnost částečných součtů b_n. Platí tato dvě tvrzení:

[4] Tj. sdružovali jsme členy obsahující B_k.
[5] Riemannův integrál pomocí primitivních funkcí.

Koeficienty $\gamma_{i,j}$ jsou pevné, tj. $\gamma_{i,j} \in C$. Po dosazení do původní rovnice:

$$L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \gamma_{i,j} z^{(j)}(\xi)$$

Tato rovnice je však lineární diferenciální rovnice n-tého řádu pro neznámou funkci $z(\xi)$. Řeší-li $z(\xi)$ tuto rovnici, potom $y(t) = z(lnt)$ řeší původní rovnici a naopak. Substituci $\xi = \ln t$ lze provést i pro rovnici s nenulovou pravou stranou a převést tak Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty s nenulovou pravou stranou. Ze substituované rovnice lze také snadněji získat řešení pro vícenásobné kořeny charakteristické rovnice.

Nechť nyní $t \in (-\infty; 0)$. Rovnici $L(y(t)) = 0$ převedu substitucí $\tau = -t$ na Eulerovu rovnici, kterou pro $t \in (-\infty; 0)$ řeším pro $\tau \in (0; \infty)$. Jejím řešením je funkce $(-t)^\lambda$, kde λ je řešení příslušné charakteristické rovnice; řešení na obou intervalech lze zapsat jako $|t|^\lambda$.

§5. Speciální případy diferenciálních rovnic

5.1 Homogenní rovnice

Definice 19: Nechť $\Omega \in R^n$ je množina, pro kterou platí: $x \in \Omega \Rightarrow \mu x \in \Omega, \mu \in R^+$. Řekneme, že funkce $f : \Omega \to R$ je homogenní funkce stupně α, $\alpha \in R$, pokud pro každé $x \in \Omega$ platí $f(\mu x) = \mu^\alpha f(x)$. Řekneme, že funkce $y' = f(t, y)$ je homogenní v $\Omega \subset R^2$, pokud funkce f je homogenní stupně 0.

Poznámka: Jsou-li $M(t, y)$ a $N(t, y)$ homogenní funkce na Ω stupně α a $N \neq 0$, potom $f(t, y) = \frac{M(t,y)}{N(t,y)}$ je homogenní stupně 0.

Poznámka: Hodnota homogenní funkce $f(t, y)$ stupně 0 závisí pouze na hodnotě y/t (tedy na směru vektoru (t, y), nikoliv na jeho délce). Navrhneme tedy následující postup:

Je-li $f(t, y)$ homogenní funkce, potom řešte rovnici $y' = f(t, y)$ substitucí $z = \frac{y}{t}$ na množinách $\Omega_+ = \{(t, y) \in \Omega, t > 0)\}$ a $\Omega_- = \{(t, y) \in \Omega, t < 0\}$.

Příklad: Řešme v Ω_+. Označme $g(z) = f(1, z)$, potom $f(t, y) = g(\frac{y}{t})$. Rovnici $y' = f(t, y)$ tedy převedeme na rovnici $(tz(t))' = g(\frac{y}{t}) = g(z)$, tedy na $z't + z = g(z)$, kterou lze rozřešit separací proměnných $z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$. Tedy například:

$$y' = \frac{y}{t} + 1$$
$$z't + z = z + 1$$
$$z' = \frac{1}{t}$$
$$z = \ln t + C$$
$$y = t \ln t + Ct$$

Obdobně postupujeme v Ω_-, přičemž $g(z) = f(-1, \frac{y}{-t}) = f(t, y)$.

5.2 Snižování řádu diferenciálních rovnic

1. Diferenciální rovnice tvaru $y^{(n)} = f(t)$ mají řešení pro zadané počáteční podmínky $y^0(t_0), \ldots$ $\ldots, y^{(k-1)}(t_0)$, zkráceně pišme $y_k = y^{(k)}(t_0)$, ve tvaru:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n \ldots\, d\tau_2\, d\tau_1 + y_0 + y_1(t - t_0) + \ldots + y_{n-1} \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Potřebujeme ovšem omezit $|\{\sum_{j=n+1}^{n+p} b_j\}|$ — zde však snadno zjistíme, že

$$\forall n, p \in \mathbb{N} : \left|\sum_{j=n+1}^{n+p}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n+p} b_j - \sum_{j=1}^{n} b_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n+p} b_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| \leq 2K.$$

Položme tedy $\Theta_2 = 2K$ a dále pro libovolné $\varepsilon > 0$ najděme z podmínky (7) takové n_0, pro něž je omezující nerovnost splněna pro $\Theta_1 = \varepsilon/4\Theta_2$. Potom bude pro libovolné $n \in \mathbb{N}, x \in$ M splněna nerovnost (5) s tím, že na pravé straně je opět číslo $\varepsilon 3/4 < \varepsilon$.

Poznámka: Klíčový pro celý důkaz byl předpoklad monotonie $\{a_n\}$ — jen tak se nám podařilo posčítat libovolně dlouhou (n členů) sumu s výrazy $|\alpha_{k+1} - \alpha_k|$.

