nevíme, zda konečná, anebo ne), pak je rovna limitě podposloupnosti s_{2^k}, která je však pro $k \to \infty$ plus nekonečno - dle odhadu učiněného výše. Proto zmíněná řada diverguje.

Poznámka: Konvergence či divergence řady nezávisí, na rozdíl od jejího součtu, na konečném počtu členů. Je možno definovat řadu nejen od počátečního členu 1, ale i od libovolného celého (tedy i nekladného) čísla.

Dokažme jedno velice jednoduché, ale potřebné tvrzení — větu o podmínce nutné pro konvergenci řady.

Věta 1: Nutná podmínka pro konvergenci řad

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim a_k = 0$.

Důkaz: Nechť s_k má limitu, a to konečnou. Nechť $S_k = s_{k-1}$, pro $k \geq 2$. Platí, že $a_k = s_k - s_{k-1} = s_k - S_k$, pro $k \geq 2$. Jelikož S_k je vybranou posloupností s_n, má dle Heineho věty touž limitu jako S_k: $\lim s_k = \lim S_k$. Pišme: $\lim a_k = \lim (s_k - S_k) = \lim s_k - \lim S_k = 0$, a proto i $\lim a_k = 0$, což bylo dokázat.

Věta 2: Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\sum_{k=n}^{n+p} a_k) < \varepsilon$.

Důkaz: Napišme Bolzano-Cauchyovu podmínku pro posloupnosti: Existuje konečná $\lim s_n$, právě když $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|s_n - s_m| < \varepsilon)$. Předposlední závorku můžeme ekvivalentně nahradit $(\forall n \geq n_0)(\forall m > n)$, dík vlastnostem absolutní hodnoty. Definujme $p := m - n$, uvědomme si, že má-li být $V(m)$ splněno pro každé $m > n$, stačí a je nutné, aby $V(n+p)$ bylo splněno pro každé přirozené p. Navíc platí, že $|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$, a proto můžeme B.-C.-podmínku pro posloupnosti ekvivalentně přepsat v zápis: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \mathrm{n}_0 \in \mathbb{N})(\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0)(\forall \mathrm{p} \in \mathbb{N})(\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{n}}^{\mathbf{n}+\mathbf{p}} \mathrm{a}_\mathbf{k} < \varepsilon)$, který je ekvivalentní tvrzení věty.

Nikdo nepochybuje o platnosti následující jednoduché věty, která určuje pravidla pro počítání s řadami.

Věta 3: O vektorovém prostoru konvergentních řad

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{C}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak platí

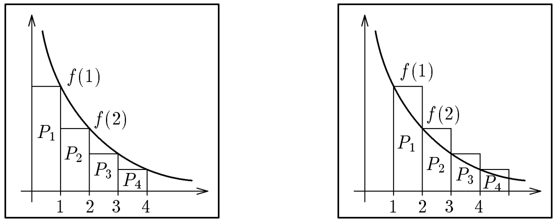
1. Jestliže má $A + B$ smysl, pak $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B$.
2. Jestliže $\lambda.A$ má smysl, pak $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda.A$.
3. Množina všech konvergentních řad je lineárním vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel.

Důkaz: Tvrzení věty je triviální, bereme-li součet řady jako limitu částečných součtů — vztahy 1 a 2 budou zřejmě platit, pokud místo ∞ píšeme v sumě libovolné $n \in \mathbb{N}$. Přechodem do limity $n \to \infty$ již dostáváme dokazované tvrzení. Bod 3 plyne přímo z definice lineárního vektorového prostoru a vlastností 1 a 2.

6.2 Řady s nezápornými členy

Zabývejme se nyní speciální množinou řad, řadami s nezápornými členy. V tomto paragrafu, bude-li řečeno slovo řada, míní se tím implicite řada s nezápornými členy.

Věta 4:



Obr. 1: K souvislosti součtu řady a nevlastního integrálu — odhad integrálu pomocí horního a dolního součtu

1. $(\exists q \in (0,1))(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: Předpokládejme platnost první nerovnosti a přepišme ji ve tvar: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$. Použijeme-li opět srovnávací kriterium, dostaneme požadované tvrzení, jelikož víme, že geometrická řada s kvocientem $q \in (0,1)$ konverguje.
Druhá část opět plyne triviálně z (1) — zřejmě musí platit $a_n \geq a_1 > 0$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq a_1 > 0$.

Další kriterium svazuje integrál a pojem sčítání, věc která je nám intuitivně velice blízká, je však potřeba jí dodat nezbytné přesnosti.

Věta 8: Integrální kriterium

Nechť f je spojitá, kladná a nerostoucí na $(0,\infty)$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, právě když konverguje (tj. existuje a je reálný) zobecněný Riemannův integrál $\int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Důkaz: Tvrzení věty je intuitivně velmi názorné (viz obrázky). Formální důkaz vypadá takto: f je nerostoucí a spojitá, proto pro každé přirozené m platí:

$$f(m) \geq \int_m^{m+1} f(t)\ \mathrm{d}t \geq f(m+1),\ \text{což sečteno přes } m = 1,\ldots,n \text{ dává}$$

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \geq \sum_{m=1}^{n} \int_m^{m+1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \geq \sum_{m=1}^{n} f(m+1) = f(n+1) - f(1) + \sum_{m=1}^{n} f(m).$$

Z předchozí kapitoly víme, že spojitost f postačuje k existenci Riemannova integrálu. Protože na $\mathbb{R}^+$ je $f(x) \geq 0$, funkce $F(n) = \int_1^n f(x)\ \mathrm{d}t$ je rostoucí, a tedy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$. Otázkou je, zda vlastní či nevlastní. Použijeme-li pro poslední uvedenou nerovnost limitního přechodu, dostaneme:

1. Je-li řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergentní, je příslušný integrál $\int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ menší než její součet, tudíž konečné číslo (tj. konverguje).

2. Je-li integrál $\int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ konvergentní, je díky druhé části nerovnosti, součet řady menší než hodnota integrálu, a tudíž i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje.

Věta 9: Raabeovo kriterium

Pokud $\lim \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \cdot n > 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Obsah

Nezapomeňme však, že pokud některá limita neexistuje, nemůžeme z příslušného limitního kriteria učinit žádný závěr.

Zmiňme se navíc o "hierarchii" kriterií. Výchozí větou pro další tvrzení byla věta 5 - srovnávací kriterium. Raabeovo kriterium je silnější než kriterium d'Alembertovo, tím míním: Lze-li konvergenci zjistit d'Alembertovým, pak ji lze zjistit i Raabeovým kriteriem a zároveň existuje řada, jejíž konvergenci lze zjistit Raabeovým kriteriem, nikoliv však kriteriem d'Alembertovým - viz v. Jarník: Diferenciální počet II., Academia, Praha 1984, s. 116. Limitní varianty jsou slabší než příslušné nelimitní, pokud v těchto nahradíme výraz: $(\forall n \in \mathbb{N})$ výrazem $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$.

§2. Absolutně konvergentní řady

Definice 2: Absolutní konvergence, neabsolutní konvergence
Řekneme, že řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ $(a_i \in \mathbb{C})$ je absolutně konvergentní, pokud řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konverguje; neabsolutně konvergentní, pokud konverguje $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, ale řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ diverguje.

Poznámka: Řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ může konvergovat (absolutně nebo neabsolutně), divergovat nebo oscilovat; zatímco řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ může pouze konvergovat nebo divergovat, neboť je tvořena nezápornými (tedy i reálnými) členy.

Věta 14: Souvislost konvergence a absolutní konvergence
Pokud je řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ absolutně konvergentní je i konvergentní.

Důkaz: Dle Bolzano-Cauchyho podmínky, použité na řadu absolutních hodnot, platí:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 ; \forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} |a_i| \right| < \varepsilon$$

K tomu, aby řada konvergovala, je nutné a stačí, aby byla splněna Bolzano-Cauchyho podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 ; \forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

Zvolím-li pro dané ε n_0 tak, aby platilo:

$$\forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} |a_i| \right| < \varepsilon$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti bude též platit:

$$\forall n > n_0 : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{i=n}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

Bolzano-Cauchyho podmínka je tedy pro řadu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ splněna a řada konverguje.

Příklad: Pro která $z \in \mathbb{C}$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje?
Budeme nejprve vyšetřovat absolutní konevrgenci řady. Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ však dle d'Alembertova kritéria

dva prvky $x^1, x^2 \in W(x^0)$ budou mít stejné obrazy $F(x^1) = F(x^2) \in V(F(x^0))$. Na tomto okolí je však F^{-1} funkce, a tedy $x^1 = x^2$. Uvědomme si také, že F zobrazuje každé okolí $W(x^0)$ *na* množinu obsahující nějaké okolí $F(x^0)$ (podobný postup — každý prvek $V(F(x^0))$ se v G zobrazí *do* nějakého okolí $X(x^0)$[32]; potom ale $F(X(x^0))$ obsahuje okolí V bodu $F(x^0)$).
Nyní k tvrzení 2. Budiž $y \in F(W(x^0))$, tedy $G(y) \in W(x^0)$. V $W(x^0)$ existuje okolí $Y(G(y))$, neboť W je otevřená množina. Potom ale $Z = F(Y(G(y)))$ je podmnožinou $F(W(x^0))$. Z přitom zřejmě obsahuje bod y a obsahuje nějaké okolí tohoto bodu (poslední věta předcházejícího odstavce).
Poslední zatím neprobraný bod je 4. Ukážeme dokonce, jak vypočíst derivace G. Na $W(x^0)$ platí pro každé x rovnost $G_j(F(x)) = x_j$; tu můžeme derivovat podle x_i (za využití věty o derivaci složeného zobrazení):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_j(F(x))}{\partial y_k} \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} = \delta_{ij}.$$

Stačí si pouze uvědomit, že tento zápis odpovídá součinu matic

$$\left\{ \frac{\partial G_i(F(x))}{\partial y_k} \right\}_{i,k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j} \right\}_{k,j=1}^{n} = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^{n},$$

čili sadě n soustav n rovnic o n neznámých, z nichž lze vypočítat n^2 parciálních derivací $\partial G_i / \partial y_j$. Aplikujeme-li na obě strany této maticové rovnosti determinant a použijeme-li známe rovnosti $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$, získáme tvrzení 4.

Příklad: Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in (-\infty, -1) \\ 1, & x \in \langle -1, 1 \rangle \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \\ -1 + x, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Zvolíme-li okolí bodu $f(0)$ např. s poloměrem $1/2$, najdeme snadno funkci, která každému $f(x) \in (-1/2, 1/2)$ jednoznačně přiřadí x. Přitom f není prostá na žádném okolí nuly. Vidíme, že byl skutečně zapotřebí předpoklad spojitosti f.

Poznámka(důležitá): v důkazu minulé věty byl naznačen způsob, jak počítat derivace inverzního zobrazení. Zkusme najít obecný vztah pro počítání derivací implicitně zadaného zobrazení.
Budiž tedy $F = (F_1, \ldots, F_p) : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$,

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(x^0) \neq 0.$$

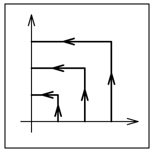
Tentokrát použijeme rovnosti $F_i(x, y(x)) = 0$ platné pro $i = 1, \ldots, p$ a každé x z určitého okolí x^0. Derivováním těchto p rovnic podle žádaného x_i získáme soustavu p lineárních rovnic o p neznámých

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F_1}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F_p}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0. \end{gathered}$$

Vidíme, že determinant této soustavy je právě jakobián, tedy derivace jsou určeny jednoznačně.
Pokud bychom chtěli počítat druhou derivaci, postupovali bychom stejně. Získali bychom opět soustavu $p \times p$, v níž by se ovšem vyskytovaly i kromě $\partial^2 y_k / (\partial x_i \partial x_j)$ i první derivace y_k. Za ty bychom dosadili hodnoty (funkce) spočtené z předchozí soustavy.

Definice 34: Regulární zobrazení
Budiž $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zobrazení, jehož definiční obor je otevřená množina. Řekneme, že F je regulární na

[32] Velikost $X(x^0)$ si můžeme libovolně volit díky spojitosti G.



Obr. 3: Bijekce $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$.

4. Nejprve ukažme $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$. Zkoumejme $\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right) = \lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{1+\frac{h}{1!}+\ldots+\frac{h^n}{n!}-1}{h} - 1\right) \leq \lim\limits_{h\to 0} |h| \left(1 + |h| + \ldots + |h|^{n-2}\right) = \lim\limits_{h\to 0} |h| \frac{1-|h|^{n-1}}{1-|h|} = 0$. Samotné tvrzení se poté dokáže použitím 1: $(\exp(x))' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x) \lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x)$
5. Domácí cvičení — návod: Zkoumejte limity v krajních bodech.
6. Stačí ověřit, že platí: $(\exp(\frac{p}{q}\ln a))^q = a^p$. Postupujme následovně: $(\exp(\frac{p}{q}\ln a))^q = \exp(q\frac{p}{q}\ln a) = \exp(p\ln a) = a^p$

§3. Přerovnávání řad a jejich násobení

Poznámka: Nechť M je množina a $a_m \in \mathbb{C}, m \in M$. Nechť dále je φ bijekce $\mathbb{N}$ na M. Zajímá mě, kdy $\sum\limits_{m\in M} a_m := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, nezávisí na volbě φ.

Definice 3: Spočetná množina
Řekneme, že M je spočetná, pokud $\exists\ \varphi \subseteq \mathbb{N} \times M, \varphi$ je bijekce.
Řekneme, že M je konečná, pokud $\exists\ \varphi \subseteq N_m \times M, \varphi$ je bijekce, kde $N_m = \{n \in \mathbb{N}; n \leq m\}$.
Řekneme, že M je nespočetná, pokud M není spočetná ani konečná.

Příklad: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^n$ jsou nespočetné (důkaz lze najít v Kopáčkově Matematice pro fyziky I). $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná množina — v tomto případě budeme bijekci konstruovat takto:

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, n \mapsto (a,b) : \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ (1,1) & (2,1) & (1,2) & (3,1) & (2,2) & (1,3) & (4,1) & (3,2) & (2,3) & (1,4) & \ldots \end{array}$$

Systém bijekce je znázorněn v grafu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (body roviny se souřadnicemi $(x,y), x, y \in \mathbb{N}$ očíslované přirozenými čísly) — viz obrázek. Toto φ můžeme využít i pro konstrukci bijekce mezi $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{N}$ (čímž ukážeme, že racionálních čísel „je stejně“[1] jako přirozených) — mezi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ bijekce zřejmě existuje (jak se vyrovnáte se zobrazením $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$?). Je jen třeba si uvědomit, že např. body $(1,1)$ a $(2,2)$ očíslujeme různými přirozenými čísly, i když jim přiřadíme stejná racionální čísla ($\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$).

