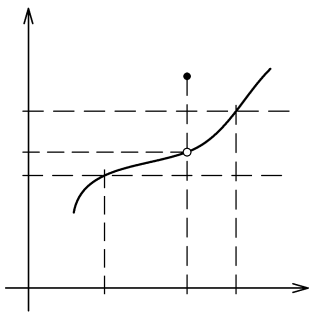
Matematická analýza I.

Vladimír Souček a kol.



Milí čtenáři,

stojíte na prahu předmětu, který bude vaším téměř každodenním chlebem po následující čtyři semestry. Pokud vytrváte, získáte především přehled o *základním* aparátu, který je zapotřebí pro „pěstování fyziky". Stejně jako již po mnoho let, které jste strávili ve vzdělávací mašinérii, se budete učit předně praktické postupy, nezbytné pro kvantitativní popis jevů, například fyzikálních. Zároveň se ale před vámi odhalí ještě druhá tvář matematiky jako logické konstrukce, v níž výpočetní pravidla „nepadají z nebe". Umět se po této konstrukci pohybovat přináší hned dvě výhody: ukáže se, že mnoho věcí lze odvodit, a není tudíž nutné si je pamatovat, a za druhé získáte zručnost v logickém uvažování. A to vám, doufáme, umožní činit správné závěry nejen v matematické analýze.

Držíme vám tedy palce a těšíme se na shledanou v druhém semestru.

Vladimír Souček, Jana Gřondilová, Daniel Kráĺ, Dalibor Šmíd
Svatopluk Krýsl, Karel Výborný, Petr Žemla

Značení

V textu budou používány následující symboly:

M = {...} množina zadaná výčtem prvků nebo charakteristickou vlastností svých prvků,

$\equiv$ identicky rovno (např. dvě funkce mají všude na dané množině stejné hodnoty),

$\stackrel{\mathrm{df}}{=}$ definitoricky rovno (při definici nového pojmu),

$\forall$ obecný kvantifikátor, tj. „všechna“, „pro všechna“, „pro každé“ ...,

$\exists$ existenční kvantifikátor, tj. „existuje“, „pro nějaké“ ...,

$\exists!$ existuje právě jedno,

A $\wedge$ B platí A a zároveň platí B, platí oba dva výroky A, B,

A $\vee$ B platí A nebo platí B, tedy platí alespoň jeden z výroků A, B,

A $\Rightarrow$ B, B $\Leftarrow$ A A implikuje B, z A plyne B, pokud platí A, pak platí B,

A $\Leftrightarrow$ B A je ekvivalentní s B; A platí právě tehdy, když platí B; A platí tehdy a jen tehdy, když platí B; platí-li A, platí B, neplatí-li A, neplatí B,

$\langle a,b\rangle, \langle a,b), (a,b\rangle, (a,b)$ omezené intervaly na množině reálných čísel: uzavřený $\{\forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$, polouzavřený (polootevřený) $\{\forall x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$, $\{\forall x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ a otevřený $\{\forall x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$,

$\langle a,\infty), (-\infty,a\rangle, (a,\infty), (-\infty,a)$ intervaly neomezené, z jedné strany uzavřené $\{\forall x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, $\{\forall x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$ a otevřené $\{\forall x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $\{\forall x \in \mathbb{R}, x < a\}$.

1 Funkce jedné reálné proměnné

§1. Základní pojmy: číselné množiny, zobrazení

Definice 1: Shora, zdola omezená množina, omezená množina
Nechť je na množině A definováno uspořádání $\leq$. Množinu $B \subseteq A$ nazveme *shora*, resp. *zdola omezenou*, právě když $(\exists a \in A)(\forall x \in B)(x \leq a)$, resp. $(a \leq x)$.
Množinu B nazveme omezenou, právě když je omezená shora i omezená zdola.

Poznámka: Příklady omezených a neomezených množin viz v úvodní poznámce o intervalech.

Definice 2: Supremum, infimum množiny
Buď $B \subseteq A$ a nechť je na A definováno uspořádání $\leq$. Prvek $\alpha \in A$ nazveme *supremem množiny* B, právě když $\big[(\forall x \in B)(x \leq \alpha)\big] \wedge \big[(\forall \beta \in A)\big((\beta < \alpha) \Rightarrow (\exists x \in B)(x > \beta)\big)\big]$.
Podobně číslo $\omega \in A$ nazveme *infimem množiny* B, právě když $\big[(\forall x \in B)(\omega \leq x)\big] \wedge \big[(\forall \chi \in A)\big((\omega < \chi) \Rightarrow (\exists x \in B)(x < \chi)\big)\big]$.