Příklad: Vraťme se nyní k řadě (3) a použijme Dirichletovo kritérium. Položíme $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = e^{\imath nx}$. Okamžitě vidíme, že a_n splňuje podmínky věty (monotonie a konvergence k nule). Prozkoumáme tedy ještě omezenost částečných součtů b_n:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{\imath nx}\right| = \left|e^{\imath x} \frac{1 - e^{\imath nx}}{1 - e^{\imath x}}\right| \leq \left|\frac{e^{\imath x}}{1 - e^{\imath x}}\right| (1 + |e^{\imath x}|^n) = \frac{2}{|1 - e^{\imath x}|},$$

neboť $|e^{\imath x}| = 1$. Vidíme tedy, že kdykoliv je $e^{\imath x} \neq 1$, můžeme posloupnost B_n omezit, a tedy skutečně podle Dirichletova kritéria řada (3) konverguje. Naopak pokud je $e^{\imath x} = 1$ $(x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$, z řady (3) se stane řada harmonická, o níž víme, že diverguje.

Zajímejme se ještě dále, zda řada (3) konverguje na intervalu $(0, 2\pi)$ stejnoměrně. Dirichletovo kritérium si v tomto případě kladlo za podmínku stejnoměrnou konvergenci a_n k nule a dále „stejnoměrnou omezenost" $B_n(x)$. První požadavek je zřejmě splněn, neboť a_n na x nezávisí (v tom případě pojmy bodová a stejnoměrná konvergence splývají). Druhou podmínku na základě našeho odhadu splnit nemůžeme — jistě nelze najít konstantu K takovou, aby pro x libovolně blízko[6] k 0 platilo $K > 1/|1 - e^{\imath x}|$. Je pravda, že toto byl jen horní odhad B_n, ale i když prozkoumáme přímo částečný součet B_n, zjistíme, že jej nelze omezit při $x \to 0$. Dirichletovo kritérium je však pouze implikace, tedy ještě nemůžeme tvrdit, že řada (3) nekonverguje stejnoměrně na $(0, 2\pi)$ — k důkazu nekonvergence bychom tedy museli použít jiných metod. Stejnoměrná konvergence ovšem bude zajištěna na libovolném intervalu $(\delta, 2\pi - \delta), \delta > 0$, neboť pak bude pro všechna x z tohoto intervalu platit

$$\left|\frac{e^{\imath x}(1 - e^{\imath nx})}{1 - e^{\imath\delta}}\right| > \left|\frac{e^{\imath x}(1 - e^{\imath nx})}{1 - e^{\imath x}}\right| = B_n(x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Příklad: Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{8}$$

Samozřejmě platí $\sin nx = \mathrm{Im}\ e^{\imath \mathrm{nx}}$, tedy řada, kterou právě vyšetřujeme je pouze imaginární část řady (3). Všude tam, kde řada (3) konverguje, musí tedy konvergovat i řada (8)[7]. Pro $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ovšem řada (8) na rozdíl od (3) konverguje.

Věta 40: Abelova

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Potom

1. pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konverguje stejnoměrně na $\langle 0, R)$,
2. pokud pro některé $\phi \in \mathbb{R}$ konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (Re^{\imath\phi})^n$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konverguje stejnoměrně na množině $\{z = te^{\imath\phi}, t \in \langle 0, R\rangle\}$.

[6] Přesněji pro každé $x \in (0, 2\pi)$.
[7] Pokud to není zřejmé, stačí uvážit Im x $\leq$ |x|.

charakteristického polynomu $P(x)$ jsou $m_1, ..., m_k$ s násobnostmi $r_1, ..., r_k$ a ostatní $n_1, \overline{n_1}, ..., n_s, \overline{n_s}$, $2s + k = n$ s násobnostmi $p_1, p_1, ..., p_s, p_s$. Pak řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$ lze napsat ve tvaru

$$\begin{array}{cc} & e^{m_1 t}, ..., t^{r_1 - 1}.e^{m_1 t} \\ & \dots \\ & e^{m_k t}, ..., t^{r_k - 1}.e^{m_k t} \\ \mathrm{Re}(e^{n_1}), ..., t^{p_k - 1}.\,\mathrm{Re}(e^{n_1 t}) & \mathrm{Im}(e^{n_1}), ..., t^{p_1 - 1}.\,\mathrm{Im}(e^{n_1 t}) \\ \dots & \dots \\ \mathrm{Re}(e^{n_s}), ..., t^{p_s - 1}.\,\mathrm{Re}(e^{n_s t}) & \mathrm{Im}(e^{n_s}), ..., t^{p_s - 1}.\,\mathrm{Im}(e^{n_s t}). \end{array} \tag{25}$$

Důkaz: Rozmyslete si, jak lze pomocí těchto funkcí lineárně nakombinovat funkce (24) (uvědomte si vztah mezi $e^x, \mathrm{Re}(e^x), \mathrm{Im}(e^x)$). Protože se nám to podaří pro všechny funkce (24) a funkcí (25) je právě n, musí funkce (25) nutně tvořit bázi $\mathrm{Ker}(\mathrm{L})$.

4.5 Partikulární řešení rovnic se speciální pravou stranou

Je-li $P(t)$ polynom stupně k, pak existuje řešení lineární rovnice s konstantními koeficientyy

$$\mathrm{L}y = P(t)e^{\mu t}$$

ve tvaru $y(t) = t^\rho Q(t) e^{\mu t}$. Zde je $\rho = 0$, pokud μ není kořenem charakteristického polynomu operátoru L, v opačném případě je ρ rovno násobnosti μ. $Q(t)$ je polynom stupně nejvýše k.
Pokud je na pravé straně lineární rovnice výraz typu

$$e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$$

s polynomy P, Q stupně nejvýše k, bude existovat řešení ve tvaru $t^\rho e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$. Hodnota ρ se určí podle stejného klíče jako v předchozím případě s tím, že zkoumáme násobnost čísla $\alpha + \imath\beta$ jako kořene charakteristického polynomu L. Polynomy R, S jsou opět stupně nejvýše k (nemusí ovšem například platit, že stupeň R je nejvýše roven P).
Závěrem si uvědomme, že pokud y_1 a y_2 splňují