Definice 4: Přerovnání řady
Nechť $a_n \in \mathbb{C}$ je posloupnost čísel, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce, pak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ nazveme přerovnáním řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Věta 16: Přerovnávání absolutně konvergentních řad
Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak její přerovnání konverguje také absolutně a hodnoty, k

[1] Jsou-li množiny A, B konečné, pak z existence bijekce mezi nimi plyne, že mají stejný počet prvků. Toto tvrzení (zatím intuitivně) zobecňujeme i pro nekonečné množiny.

předpokladů věty bychom pak zjistili, že na tomto okolí existují všude parciální derivace. Potom bychom stejným způsobem ukázali, že na $U(x^0, y^0)$ existují i všechny druhé parciální derivace, z čehož plyne spojitost prvních derivací. Tím pádem existuje totální diferenciál funkce y v x^0 (věta (63)) a lze použít větu o derivaci složeného zobrazení (64).

Cvičení: Ověřte, že pro
$$F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$
je předpisem $F(x,y) = 0$ v bodě $(1,0)$ určená funkce $y = y(x)$.

Příklad: Spočtěme derivaci y' v $x = 1$ u funkce z předchozího cvičení.
Ve cvičení jsme zjistili, že $\partial F/\partial y(1,0) = -1$, tedy
$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = \partial F/\partial x(1,0) = 1.$$

Poznámka: Explicitní předpis pro funkci y bychom hledali těžko. Pokud by vás přesto zajímal graf množiny $F(x,y)$, zkuste přejít do polárních souřadnic. Tak také snadno ověříte přinejmenším správnost znaménka vypočtené derivace.

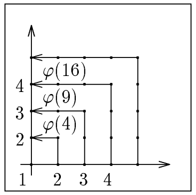
Pro zobecnění věty o implicitní funkci budeme potřebovat zavést následující pojem: **Definice 33: Jacobiho determinant**
Nechť funkce $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n + m \to \mathbb{R}^n$ má všechny parciální derivace v bodě $x \in \mathbb{R}^{n+m}$. Potom definujeme Jacobiho determinant (jakobián)
$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \equiv \det\left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1(x)}{\partial y_n} & \ldots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Věta 73: O implicitním zobrazení (postačující podmínka)
Nechť funkce $F = (F_1, \ldots, F_p) : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ má spojité parciální derivace na okolí bodu $(x^0, y^0) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$. Nechť dále $F(x^0, y^0) = 0$. Nechť
$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_p)}{\partial(y_1,\ldots,y_p)}(x^0, y^0) \neq 0.$$
Pak
1. existují okolí $U(x^0), V(y^0)$ tak, že $\forall x \in U(x^0) \exists! y \in V(y^0) : F(x,y) = 0$, tedy podmínka $F(x,y) = 0$ na $U \times V$ definuje funkci $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, x \mapsto y(x)$,
2. tato funkce $y(x)$ má na U spojité parciální derivace a
3. pokud navíc F má spojité parciální derivace až do řádu k, platí totéž i pro y.

Důkaz: Se provádí indukcí dle p. Pro $p = 1$ je tvrzení věty zaručeno již dokázanými větami (o implicitní funkci). Indukční krok ponecháme bez důkazu s odvoláním na Jarníkův Diferenciální počet.

Poznámka: Použití determinantu lze vysvětlit zhruba takto: pro malé vektory Δx zhruba platí
$$\mathrm{d}F(a^0)(\Delta a) = F(a^0 + \Delta a) - F(a^0),\ \Delta a, a^0 \in \mathbb{R}^{n+p}.$$

Bereme-li $\Delta a = (0, \ldots, 0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_p)$, představuje tato rovnost p rovnic (neboť F má p složek) o p neznámých Δy_i. Tyto neznámé chceme ze soustavy vypočítat — získáme tím určitý vztah pro y_i. Jednoznačné řešení (a o to nám jde — cheme, aby y_i byly funkce) však existuje pouze pokud jsou tyto



Obr. 4: Očíslování členů součinu dvou řad

$$\sum_{m=1,n=1}^{\infty} a_m b_n = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Důkaz: Nejprve chci dokázat absolutní konvergenci. Nechť $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, tj. $n \to (\varphi_1(n), \varphi_2(n))$, předpisem $\varphi_1(n) = i, \varphi_2(n) = j \Rightarrow n = (i-1)^2 + j$, pro $i \geq j$, $n = j^2 - i + 1$ pro $i < j$. „Obcházím po okraji čtverce“ — viz obrázek. Zajímá mě, zda konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}|$ Označím posloupnost částečných součtů $s_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} |a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}|$, tato posloupnost je monotónní, stačí ukázat tedy, že je omezená. Pro $n_0 = n^2$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí: $s_{n^2} = \sum_{i=1}^{n^2} |a_{\varphi_1(i)} b_{\varphi_2(i)}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \sum_{i=1}^{n} |b_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$, tedy řada $\sum_{m=1,n=1}^{\infty} a_m b_n$ konverguje absolutně.

Nyní chci dokázat rovnost: $\sum_{m=1,n=1}^{\infty} a_m b_n = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ Tedy: $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i\right)$ Což se mělo ukázat. První rovnost je oprávněna dle věty o limitě podposloupnosti konvergentní posloupnosti.

Poznámka: S využitím předchozí věty můžeme provést přesný důkaz věty o exponenciále, bod první.

6.3 Stejnoměrná konvergence

Definice 6: bodová a stejnoměrná konvergence
Buď M množina. Nechť $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost funkcí definovaných na M.

- Řekneme, že $\varphi_n(x)$ konverguje *bodově* k $\varphi(x)$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

  Píšeme $\varphi_n(x) \overset{M}{\to} \varphi(x)$.

- Řekneme, že $\varphi_n(x)$ konverguje *stejnoměrně* k $\varphi(x)$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in M \quad \forall n \geq n_0 \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

  Píšeme $\varphi_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Buď $v_n(x)$ posloupnost funkcí na M.

- Řekneme, že nekonečná řada $\sum_{1}^{\infty} v_n(x)$ konverguje bodově k $S(x)$, právě když pro $S_n(x) \equiv \sum_{1}^{n} v_n(x)$ platí $S_n(x) \overset{M}{\to} S(x)$

§8. Věta o implicitních funkcích

Poznámka: Existuje mnoho způsobů jak zadat funkci:
Nejpřímější cesta je tabulka hodnot, čili výčet. K obtížím ovšem dojde hned, jakmile je definiční obor funkce nekonečná množina.
Jiná možnost je zadat předpis, jak k danému x spočíst $f(x)$. Tento způsob je velmi pohodlný, ovšem ne vždy lze zadanou funkci takto vyjádřit pomocí běžných funkcí (logaritmus, goniometrické atd.).
Můžeme ale také říci, že funkce f je množina všech uspořádaných dvojic $(x, y) \equiv (x, f(x))$, které splňují například rovnost $F(x, y) = 0$. Je-li $F(x, y)$ funkce dvou proměnných, zdaleka z toho ovšem ještě neplyne, že f je funkce. Nejprve se tedy budeme zajímat o to, jaké požadavky je nutno klást na F, aby f funkce byla, přinejmenším lokálně, tj. v okolí zadaného bodu x.

Příklad: Položme $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Víme, že množina $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, tedy globálně to funkce není. Z rovnice $F(x, y) = 0$ můžeme ovšem y „vypočítat“: $y(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Pokud zvolíme libovolný bod (x_0, y_0) množiny K různý od $(\pm 1, 0)$, bude tento předpis pro $y(x)$ (když zvolíme správné znaménko, podle znaménka y_0) skutečně udávat funkci, která se bude shodovat s K alespoň na malém okolí bodu (x_0, y_0). V bodech $(\pm 1, 0)$ zřejmě taková funkce $y(x)$ neexistuje na žádném jejich (oboustranném) okolí. Zde ale můžeme vyjádřit funkci $x(y)$.
Celkově tedy vidíme, že v případě této funkce $F(x, y)$ můžeme v každém bodě K lokálně vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé.

Příklad: Berme $F(x, y) = x^2 - y^2$. Grafem G této množiny je sjednocení přímek $y = x$ a $y = -x$. Snadno zjistíme, že ve všech bodech G kromě $(0, 0)$ lze lokálně vyjádřit $y = y(x)$ i $x = x(y)$ (právě pomocí rovnic $y = x$, resp. $y = -x$). V bodě $(0, 0)$ neuspějeme ani v jednom případě.

Naším cílem bude nyní vyslovit kritérium pro funkce postačující k tomu, aby bylo možno z množiny $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ vyjádřit y jako funkci zbylých proměnných $x_1, \ldots, x_n$.
Lemma : Nechť $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ je funkce $n + 1$ reálných proměnných spojitá na okolí bodu $(x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Buď $F(x^0, y^0) = 0$ a předpokládejme, že $\exists U(x^0, y^0) = U(x^0) \times U(y^0)$ takové, že $\forall \bar{x} \in U(x^0)$ je funkce $F(\bar{x}, y)$ ryze monotónní funkcí y na $U(y^0)$. Potom

1. $\exists U'(x^0, y^0) = U'(x^0) \times U'(y^0)$ takové, že $\forall x \in U'(x^0) \exists! y \in U'(y^0) : F(x, y) = 0$; na $U'(x^0, y^0)$ je tedy podmínkou $F(x, y) = 0$ definována funkce $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, y : x \mapsto y, F(x, y) = 0$ a

2. funkce $y(x)$ je spojitá na $U'(x_0)$.

Poznámka: Názornou představu si lze udělat pro $n = 1$, tj. funkci $F(x, y)$. Protože funkce $f(y) \equiv F(x^0, y)$ má pro $y = y^0$ hodnotu nula a je např. rostoucí na nějakém $U(y^0)$, musí být „kousek pod“ bodem (x^0, y^0) (např. v $(x^0, y^0 - \varepsilon), \varepsilon > 0$) záporná a „kousek nad“ ním kladná (v $(x^0, y^0 + \varepsilon)$). Ze spojitosti F usoudíme, že $F(x, y^0 + \varepsilon)$ musí být kladná nejen v $x = x^0$, ale i na nějakém okolí $U'(x^0)$, podobně pro záporné hodnoty. Všechny funkce $f_x(y) \equiv F(x, y), x \in U'(x^0)$ jsou tedy rostoucí a $f_x(y^0 - \varepsilon) < 0, f_x(y^0 + \varepsilon) > 0$. Z toho ovšem plyne, že pro každá tato funkce má právě jeden nulový bod (Darbouxova věta). Formální důkaz prvního tvrzení je nyní již jednoduchý.

Důkaz: Buď $F(x^0, y)$ například rostoucí. Potom $\exists \varepsilon > 0 : F(x^0, y + \varepsilon) > 0, F(x^0, y - \varepsilon) < 0$ (volíme ε dostatečně malé tak, aby oba tyto body ležely v $U(x^0, y^0)$). Dále protože F je spojitá na $U(x^0, y^0)$, tak $\exists U'(x^0) \subset U(x^0); \forall x \in U'(x^0) : F(x, y + \varepsilon) > 0, F(x, y - \varepsilon) < 0$. Funkce $f_x(y) = F(x, y), x \in U'(x^0)$ definované na $U'(y^0) \equiv (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ jsou dle předpokladu monotónní, a tudíž dle právě ukázaného rostoucí. Protože jsou všechny spojité, mají na svém definičním oboru $(U'(y^0))$ dle Darbouxovy věty právě jeden nulový bod. Tvrzení 1 tedy platí na $U'(x^0) \times U'(y^0)$.
Pro důkaz spojitosti $y(x)$ v $\bar{x}$ zopakujeme naznačený postup ještě jednou:

$$\forall \varepsilon > 0 : F(\bar{x}, y(\bar{x}) + \varepsilon) > 0, F(\bar{x}, y(\bar{x}) - \varepsilon) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0; \forall x \in U_\delta(\bar{x}) : F(x, y(\bar{x}) + \varepsilon) > 0, F(x, y(\bar{x}) - \varepsilon) < 0.$$

Z toho ovšem plyne, že $\forall x \in U_\delta(\bar{x})$ leží $y(x)$, pro něž $F(x, y(x)) = 0$, v intervalu $U_\varepsilon(y(\bar{x}))$, což bylo

.

Důkaz: Rozepišme obě strany dokazované ekvivalence v $\varepsilon - \delta$ formalismu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \sup_{x \in M} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Pokud pro libovolnou funkci $f(x)$ definovanou na M (například $|\varphi_n(x) - \varphi(x)|$) platí $\sup_{x\in M} f(x) < \varepsilon$, pak z definice suprema $\forall x \in M \quad f(x) \leq \sup_{x\in M} f(x) < \varepsilon$. Opačná implikace je stejně jednoduchá. Pokud pro každé x je $f(x)$ menší než ε, pak supremum musí být menší nebo rovno než ε. Tím je věta dokázána, neboť v definici limity není samozřejmě podstatné, zda je příslušná funkce menší či menší nebo rovna než ε (viz kapitola o limitách).

Příklad: Nyní můžeme snadno zdůvodnit, proč posloupnost x^n nekonverguje stejnoměrně na $(0,1)$. Platí totiž $\sup_{x\in(0,1)} |x^n - 0| = 1$. O něco obtížnější je vyšetřit stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ pro x reálné. Snadno ověříme, že tato posloupnost bodově konverguje ke konstantní funkci $f(x) = 0$. Funkce $|f_n(x) - 0|$ je sudá, takže se můžeme omezit jen na $x \geq 0$. Chceme hledat $\sup(f_n(x) - 0)$ a použijeme k tomu standardních prostředků pro vyšetřování průběhu funkce, jmenovitě pro hledání globálních extrémů.
Limita funkce $\frac{nx}{1+n^2x^2}$ v $+\infty$ je rovna nule, stejně jako funkční hodnota v bodě 0. Derivace $f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2)-2n^2xnx}{(1+n^2x^2)^2} = n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ je všude definovaná a nulová v bodě $x_e = \frac{1}{n}$. Funkční hodnota v tomto bodě je $f(x_e) = 1/2$ a jedná se tedy o maximum a supremum na intervalu $(0,1)$. Daná posloupnost nekonverguje stejnoměrně.

Věta 19: Nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí
Nechť řada komplexních funkcí $\sum_1^\infty v_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M. Pak $v_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} 0$.

Důkaz: Označme součet řady $\sum_1^\infty v_n(x) \equiv S(x)$ a její částečné součty $S_n(x)$. Řada je stejnoměrně konvergentní, takže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in M \quad |S(x) - S_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pak platí

$$|v_n(x) - 0| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon,$$

čímž je věta dokázána.

Věta 20: Bolzano-Cauchyova podmínka pro řady
Buď $\sum_1^\infty v_n(x)$ řada komplexních funkcí na M. Pak $\sum_1^\infty v_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \left|\sum_{n+1}^{n+p} v_k(x)\right| < \varepsilon$$

Důkaz: $\Longrightarrow$: Pokud posloupnost $S_n(x)$ částečných součtů stejnoměrně konverguje k $S(x)$, pak podle námi dokázané věty pro n větší než nějaké n_0 je $\sup|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Odtud z vlastností suprema a trojúhelníkové nerovnosti plyne pro $m, n \geq n_0$

$$\sup|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sup(|S_m(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)|) \leq$$
$$\leq \sup|S_m(x) - S(x)| + \sup|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Poznámka: Má-li f na otevřené konvexní B nulové parciální derivace, je na B konstantní.