Definice 3: Reálná čísla
Nechť $\mathbb{R}$ je neprázdná množina s definovanými operacemi sčítáním $(+)$ a násobením $(.)$ a relací $\leq$. Množinu $\mathbb{R}$ nazveme množinou reálných čísel, právě když jsou splněny následující vlastnosti:

1. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\exists! \gamma \in \mathbb{R})(\gamma = \alpha + \beta)$
2. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\alpha + \beta = \beta + \alpha)$, tj. komutativita sčítání,
3. $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})\big(\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma\big)$, tj. asociativita sčítání,
4. $(\exists! n \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(n + x = x + n = x)$, tj. existence neutrálního prvku vůči sčítání, značíme $n \overset{\mathrm{df}}{=} 0$, n nazýváme též nulovým prvkem sčítání,
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{R})(a + x = x + a = 0)$, tj. existence prvku inverzního k x. Značíme $a \overset{\mathrm{df}}{=} -x$, $-x$ nazýváme též opačným prvkem k x,
6. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\exists! \gamma \in \mathbb{R})(\gamma = \alpha . \beta)$
7. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\alpha . \beta = \beta . \alpha)$, tj. komutativita násobení,
8. $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})\big(\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma\big)$, tj. asociativita násobení,
9. $(\exists! j \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(j.x = x.j = x)$, tj. existence neutrálního prvku vůči násobení, značíme $j \overset{\mathrm{df}}{=} 1$, 1 nazýváme též jednotkovým prvkem násobení,
10. $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists a \in \mathbb{R})(a.x = x.a = 1)$, tj. existence prvku inverzního k x, značíme $a \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$ nazýváme též převráceným prvkem k x,
11. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\big(a.(b + c) = a.b + a.c\big)$, tj. distributivita násobení vůči sčítání,
12. $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$: $(\alpha \leq \alpha)$;
    $(\alpha \leq \beta) \wedge (\beta \leq \alpha) \Rightarrow (\alpha = \beta)$;
    $(\alpha \leq \beta) \wedge (\beta \leq \gamma) \Rightarrow (\alpha \leq \gamma)$;
    pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nastane alespoň jedna z možností $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \alpha$, $\alpha = \beta$, tj. relace $\leq$ je neostré úplné uspořádání[1]
13. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\big((0 \leq \alpha) \wedge (0 \leq \beta) \Rightarrow (0 \leq \alpha.\beta)\big)$ a dále $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})\big((\alpha \leq \beta) \Rightarrow (\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$,
14. každá shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Prvky množiny $\mathbb{R}$ nazveme reálná čísla.

Poznámka (terminologická): Splňuje-li množina M s definovanou operací sčítáním vlastnosti 1–5, nazýváme strukturu $\langle M; + \rangle$ *komutativní (Abelovou) grupou.* Vlastnosti 1–10 lze tedy shrnout, že struktury $\langle \mathbb{R}; + \rangle$, $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}; . \rangle$ jsou komutativní grupy. Jsou-li na množině M splněny dokonce podmínky 1–11 (podmínka 11 svazuje obě operace), nazýváme strukturu $\langle \mathbb{R}; +, . \rangle$ komutativní těleso neboli pole.

[1] Poslední požadavek odpovídá souvislosti.

P o z n á m k a (shrnující definici reálných čísel): Podmínky 1–14 lze rozdělit do čtyř skupin: axiomy 1–11 zajišťují operace sčítání a násobení (tedy zaručují, že se tyto operace na $\mathbb{R}$ chovají tak, jak jsme zvyklí). Axiom 12 zaručuje, že pomocí relace $\leq$ můžeme reálná čísla uspořádat, tedy u každých dvou reálných čísel říci, které z nich je větší, případně že jsou si rovna. Axiom 13 vztahuje operace sčítání a násobení k relaci $\leq$ a společně s axiomem 12 zajišťuje že lze reálná čísla „seřadit od největšího k nejmenšímu", lépe řečeno umístit je na číselnou osu a prohlásit, že $a \leq b \Leftrightarrow$ „a je na číselné ose nalevo od b". Konečně axiom 14 mluví o hustotě reálných čísel, jak to osvětlí další poznámka.