$$\mathrm{L}y_1 = f,\ \mathrm{L}y_2 = g,$$

pak rovnici

$$\mathrm{L}y = \alpha f + \beta g \tag{26}$$

jistě řeší $\alpha y_1 + \beta y_2$.
Cvičení: Uvědomte si alespoň rámcově, proč platí první tvrzení — dosaďte navrhované řešení do rovnice. Zkuste nejprve případ $\rho = 0$. Dále uvažte, jaký je stupeň polynomu na levé straně rovnice, pokud je stupeň Q právě k a $\rho = 1$ (zjistíte, že stupeň Q je nutno o jedničku zvýšit).
Druhý případ s goniometrickými funkcemi lze snadno převést na lineární kombinaci komplexních exponenciál (cvičně proveďte). S uvážením vztahů (26) budeme hledat řešení pro každou z exponenciál zvlášť a řešení opět „lineárně skombinujeme“. Budeme-li se chtít na závěr zbavit exponenciál, použijeme opět vztahy mezi $e^{\imath x}$ a goniometrickými funkcemi. Vidíme, že i když na pravé straně bude například pouze funkce sinus (tj. $P \equiv 0$), není vůbec jasné, zda v se v řešení kosinus vyskytovat bude či nikoliv (ve skutečnosti tam často bývá).

Příklad: Řešme rovnici

$$y''' - y'' + y' - y = \sin t.$$

Řešíme nejprve odpovídající homogenní rovnici, a potřebujeme tudíž znát kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$

Vidíme, že kořeny jsou $1, \imath, -\imath$ a fundamentální systém řešení je tedy $\{e^t, e^{\imath t}, e^{-\imath t}\}$, případně (dle lemmatu na konci předešlého článku) $\{e^t, \sin t, \cos t\}$.

Poslední zlomek je pro $n \in \mathbb{N}$ zřejmě větší než nula, a tedy jsme n-tý člen omezili výrazem $1/\sqrt{6n-5} \geq 1/\sqrt{6}(n-1)^{-1/2}$. Řada jemu odpovídající je samozřejmě divergentní, tedy i přerovnaná řada diverguje.

Cvičení: Proč je původní nepřerovnaná řada neabsolutně konvergentní?

Cvičení: nepovinně. Zkuste přerovnat řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

tak, aby divergovala.
Návod: vzpomeňte na jeden z prvních důkazů divergence harmonické řady — sdružovali jsme vždy 2^n členů a jejich součet byl vždy větší než $1/2$.

Poznámka (k předchozímu cvičení): Proč je nutno vynakládat tak velkou námahu oproti příkladu se členy $\pm 1/\sqrt{n}$ je nasnadě — řada n^{-1} je „poslední divergentní“, pro libovolný exponent větší než jedna již řada konverguje (tedy příslušná řada s alternujícími znaménky konverguje absolutně). Naopak $n^{-1/2}$ diverguje podstatně rychleji.

řádu rozmíme (lineární zobrazení) L na prostoru všech alespoň n-kráte diferencovatelných funkcí reálné proměnné, které takovéto libovolné funkci y přiřadí $\mathrm{L}y \equiv \mathrm{L}(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i.y^i$.

Lemma : $\mathrm{L}(e^{\lambda.t}) = P(\lambda).e^{\lambda.t}$, kde P je polynom. Jestliže $P(\lambda) = 0$, tak $L(e^{\lambda t}) = 0$.

Důkaz: nechť si čtenář provede dosazením.

Definice 17: Charakteristický polynom
Je-li $\mathrm{L}y = 0$ lineární diferenciální rovnice, pak funkci

$$P(\lambda) \equiv a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

nazýváme charakteristickým polynomem této rovnice.

Poznámka: Aby nemohlo dojít k nedorozumnění: polynom $P(\lambda)$ z definice a z lemmatu jsou totožné (ověřili jste?).

Věta 51: Řešení homogenní rovnice s konstantními koeficienty ve speciálním případě
Má-li charakteristický polynom $P(x)$ stupně n právě n různých kořenů $x_1, ..., x_n$, pak fundamentální soustavou řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$ je $e^{x_1 t}, ..., e^{x_n t}$ na libovolném intervalu J.

Důkaz: Z lemmatu výše je zřejmé, že se jedná o řešení. Ověřme, že je tento systém lineárně nezávislý. Spočteme-li wronskián pro $t = 0$, vyjde díky multilinearitě

$$\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \exp\left(t\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\prod_{i<j}(x_i - x_j),$$

tzv. Vandermondtův determinant. Jelikož jsou x_i navzájem různé, wronskián je nenulový pro $t = 0$, a proto dle věty (48) nenulový pro všechna $t \in J$.

Věta 52: Řešení rovnice s konstantními koeficienty pro vícenásobné kořeny charakteristického polynomu
Je-li λ kořen násobnosti právě $k \leq n$ charakteristického polynomu $P(\lambda)$ lineárního diferenciálního operátoru L s konstantními koeficienty stupně n, pak $t.e^{\lambda t}, ..., t^{k-1}.e^{\lambda t}$ jsou řešeními rovnice $\mathrm{L}y = 0$.