Věta 68: Taylorův rozvoj
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace řádu $k+1$ v nějaké otevřené množině G. Nechť $a, h \in \mathbb{R}^n$ taková, že $\forall t \in \langle 0,1\rangle \quad a + th \in G$. Pak existuje $\tau \in (0,1)$ takové, že

$$f(a+h) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\, \mathrm{d}^{(i)} f(a)(h,h,\ldots,h) + \frac{1}{(k+1)!}\, \mathrm{d}^{(k+1)} f(a+\tau h)(h,h,\ldots,h).$$

Důkaz: Zaveďme opět funkci $F(t)$ podobně jako v předchozí větě ($a + h \equiv b$). Z existence $(k+1)$. derivací funkce f plyne existence $(k+1)$. derivace funkce F. Podle věty o Taylorově rozvoji funkce jedné proměnné platí

$$F(1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{F^{(i)}(0)}{i!} + \frac{F^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}$$

Nyní sem postupně dosaďme:

$$F(1) = f(a+h) \qquad F(0) = f(0)$$

$$[F'(t)]_{t=0} = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} = \mathrm{d}f(a)(h)$$

$$[F''(t)]_{t=0} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(a) h_{i_1} h_{i_2} = \mathrm{d}^{(2)} f(a)(h,h)$$

$$\vdots$$

$$[F^{(k)}(t)]_{t=0} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\ldots\sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} h_{i_2}\ldots h_{i_k} = \mathrm{d}^{(k)} f(a)(h,h,\ldots,h)$$

Tím je důkaz proveden.

§7. Potenciál vektorového pole

Definice 31: Potenciál
Nechť $T = (T_1, T_2, \ldots T_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce (pole) a nechť $B \subset \mathbb{R}^n$ je množina. Existuje-li funkce $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s vlastností

$$T_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad \forall x \in B \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

nazveme ji potenciálem vektorového pole T.

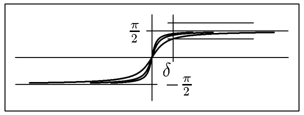
Poznámka: Je-li B otevřená a konvexní množina, pak je k T potenciál určen až na konstantu. Uvažujme dva potenciály U_1 a U_2 a jejich rozdíl $G = U_1 - U_2$. Pak pro všechna i platí $\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$ a podle Lagrangeovy věty je tedy G konstantní na B.

Poznámka: Proč zavádíme potenciál? Často se v praxi setkáváme s diferenciálními rovnicemi tvaru $T_1(x,y)\dot{x} + T_2(x,y)\dot{y} = 0$. Pokud bychom znali potenciál U funkce $T = (T_1, T_2)$ nebo dokázali rovnici přenásobit nějakou funkcí μ tak, aby funkce μT měla potenciál, měli bychom vyhráno, neboť

$$0 = T_1(x,y)\dot{x} + T_2(x,y)\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{dU}{dt} \Leftrightarrow U(x,y) = C.$$

Poznámka: Ve fyzice se obvykle pro proměnné v totálním diferenciálu nepoužívá značení $h^1, h^2, \ldots h^n$, běžnější je $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ apod., například

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$



Obr. 6: Posloupnost funkcí $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ na $\mathbb{R}$.

Příklad:

1. Vyšetřme stejnoměrnou konvergenci funkce $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ na intervalu $\langle \delta, \infty)$, pro δ kladné. Pro x pevné roste argument s n nade všechny meze a limita $f_n(x)$ je tudíž rovna $\frac{\pi}{2}$. Hledejme $\sigma_n = \sup\limits_{\langle\delta,\infty)} \left|\frac{\pi}{2} - f_n(x)\right|$. Tato funkce je kladná na celém vyšetřovaném intervalu, můžeme tedy odstranit absolutní hodnotu. Derivace $f_n(x)$ je rovna $-\frac{n}{1+n^2x^2}$ a je tudíž všude na reálné ose nenulová. Supremum se nachází v krajním bodě $\sigma_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\delta$. Tento výraz jde pro kladné δ k nule a zadaná posloupnost tedy konverguje stejnoměrně na $\langle \delta, \infty)$. Toto tvrzení zjevně *nelze* rozšířit na interval $(0, \infty)$, protože tam už je $\sigma_n = \frac{\pi}{2}$.

2. Mějme řadu $\sum\limits_1^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}$ pro x kladná. Její bodovou konvergenci zjistíme snadno – stačí uvážit, že

$$\frac{x}{1+n^2x^2} < \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}$$

a řada tvořená pravými stranami této nerovnosti pro každé x konverguje.

Na stejnoměrnou konvergenci zkusíme aplikovat Weierstrassovu větu. Zkusíme majorizovat jednotlivé $v_n(x)$ co nejmenšími konstantními funkcemi, abychom mohli využít náš aparát pro práci s číselnými řadami. Takové funkce jsou samozřejmě funkce $\alpha_n = \sup\limits_{(0,\infty)} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$. Limity $v_n(x)$ v nule a nekonečnu jsou nulové, supremum tedy leží někde uvnitř intervalu. Derivace $v_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ existuje všude a je nulová v bodě $x = \frac{1}{n}$. Funkční hodnoty $\alpha_n = v_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$ tvoří divergentní řadu. To samozřejmě neznamená, že i $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ diverguje, jen to, že není majorizovatelná konstantními funkcemi.

Nabyli jsme ale podezření, že by zkoumaná řada stejnoměrně konvergovat nemusela. Zkusíme ho ověřit přes Bolzano-Cauchyovu podmínku. Její negace zní: Řada nekonverguje stejnoměrně právě když

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists x \quad \left|\sum_{n+1}^{n+p} v_k(x)\right| \geq \varepsilon$$

Máme zde několik existenčních kvantifikátorů, takže budeme hledat co nejvhodnější volbu n, p a x při daném n_0. Zvolme $n = p = n_0$. Pak platí

$$\sum_{n_0+1}^{2n_0} \frac{x}{1+k^2x^2} \geq n_0 \cdot \frac{x}{1+4n_0^2x^2}$$

kde jsme každý člen součtu nahradili minimem všech členů. Zde je již nabíledni, že volba $x = \frac{1}{2n}$ dává pro výraz na pravé straně hodnotu $\frac{1}{8}$ a tudíž

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{8} \quad \forall n_0 \quad \exists n = n_0 \quad \exists p = n_0 \quad \exists x \quad \left|\sum_{n+1}^{n+p} v_k(x)\right| \geq \varepsilon$$

což znamená, že $\sum\limits_1^\infty v_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně na zkoumaném intervalu.

Poznámka: Skládání diferenciálů (jakožto speciálních lineárních zobrazení) mohu formálně chápat jako násobení tzv. Jacobiho matic[24], jejichž členy jsou jednotlivé složky prvních parciálních derivací. Zobrazení df je reprezentováno maticí $(\partial f_i/\partial y_j)$, zobrazení dg maticí $(\partial g_j/\partial x_m)$.

Věta 65: Souvislost derivace ve směru a parciálních derivací
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v a totální diferenciál. Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor jednotkové velikosti. Pak

$$\partial_v f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i.$$

Důkaz: Podle definice totálního diferenciálu platí, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i\right|}{\|h\|} = 0$$

Omezíme-li se na h tvaru $t\mathbf{v}$, toto tvrzení bude i nadále pravdivé, a pomocí symbolu $o(x)$ ho můžeme přepsat na

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{t\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{t\,\|\mathbf{v}\|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) t v_i + o(t\,\|\mathbf{v}\|)$$

Limitním přechodem odtud dostaneme tvrzení věty.

Definice 27: Gradient funkce
Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

se nazývá gradient funkce f v bodě a a značí se $\nabla f(a)$. Tento zápis lze chápat tak, že skalár $f(a)$ násobíme formálním vektorem

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

K čemu je dobrý gradient, ukáží následující dvě poznámky:
Poznámka: Jak plyne z předchozí věty, derivaci ve směru $\mathbf{v}$ lze psát pomocí skalárního součinu s gradientem jako $|\nabla f(a)| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\phi)$. Tento výraz bude maximální pro $\phi = 0$, tedy tehdy, je-li gradient rovnoběžný s $\mathbf{v}$. Gradient tudíž udává směr maximálního růstu funkce v daném bodě a.

Poznámka: Je-li f funkce, u níž lze zavést vrstevnice (křivky, podél nichž platí $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$) a parametrizovat je diferencovatelnými funkcemi $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, pak je gradient na tyto vrstevnice kolmý. To nejlépe ukážeme zderivováním rovnice $f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = C$ podle parametru t. Jsou-li splněny předpoklady věty o derivování složené funkce, dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\dot{x_n} = 0.$$

Vektor $(\dot{x_1}, \dot{x_2}, \ldots, \dot{x_n})$ je tečný k vrstevnici v každém jejím bodě, získaná podmínka říká, že tento vektor je kolmý ke gradientu.

§5. Diferenciály vyšších řádů

Definice 28: Existence totálního diferenciálu
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál k-tého řádu, jestliže všechny k-té

[24] S těmito maticemi se ještě vbrzku setkáme.

1. Nechť $\varphi_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ je posloupnost spojitých funkcí. Pak $\varphi(x)$ je spojitá.
2. Nechť $\sum\limits_1^\infty v_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x)$ je řada spojitých funkcí. Pak $S(x)$ je spojitá funkce.

Důkaz: Jsou-li $\varphi_n(x)$ spojité zleva na intervalu I, platí $\lim\limits_{x\to b-} \varphi_n(x) = \varphi_n(b)$ pro každé $b \in I$. Podle námi dokázané věty se pak $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$ rovná $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(b) = \varphi(b)$, čili $\varphi(x)$ je zleva spojitá na I. Zcela stejně se dokáže spojitost zprava a tvrzení týkající se řad.

Poznámka: Možná vás nad touto větou napadlo, jestli náhodou spojitost všech členů posloupnosti i limity neimplikuje stejnoměrnou konvergenci této posloupnosti. Odpověď zní ne, alespoň ne bez dalších předpokladů, jak ukazuje další věta, kterou však dokazovat nebudeme.

Věta 25: Diniho
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na $\langle a,b\rangle$, které na tomto intervalu bodově konvergují k spojité funkci $\varphi(x)$. Nechť navíc $\forall x \in \langle a,b\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$. Pak $\varphi_n(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.
Analogicky pro řady.

Věta 26: O derivaci posloupnosti funkcí
Nechť $\varphi_n(x)$ je posloupnost komplexních funkcí na intervalu $I \in \mathbb{R}$. Nechť pro každé n existuje $\varphi_n'(x)$ na I a posloupnost $\varphi_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Nechť existuje $x_0 \in I$ tak, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_0)$.
Pak

1. $\forall x \in I$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$
2. $\forall I' \subset I$ omezený $\varphi_n(x) \overset{I'}{\rightrightarrows} \varphi(x)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n'(x) = \varphi'(x)$

Poznámka: Tato věta nám umožňuje derivovat součet řady člen po členu.

Důkaz: Nejprve dokážeme první dvě části věty pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_0 \in I'$. Chtěli bychom, aby platilo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m,n \ge n_0 \quad \forall x \in I' \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$

Podívejme se, jak můžeme výraz $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|$ shora omezit. Naším záchytným bodem bude x_0, kde víme, že posloupnost konverguje:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \le |\varphi_n(x) - \varphi_m(x) - [\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)]| + |\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)|$$

Na první člen aplikujeme Lagrangeovu větu: existuje takové ξ mezi x a x_0, že

$$|[\varphi_n(x) - \varphi_m(x)] - [\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)]| = |(\varphi_n - \varphi_m)(x) - (\varphi_n - \varphi_m)(x_0)| =$$

$$= |(\varphi_n - \varphi_m)'(\xi)|\,|x - x_0| = |\varphi_n'(\xi) - \varphi_m'(\xi)|\,|x - x_0|$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\varphi_n'(x)$ konverguje stejnoměrně, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m,n \ge n_1 \quad \forall \xi \in I' \quad |\varphi_n'(\xi) - \varphi_m'(\xi)| < \varepsilon$.
Navíc podle Bolzano-Cauchyovy podmínky $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m,n \ge n_2 \quad |\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0)| < \varepsilon$.
Do třetice, I' je omezený, čili $\exists K > 0 \quad \forall x, x_0 \in I' \quad |x - x_0| < K$.
Díky tomu můžeme psát

$$\forall x \in I' \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon K + \varepsilon$$

Při důkazu klíčové třetí části věty bychom chtěli využít větu o limitním chování posloupnosti funkcí. Definujme

$$\phi_n(h) = \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h}$$

derivaci podle x_i, tedy $\partial f/\partial x_i = \alpha_i$.

Příklad: Spočtěme totální diferenciál $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $a = (x_0, y_0)$ a ověřme, zda platí vlastnosti z definice.
Totální diferenciál určíme podle předchozí věty $df(a)(h) = 2x_0h_1 + 2y_0h_2$. Platí

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\eta(h)}{\|h\|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{(x_0+h_1)^2 + (y_0+h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{|h|\to 0} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0,$$

přesně jak jsme očekávali.

Příklad: Lze samozřejmě vymyslet řadu příkladů funkcí, které v nějakém bodě totální diferenciál nemají, ačkoliv mají spojité parciální derivace podle všech proměnných[23]. Například funkce f definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \ge x \\ y, & x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \le x \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

je všude kromě prvního kvadrantu nulová a v prvním kvadrantu vytváří symetrickou stříšku. Čtenář snadno ověří, že jediný kandidát na totální diferenciál v $(0,0)$ - lineární forma s koeficienty rovnými parciálním derivacím, má zbytek $\eta(x)$ roven funkci samotné. Tento zbytek ale evidentně nesplňuje druhou podmínku z definice, protože například na kladné části přímky $x = y$ je $\lim\limits_{h_1,h_2\to 0} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, zatímco na záporné části téže přímky je stejná limita rovna nule.

Věta 63: Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, nechť v nějakém okolí $U(a)$ existují všechny první parciální derivace a jsou spojité v a.
Pak existuje totální diferenciál $\mathrm{d}f(a)$.

Důkaz: Máme dokázat, že za předpokladů věty platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{\|h\|} = 0$$

Podle věty o střední hodnotě pro funkce více proměnných, která byla dokázána jako lemma, existují taková $\xi^{(i)}$, $\|\xi^{(i)}\| \le \|h\|$, že $f(a+h) - f(a) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^{(i)})h_i$. Absolutní hodnotu výrazu uvnitř limity můžeme tedy s pomocí tohoto a trojúhelníkové nerovnosti odhadnout

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{\|h\|} \right| \le \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \xi^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| \frac{|h_i|}{\|h\|} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \xi^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|$$

Poslední výraz jde díky spojitosti derivací k nule a věta je tím dokázána.