P o z n á m k a: Všimněme si blíže axiomu 14: vynecháme-li jej, splní naši definici i např. množina všech racionálních čísel. Tento axiom nám tedy tyto dvě množiny umožní rozlišit. Je samozřejmě možné jej nahradit ekvivalentním axiomem (či systémem axiomů), např. Dedekindovým axiomem[2], nebo předpokladem platnosti Archimédova a Cantorova principu (Kopáčkova Matematika pro fyziky I., str.40).

P o z n á m k a navíc: Takto jsme množinu $\mathbb{R}$ popsali pomocí axiomů platících pro její prvky. K pojmu reálného čísla však lze dospět i jinak. Můžeme např. vycházet z přirozených čísel (ta je však nutno opět definovat axiomaticky, např. pomocí Peanových axiomů). Snadno definujeme čísla celá a racionální (viz níže). Reálná čísla pak můžeme definovat buďto pomocí řezů (provedeno v Jarníkově Diferenciálním počtu) nebo pomocí např. dekadického zápisu reálného čísla (tedy pomocí posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in$ $\in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ jeho cifer v dekadickém zápisu). Lze pak ukázat, že pro takto zavedená reálná čísla platí axiomy 1–14 (klíčové je samozřejmě ověření podmínky 14).

C v i č e n í: Navíc.

1. Dokažte jednoznačnost neutrálního prvku grupy $\langle \mathrm{M}, \diamond \rangle$ (tj. že grupa má právě jeden neutrální prvek). Návod: postupujte sporem a zkoumejte prvek $n_1 \diamond n_2$.
2. Dokažte jednoznačnost inverzního prvku grupy $\langle \mathrm{M}, \diamond \rangle$. Návod: postupujte opět sporem, využijte asociativitu na grupě.

Definice 4: Další množiny číselné (přirozená, celá, racionální, komplexní čísla)
Množinu *přirozených čísel* zavedeme obvyklým způsobem $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Množinu $\mathbb{Z} = \big\{x \in \mathbb{R} \big| (x \in \mathbb{N}) \vee (-x \in \mathbb{N}) \vee (x = 0)\big\}$ nazveme množinou celých čísel.
Množinu $\mathbb{Q} = \big\{\frac{p}{q} \big| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\big\}$ nazveme množinou všech racionálních čísel.
Množinu $\mathbb{C} = \big\{(\alpha, \beta) \big| \alpha, \beta \in \mathbb{R}\big\}$ nazveme množinou všech komplexních čísel. Sčítání, násobení a rovnost na ní definujeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = \gamma \ \wedge \ \beta = \delta \\ (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) \quad &= \quad (\alpha + \gamma, \beta + \delta) \\ (\alpha, \beta).(\gamma, \delta) \quad &= \quad (\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma). \end{aligned}$$

P o z n á m k a k definici přirozených čísel: Důležitými vlastnostmi množiny $\mathbb{N}$, pomocí kterých ji běžně formálně zavádíme jsou $1 \in \mathbb{N}$ a $(x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x + 1 \in \mathbb{N})$. Zde jsme zvolili přehlednější způsob definice.

P o z n á m k a: Zde podaná definice komplexních čísel se ovšem shoduje s klasickým modelem; platí $\alpha + i\beta \equiv (\alpha, \beta)$. Absolutní hodnotu z komplexního čísla tedy definujeme klasicky: $|(\alpha, \beta)| \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

C v i č e n í: Ověřte pomocí právě uvedené definice, že $i^2 = -1$ a poté obecně srovnejte právě zavedené násobení komplexních čísel s „klasickým" součinem $(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta)$.

Označení: Položíme $\mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Definice 5: Kartézský součin
Množinu $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \big\{(a, b) \big| (a \in \mathrm{A})(b \in \mathrm{B})\big\}$ nazveme *kartézským součinem množin* A, B.

P o z n á m k a: Kartézský součin $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ je množina všech uspořádaných dvojic, jejichž první člen je z A a druhý člen z B.