Důkaz: přímočarou verzi (dosazení do $\mathrm{L}y = 0$) ponecháme jako poměrně náročné cvičení čtenáři. Předvedeme elegantnější způsob.
Je-li $\lambda = 0$ k-násobným kořenem $P(\lambda)$, znamená to, že prvních k koeficientů v $P(\lambda)$ (bráno od nižších mocnin) je nulových, tedy

$$\mathrm{L}y = \sum_{i=k}^{n} a_i y^{(i)}.$$

Dosadíme-li však $y = t^j e^{\lambda t} = t^j, 0 < j < k, j \in \mathbb{N}$, budou všechny derivace y v sumě nulové, a rovnice bude tedy splněna triviálně.
Pokud $\lambda \neq 0$, dosadíme $y = z(t).e^{\lambda t}$ ($z(t)$ je nějaká obecná funkce) a zkoumáme $\mathrm{L}y$:

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}(z.e^{\lambda t}) = a_0 z e^{\lambda t} + a_1(z' e^{\lambda t} + z\lambda e^{\lambda t}) + a_2(z'' e^{\lambda t} + 2z'\lambda e^{\lambda t} + z\lambda^2 e^{\lambda t}) + \ldots = e^{\lambda t}\mathrm{M}z.$$

Vidíme, že z $\mathrm{L}y$ lze vytknout $e^{\lambda t}$ a zbylý výraz bude lineárně závislý pouze na $z(t)$ a jejích derivacích (M bude lineární operátor s konstantními koeficienty). Ptejme se, jaký bude charakteristický polynom $Q(\mu)$ operátoru M — položíme $z(t) = e^{\mu t}$ a použijeme takovýto trik (pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$Q(\mu) = \frac{\mathrm{M}(e^{\mu t})}{e^{\mu t}} = \frac{\mathrm{L}(e^{\mu t}.e^{\lambda t})}{e^{\mu t}e^{\lambda t}} = \frac{\mathrm{L}(e^{(\mu+\lambda)t})}{e^{(\mu+\lambda)t}} = P(\mu + \lambda).$$

derivace parciální.

Poznámka: Ještě obecněji lze definovat obyčejnou diferenciální rovnici jako $\Phi(t, y, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. Rovnici (9) nazýváme rovnicí řešenou vůči n-té derivaci.

Poznámka: Řešením je *dvojice* $(y(t), I)$. Zúžíme-li interval I na jeho menší podinterval J, pak $(y(t), J)$ je jiné řešení.

Poznámka: Znázorníme-li si v případě diferenciální rovnice prvního řádu ($y'(t) = f(y(t), t)$) funkci $f(t)$ graficky, je v každém bodě grafu dána jeho směrnice, čímž je do jisté míry určeno, „kam se bude graf ubírat dále“.

Poznámka: Při splnění některých požadavků na funkci $f(t, ...)$ lze říci, kolik bude mít příslušná rovnice (9) různých řešení. Často bývá řešení rovnice n-tého řádu závislé na n parametrech (tj. má n „stupňů volnosti“[8]) — ty můžeme specifikovat například tím, že řekneme, kterým bodem z Ω má řešení procházet (neboli jaké jsou hodnoty $y(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0)$ v jednom určitém čase $t_0 \in I$). Jedna třída diferenciálních rovnic (lineární homogenní) se vyznačuje tím, že množina jejich řešení tvoří n rozměrný vektorový prostor.

Definice 13: Klasifikace řešení diferenciálních rovnic
Nechť $(y, I), (\tilde{y}, \tilde{I})$ jsou dvě řešení (9) v Ω. Nechť I je ostře menší podinterval $\tilde{I}$ a nechť $y(t) = \tilde{y}(t)$ na I. Potom řekneme, že $(\tilde{y}, \tilde{I})$ je prodloužení řešení (y, I) (respektive (y, I) je zúžení $(\tilde{y}, \tilde{I})$). Řekneme, že řešení (y, I) diferenciální rovnice (9) je maximální (úplné), pokud nemá žádné prodloužení.

Věta 41: Existence řešení
Nechť f je spojitá na $\mathbb{R}^{n+1}$ a nechť $A = (t_0, y, ..., y_{n-1}) \in \Omega$. Pak v Ω existuje řešení (9) procházející A. Přesněji: $\exists\delta > 0 : \exists y(t)$ na $\mathrm{U}_\delta(t_0)$ taková, že $(y, \mathrm{U}_\delta(t_0))$ je řešením (9) v Ω a

$$y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, ..., y(t_0) = y_0.$$

Navíc lze toto řešení prodloužit do maximálního řešení rovnice (9) v Ω.

Poznámka: Nevíme však, na jak velkém okolí $\mathrm{U}_\delta(t_0)$ toto řešení existuje.

Věta 42: Jednoznačnost řešení
Nechť platí předpoklady předchozí věty a nechť je navíc splněna podmínka

$$\forall(\tau, \xi_0, ..., \xi_{n-1})\exists\delta > 0\exists K > 0 :$$

$$\forall(t, y_0, .., y_{n-1}), (t, \tilde{y_0}, .., \tilde{y}_{n-1}) \in \mathrm{U}_\delta(\tau, \xi_0, .., \xi_{n-1}) : |f(t, y_0, .., y_{n-1}) - (t, \tilde{y_0}, .., \tilde{y}_{n-1})| < K\sum_{i=0}^{n-1}|y_i - \tilde{y}_i|. \tag{10}$$

Pak existuje právě jedno maximální řešení (y, I) rovnice (9) v Ω procházející A.