§4. Totální diferenciál složeného zobrazení

Věta 64: Totální diferenciál složeného zobrazení
Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ Nechť v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ existuje $\mathrm{d}g(a)$ a nechť v bodě $b = g(a) \in \mathbb{R}^k$

[23] Pozorný čtenář se jistě nenechal oklamat a ptá se, zda stačí existence derivací ve všech směrech. Ne: berme např. funkci všude nulovou, jen na $(x,0)$ definovanou jako $f(x,y) = x$.

derivacemi až do řádu $n+1$ v bodě x_0 jsme přiřadili polynom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Zjistili jsme také, že pro některé funkce (např. e^x, $\ln(1+x)$ příslušná řada konverguje, v prvním případě na celém $\mathbb{R}$, ve druhém jen na $(-1,1)$. Vidíme například, že oba tyto intervaly jsou „souměrné“ podle bodu 0 — zkusme tedy uvažovat obecnou mocninnou řadu a zaměřme se nejprve na otázky oboru konvergence.

Definice 7: Mocninná řada
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, z \in \mathbb{C}$$

nazveme mocninnou řadou o středu z_0.

Poznámka: První zvláštnost mocninných řad objevíme, budeme-li zkoumat jejich absolutní konvergenci. V řadě pak budou členy $|a_n||z-z_0|^n$ — vidíme, že konvergence této řady vzhledem k z (tj. velikost členů řady) závisí pouze na vzdálenosti z od středu z_0 a v rovině komplexních čísel bude tento obor znázorňovat kruh (s hraniční kružnicí nebo bez ní), případně bod či celá rovina.
Dále zkoumejme i případnou neabsolutní konvergenci; pro pohodlí budeme uvažovat řady se středem $z_0 = 0$.

Označení: Pro zestručnění zápisů zaveďme pro kruh o středu z_0 a poloměru ρ tuto značku:

$$K(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C}|; |z - z_0| < \rho\}.$$

Věta 30: O konvergenci mocninných řad
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je mocninná řada a nechť pro určité $z_1 \in \mathbb{C}$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ konverguje. Potom

1. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_1|$ konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolutně a
2. $\forall \rho \in (0, |z_1|)$ konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stejnoměrně absolutně na kruhu $K(0,\rho)$.

Důkaz: První tvrzení plyne z druhého (rozmyslete jak), dokážeme tedy pouze stejnoměrnou konvergenci. Z předpokladu plyne, že $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$, tedy tato posloupnost je omezená určitým číslem K. Potom ovšem pro libovolné $z \in \mathbb{C}, |z| \in (0,\rho)$ můžeme psát

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \le K \left|\frac{\rho}{z_1}\right|^n = Kc^n.$$

Poslední výraz ovšem nezávisí vůbec na z a přitom zřejmě absolutně konverguje ($c < 1$). Našli jsme tedy pro naši řadu stejnoměrně konvergentní majorantu (c.b.d.).

Věta 31: O poloměru konvergence mocninné řady
Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0^n$ definujme číslo

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

je-li limita nenulová, v opačném případě položme $R = \infty$. Toto číslo nazýváme poloměr konvergence uvedené řady a má následující vlastnosti:

1. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$ konverguje absolutně na $K(z_0, R)$,
2. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$ diverguje $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| > R\}$,

Speciálně derivace ve směru bázových vektorů značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Poznámka: Analogicky se definují vyšší derivace.
$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \Rightarrow \partial_l f(a) = (\partial_l f_1, \partial_l f_2, \dots, \partial_l f_n)$.

Věta 59: Záměnnost pořadí parciálních derivací
Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, nechť existují $\partial f/\partial x_i$, $\partial f/\partial x_j$ v nějakém $U(a)$, nechť existuje $\partial^2 f(x)/(\partial x_i \partial x_j)$ spojitá v a.
Pak existuje $\partial^2 f(a)/(\partial x_j \partial x_i)$ a rovná se $\partial^2 f(a)/(\partial x_i \partial x_j)$.

Důkaz: Čtenář jej nalezne například v klasické učebnici Vojtěcha Jarníka...

... cítí-li se však ošizen, nechť zkusí dokázat rovnost obou parciálních derivací alespoň pro reálně analytickou funkci (zapsanou pomocí nekonečné řady).

Úmluva: Pro funkce spojitě diferencovatelné do řádu k budeme používat označení

$$D^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

kde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le k$.

Příklad: Pro většinu „rozumných“ funkcí lze záměnu parciálních derivací provést bez nebezpečí. Není ale složité vymyslet funkci, pro niž se smíšené derivace nebudou rovnat. Čtenář sám ověří, že pro funkci dvou proměnných, definovanou

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & |x| < |y| \\ xy, & |x| \ge |y| \end{cases}$$

se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ rovná 1, zatímco $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.

§2. Parciální derivace a spojitost

Poznámka: Pokud existuje $\partial_l f(a)$, pak $\psi \equiv f(a+tl)$ je spojitá v $t = 0$. Toto tvrzeníčko je jednoduchý výsledek z teorie funkcí jedné proměnné.

Věta 60: Souvislost parciálních derivací a spojitosti
Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ nechť existuje okolí bodu a, takové, že ve všech bodech tohoto okolí existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a jsou tam omezené. Pak f je spojitá v a.

Lemma o střední hodnotě pro funkce více proměnných: Nechť existují $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ v $I = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$. Pak $\forall x \in I \quad \exists \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)} \in I$ takové, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^{(i)})(x_i - a_i).$$

Důkaz lemmatu: Abychom se vyvarovali chaosu ve značení, provedeme pro $n = 2$, i při tomto zjednodušení bude jasně patrné, jak postup zobecnit ve vyšších dimenzích.

$$f(x) - f(a) \equiv f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) = f(x_1,x_2) - f(x_1,a_2) + f(x_1,a_2) - f(a_1,a_2) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\xi^{(2)})(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi^{(1)},a_2)(x_1 - a_1)$$

Poslední úprava je aplikace Lagrangeovy věty o střední hodnotě na funkci $\phi(x) \equiv f(x_1,x)$ resp. $f(x,a_2)$, což už je funkce jedné proměnné.

Důkaz věty: Do každého okolí mohu vepsat obdélníček (součin neprázdných intervalů) z lemmatu.

Mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Poznámka: Návod pro důkaz lze psát asi takto:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[n]{na_n} \longrightarrow \lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n},$$

neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (jak se to spočítá?). Úpravy s limitami je však zapotřebí provést korektně.

Cvičení: Uvědomme si, že pro libovolné dvě posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ platí

$$\sup a_n b_n \le \sup a_n \sup b_n.$$

Důkaz: Odhadněme poloměr konvergence druhé řady R_2 z definice:

$$R_2 = \limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \le \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[m]{m} \sup_{n>m} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[m]{m} \lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \sqrt[n]{|a_n|} = R_1.$$

Větu o součinu limit jsme mohli použít, neboť víme, že obě nové limity existují[3]. Můžeme ale také psát

$$R_2 =\ge \limsup 1.\sqrt[n]{|a_n|} = R_1,$$

neboť zřejmě $\sqrt[n]{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Kombinací těchto dvou odhadů máme $R_1 = R_2$.

Věta 34: Derivace mocninné řady
Budiž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, x_0 \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{C}$ mocninná řada s poloměrem konvergence R. Pro libovolné přirozené k platí

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}.$$

Součet řady má tedy (spojité) derivace všech řádů.

Důkaz: Podle předchozí věty víme, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)'$ stejnoměrně konverguje na každém $(x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta)$ pro $\delta > 0$. Protože nederivovaná řada zřejmě bodově konverguje v $x = x_0$, lze použít větu (26) a ověřit dokazovaný vztah pro $k = 1$ (tj. opět: pro libovolné zadané x z $(x_0 - R, x_0 + R)$ musíme najít nejprve vhodné δ, aby x leželo ve zmenšeném intervalu stejnoměrné konvergence). Dále postupujeme indukcí.

Poznámka: Součet mocninné řady $S(z)$ je zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a lze jej chápat též jako $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : z = x + \imath y \mapsto u(x,y) + \imath v(x,y)$. Můžeme se zajímat o parciální derivace S podle x a y a nic nám nebrání použít předešlou větu (jakto?):

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial x}(x + \imath y - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x + \imath y - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1},$$
$$\frac{\partial S}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial y}(x + \imath y - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n\imath(x + \imath y - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n\imath(z-z_0)^{n-1}.$$

Vidíme, že parciální derivace existují a platí mezi nimi vztah $\partial S/\partial y = \imath(\partial S/\partial x)$. Tento vztah bývá označován jako Cauchy-Riemannova rovnost.

Příklad: Ukážeme, k čemu může být dobrá záměna pořadí sumace a integrace.
Sečtěme řadu

$$\sum_{n=1}^{i} nfty \frac{n}{2^n}.$$

[3]Diskutujte opět případ, že poloměr konvergence je ∞.

Pro každé dvě $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí jednoduchá nerovnost $|2x_1x_2| \le x_1^2 + x_2^2$. Použijeme-li tento odhad ve vyjádření funkce f, dostáváme

$$\left|\frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right| \le \frac{|x_1|}{2} \le \frac{\|x\|}{2}$$

Ke každému ε stačí tedy zvolit $\delta = 2\varepsilon$.

Věta 54: O limitě složeného zobrazení
Nechť $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť

1. existuje $\lim_{x\to x_0} F(x) = y_0 \in \mathbb{R}^m$
2. existuje $\lim_{y\to y_0} G(y) = z_0 \in \mathbb{R}^k$
3. $\exists U^*(x_0) \quad \forall x \in U^*(x_0) \quad F(x) \ne y_0$

Pak $\lim_{x\to x_0} G(F(x)) = z_0$.
Důkaz: Provádí se naprosto stejně jako pro funkce jedné proměnné.

Příklad: Zkoumejme, zda existuje limita funkce $f(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ opět v bodě $(0,0)$. Budeme sledovat chování této funkce na přímkách procházejících počátkem s různou směrnicí k. To je totéž, jako uvažovat složenou funkci $f \circ g_k$, kde vnitřní funkce g_k jsou zobrazení $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definovaná předpisem $g_k(x) = (x, kx)$. Všechny funkce g_k mají limitu $(0,0)$ a pro $x \ne 0$ je $g_k(x) \ne 0$. Můžeme tedy použít předchozí větu: $\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2}$. To je ovšem konstanta závislá na k, čili na způsobu přibližování se k nule, limita neexistuje.

Poznámka: Pozor, pokud by limita po všech přímkách byla stejná, neimplikuje to existenci limity celé funkce.

Příklad: Limita funkce $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}$ v nule. Je-li (x_1, x_2) tvaru $(x, 0)$ nebo $(0, x)$, pak $f(x_1, x_2) = 0$, v opačném případě existuje $k \ne 0$ takové, že (x_1, x_2) je tvaru (x, kx). Potom $\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^2(x^2+k^2)} = 0$. Na všech přímkách procházejících počátkem je tedy limita nulová. Tak zkusíme třeba parabolu $(x_1, x_2) = (x, x^2)$. Hodnota funkce $f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4}$ je stále jedna polovina, limita podél paraboly je tudíž také $\frac{1}{2}$, z čehož plyne, že limita celé funkce nemůže existovat. Je možné si to představit také tak, že přímky (x, kx) protnou tuto parabolu každá jen jednou, a i když v místě průsečíku je funkční hodnota jedna polovina, jedná se jen o jediný bod, který limitní proces podél přímky neovlivní.

Poznámka: Z předchozího příkladu je patrné, že při důkazu existence limity se nemohu omezit na nějakou speciální třídu křivek jako přímky nebo kvadriky. Ke každému speciálnímu způsobu přibližování lze vymyslet funkci, kde selže. Jediné, co v tomto ohledu opravdu platí, je stará známá Heinova věta:

Věta 55: Heine
Nechť $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, pak $\lim_{x\to x_0} = A \in \mathbb{R}^n$ právě když $\forall x_n \ne x_0$, $x_n \to x_0 \Rightarrow F(x_n) \to A$.

Důkaz: Je opět přímou analogií důkazu pro funkce jedné proměnné.

Věta 56: Bolzano-Cauchyova podmínka
Nechť $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$.

$$\lim_{x\to x_0} F(x) \text{ existuje} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists U^*(x_0) \quad \forall x, y \in U^*(x_0) \quad \|x - y\| < \varepsilon$$

Poznámka: K zavedení pojmů limity a spojitosti a k platnosti uvedených vět není třeba tak silných požadavků, jako jsou vlastnosti Euklidovského prostoru. Existuje teorie takzvaných *topologických prostorů*, která k tomuto problému přistupuje obecně. Speciálně si zde můžeme uvést definici *metrického prostoru*, kde tyto zákonitosti platí také. Pod metrickým prostorem rozumíme dvojici množina M a zobrazení $\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}_0^+$, které splňuje tyto axiomy:

pro $x = 0$ zjistíme tentokrát $c = \ln a$. Co se týče poloměru konvergence, snadno zjistíme (věta (31)), že $R = a$ (pro $|x| < a$ řada geometricky konverguje). Takto bychom mohli postupně definovat logaritmus libovolného kladného čísla — začali bychom s $a = 1$, čímž bychom již znali hodnoty logaritmů na $(0, 2)$, dále bychom vzali střed např. $a = 1,9$ atd. Také vidíme, že při žádném a se nám nepodaří sestrojit řadu, která by nahrazovala logaritmus na celém $\mathbb{R}^+$ — poloměr konvergence bude vždy roven pouze $|a|$, neboť v bodě 0 logaritmus diverguje (podle věty (31) tento bod nesmí ležet uvnitř kruhu). Stejně tomu bude i pro $a \in \mathbb{C}$.

Příklad: Ve srovnání s posledním příkladem také snadno vysvětlíme, proč je poloměr konvergence Taylorovy řady pro $1/(1 + x^2)$ pouze 1, ačkoliv pro $x = \pm 1$ u této funkce obtíže nenastávají: kritické body jsou v tomto případě $x = \pm\imath$, a proto řada se středem v nule bude mít poloměr konvergence pouze $|\pm\imath|$.

Cvičení: Sestrojte Taylorovy řady pro funkce $\operatorname{arctg} x$ (podobně jako u logaritmu) a $(1 + x)^\alpha$. Vyšetřete jejich poloměry konvergence.

Poznámka: Je-li funkce zapsaná pomocí mocninné řady, lze s ní snadněji provádět některé operace (integrování derivování). Zavedeme proto podmnožinu C^∞ funkcí, které lze zapsat jako mocninnou řadu.

Definice 9: Reálně analytické funkce
Nechť $f : M \to \mathbb{C}, M \subset \mathbb{R}$ je z C^∞. Řekneme, že f je reálně analytická, pokud $\forall x_0 \in M \exists U(x_0) \subset M, \exists a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C} : \forall x \in U(x_0)\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Poznámka: Podle předcházející věty víme, že pokud už lze $f(x)$ vyjádřit jako řadu, je to řada Taylorova.

Příklad: Funkce $1/(1 + x^2)$ je reálně analytická na celém $\mathbb{R}$, i když v žádném bodě příslušná řada nekonverguje na celém $\mathbb{R}$ (nemá poloměr konvergence ∞). Podobně $\ln x$ je reálně analytická na $\mathbb{R}^+$, $\operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$.