Označení: Analogicky bychom definovali kartézský součin $\mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2 \times \ldots \times \mathrm{M}_n$ jako množinu všech uspořádaných n-tic, jejichž i-tý člen je prvkem $\mathrm{M}_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

[2]Dedekindův axiom se vztahuje k řezům, o nichž bude řeč v následující poznámce

Kartézský součin množiny M se sebou označíme $\mathrm{M} \times \mathrm{M} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{M}^2$ a analogicky n-násobný kartézský součin M se sebou označíme $\mathrm{M} \times \mathrm{M} \times \ldots \times \mathrm{M} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{M}^n$.

Definice 6: Zobrazení
Neprázdnou množinu $\phi \subset \mathrm{M} \times \mathrm{P}$ nazveme *zobrazení z* M *do* P (značíme $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{P}$), právě když $\big(\forall (a,b),(x,y) \in \phi\big)\big((a = x) \Rightarrow (b = y)\big)$. Dále označíme $\mathrm{D}_\phi = \big\{x \in \mathrm{M} \big| (\exists y \in \mathrm{P})\big((x,y) \in \phi\big)\big\}$ *definiční obor* zobrazení ϕ a $\mathrm{R}_\phi = \big\{y \in \mathrm{P} \big| (\exists x \in \mathrm{M})\big((x,y) \in \phi\big)\big\}$ *obor hodnot*[3] zobrazení ϕ.

Označení: Skutečnost, že $(x,y) \in \phi$ zapisujeme též jako $\phi(x) = y$. Množinu D_ϕ nazýváme též množinou vzorů a R_ϕ množinou obrazů zobrazení ϕ.

Poznámka: Uvědomme si, že funkce tak, jak je známe, bývají často zobrazením z jedné množiny číselné do jiné, často $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Poznámka: Lze také říci, že zobrazení přiřazuje každému prvku M (tedy prvnímu členu uspořádané dvojice) nejvýše jeden prvek P (tedy druhý prvek z uspořádané dvojice). Definice vylučuje případ, kdy by jednomu prvku z M bylo přiřazeno více různých prvků z P. Na druhou stranu ale nevylučuje možnost, kdy některému prvku z M není přiřazen ani jeden prvek z P, tedy ve ϕ není ani jedna uspořádaná dvojice, v níž by byl tento prvek na prvním místě.

Definice 7: Druhy zobrazení
Budiž $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ zobrazení. Pakliže $\mathrm{D}_\phi = \mathrm{M}$, nazveme jej *zobrazením množiny* M (pokud $\mathrm{D}_\phi \neq \mathrm{M}$, mluvíme o *zobrazení z množiny* M). Pokud naopak $\mathrm{R}_\phi = \mathrm{P}$, jedná se o *zobrazení na množinu* P *(surjekci)*, na rozdíl od případu $\mathrm{R}_\phi \subseteq \mathrm{P}$, kdy jde o *zobrazení do množiny* P.
Zobrazení ϕ nazveme *prosté (injektivní, injekce)*, právě když $(\forall x, y \in \mathrm{D}_\phi)\big[\big(\phi(x) = \phi(y)\big) \Rightarrow (x = y)\big]$.
Zobrazení nazveme *vzájemně jednoznačné (bijektivní, bijekce)*, pokud je prosté a na.

Poznámka: Prosté zobrazení je definováno implikací. Tuto implikaci můžeme obměnit a dostaneme ekvivalentní definici, která říká, že prosté zobrazení je takové, že libovolným dvěma různým vzorům x, y přiřadí různé obrazy $\phi(x), \phi(y)$.

Definice 8: Sudá a lichá zobrazení
Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazveme *sudé*, resp. *liché*, pokud platí $(x \in \mathrm{D}_f) \Rightarrow \big((-x) \in \mathrm{D}_f\big)$ a zároveň $f(x) = f(-x)$, resp. $f(x) = -f(-x)$.

Definice 9: Inverzní zobrazení
Nechť $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ je prosté. Zobrazení $\phi^{-1} : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ nazveme *zobrazení inverzní k* ϕ, právě když pro každé x z M a každé y z P platí $\big(y = \phi(x)\big) \Leftrightarrow \big(x = \phi^{-1}(y)\big)$.