Tyto dvě fundamentální věty ponecháme bez důkazu.
Poznámka: Lipschitzovu podmínku (10) si pokusíme osvětlit pro případ rovnice prvního řádu ($n = 1$). Pak se požaduje, aby v nějakém okolí $\mathrm{U}(a)$ každého bodu $a \in \Omega$ platilo

$$\exists K : \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|} < K, \ (t, x), (t, y) \in \mathrm{U}(a).$$

Vidíme, že na levé straně je výraz připomínající parciální derivaci f podle druhé proměnné (tj. ne podle t) a podmínka tedy požaduje, aby tato „derivace“ f byla alespoň na nějakém malém okolí a omezená. Typickou nelipschitzovskou funkcí (tedy funkcí nesplňující tuto podmínku) je $y = \sqrt[3]{x}$ pro $x = 0$. Derivace v tomto bodě je nevlastní, a tudíž neomezená.

[8] Řešení je v každém případě nekonečně mnoho.

vektorovém prostoru V platí, že řešení rovnice $\mathrm{L}(x) = a$ pro nějaké $a \in V$ je buď prázdná množina, anebo afinní prostor $\alpha + W$, kde $W = \mathrm{Ker}(H)$ a $H(\alpha) = a$[19]. Tématem dalšího bude popis metod, jak nalézt počátek A tohoto afinního prostoru.

Věta 50: Variace konstant
Buď $n \in \mathbb{N}$ a $y_1, ..., y_n$ fundamentální systém řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$ (viz (14), (15)). Nechť $c_1', ..., c_n'$ jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} c_1'.y_1 + \ldots + c_n'.y_n &= 0 \\ c_1'.y_1' + \ldots + c_n'.y_n' &= 0 \\ &\ldots \\ c_1'.y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'.y_n^{(n-2)} &= 0 \\ c_1'.y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'.y_n^{(n-1)} &= \frac{f}{a_n}. \end{aligned} \qquad (23)$$

Pak funkce $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t).y_i(t)$ řeší rovnici $\mathrm{L}y = f$.

Důkaz: Nechť jsou splněny rovnice (23). Položme $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t).y_i(t)$ a dosaďme tuto funkci do rovnice $\mathrm{L}y = f$. Napišme nejprve, čemu je rovno $y'(t)$:

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i.y_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i',$$

neboť podle první rovnice (23) je první suma rovna nule. Nyní spočteme druhou derivaci a opět zjistíme, že jedna se sum bude nulová, tentokrát s ohledem na druhou rovnici (23). Tímto postupem snadno nahlédneme, že

$$y^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(j)}, \ \forall j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Konečně u n-té derivace použijeme poslední rovnici (23), čímž dostaneme

$$y^{(n)} = \frac{f}{a_n} + \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n)}.$$

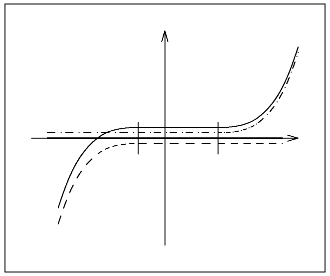
Nyní již jen dosadíme do rovnice $\mathrm{L}y = f$:

$$\mathrm{L}y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n \frac{f}{a_n} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k c_i y_i^{(k)} = f + \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=0}^{n} a_k y_i^{(k)} = f.$$

Poslední krok využíval skutečnost, že každé y_i je řešením homogenní rovnice $\mathrm{L}y = 0$.
Důkaz je tedy uzavřen.

Poznámka (intuitivní): Hledali jsme jeden prvek $y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{L})_f$, což je prostor dimenze n. Nejprve jsme měli na y jen jedinou podmínku, tj. aby $\mathrm{L}y = f$, která nám sice ponechává více stupňů volnosti ve výběru y, ale kterou neumíme v obecném případě efektivně využít. Soustava (23) naproti tomu na výběr y klade n podmínek, o nichž jsme ukázali, že implikují $\mathrm{L}y = f$; n koeficientů c_i v hledané lineární kombinaci by tím mělo být pevně určeno. Toto je samozřejmě jen intuitivní představa, neboť tyto koeficienty nejsou

[19] Toto budiž i definice afinního prostoru: $W_\alpha = \{x \in V; \exists w \in W, x = \alpha + w\}$.



Obr. 8: Řešení rovnice $y' = y^{2/3}$ (vodorovné úseky funkcí správně leží na ose t)

pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}^*; a \leq b, t_0 \in \langle a, b \rangle$ — řešení může jít po $y = 0$ a v libovolném okamžiku se „odlepit", ať už doleva dolů nebo doprava nahoru (viz obrázek). Dokonce i lokálně (tj. na libovolně malém okolí) existuje nekonečně mnoho řešení procházejících bodem $(t_0, 0)$ — ať zvolíme jakkoliv malé okolí t_0, vždy budeme mít ještě nekonečně mnoho možností pro výběr „odlepovacích" bodů a, b. Naproti tomu, zkoumáme-li bod $(t_0, y_0), y \neq 0$, zjistíme, že lokálně jím prochází jediné řešení (11), přičemž konstantu c určíme z počáteční podmínky $y_0 = y(t_0) = 1/27(t_0 - c)^3$:

$$c = t_0 - 3\sqrt[3]{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{27}(t - t_0 + 3\sqrt[3]{y_0})^3.$$