Poznámka: Funkce reálně analytické na celém svém definičním oboru nazýváme elementární.

Poznámka (důležitá): Platí následující tvrzení:

1. Pokud f, g jsou reálně analytické na M, pak i $f + g$ a fg jsou na M reálně analytické a pokud navíc $g \neq 0$ na M, je reálně analytická na M i f/g.
2. Pokud f je reálně analytická na (a, b) a g je reálně analytická na $f((a, b))$, pak složená funkce $f \circ g$ je reálně analytická na (a, b).

Abychom toto tvrzení poněkud podepřeli, vyslovíme těchto několik pravidel:
Věta 36: Pravidla pro počítání s řadami
Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ na nějakém $U(0)$. Potom

1. $f(x) + g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$,
2. $f(x)g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k,l,k+l=n} a_k b_l x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$,
3. $g(0) = b_0 \neq 0 \Rightarrow \exists U_\delta(0), \forall x \in U_\delta(0) : \frac{f(x)}{g(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kde $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$ (z čehož lze postupně vypočítat všechna c_n) a

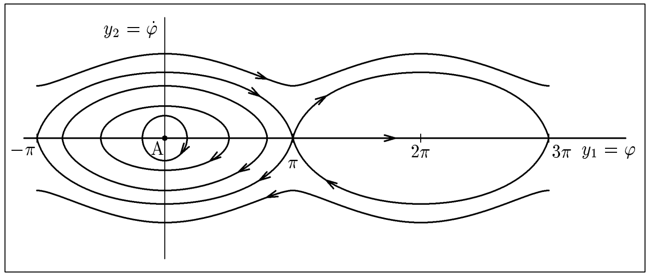
Bod $[0, 0]$ znázorněný na obrázku, ke kterému se řešení blíží a poté se zase vzdalují (v čase, tj. jako funkce t) se nazývá sedlový bod.

Poznámka: Zkoumejme řešení soustavy rovnic (srov. s matematickým kyvadlem):

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -siny_1$$

Pro y_1 blízké sudým násobkům π, tj. speciálně blízké nuly, soustava rovnic přejde na soustavu diskutovanou v příkladě nula. Pro malé výchylky koná matematické kyvadlo harmonické kmity (téměř kružnicové trajektorie ve stavovém prostoru). Naopak pro y_1 blízké lichým násobkům π, je přibližně $siny_1 = (2k + 1)\pi - y_1$ a soustava rovnic přejde na soustavu diskutovanou v druhém příkladě. Lze též zjistit, že pro každé t platí: $\frac{y_2^2}{2} + 1 - \cos y_1 = konst.$. Znázornění trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ je na obrázku.



Cvičení: Stejným způsobem, tj. prostým dosazením, určete řady pro funkce $x \operatorname{arctg} x$, $x/(\ln(1+x))$.

6.4 Neabsolutní konvergence

Příklad: Víme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

nekonverguje absolutně. Přirozeně nás tedy zajímá, zda konverguje alespoň neabsolutně. Zapíšeme-li vhodně částečné součty

$$s_{2n} = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n}\right),$$

$$s_{2n+1} = 1 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\right) + \ldots + \left(-\tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n+1}\right),$$

vidíme, že posloupnost s_{2n} je rostoucí a s_{2n+1} klesající. Obě tedy mají buď vlastní nebo nevlastní limity. Dále vidíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} - s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, tedy obě posloupnosti konvergují k témuž číslu. Protože je jedna posloupnost rostoucí a druhá klesající, nemůže to být $\pm\infty$, ale vlastní číslo. Snadno si rozmyslíme, že z tohoto již plyne existence vlastní limity celé posloupnosti částečných součtů s_n.

Při pohledu na tuto posloupnost nás může napadnout následující obecnější tvrzení:

Věta 37: Leibnizova

Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le a_{n+1} \le a_n$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz: Implikaci doprava jsme dokázali již na začátku této kapitoly (věta (1)).
Opačný směr dokážeme naprosto stejně jako v příkladu: zjistíme, že existují limity částečných součtů s_{2n} a s_{2n+1}, předpokladu využijeme pro důkaz, že si jsou tyto limity rovny. Čtenář nechť nyní důkaz dokončí sám tím, že ukáže existenci limity s_n.

Věta 38: Leibnizova pro řady funkcí

Nechť pro posloupnost funkcí $\{a_n(x)\}$ na M platí $\forall x \in \mathrm{M}\ \forall n \in \mathbb{N} : 0 \le a_{n+1}(x) \le a_n(x)$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n(x) \text{ konverguje stejnoměrně na } M \Leftrightarrow a_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} 0.$$

Důkaz: Směr $\Rightarrow$ je opět triviální (věta (19)).
Ve druhém případě použijeme ekvivalentní podmínku stejnoměrné konvergence (18) a budeme počítat

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} \{|S(x) - S_n(x)|\} = \sup_{x\in M} \{|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k(x)|\} \le \sup_{x\in M} \{|a_{n+1}(x)|\} \to 0.$$

Při odhadování sumy jsme opět vhodně sdružovali sčítance:

$$a_{2n+1} + (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + \ldots \le a_{2n+1},\ (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3}) - a_{2n+4}) + \ldots \ge 0.$$

V závěru vidíme, že σ_n je shora omezeno posloupností konvergující k nule (zde jsme použili větu (18) obráceně — když $a_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} 0$, pak $\sup\limits_{x\in M} \{|a_n(x)|\} \to 0$). Důkaz je tedy hotov.

pouze projektory (tj. zobrazení), které $v \in R^n$ přiřadí odpovídající $v_i \in V_i$. Charakteristický polynom matice A je $\chi(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} (-1)^n$. Nechť platí:

$$\frac{1}{\chi(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}}$$

kde $P_i(\lambda)$ jsou polynomy stupně nejvýše $\nu_i - 1$ (rozklad na parciální zlomky).

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}} \chi(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda) \prod_{i\ne j} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$$

Jednotlivé sčítance $P_i(\lambda) \prod\limits_{i\ne j} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$ jsou hledané projektory, neboť každý z nich je lineární zobrazení, jehož jádro (nulový prostor) tvoří lineární obal všech V_j pro $j \ne i$, a jejich součet je identické zobrazení. Označím každý z těchto projektorů $\prod_i$. Potom platí:

$$e^{At} v = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\nu_i - 1} \frac{(A - \lambda_i)^j}{j!} \Pi_i v$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -y_1$$

Tedy:

$$\dot{y} = Ay, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděme nejprve vlastní čísla A:

$$\chi(\lambda) = -\lambda^2 - 1 = 0, \lambda = \pm i$$

$$\frac{1}{\lambda^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2} i}{\lambda + i} + \frac{\frac{-1}{2} i}{\lambda - i}$$

$$\Pi_1(A) = \frac{1}{2i}(\lambda + i) = \frac{1}{2i}(A + i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2(A) = \frac{-1}{2i}(\lambda - i) = \frac{-1}{2i}(A - i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_1(A) + e^{-it} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_2(A)$$

$$e^{At} = e^{it} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + e^{-it} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} & \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{-2i} & \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Povšimněme si, že $e^{At} = 1$ pro $t = 0$.

Poznámka: Povšimněme si, že $A^2 = -1$:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 \cos t + A \sin t$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

1. Abelovo kritérium: pokud je $\{a_n\}$ omezená a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.
2. Dirichletovo kritérium: pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{B_n\}$ je omezená, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 39': Abelovo a Dirichletovo kritérium pro řady funkcí
Nechť $\{a_n(x)\}$ je posloupnost reálných funkcí na M taková, že pro každé $x \in$ M je posloupnost $\{a_n(x)\}$ monotónní. Nechť $\{b_n(x)\}$ je posloupnost komplexních funkcí na M, $B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$. Pak platí:

1. pokud $\exists K; \forall n \forall x \in$ M : $|a_n(x)| < K$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ na M stejnoměrně konverguje, pak na M stejnoměrně konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
2. pokud $a_n(x) \overset{\mathrm{M}}{\rightrightarrows} 0$ a $\exists K; \forall n \forall x \in$ M : $|B_n(x)| < K$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ stejnoměrně konverguje na M.

Důkaz: provedeme pouze pro druhou z vět. Tvrzení první věty z věty druhé vyplývá triviálně, pokud volíme za funkce v posloupnostech konstanty.
Při důkazu bychom rádi použili obecnou Bolzano-Cauchyovu podmínku pro řadu z $a_n b_n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall p, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall x \in \mathrm{M} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Označíme-li v této sumě $\alpha_k(x) = a_{n+k}, \beta_k(x) = b_{n+k}, B_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j$, můžeme s pomocí Abelova lemmatu, trojúhelníkové nerovnosti a za předpokladu $\exists \Theta_2; \forall n \in \mathbb{N} : |B_n| < \Theta_2$ psát:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq |\alpha_n B_n| - \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k \right| \leq |\alpha_n||B_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |(\alpha_{k+1} - \alpha_k)||B_k| =$$

$$= |\alpha_n||B_n| + \Theta_2 \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|.$$

Protože je však $\{\alpha_k\}$ monotónní posloupnost, mají všechny členy v poslední sumě stejná znaménka. Pokud je $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k$, resp. $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$, bude tato suma rovna $\alpha_n - \alpha_1$, resp. $\alpha_1 - \alpha_n$, tedy v obou případech $|\alpha_n - \alpha_1|$. Pokud ale $\exists \Theta_1; \forall n \in \mathbb{N} : |\alpha_n| < \Theta_1$, je tato absolutní hodnota (opět s použitím trojúhelníkové nerovnosti) menší nebo rovna $2\Theta_1$. Podle předchozího tedy můžeme napsat

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq \Theta_1 \Theta_2 + 2\Theta_2 \Theta_1 = 3\Theta_1 \Theta_2. \tag{5}$$

Abychom mohli omezit sumu nalevo libovolně malým $\varepsilon > 0$, stačí, když budeme moci učinit jedno z čísel Θ_1, Θ_2 libovolně malé a druhé alespoň omezit. Z každé z těchto možností plyne jedna z dokazovaných podmínek.

1. Abelova podmínka. Množina $\{|a_n(x)|\}$ je pro všechna přípustná n a x omezená číslem K. Řada z b_k stejnoměrně konverguje, tedy podle Bolzano-Cauchyovy podmínky platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall p, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall x \in \mathrm{M} : B_n = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Shrňme tedy celý postup: aplikujeme Bolzano-Cauchyovu podmínku na řadu z $a_n b_n$. Určíme K omezující posloupnost a_n, položíme $\Theta_1 = K$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ určíme v (6) n_0, pro které bude $B_n < \varepsilon / 4\Theta_1$ pro každé $n \geq n_0$ nezávisle na volbě $x \in$ M (stejnoměrnost). Potom budeme moci v nerovnosti (5) položit $\Theta_2 = \varepsilon / 4\Theta_1$, čímž zjistíme, že suma na levé straně je menší nebo rovna $\varepsilon.3/4 < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathrm{M}, n \in \mathbb{N}$.

2. Dirichletova podmínka. Tentokrát je omezená množina $\{|\sum_{j=1}^{n} b_j|\}$, a to například číslem $K > 0$. Posloupnost $\{a_n\}$ stejnoměrně konverguje ke konstantní nulové funkci, což dle definice znamená

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall x \in \mathrm{M} : |a_n(x)| < \varepsilon. \tag{7}$$

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{(t-t_0)^k}{k!}$$

Celý vztah stejně tak i použitou úpravu lze ověřit matematickou indukcí.

2. Diferenciální rovnici tvaru $y^{(n)} = f(t, y^{(n-1)})$ lze řešit substitucí $z = y^{(n-1)}$ a řešit rovnici $z' = f(t, z)$. Po jejím vyřešení je třeba rozřešit rovnici $y^{(n-1)} = z$, která má tvar diskutovaný v bodě 1.

3. Rovnice tvaru $y^n = f(t, y^{(n-2)})$ lze řešit substitucí $z = y^{(n-2)}$ a následujícími úpravami:

$$z'' = f(t, z)$$
$$2z'z'' = 2z' f(t, z)$$
$$((z')^2)' = 2z' f(t, z)$$
$$(z')^2 = 2F(z) + C$$
$$z' = \pm\sqrt{2F(z) + C}$$

kde $F(z) = \int f(z)\, \mathrm{d}z$.
Příklad: Řešte $y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}$, s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ a $y''(0) = 1$. Rovnice bude řešena zavedením substituce $z = y'$.

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}$$
$$z'' = \frac{1}{4\sqrt{z}}$$
$$2z'z'' = \frac{2z'}{4\sqrt{z}}$$
$$((z')^2)' = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$$
$$(z')^2 = \sqrt(z) + C_1$$

Díky počátečním podmínkám je $C_1 = 0$, neboť $y_1 = 1$ a $y_2 = 1$.

$$z' = \sqrt[4]{z}$$
$$\frac{z'}{z^{\frac{1}{4}}} = 1$$
$$\frac{4}{3} z^{\frac{3}{4}} = t + C_2$$
$$z^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} t + \frac{3}{4} C_2$$

Díky počátečním podmínkám je $C_2 = 1$, neboť $y_1 = 1$.

$$z = (3/4t + 1)^{4/3}$$

$$y = \int_0^t (3/4\tau + 1)^{4/3}\, \mathrm{d}\tau = \frac{4}{7}(3/4t + 1)^{7/3} - frac47 + C_3$$

Díky počátečním podmínkám je $C_3 = 0$, neboť $y_0 = 0$.

4. Rovnice $y^{(n)} = f(t, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ se řeší substitucí $z = y^{(k)}$ a poté rozřešením rovnice $y^{(k)} = z$ diskutované v bodě 1.

Poznámka: Věta říká, že pokud mocninná řada konverguje v libovolném bodě na poloměru konvergence, pak konverguje stejnoměrně na celé úsečce spojující tento bod a nulu (střed řady). První tvrzení je potom samozřejmě triviálním důsledkem druhého, pokud vezmeme $\phi = 0$ a úsečka leží na reálné ose.

Důkaz: Použijeme Abelova kritéria: pro libovolné $t \in \langle 0, R\rangle$ upravíme členy řady do tvaru

$$a_n(te^{\imath\phi})^n = \underbrace{a_n(Re^{\imath\phi})^n}_{A_n} \cdot \underbrace{\left(\frac{t}{R}\right)^n}_{B_n}.$$

Vidíme, že druhý činitel je monotónní vůči n a je stejnoměrně omezený (pro každé $t \in \langle 0, R\rangle$ např. číslem 2), zatímco řada, jejíž n-tý člen je první činitel, stejnoměrně konverguje (neboť konverguje a není závislá na t). Podle Abelova kritéria to tedy znamená, že součin A_nB_n konverguje stejnoměrně na $\langle 0, R\rangle$.