Poznámka: Je ovšem třeba ověřit, že inverzní zobrazení ve smyslu definice vyhovuje také definici zobrazení. Toto tvrzení však snadno odvodíme z předpokladu, že ϕ je prosté, a z definice prostoty.

Poznámka: Rovněž snadno ukážeme, že platí $\mathrm{D}_\phi = \mathrm{R}_{\phi^{-1}}$ a $\mathrm{R}_\phi = \mathrm{D}_{\phi^{-1}}$ a dále, že ϕ^{-1} je prosté $\big($sporem: předpokládejme, že $\exists x \neq y, \phi^{-1}(x) = \phi^{-1}(y)\big)$.

Cvičení: Existuje-li ϕ^{-1}, pak $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$. Dokažte. Neopomeňte tvrzení z minulé poznámky (dokažte je!).

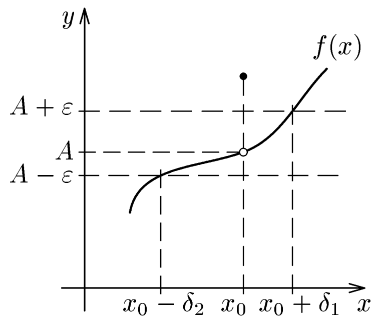
Definice 10: Složené zobrazení
Nechť $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{P}$, $\psi : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ jsou zobrazení a dále buď $\mathrm{R}_\phi \cap \mathrm{D}_\psi \neq \emptyset$. Zobrazení $\psi \circ \phi : \mathrm{M} \to \mathrm{Q}$ nazveme[4] *složeným zobrazením* ϕ *a* ψ, platí-li:

$$\mathrm{D}_{\psi \circ \phi} = \big\{x \in \mathrm{D}_\phi \big| \phi(x) \in \mathrm{D}_\psi\big\}$$
$$(\psi \circ \phi)(x) = \psi\big(\phi(x)\big).$$

Poznámka: Snadno ověříme, že $\mathrm{R}_{\psi \circ \phi} = \big\{(y \in \mathrm{R}_\psi) \big| (\exists x \in \mathrm{D}_\psi \cap \mathrm{R}_\phi)\big(\psi(x) = y\big)\big\}$.

[3] R z anglického range.

[4] Někdy se užívá i opačné konvence: $(\psi \circ \phi)(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \phi\big(\psi(x)\big)$.



Obrázek 1: K definici limity.

C v i č e n í : Ukažte, že pro ϕ prosté je $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{R}_\phi}$ a $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{D}_\phi}$, kde Id_{M} značí identitu na M, tj. zobrazení, jež každý prvek z M zobrazí sám na sebe.

P o z n á m k a o grafech zobrazení: Množinu $\mathrm{M} \times \mathrm{P}$ vyobrazíme (v případě $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vezmeme list papíru a na něm zvolíme soustavu souřadnou) a pak v této množině vyznačíme všechny prvky ϕ.

P ř í k l a d : Následující funkce se občas zjevuje jako protipříklad na příliš elegantní tvrzení v matematické analýze:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{je-li } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zřejmě se jedná o neprosté zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, nebo též $\mathbb{R}$ na $\{0, 1\}$.

P o z n á m k a : V kartézské (pravoúhlé) soustavě souřadné jsou grafy funkce f a funkce f^{-1} k ní inverzní souměrné podle osy $y = x$.

P o z n á m k a : Je-li $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pak $(\exists! f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R})\big((\forall x \in \mathbb{R})\big[f(x) = f_1(x) + i f_2(x) = \mathrm{Re}\,\big(f(x)\big) + {}$ $+\, i\,\mathrm{Im}\,\big(f(x)\big)\big]\big)$.

Definice 11: Interval
Množinu $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}$ nazveme *interval*, právě když $(\forall a, b \in \mathrm{M})(c \in \mathbb{R})\big((a < c < b) \Rightarrow (c \in \mathrm{M})\big)$.