Na určitém malém okolí (t_0, y_0) tedy najdeme jednoznačné řešení, které když budeme prodlužovat, zůstane jednoznačné přesně do okamžiku, kdy dosáhne na $y = 0$.
Srovnejme ještě tyto závěry s větou ((42)). Funkce $f(y) = y^{2/3}$ je lipschitzovská na celém $\mathbb{R}$ s výjimkou bodu 0. Vidíme, že pro všechna $y \neq 0$ je řešení procházející bodem (t, y) lokálně jednoznačné, v bodech $(t, 0)$ nikoliv. Vidíme také, že je nutno předpokládat splnění (10) na celém $\mathbb{R}$, jinak se i lokálně jednoznačné řešení může „pokazit" v bodech, kde tato podmínka splněna není. Celý problém přitom souvisel s tím, že jsme mohli volně napojovat kubickou křivku na $y \equiv 0$. Pokud budeme zkoumat rovnici $y' = y^n$, snadno zjistíme, že toto lze provést pro všechna $n < 1$ — řešením pak budou mocninné funkce řádu vyššího než prvého (ty mají v nule derivaci nulovou). Funkce $y^n, n < 1$ potom nesplňují Lipschitzovu podmínku. Naopak pro $n \geq 1$ dostáváme řešení, která nikdy osu $y = 0$ neprotnou (exponenciála, resp. záporné mocniny), a tedy není možno žádná řešení napojovat. Tyto funkce (10) naopak splňují.

Popsaný postup se pokusíme shrnout takto:
Věta 43: Řešení rovnice $y' = g(y)$
Nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová na otevřeném intervalu J. Označme $G(y)$ funkci primitivní k $1/g(y)$ na J. Pak na intervalu J existuje inverzní funkce k $G(y)$ a každé maximální řešení rovnice $y' = g(y)$ v $\Omega = \mathbb{R} \times J$ má tvar $y(t) = G^{-1}(t - c)$ a je na intervalu $I = \{t \in \mathbb{R}; \exists y \in J : G(y) = t - c\}$[9].
Každým bodem $(t_0, y_0) \in \Omega$ prochází právě jedno maximální řešení.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že $y(t) = G^{-1}(t - c)$ je řešení:

$$y'(t) = \left(G^{-1}(t - c)\right)' = \frac{1}{G'(G^{-1}(t - c))} = g(G^{-1}(t - c)) = g(y(t)).$$

Potřebujeme však také ukázat, že $G^{-1}(t - c)$ na I vůbec existuje. Stačí si uvědomit, že $g(y)$ má na J stále stejné znaménko (neboť je spojitá a nenulová[10], tedy i $1/g(y)$ má tuto vlastnost. Je-li potom $1/g(y)$ derivací funkce $G(y)$, znamená to, že $G(y)$ je stále rostoucí nebo stále klesající (když je $g(y)$ stále kladná

[9] Neformálně řečeno $I = G(J) + c$ — chceme, aby $G^{-1}(t - c)$ dávalo hodnoty $y(t)$ v intervalu J, jiné hodnoty $y(t)$ by již vybočovaly z Ω.
[10] Důkaz sporem, např. z Darbouxovy vlastnosti spojitých funkcí.

Rozvinuté determinanty jsme opět „svinuli“, přičemž si bylo potřeba uvědomit, že pokud v matici $M_{1j}^{(l)}$ derivujeme l-tý řádek a z minorů $\det(M_{1j})^{(l)}$ potom vybudujeme zpět determinant matice $(n+1)\times(n+1)$, bude v této matici zderivovaný $(l+1)$. řádek.

Důkaz věty: Nyní se vrátíme k větě (49). Řádky wronskiánu zapíšeme pomocí vektorů $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbf{y^{(k)}} = (y_1^{(k)}, ..., y_n^{(k)})$ a derivaci wronskiánu spočteme podle vzorce (20):

$$a_n(t).W'(t) = a_n \left[\det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y^{(n-1)}} \end{pmatrix} \right]' =$$

$$= a_n \left(\det \begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{y}'' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} + ... + \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ \mathbf{y}^{(n)} \end{pmatrix} \right).$$

Všechny determinanty kromě posledního jsou ale nulové, neboť jsou použity na matici se dvěma stejnými řádky. S využitím multilinearity determinantu tedy píšeme

$$a_n(t).W'(t) = a_n \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ a_n\mathbf{y}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Nyní použijeme skutečnost, že $y_1, ..., y_n$ jsou řešení $\mathrm{L}y = 0$. Od posledního řádku tedy můžeme odečíst nulový vektor $\mathbf{Ly}$ a dále k němu přičíst a_{i-1}-násobek i-tého řádku $i = 1, ..., n-1$, čímž hodnotu determinantu nezměníme:

$$a_n(t).W'(t) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{y}^{(i)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ -a_{n-1}\mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= -a_{n-1} \det \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-2)} \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_{n-1}(t).W(t).$$

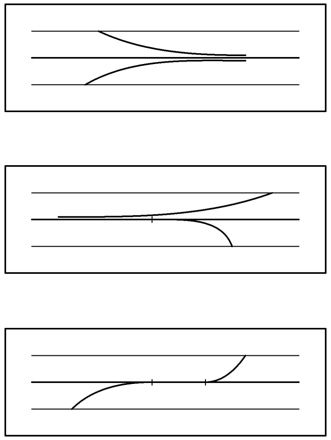
Ověřili jsme tedy vztah (18). Ten ovšem můžeme považovat za jednoduchou diferenciální rovnici prvního řádu se separovatelnými proměnnými. Vyřešíme ji:

$$\frac{W'(\xi)}{W(\xi)} = -\frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)} \overset{\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\xi}{\Rightarrow} \ln W(t) - \ln W(t_0) = -\int_{t_0}^{t} \frac{a_n(\xi)}{a_{n-1}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi.$$

Odlogaritmováním tohoto vztahu získáváme již (19).