Příklad: Pomocí právě dokázané věty můžeme snadno určit součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

o níž jsme již na začátku paragrafu dokázali, že konverguje (viz Leibnizovu větu).
Vzpomeneme si, že výrazy typu $(-1)^{n+1}/n$ se vyskytovaly v Taylorově rozvoji pro funkci $\ln(1+x)$. Přesněji

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, x \in (-1, 1).$$

Rovnost pro tato x jsme dokázali v paragrafu o Taylorových rozvojích. Nyní víme, že řada konverguje i pro $x = 1$, tedy podle Abelovy věty řada konverguje stejnoměrně pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Věta (22) nám ovšem potom umožní zaměnit pořadí jednostranné limity a sumy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 1^-} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Poznámka (varovná): Když jsme mluvili o přerovnávání řad, nezabývali jsme se blíže řadami neabsolutně konvergentními. U nich totiž součet nejenže může záviset na přerovnání, ale dokonce vhodným přerovnáním můžeme zařídit, aby součet byl libovolné reálné číslo (u reálných řad), popřípadě $+\infty$ či $-\infty$. Pro demonstraci uveďme alespoň následující:

Příklad: Neabsolutně konvergentní řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

přerovnejme tak, aby měla součet $+\infty$.
Vtip je v tom, že vezmeme vždy několik členů kladných a potom jediný záporný. Tím „zvýšíme hustotu kladných znamének“, i když díky nekonečnosti $\mathbb{N}$ budou „nakonec“ v sumě i všechny záporné členy. Zkoumejme tedy např. součet

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots$$

Jeho n-týž člen odhadneme takto:

$$\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \left(\frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{\sqrt{8n} - \sqrt{6n-1}}{\sqrt{2n(6n-1)}}.$$

Protože číslo $0+\imath$ je jednonásobným kořenem charakteristického polynomu, očekáváme partikulární řešení ve tvaru $y = at\cos t + bt\sin t$, kde a, b jsou polynomy nultého stupně (konstanty). Toto řešení (ansatz) dosadíme do původní rovnice, čímž zjistíme podmínku pro a, b

$$(-2a - 2b)\cos t + (2a - 2b)\sin t = \sin t.$$

Vidíme, že členy obsahující t v první mocnině se vyrušily, což, jak jsme objevili v předchozím cvičení, souvisí s násobností kořene $0 + \imath$. Vzhledem k lineární nezávislosti[20] funkcí sinus a kosinus musí platit

$$-2a - 2b = 0,\ 2a - 2b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}.$$

Jedním partikulárním řešením je tedy $t/4.(\cos t - \sin t)$ a obecné řešení je

$$y = c_1e^t + c_2\sin t + c_3\cos t + \frac{t}{4}(\cos t - \sin t).$$

4.6 Eulerovy rovnice

Definice 18:
Rovnice $\mathrm{L}y = \sum_{i=0}^{n} a_it^iy^{(i)} = 0$, kde $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, se nazývá Eulerova rovnice.

Protože koeficient a_nt^n je nulový pro $t = 0$, budeme rovnici řešit zvlášť na intervalu $t \in (-\infty; 0)$ a zvlášť na intervalu $t \in (0; \infty)$. Nejprve se omezme na interval $t \in (0; \infty)$. K řešení rovnice lze přistoupit dvěma způsoby: hledat řešení v jistém speciálním tvaru nebo se pokusit rovnici převést substitucí na lineární rovnici s konstatntními koeficienty.

- Hledejme řešení ve tvaru $y(t) = t^\lambda$. Potom přejde původní rovnice do tvaru:

  $$\mathrm{L}(t^\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_it^i \prod_{j=0}^{i-1}(\lambda - j)t^{\lambda-i} = \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \prod_{j=0}^{i-1}(\lambda - j)\right)t^\lambda$$

  Úloha se tedy redukuje na nalezení kořenů rovnice n-tého stupně:

  $$\sum_{i=0}^{n}\left(a_i \prod_{j=0}^{i-1}(\lambda - j)\right) = 0$$

  Pokud λ_0 řeší tuto rovnici, potom t^{λ_0} řeší rovnici $Ly = 0$.

- Pokusme se rovnici vyřešit substitucí $\xi = \ln t$; rovnici stále řešíme pro $t \in (0; \infty)$. Označme $z(\xi) = z(\ln t) = y(t)$. Budu vyjadřovat $y^i(t)$ pomocí $z(\xi)$:

  $$y(t) = z(\xi)$$

  $$y'(t) = (z(lnt))' = (z(\xi(t)))' == z'(\ln t)\xi'(t) = z'(\xi)\frac{1}{t}$$

  Použita věta o derivaci složené funkce.

  $$y''(t) = z''(\xi)\frac{1}{t^2} + z'(\xi)\frac{1}{-t^2} = \frac{1}{t^2}\left(z''(\xi) - z'(\xi)\right)$$

  $$y^{(i)}(t) = \frac{1}{t^i}\sum_{j=1}^{i}\gamma_{i,j}z^{(j)}(\xi)$$

[20] Kdo není spokojen s tímto vysvětlením, nechť do rovnice dosadí $t = 0$ a $t = \pi/2$.

7 Obyčejné diferenciální rovnice

§1. Něco o funkcích více proměnných

Na úvod je třeba zopakovat několik pojmů z lineární algebry.

Definice 10: Skalární součin, norma, okolí bodu
Nechť $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ nazveme skalárním součinem x, y reálné číslo $\langle x, y\rangle \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i$ a normou x nezáporné číslo $||x|| \equiv \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Okolím bodu $a \in \mathbb{R}^n$ o poloměru $R > 0$ rozumíme množinu $\mathrm{U}_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x - a|| < R\}$.

Poznámka: Sčítání dvou prvků v $\mathbb{R}^n$ a násobení jednoho prvku reálným číslem provádíme samozřejmě po složkách.

Poznámka: V algebře jsou definice skalárního součinu a normy podstatně obecnější. Pro naše potřeby budou zatím postačovat tyto speciální definice.

Definice 11: Spojitost, množiny v $\mathbb{R}^n$
Nechť f je funkce na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $a \in \Omega$. Řekneme, že f je spojitá v bodě a, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a) : f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(f(a))$.
Řekneme, že f je spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pokud je spojitá v každém bodě Ω.
Množinu $I \subset \mathbb{R}^n$ nazveme interval, pokud $I = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$.
Řekneme, že množina Ω je otevřená, pokud $\forall a \in \Omega \exists \mathrm{U}(a) : \mathrm{U}(a) \subset \Omega$.

Poznámka (vysvětlující): Příkladem otevřené množiny je interval nebo v $\mathbb{R}^2$ „souvislá“ plocha *bez* okraje (například $\{x, ||x|| < 1\}$). Množina, která není uzavřená, může být například tato plocha i s okrajem ($\{x, ||x|| \le 1\}$) — pokud u této plochy volíme bod a na okraji, každé jeho okolí z plochy „vyčuhuje“. Zkuste si nakreslit obrázek.
Spojitost lze samozřejmě definovat i na uzavřených množinách — viz například úvodní kapitola o limitách. V krajních bodech se pak definuje jednostranná spojitost atd. Nyní se budeme zabývat pouze spojitostí na otevřených množinách.
Okolí bodu $\mathbb{R}^2$ je kružnice, v $\mathbb{R}^3$ koule atd. Interval je potom obdélník (kvádr) obsahující daný bod. Norma v $\mathbb{R}^n$ odpovídá délce (vzdálenosti bodu x od počátku $(0,\ldots,0)$).
Jednoduchým příkladem spojitých funkcí více proměnných jsou polynomy. Dále platí podobné věty jako pro spojité funkce jedné reálné proměnné — součet, součin i podíl (pokud nedělíme někde nulou) spojitých funkcí jsou spojité funkce.

§2. Základní věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic

Definice 12: Obyčejná diferenciální rovnice
Nechť $f(t, z_0, ..., z_{n-1})$ je reálná funkce na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Pak rovnici

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{9}$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu v Ω pro neznámou funkci $y = y(t)$. Řekneme, že funkce $y(t)$ na $I \subset \mathbb{R}$ je v Ω řešením rovnice (9) na intervalu I, pokud existují derivace $y^{(k)}, k \in \{1, ..., n\}$ na I a platí zároveň

$$\forall t \in I : (t, y(t), ..., y^{(n-1)}(t)) \in \Omega,$$
$$\forall t \in I : f(t, y(t), ...y^{(n-1)}(t)) = y^{(n)}(t).$$

Poznámka: Obyčejné diferenciální rovnice proto, že se v nich vyskytují „obyčejné“ derivace, tedy nikoliv

Tedy pokud λ je k-násobným kořenem P, pak nula je k-násobným kořenem Q a tím pádem $0 = \mathrm{M}(t^j) = \mathrm{L}(t^j e^{\lambda t})$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}, j < k$.

Lemma : Nechť $m \in \mathbb{C}$ je nenulové a $P(t)$ je nenulový polynom nad tělesem komplexních čísel. Pak existuje nenulový polynom $Q(t)$ nad tělesem komplexních čísel takový, že platí: $(P.e^{mt})' = Q.e^{mt}$, přičemž stupně polynomů P a Q jsou stejné.

Důkaz: je triviální, a proto přenechán čtenáři.

Lemma : Nechť $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ jsou vesměs různá. Nechť $P_1, ..., P_n$ jsou polynomy nad $\mathbb{C}$. Nechť je na nějakém intervalu I je $\sum\limits_{j=1}^{n} P_i.e^{x_j t} = 0, \forall t \in I$. Pak pro každé $i = 1, ..., n$ platí $P_i \equiv 0$.

Důkaz: Provedeme indukcí.

1. Pro $n = 1$ platí tvrzení triviálně, neboť $\forall x \in \mathbb{C} : e^x \neq 0$.
2. Předpokládejme platnost pro $n - 1$. Jednoduchou úpravou zjistíme, že chceme dokázat
$$P_n = -\sum_{j=1}^{n-1} P_j.e^{x_j - x_n}.$$
Zderivujme tuto rovnost $(k+1)$- krát, kde k je stupeň polynomu P_n. Protože $x_j \neq x_n$, dostáváme podle předchozího lemmatu
$$0 \equiv P_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} Q_j.e^{(x_j - x_n).t},$$
přičemž buď $st(Q_j) = st(P_j)$, anebo $Q_j \equiv 0$, právě když $P_j \equiv 0$. Podle indukčního předpokladu je proto $Q_j \equiv 0$ pro $j = 1, ..., n-1$, a tedy i $P_n \equiv 0$ na I, c.b.d.

Nyní máme již vše připraveno k tomu, abychom mohli vyslovit větu, která je pro naše účely, totiž pro hledání jádra daného lineárního diferenciálního operátoru s konstantními koeficienty, větou základní.

Věta 53: O řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty
Nechť $\lambda_1, ..., \lambda_k$ jsou všechny kořeny charakteristického polynomu $P(\lambda)$ a $\nu_1, ..., \nu_k$ po řadě příslušné jejich násobnosti. Pak množina funkcí

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t}, ..., t^{\nu_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, ..., t^{\nu_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ \ldots \\ e^{\lambda_k t}, ..., t^{\nu_k - 1} e^{\lambda_k t} \end{gathered} \tag{24}$$

je fundamentální systém řešení rovnice $\mathrm{L}y = 0$.

Důkaz: Tyto funkce jsou řešeními, jak plyne z předešlé věty. Fakt, že jsou lineárně nezávislé plyne z předchozího lemmatu (pokud sestrojíme lineární kombinaci všech shora vypsaných funkcí, můžeme všechny členy obsahující $e^{\lambda_i t}$ sečíst, čímž dostaneme jediný člen $P(t)e^{\lambda_i t}$; pak již budou všechny sčítance mít v exponentech různá čísla λ_i). To, že generují všechna řešení je zřejmé, když zjistíme, že jejich jejich počet je roven součtu všech násobností, tj. stupni charakteristického polynomu, a tedy i řádu diferenciálního operátoru L.

Poznámka: Věta (53) poskytuje návod, jak vypočítat bázi Ker(L). Budou-li však koeficienty L reálné, věta (53) nemusí ještě zajistit, aby i řešení byla reálná. Proto uveďme následující jednoduché, i když trochu neobratně formulované lemma.

Lemma o reálných řešeních pro operátory s reálnými koeficienty:

Nechť L je lineární diferenciální operátor s konstantními reálnými koeficienty řádu n. Nechť reálné kořeny

To, že je existence vlastních derivací na celém Ω postačující pro splnění (10) plyne například z Lagrangeovy věty o střední hodnotě:

$$\forall x, y, x \neq y; (t,x), (t,y) \in \Omega : \exists \xi \in (x,y); \frac{f(t,x) - f(t,y)}{x - y} = f'(\xi).$$

Podobně bychom snadno ukázali, že pokud existuje spojitá derivace f v a, je Lipschitzova podmínka splněna lokálně.
V případě funkce více proměnných ($n > 1$) potom podmínka zajišťuje, aby byly vlastní derivace ve všech směrech — tedy nejen parciální derivace podle jednotlivých proměnných. Pro daný konstantní čas t můžeme znázornit $f(x,y)$ plochou. Zkoumaným bodem a pak vedeme roviny rovnoběžné s osou z, čímž dostáváme řezy plochy $f(x,y)$. U všech těchto řezů (tj. dvourozměrných grafů) požadujeme, aby na malém okolí byly směrnice těchto grafů omezené.
Pokud ovšem jsou všechny parciální derivace f spojité na celém Ω, je Lipschitzova podmínka splněna též.

§3. Rovnice prvního řádu

3.1 $y' = f(t)$

Pokud je $f(t)$ spojitá na $I \subset \mathbb{R}$ a položíme-li $\Omega = I \times \mathbb{R}$, máme obzvlášť jednoduchý úkol. Řešením je zřejmě $y(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + y_0$ při počáteční podmínce $y(t_0) = y_0$ (integrál jistě existuje). Řešení (y, I) je zřejmě maximální a jediné (dokázali jsme jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu), což odpovídá skutečnosti, že $f(t)$ je konstanta vůči y, a f je tudíž zřejmě lipschitzovská. 3.2 $y' = g(y)$

Formálně lze tyto rovnice řešit zapsáním derivace pomocí diferenciálů:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(y) \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \Rightarrow \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}.$$

Takto získáme vyjádření $t = G(y) + c$. Pokud existuje inverzní funkce ke G, bude řešením $y = G^{-1}(t-c)$. Musíme si ovšem uvědomit, že kromě toho, že používáme symboly s nejasným významem ($f(y)\,\mathrm{d}y$) bez znamení integrálu, také během úprav dělíme $g(y)$, tedy bychom měli učinit předpoklad, že $g(y) \neq 0$. Zkusme si tuto metodu ujasnit:
Příklad: Řešme

$$y' = y^{2/3}.$$

Za předpokladu, že $y \neq 0$, nyní provedeme poněkud „legálnější úpravu“, než jsme naznačili v předchozím odstavci:

$$\frac{y'}{y^{2/3}} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y^{2/3}}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t \Rightarrow 3y^{1/3} + c = t \Rightarrow y = \frac{1}{27}(t-c)^3. \tag{11}$$

Integrál jsme substitucí $x = y(t)$, $\mathrm{d}x = y'(t)\,\mathrm{d}t$ převedli právě na hledání primitivní funkce k $1/g(x)$.
Dále si uvědomíme, že $y(t) \equiv 0$ je rovněž řešení. Řešení procházející bodem $(t_0, 0)$ tedy budou alespoň dvě: $y(t) = 0$ a $y(t) = 1/27(t-t_0)^3$. Zkoumejme, jestli není možné tato dvě řešení na sebe napojit, a vytvořit tak řešení nové. Například tak, že pro $t \leq t_0$ by $y(t) = 0$ a pro $t > t_0$ $y(t) = 1/27(t-t_0)^3$. Ve všech bodech t kromě t_0 by tento systém jistě byl řešením naší rovnice. Zkoumejme tedy, zda je rovnice splněna i v bodě t_0. Mělo by být $y'(t_0) = 0$. Použijeme již dříve dokázanou větu tvrdící, že pro funkci např. zprava spojitou v a je derivace v a zprava rovna limitě zprava oboustranných derivací v x pro $x \to a$. Snadno tedy zjistíme, že kubická funkce má v t_0 derivaci zprava nulovou a stejně tak je nulová i derivace $y = 0$ zleva. V bodě t_0 pak ale tím pádem existuje oboustranná derivace a je rovna nule, což splňuje naši rovnici.
Každým bodem $(t_0, 0)$ ovšem potom prochází nekonečně mnoho řešení zadaných předpisy

$$y(t) = \frac{1}{27}(t-a)^3 \text{ pro } t < a, y(t) = 0 \text{ pro } a \leq t \leq b, y(t) = \frac{1}{27}(t-b)^3 \text{ pro } b < t$$

konstanty, ale funkce.