Důkaz věty: Konečně se můžeme vrátit i k ústřední větě tohoto článku (48). Vztah (19) ukazuje, že pokud pro některé $t_0 \in I$ bylo $W(t_0) = 0$, pak musí být i pro ostatní $t \in I$ platit $W(t) = 0$. Naopak, pokud pro některé $t_0 \in I$ bylo $W(t_0) \neq 0$, pak musí být $W(t)$ nenulové a v reálném oboru musí mít dokonce i stejné znaménko[17] jako $W(t_0)$ i pro všechna ostatní $t \in I$, neboť e^x je kladné pro všechna

[17] To však není zas takový div — když je funkce $W(t)$ spojitá a nenulová, těžko může měnit znaménko.



Obr. 9: Napojování řešení na J_+ a J_- — obě $\alpha_\pm$ nevlastní; α_+ nevlastní, α_- vlastní; obě $\alpha_\pm$ vlastní, lze spojit.

byla obě řešení zároveň rostoucí nebo zároveň klesající (tedy aby $g(y)$ měla stejné znaménko na J_+ i J_-) — jinak by totiž k $y = a$ „přicházela“ ze stejné strany a nebylo by tudíž možno jejich spojením vytvořit funkci (na posledním obrázku je případ, kdy řešení lze spojit, druhý případ je podobný prostřednímu obrázku, s tím, že $\alpha_+ \in \mathbb{R}$). Pokud jsou v tomto případě $\alpha_\pm$ různá (pokud jsou např. řešení rostoucí, je ještě třeba, aby $\alpha_- \leq \alpha_+$), bylo by možno tato řešení propojit částí $y = a$, opět stejně, jako jsme to učinili v příkladu.

Když jsme mluvili o propojování, nezmínili jsme jeden důležitý bod: nově vzniklá funkce bude jistě vyhovovat rovnici (12) všude kromě bodu propojení $(\alpha_\pm)$. Musíme prověřit, že existuje derivace nové funkce v tomto bodě a že je rovna nule (neboť v tomto bodě je $y' = g(a) = 0$). Jednostranná derivace směrem „od $y = a$“ je samozřejmě nula, ovšem jaká je derivace ze směru netriviální části řešení? Ve skutečnosti platí

Lemma : Pokud α_+ je reálné číslo, tj. řešení $y(t)$ rovnice (12) na I_+ se pro toto t „dotkne osy y=a“ (přesněji: jeho příslušná[15] limita v $t \to \alpha_+$ je a), pak je jednostranná derivace v α_+ (ze směru tohoto řešení) nulová — pokud dodefinujeme $y(\alpha_+) = a$.

Důkaz lemmatu: Nechť je například $g(y)$ kladná na I_+. Řešení $y(t)$ na I_+ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $G^{-1}(t-c)$ (viz předchozí větu ((43))), a je tudíž rostoucí. Toto řešení má první derivaci, a tedy je spojité. Pro výpočet derivace v α_+ proto lze použít (jednostrannou) limitu derivací

$$y'_+(\alpha_+) = \lim_{t\to\alpha_+^+} y'(t) = \lim_{t\to\alpha_+^+} \frac{1}{G'(G^{-1}(t-c)} = \lim_{t\to\alpha_+^+} g(G^{-1}(t-c)) = g(a) = 0.$$

Větu o limitě složené funkce lze použít např. protože $G^{-1}(t-c)$ je v α_+ ryze monotónní, čímž je důkaz hotov (pro $g(y)$ zápornou je postup analogický).

V bodě α_+ jsou tedy obě jednostranné derivace rovny nule, tedy existuje i oboustranná derivace a splňuje rovnici (12). Lemma lze samozřejmě použít i pro I_- (někde se ovšem mění $+$ a $-$ ve směrech limit) a celkově tedy vidíme, že lze napojovat jak libovolné řešení s příslušným $\alpha_\pm$ reálným na $y = a$, ale i dvě netriviální řešení v I_+ a I_- přímo na sebe. Na čtenáři ponecháváme diskuzi o tom, kolik řešení

[15] Je-li $y(t)$ rostoucí (klesající) na I_+, myslíme limitu zprava (zleva).

fundamentální systém řešení L$y = 0$ na J.

Definice 16: Wronskiho determinant
Jsou-li $a_1(t), ..., a_n(t)$ funkce s $(n-1)$. derivacemi, pak se funkce

$$W[a_1, ..., a_n](t) \equiv \begin{vmatrix} a_1(t) & \dots & a_n(t) \\ a_1'(t) & \dots & a_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n-1)}(t) & \dots & a_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \tag{17}$$

nazývá Wronskiho determinant (též wronskián).

Věta 47: Užití wronskiánu obecně
Pokud jsou funkce $u_1, ..., u_n \in \mathbb{C}^{(n)}(I)$ lineárně závislé na I, potom $W[u_1, ..., u_n](t) = 0$ na I.

Důkaz: Z lineární závislosti $u_1, ..., u_n$ plyne, že existují čísla $c_1, ..., c_n$, z nichž alespoň jedno není nula, pro něž

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i \equiv 0.$$

Tuto rovnost můžeme až $(n-1)$-krát derivovat, čímž získáme vztah

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i^{(j)} \equiv 0, \forall j \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Pokud si definujeme sloupcový vektor $\mathbf{v_k}$, jehož j-tá složka je j-tá derivace u_k, pak předchozí vztah zapsat ve tvaru

$$\mathbf{v_k} = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ u_k'(t) \\ \vdots \\ u_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v_i} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

To ale znamená, že sloupce ve Wronskiho determinantu jsou lineárně závislé, a tedy je tento determinant roven nule.