Cvičení: Pokusme se najít přímo vzoreček pro výpočet c_i. Z (23) je podle Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1(t)' & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(t)^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}(t)^{(n-2} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n(t)^{(n-2)} \\ y_1(t)^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}(t)^{(n-1)} & \frac{f(t)}{a_n(t)} & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n(t)^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Vidíme, že výraz ve jmenovateli, wronskián $W(t)$ funkcí $y_1, \dots, y_n$ je nenulový, neboť $y_1, \dots, y_n$ jsou fundamentální systém řešení. Tím také potvrzujeme výrok z minulé poznámky, že c_i jsou určena jednoznačně (rovnice (23) jsou nezávislé). Dále zřejmě platí

$$c_i(t) = \int_{t_0}^{t} c_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

kde t_0 je libovolný čas z intervalu, na kterém řešíme rovnici. Nyní se pokusíme upravit výraz pro y za využití multilinearity determinantu a pravidel pro počítání s integrály:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \frac{f(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{a_(\tau) W(\tau)} \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_{i-1}(\tau) & 0 & y_{i+1}(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_{i-1}'(\tau) & 0 & y_{i+1}'(\tau) & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}(\tau)^{(n-2} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(\tau) & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \\ y_1(\tau)^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}(\tau)^{(n-1)} & 1 & y_{i+1}^{(n-1)}(\tau) & \dots & y_n(\tau)^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{a_(\tau) W(\tau)} \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}.$$

Rozeberme ještě poslední krok: každý z n determinantů v sumě jsme nejprve rozvinuli podle i-tého sloupce. V sumě se tím pádem objevily výrazy odpovídající rozvoji posledně uvedeného determinantu podle posledního řádku:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} y_i(t) \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_{i-1}(\tau) & y_{i+1}(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_{i-1}'(\tau) & y_{i+1}'(\tau) & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}(\tau)^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)}(\tau) & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ y_1(\tau)' & \dots & y_n'(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(\tau)^{(n-2)} & \dots & y_n(\tau)^{(n-2)} \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}.$$

4.4 Rovnice s konstantními koeficienty

Poznámka: Zkoumejme nyní lineární diferenciální operátory s konstantními koeficienty, čímž myslíme přesněji: Buďte $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$, pak lineárním diferenciálním operátorem s konstantními koeficienty n-tého

nebo stále záporná) — v každém případě je však $G(y)$ monotónní, tedy prostá, pročež k ní jistě existuje inverzní funkce na J. Funkce $G^{-1}(t-c)$ pak zřejmě zobrazuje interval I na J.
Tato řešení jsou také maximální, neboť v krajních bodech I existují jednostranné limity $G^{-1}(t-c)$ (funkce G je monotónní na J, tedy i k ní inverzní funkce je monotónní na I, z čehož plyne existence limity). Tyto limity ale do otevřeného intervalu J nepatří[11]. To znamená, že libovolné spojité prodloužení našeho řešení by již nebylo v Ω — nespojité prodloužení by ale nebylo diferencovatelné, tedy naše řešení je maximální.
Předpokládejme nakonec, že by existovalo ještě jiné řešení, označme jej $y(t) = \eta(t)$. Víme, že na $I_\eta = \{t \in \mathbb{R}; \eta(t) \in J\}$ platí $\eta'(t) = g(\eta(t)) > 0$ (nebo < 0), tedy stejně jako v předminulém odstavci ukážeme, že $\eta(t)$ je na I_η monotónní, a tedy k ní existuje inverzní funkce $\xi = \eta^{-1}$. Zkusme derivovat tuto funkci:

$$\xi'(y) = \frac{1}{\eta'(\xi(y))} = \frac{1}{g(\eta(\xi(y)) = \frac{1}{g(y)}}.$$

Tedy $\xi(y)$ je primitivní funkcí k $1/g(y)$, jinými slovy existuje konstanta c taková, že $\xi(y) = G(y) + c, \forall y \in J$. Pokud v této rovnosti dosadíme za y například $\eta(t)$[12], dostáváme

$$\xi(\eta(t)) = G(\eta(t)) + c \Rightarrow t - c = G(\eta(t)) \Rightarrow \eta(t) = G^{-1}(t-c).$$

Vidíme tedy, že $\eta(t)$ má tvar jednoho z řešení, které jsme již popsali.

Poznámka: Zkoumejme ještě, co se děje s řešeními rovnice

$$y' = g(y) \tag{12}$$

bodech, kde $g(y) = 0$. Nechť je tedy $g(y)$ spojitá na intervalu $J = (b, c)$ a $g(y) \neq 0$ na $J \setminus \{a\}$, $g(a) = 0$. Označme $J_- = (b, a), J_+ = (a, c)$ a dále G_- (resp. G_+) primitivní funkce k $1/g(y)$ na J_- (resp. J_+). Z předchozí věty víme, že k těmto primitivním funkcím existují funkce inverzní a G_-^{-1} (resp. G_+^{-1}) budou řešeními rovnice (12) v $\mathbb{R} \times J_-$ (resp. $\mathbb{R} \times J_+$) na příslušném intervalu I_- (resp. I_+). Označme

$$\alpha_\pm = \lim_{y \to a^\pm} G_\pm(y) + c;$$

$\alpha_- = (\alpha_+)$ tedy říká, v jakém čase se řešení $y(t) = G^{-1}(t-c)$ na I_- (I_+) dotkne přímky $y = a$ (samozřejmě tento čas již do $I_\pm$ nepatří, neboť se jedná o otevřený interval). V závislosti na $\alpha_\pm$ pak mohou nastat tyto situace.

1. obě $\alpha_\pm$ jsou nevlastní[13],
2. jedno z čísel $\alpha_\pm$ je reálné, druhé nevlastní a
3. čísla $\alpha_\pm$ jsou obě reálná.

Pokud je např. α_+ reálné, znamená to, že libovolné řešení na I_+ bude „končit“ na ose $y = a$ v čase α_+ (jeho konkrétní hodnota už samozřejmě bude záviset na c). Naopak, pokud je α_+ nevlastní, žádné řešení na I_+ se osy $y = a$ nedotkne, řešení budou „ubíhat“ do nekonečna a k ose $y = a$ se budou pouze blížit (např. exponenciálně).
Bude možno řešení na obou intervalech $I_\pm$ na sebe napojit? Vidíme, že kdykoliv je některé z čísel $\alpha_\pm$ nevlastní, možné to rozhodně nebude. Triviálním řešením ovšem bude vždy funkce $y \equiv a$, a pokud bude alespoň jedno z čísel $\alpha_\pm$ reálné, bylo by snad možné napojit řešení na příslušném intervalu na toto triviální řešení (stejně jako jsme to udělali v posledním příkladu: např. $y(t) = G_+^{-1}(t-c)$ pro $t > \alpha_+$ a $y(t) = a$ pro $t \leq \alpha_+$[14]). V případě 3. bychom mohli uvažovat o napojení obou řešení v I_+ i I_-, pokud $\alpha_+ = \alpha_-$ (obě tato čísla závisejí na konstantách c, které nejsou totožné v I_+ a I_- a odrážejí počáteční podmínky, tj. určují, kterým bodem v $\mathbb{R} \times J_+$ (resp. $\mathbb{R} \times J_-$) má příslušné řešení procházet). Podmínkou však je, aby

[11] Kdyby nějaká taková hodnota y_x do J patřila, pak by $G(y_x)$ muselo patřit do I, čímž by I nemohl být otevřený.
[12] Rovnost platí pro každé y z J a $\eta(t)$ je řešením naší rovnice na $\mathbb{R} \times J$, tedy $\forall t \in \mathbb{R} : \eta(t) \in J$.
[13] Skutečnost, že $\alpha_\pm$ je vlastní (nevlastní) nemůže změnit žádná reálná konstanta c.
[14] Smysl nerovností zde samozřejmě závisí na tom, zda G^{-1} je rostoucí či klesající — zde by například byla rostoucí.

$x \in \mathbb{R}$, resp. nenulové pro všechna $x \in \mathbb{C}$.
Druhá část věty (48) se zabývala vztahem mezi wronskiánem a lineární závislostí řešení a obsahovala celkem čtyři implikace. Dvě z nich plynou přímo z věty (47) (lineární závislost implikuje $W(t) \equiv 0$). Opačné implikace tvrdily, že pokud je wronskián nulový, jsou řešení lineárně závislá. Z toho lze usoudit[18], že pro každé t jsou řádky wronskiánu lineárně závislé, tj. jedna jejich netriviální lineární kombinace je nulová, nevíme však, zda tato kombinace bude pro všechna $t \in I$ stejná — pokud by skutečně byla, mohli bychom s jejími koeficienty skombinovat funkce y_i a museli bychom dostat $y \equiv 0$. Určitě platí

$$\forall t \in I : W(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in I \exists c_1, ..., c_n; \forall k = 0, 1, ..., n-1 :\equiv \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(t) = 0.$$

Vyberme si tedy jedno libovolné $t_0 \in I$, najdeme koeficienty $c_1, ..., c_n$ a pro tyto koeficienty označíme $y(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$. Pro funkce $y(t)$ pak ovšem platí $y(t_0) = y'(t_0) = ... = y^{(n-1)}(t_0) = 0$. Zároveň je však lineární kombinací řešení $y_1, ..., y_n$, což podle důsledku věty (45) znamená, že $\forall t \in I : y(t) = 0$. Tím pádem jsou řešení $y_1, ..., y_n$ lineárně závislá.

Na závěr zkusme řešit jeden zajímavý speciální případ homogenní lineární rovnice:
Příklad: Nechť $u(t)$ je jedním z řešení rovnice

$$y'' + p(t)y' + q(t) = 0. \tag{21}$$

Najděme druhé lineárně nezávislé řešení této rovnice.
V o trochu méně obecném případě vyslovíme pro nalezení druhého řešení drobné lemma:

Lemma : Nechť $u(t)$ je řešením (21) na I a nechť $u(t) \neq 0$ na I. Pokud $y(t)$ je řešením rovnice

$$uy' - u'y = e^{-\int_{t_0}^{t} p(\xi)\, \mathrm{d}\xi}, \tag{22}$$

pak $\{u, y\}$ je fundamentální systém řešení (21).

Důkaz: Okamžitě vidíme, že y a u jsou lineárně nezávislé funkce, neboť jejich wronskián je levá strana rovnice (22), která má být rovna nenulovému číslu e^x. Stačí už jen zjistit, zda y je skutečně řešením (21). Rádi bychom jako důsledek platnosti rovnice (22) získali rovnici (21) s dosazenou funkcí y. Máme-li v (22) pouze první derivace, napadne nás zderivovat ji:

$$u'y' + uy'' - u''y - u'y' = -e^{-\int_{t_0}^{t} p(\xi)\, \mathrm{d}\xi} p(t).$$

Využijeme že u je řešením (21), dosadíme za u'' a integrál na pravé straně odstraníme pomocí (22):

$$uy'' - y(-pu' - qu) = -(uy' - u'y)p \Rightarrow u(y'' + py' + q) = 0.$$

Pokud je u nenulová na I, znamená to, že y je skutečně řešením (21).

Nyní se ještě podívejme, jak z u pohodlně spočítat y. Všimneme si, že levá strana rovnice (22) nápadně připomíná derivaci podílu funkcí y a u, tedy že

$$\left(\frac{y}{u}\right)' = \frac{uy' - u'y}{u^2} = \frac{1}{u^2} e^{-\int_{t_0}^{t} p(\xi)\, \mathrm{d}\xi}.$$

Tím je však už návod hotov:

$$y(t) = u(t) \int \frac{1}{u^2(t)} e^{-\int_{t_0}^{t} p(\xi)\, \mathrm{d}\xi}\, \mathrm{d}t.$$

4.3 Nehomogenní rovnice, variace konstant

Poznámka: Jak je známo z lineární algebry, pro každé lineární zobrazení $\mathrm{L} : V \to V$ na lineárním

[18] Viz diskuzi za větou (47).

procházejících daným bodem z Ω má rovnice (12) — opět viz poslední příklad.

Příklad: nepovinně. Ukážeme, že pokud je pro diferencovatelnou funkci $g(y)$ splněna Lipschitzova podmínka, jsou $\alpha_\pm$ nevlastní. Tím zajistíme, že řešení na I_+ a I_- nebude možno propojovat navzájem ani s $y = a$ a každým bodem bude tedy procházet jediné řešení (na druhou stranu ale vidíme, že se nejedná o podmínku nutnou — pokud bude nevlastní např. jen číslo α_+, budou stále řešení procházející daným bodem v $\mathbb{R} \times J_+$ nebo $\mathbb{R} \times J_-$ jednoznačná, problémy nastanou pouze s body (t, a); stejná situace nastane, pokud budou sice obě čísla $\alpha_\pm$ reálná, ale $g(y)$ bude mít na $J_\pm$ různá znaménka, např. $y^{1/3}$).
Z Lipschitzovy podmínky pro $g(y)$ plyne, že $g'(y)$ *není* nevlastní, tedy *je* omezená na určitém okolí $\mathrm{U}(a)$. Nechť je tedy např. $g(y)$ klesající na I_+. Je-li derivace $g'(y)$ omezena na intervalu $J' = (a - \delta, a)$ (záporným) číslem β ($g'(y) > \beta$), musí zřejmě na J' platit $g(y) \leq \beta y + k$, kde k určíme tak, aby $0 = g(a) = \beta a + k$. Věta (??) ovšem říká, že

$$\frac{1}{g(y)} \geq \frac{1}{\beta y + k} \Rightarrow \int_{a-\delta}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \geq \int_{a-\delta}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{\beta y + k} = \left[\frac{1}{\beta} \ln|\beta y + k|\right]_{a-\delta}^{x}.$$

Poslední logaritmus však pro $x \to a^-$ diverguje (hodnota integrálu jde k $+\infty$), tedy i primitivní funkce k $1/g(y)$ musí jít k $+\infty$ při $y \to a^-$.

Na závěr vyřešme dvě jednoduché diferenciální rovnice:

Příklad: $y' = y$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Již z dřívějších dob víme, že řešením je $y = ke^t$. K tomuto výsledku dospějeme i snadno naším postupem:

$$\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\ \mathrm{d}t = \int\ \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|y| = t + c \Rightarrow y = ke^t, |k| = e^c.$$

Řešení na intervalech $(-\infty, 0)$ ($k < 0$) a $(0, \infty)$ ($k > 0$) na sebe zřejmě nenapojíme (exponenciály se nikdy nedotknou $y = 0$, což je také triviální řešení ($k = 0$)). Budeme tedy očekávat, že řešení procházející daným bodem je jednoznačné (obě $\alpha_\pm$ jsou $+\infty$) — skutečně, Lipschitzova podmínka je pro $g(y) = y$ splněna (znovu se však upamatujme, že tato podmínka není nutná).

Příklad: Najděme funkci $y(t)$ splňující $y' = y^2$, $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \overset{\int \mathrm{d}t}{\Longrightarrow} -\frac{1}{y} = t - c \Rightarrow y = -\frac{1}{t - c}.$$

Řešením jsou tedy rovnoosé hyperboly s asymptotami $y = 0$ a $t = c$, popřípadě funkce $y \equiv 0$. Řešení v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$ opět nebude možné propojit ($y(t)$ se však k 0 tentokrát nebude blížit exponenciálně), také Lipschitzova podmínka je pro $g(y) = y^2$ splněna, každým bodem (t_0, y_0) tedy prochází právě jedno řešení. Musíme si ale uvědomit, že nedokážeme předem říci, na jak velkém intervalu I to bude řešení: I totiž bude ohraničen bodem c. Čím bude větší y_0, tím bude t_0 blíže k c (kreslete si), a I bude menší — pro libovolné konečné y_0 však bude $t_0 \neq c$, a tedy bude existovat okolí (t_0, y_0), na němž bude existovat řešení naší rovnice.

3.3 Separace proměnných, $y'(t) = f(t).g(y)$

Postup bude podobný jako v předchozím článku. Bereme $\Omega = \mathbb{R} \times J$ a za předpokladu $g(y) \neq 0$ zapíšeme derivaci pomocí diferenciálů a provádíme formální úpravy:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t).g(y) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\ \mathrm{d}t \overset{\int \mathrm{d}t}{\Longrightarrow} G(y) = F(t) \Rightarrow y(t) = G^{-1}(F(t)),$$

je-li $G(y)$, resp. $F(t)$ některá primitivní funkce k $1/g(y)$, resp. $f(t)$. Správnější zápis by pak vyžadoval integrovat substituční metodou

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) \Rightarrow \int \frac{y'(t)\ \mathrm{d}t}{g(y(t))} = \int f(t)\ \mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}\phi}{g(\phi)} = \int f(t)\ \mathrm{d}t \Rightarrow G(y) = F(t) \text{ atd.}$$

1. $\forall t \in I : W[y_1, ..., y_n](t) = 0$,
2. $\forall t \in I : W[y_1, ..., y_n](t) \neq 0$.

Navíc 1. možnost platí, právě když jsou řešení $y_1, ..., y_n$ lineárně závislá, 2. možnost, právě když jsou lineárně nezávislá.
K důkazu této věty vyslovíme ještě jedno tvrzení

Věta 49: Výpočet wronskiánu na I z jeho hodnoty v jednom bodě
Jsou-li $y_1, ..., y_n$ řešení $\mathrm{L}y = 0$ na I a $W(t) = W[y_1, ..., y_n](t)$, pak

$$W'(t) = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} W(t), \forall t \in I, \tag{18}$$

a tedy pro libovolná $t, t_0 \in I$ platí

$$W(t) = W(t_0).e^{\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(\xi)}{a_n(\xi)}\ \mathrm{d}\xi}. \tag{19}$$

Lemma Derivace determinantu: Nechť $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ je matice funkcí diferencovatelných na I. Potom platí

$$[\det(a_{ij}(t))]' = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)1}(t) & \dots & a_{(j-1)n}(t) \\ a'_{j1}(t) & \dots & a'_{jn}(t) \\ a_{(j+1)1}(t) & \dots & a_{(j+1)n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n-1)}(t) & \dots & a_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{j=1}^{n} \det(A^{(j)}). \tag{20}$$

Poznámka: Determinant (a_{ij}) je součet určitých součinů, přičemž každý součin obsahuje n činitelů. V derivaci determinantu tedy na každý takový součinu připadne n členů, v nichž bude vždy jeden činitel derivován a ostatní budou ponecháni beze změny. Dále si uvědomíme, že v každém součinu se vyskytuje právě jeden zástupce z každé řádky matice (a_{ij}). Pokud tedy ve zderivovaném determinantu z každé n-tice vzniklé z derivace součinu vybereme vždy člen se zderivovaným prvkem z první řádky, získáme determinant matice $A^{(1)}$, tedy matice shodné s (a_{ij}) až na to, že v prvním řádku jsou místo funkcí a_{1j} jejich derivace. Podobně vybereme členy se zderivovaným k-tým prvkem a získáme $\det(A^{(k)})$.
Pokud jste tuto názornou úvahu nepochopili, nezoufejte, nyní provedeme sice méně názorný, avšak precizní

Důkaz lemmatu: Budeme postupovat indukcí podle rozměru matice n.
Pro $n = 1$ je rovnost (20) triviální, uvažujme tedy, že platí pro nějaké pevné n a pokusme se určit derivaci determinantu matice $(n+1) \times (n+1)$. Derivovaný determinant rozvineme podle prvního řádku:

$$(\det A)' = (\sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} \det(M_{1k}))' = \sum_{k=1}^{n+1} a'_{1k}(-1)^{1+k} \det(M_{1k}) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} (\det(M_{1k}))'.$$

Připomeňme, že $\det(M_{kl})$ značí minor (prvního stupně) odpovídající prvku a_{kl}, M_{kl} je matice vytvořená z (a_{ij}) vyškrtnutím k-tého řádku a l-tého sloupce. Druhá suma potom obsahuje derivace minorů — M_{1k} jsou ale již matice n-tého řádu, tedy můžeme využít indukční předpoklad a derivovat je podle (20):

$$(\det A)' = \sum_{k=1}^{n+1} a'_{1k}(-1)^{1+k} \det(M_{1k}) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} \sum_{l=1}^{n} \det(M_{1k}^{(l)}) =$$

$$= \det(A^{(1)}) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{1k}(-1)^{1+k} \sum_{l=1}^{n} \det(M_{1k}^{(l)}) = \det(A^{(1)}) + \sum_{l=2}^{n+1} \det(A^{(l)}) = \sum_{l=1}^{n+1} \det(A^{(l)}).$$

Definice 14: Lineární diferenciální rovnice
Nechť $a_0(t), ..., a_n(t), f(t)$ jsou funkce $\mathbb{R} \supset \mathrm{M} \mapsto \mathbb{C}$, $a_n(t) \not\equiv 0$ na M. Rovnici

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \tag{14}$$

nazveme lineární diferenciální rovnicí na $\Omega = \mathrm{M} \times \mathbb{C}^n$. Rovnice

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \tag{15}$$

se nazývá odpovídající homogenní rovnice k (14) (též rovnice bez pravé strany), $a_k(t)$ označujeme jako koeficienty této rovnice a $f(t)$ jako její pravou stranu.

Označení: Pro zkrácení zápisu obvykle výraz na levé straně lineární diferenciální rovnice označujeme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)}(t) \equiv \mathrm{L}y, \text{ tedy } \mathrm{L} \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}.$$

Rovnici (14) pak píšeme ve tvaru $\mathrm{L}y = f(t)$ a její homogenní rovnici $\mathrm{L}y = 0$.

Věta 45: Jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice
Nechť koeficienty $a_0(t), ..., a_n(t)$ a $f(t)$ v rovnici (14) jsou spojité na $I \subset \mathbb{R}$, $a_n(t) \not\equiv 0$ na I. Pak pro každé $t_0 \in I$ a každé $(y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ existuje právě jedno řešení (14), pro něž platí $y^{(k)}(t_0) = y_k, k \in \{0, ..., n-1\}$.

Tuto větu přijmeme bez důkazu.
Poznámka (triviální důsledek): Pokud jsou splněny podmínky této věty a funkce $y(t)$, která je řešením rovnice (14), splňuje pro některé $t_0 \in I$ podmínku $y^{(k)}(t_0) = 0, k \in \{0, ..., n-1\}$, pak je $y(t) = 0$ na I. Funkce $y(t) \equiv 0$ je totiž zřejmě řešení vyhovující okrajovým podmínkám $y^{(k)}(t_0) = 0$ a dle předchozí věty je toto řešení jednoznačné.

4.2 Homogenní rovnice

Označení: Řešení diferenciální rovnice k-tého řádu na intervalu I bývá vhodné hledat v množině

$$C^{(k)}(I) = \{\forall f : I \mapsto \mathbb{C}; \exists f^{(k)} \text{ na } I\}, \text{ resp. } C^{(k)}(I)_{\mathbb{R}} = \{\forall f : I \mapsto \mathbb{R}; \exists f^{(k)} \text{ na } I\}.$$

Poznámka: Tyto dvě množiny jsou vektorové prostory nekonečné dimenze na tělesem $\mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$ (uvědomte si proč, jak je definováno sčítání dvou funkcí a násobení prvkem z tělesa).

Poznámka: Nulovým prvkem v $\mathbb{C}^{(k)}(I)$ (resp. $\mathbb{C}^{(k)}_{\mathbb{R}}(I)$) je funkce $y = 0$ na I. Lineární nezávislost množiny funkcí $\{f_1, ..., f_n\} \subset \mathbb{C}^{(k)}(I)$ je pak samozřejmě definována takto

$$\{f_1, ..., f_n\} \text{ jsou lineárně nezávislé } \Leftrightarrow \forall \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{C} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0.$$

Není snad třeba připomínat, že uvedená suma se nazývá lineární kombinací prvků $f_1, ..., f_n$, bez ohledu na to, zda je výsledkem této sumy $y \equiv 0$[16], či jakákoliv jiná funkce.

Po tomto opakování se můžeme vrátit k lineárním diferenciálním rovnicím. Již v úvodní kapitole o limitách jsme si všimli, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty ($a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$) je vektorový prostor dimenze 2. Toto tvrzení nyní zobecníme a dokážeme:
Věta 46: Množina řešení homogenní lineární diferenciální rovnice
Množina všech řešení rovnice (15) n-tého řádu na intervalu I tvoří vektorový podprostor $C^{(n)}(I)$ nad $\mathbb{C}$ (resp. $C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$ nad $\mathbb{R}$) dimenze n.

[16] Pro pořádek $y \equiv 0$ značíme funkci $y(t) = 0, \forall t \in I$.

Důkaz: Množina řešení K tvoří vektorový podprostor $C^{(n)}(I)$ ($C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$): je zřejmé, že každý prvek z K leží zároveň v $C^{(n)}(I)$ ($C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$) (pročpak?). Dále musíme ukázat, že součet dvou prvků y_1, y_2 z K leží v K a že c-násobek libovolného prvku y z K leží v K. Snadno ovšem ukážeme

$$0 \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i(t)(y_1 + y_2)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)y_1^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} a_i(t)y_2^{(i)} = 0 + 0 = 0,$$

$$0 \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i(t)(cy)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} ca_i(t)y^{(i)} = c\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)} = c.0 = 0.$$

Dále chceme určit dimenzi K. Za tím účelem se pokusíme sestrojit bázi B prostoru K — počet prvků B pak bude samozřejmě roven dimenzi. Zkusme vzít třeba množinu řešení (15) $B = \{y_1, ..., y_n\} \subset C^{(n)}(I)$ ($C^{(n)}_{\mathbb{R}}(I)$), o nichž budeme pouze předpokládat, že v nějakém pevném bodě $t_0 \in I$ splňují

$$y_i^{(j-1)}(t_0) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, ..., n\}$$

Kroneckerův delta symbol je sice známý, připomeňme však pro jistotu, že $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$. Že taková množina řešení existuje, to nám zaručí věta ((45)) — zvolíme vždy bod $(0, .., 0, 1, 0, .., 0)$ a dle této věty tímto bodem prochází (právě) jedno řešení y_i.
O množině B nyní dokážeme, že je bází K, tedy že je lineárně nezávislá a zároveň „generuje všechno", tedy každý prvek z K lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků z B. Uvažujme tedy nějakou lineární kombinaci prvků z B rovnou $y \equiv 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t) \equiv 0. \tag{16}$$

Má-li být tato rovnost splněna na celém I, musí platit i pro $t = t_0$. Dosadíme-li tedy do ní, zjistíme, díky vhodné volbě funkcí y_i, musí být $\alpha_1.1 = 0$, tj. $\alpha_1 = 0$ ($y_i(t_0) = 0$ pro $i \in \{2, ..., n\}$). Pokud obecně (16) $(j-1)$-krát zderivujeme, dostaneme v bodě $t = t_0$

$$0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t)\right)^{(j-1)}_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{(j-1)}(t)_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.$$

Vidíme, že pro i libovolné $j \in \{2, ..., n\}$ tedy musí být $\alpha_j = 0$, pročež je tedy množina B lineárně nezávislá.
Nakonec musíme ještě dokázat, že každý prvek z K je lineární kombinací prvků B. Nechť proto je $y \in K$ řešením (15). Hodnoty jeho derivací v t_0 označme $d_j = y^{(j)}(t_0), j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Rádi bychom dokázali, že potom platí

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} d_j y_j(t), \forall t \in I, \text{ tj. } g(t) \equiv y(t) - \sum_{j=1}^{n} d_j y_j(t) \equiv 0.$$

O hodnotách funkcí $y, y_1, ..., y_n$ na I ovšem nevíme zhola nic kromě bodu t_0. Víme však, že $g(t_0) = 0$, a pokud funkci g k-krát zderivujeme ($k \in \{1, ..., n-1\}$), bude

$$g^{(k)}(t_0) = y^{(k)}(t_0) - \sum_{i=1}^{n} d_j y_j^k(t_0) = d_k - \sum_{j=1}^{n} d_j \delta kj = d_k - d_k = 0.$$

Podle důsledku věty (45) to ovšem znamená, že $g(t) = 0$ na I, a tedy funkce $y(t)$ je totožná s výšeuvedenou lineární kombinací prvků z B.
Množina B je tedy bází K, a proto má K dimenzi n.

Definice 15: Fundamentální systém řešení
Buďte $y_1(t), ..., y_n(t)$ lineárně nezávislá řešení rovnice n-tého řádu $\mathrm{L}y = 0$ na J. Pak tuto n-tici nazveme