Poznámka: Samozřejmě se nabízí otázka, zda toto tvrzení platí i naopak, tj. zda wronskián lineárně nezávislých funkcí musí být nenulový (alespoň na některých bodech I — $W \not\equiv 0$). Berme obměněnou implikaci: musejí být funkce lineárně závislé, pokud je wronskián nulový na celém I? Víme, že pro každé $t \in I$ existuje nulová netriviální lineární kombinace sloupců ve Wronskiho determinantu. Koeficienty těchto lineárních kombinací ovšem mohou záviset na zvoleném t, zatímco pro zkoumání lineární závislosti funkcí musejí být tyto koeficienty konstanty na I. Tušíme tedy, že tudy vede cesta k vyvrácení opačné implikace:

Příklad: Uvažujme na $I = \mathbb{R}$ funkce u_1, u_2 definované takto

$$u_1(t) = 0, t \in (-\infty, 0), \quad u_1(t) = t^2, t \in \langle 0, \infty),$$

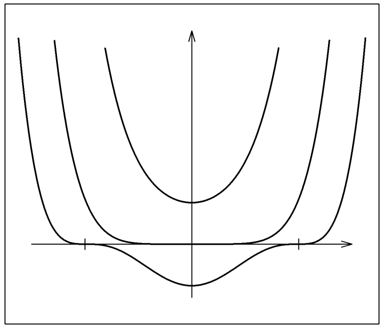
$$u_2(t) = t^2, t \in (-\infty, 0), \quad u_1(t) = 0, t \in \langle 0, \infty).$$

Snadno ověříme, že se jedná o funkce lineárně nezávislé — do rovnice $au_1(t) + bu_2(t) \equiv 0$ dosadíme nejprve např. $t = 1$ a potom $t = -1$, z čehož zjistíme $a = b = 0$. Derivace u_1' (resp. u_2') na $(-\infty, 0)$, a $\langle 0, \infty)$ budou 0 a $2t$ (resp. $2t$ a 0), z čehož vypočteme wronskián

$$W[u_1, u_2] = u_1 u_2' - u_2' u_1 \equiv 0.$$

Obrácená implikace k ((47)) tedy obecně neplatí. Situace se však mění, pokud zkoumáme pouze funkce, jež jsou řešením rovnice L$y = 0$:

Věta 48: Užití wronskiánu na řešení homogenní lineární diferenciální rovnice
Nechť $y_1(t), ..., y_n(t)$ jsou řešení L$y = 0$ na I. Pak nastane právě jedna z možností



Obr. 10: Řešení rovnice $y' = ty^{2/3}$

Navíc pokud existuje $y_0 \in J$, pro něž $g(y_0) = 0$, pak i funkce $y \equiv y_0$ je řešením a můžeme uvažovat o případném napojování řešení, stejně jako u řešení rovnic $y' = g(y)$.
Příklad: Řešme $y' = ty^{2/3}$.

$$\frac{y'}{y^{2/3}} = t \Rightarrow 3y^{1/3} = \frac{t^2}{2} + \frac{c}{2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{6^3}(t^2 + c)^3. \tag{13}$$

Dále bude jistě řešením $y \equiv 0$. Zajímejme se dále o případnou jednoznačnost řešení procházejících daným bodem. Obecně vidíme, že Lipschitzova podmínka splněna není. Pro $c > 0$ se ale netriviální řešení nedotýkají $y = 0$, a tak po zkušenostech z předchozího článku hádáme, že taková řešení budou jednoznačná — skutečně vidíme, že libovolným bodem v oblasti $\{(t, y); y > t^6/216\}$ prochází právě jedno řešení ve tvaru (13) a vzhledem k tomu, že touto oblastí neprochází $y = 0$, je tato domněnka do jisté míry potvrzena. Pokud ovšem $c \le 0$, protíná řešení (13) osu $y = 0$ v bodech $\pm\sqrt{|c|}$, přičemž v těchto bodech má nulovou derivaci (viz obrázek). To znamená, že můžeme řešení (13) volně napojovat na triviální $y \equiv 0$. Naprosto stejným způsobem jako u rovnice $y' = y^{2/3}$ tak můžeme generovat nekonečně mnoho řešení procházejících daným bodem v oblasti $\{(t, y); y \le t^6/216\}$.

Nyní postup shrneme:
Věta 44: Řešení rovnice $y'(t) = f(t).g(y)$
Nechť f je spojitá na (a, b) a g je spojitá a nenulová na (c, d). Označme $F(t)$ primitivní funkci k $f(t)$ a $G(y)$ primitivní funkci k $1/g(y)$. Potom existuje inverzní funkce k $G(y)$ na (c, d) a každým bodem $(t_0, y_0) \in \Omega = (a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedno maximální řešení rovnice $y'(t) = f(t)g(y)$ na intervalu D. D je největší podinterval (a, b) splňující formální inkluzi $G^{-1}(F(D)) \subset (c, d)$. Řešení bude mít tvar $y(t) = G^{-1}(F(t))$.

Důkaz: vynecháme s tím, že postup by byl podobný jako u věty ((43)).

Poznámka: Zde již nemusí platit, že pokud se netriviální řešení dotkne osy $y = y_0, g(y_0) = 0$, lze toto řešení napojit na triviální $y \equiv y_0$. Zkuste například řešit rovnice $y' = y/t$, $y' = y/t^2$ (které zřejmě vyhovují Lipschitzově podmínce).

§4. Lineární diferenciální rovnice

4.1 Základní věty