§2. Limita a spojitost funkcí: definice a základní vlastnosti

Definice 12: Limita funkce
Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a bod $a \in \mathbb{R}$, k němuž existuje kladné α takové, že množina $(a-\alpha, a+\alpha) \setminus \{a\}$ je podmnožinou definičního oboru funkce.
Nechť existuje A takové, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tak, že $\big(\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)\big(f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\big)$.
Pak nazýváme číslo A *limitou funkce* f v bodě a a píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

P o z n á m k a :

- Porovnejte definici s obrázkem.
- Uvědomte si, že δ je *závislé* na ε. Zmenšováním ε omezujeme rozmezí, v němž se smí pohybovat funkční hodnota, a tedy obecně musíme zužovat i povolený interval pro výběr x — tím pádem zmenšovat δ.
- Pokud víme, že jsme schopni najít δ pro všechna *dostatečně malá* ε (tedy menší než nějaké pevné ε_0), stačí nám to k důkazu existence limity, protože když je na nějakém intervalu funkční hodnota mezi $A - \varepsilon_0$ a $A + \varepsilon_0$, pak je na témž intervalu i mezi $A - \varepsilon$ a $A + \varepsilon$ pro všechna $\varepsilon > \varepsilon_0$.

- Podobná „selská“ úvaha vede k tomu, že když je nerovnost pro funkční hodnoty splněna na nějaké množině $(a-\delta_0, a+\delta_0)\backslash\{a\}$, pak je splněna i na libovolné podmnožině, tj. pro libovolné $\delta \in (0, \delta_0)$.
- Pro určení limity není důležité, jaké funkční hodnoty nabývá funkce *přímo* v bodě a. Když si pořádně prohlédnete definici, zjistíte, že se tam nikde s $f(a)$ nepracuje. Klasickým příkladem je funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Tato funkce není v bodě $x = 1$ definována, a přesto tam má limitu (rovnou dvěma). Z toho také plyne jeden důležitý poznatek, a sice že pokud pro nějaké dvě funkce $f(x)$, $g(x)$ existuje $\delta > 0$ takové, že na $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \equiv g(x)$, pak limita $f(x)$ v bodě a existuje právě tehdy, když existuje limita $g(x)$ v bodě a, a pokud existují, rovnají se. V bodě a samotném se funkce rovnat nemusejí.

Příklad: Pro ilustraci uvedeme důkaz jednoduchého tvrzení, že $\lim\limits_{x\to1} x^2 = 1$. Standardní postup (pokud nemáme žádné věty o limitách) spočívá v nalezení předpisu, jak pro každé kladné, případně každé dostatečně malé kladné ε určit δ tak, aby byly splněny nerovnosti z definice. Jedná se tedy o hledání jakési *funkce* δ v závislosti na ε a jak uvidíme, není tato funkce v jednoduchých případech vůbec složitá.

V konkrétním případě funkce $f(x) = x^2$ se můžeme omezit na $\varepsilon < 1$, Hledáme δ takové, aby pro $x \in (1-\delta, 1+\delta)\backslash\{1\}$ platilo $x^2 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. „Náležení něčeho do intervalu“ představuje dvě nerovnosti — jejich řešení v našem případě dává $x \in (\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon})$. Definice sice vyžaduje kolem jedničky symetrický interval, ale není nic jednoduššího, než zvolit $\delta = \min\{\sqrt{1+\varepsilon}-1, 1-\sqrt{1-\varepsilon}\}$, což je určitě kladné číslo.

Označení: Pro množinu $(a-\delta, a+\delta)$ zavádíme název *úplné okolí* (příp. úplné δ-okolí) bodu a a značíme $U_\delta(a)$. Pro množinu $(a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$ (neboli úplné okolí bodu a bez bodu a samotného) zavádíme název *redukované* (někdy *prstencové*) *okolí* bodu a a značíme $U^*_\delta(a)$.

Cvičení: Malý kvíz: Která vlastnost je ekvivalentní s tím, že funkce nemá v bodě a žádnou limitu? Nabízíme vám tyto kandidáty:

1. $(\exists\varepsilon > 0)(\forall A \in \mathbb{R})(\forall\delta > 0)\big(\exists x \in U^*_\delta(a)\big)\big(|f(x) - A| > \varepsilon\big)$,
2. $(\exists\varepsilon > 0)(\forall A \in \mathbb{R})(\exists\delta > 0)\big(\forall x \in U^*_\delta(a)\big)\big(|f(x) - A| \geq \varepsilon\big)$,
3. $(\forall A \in \mathbb{R})(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)\big(\exists x \in U^*_\delta(a)\big)\big(|f(x) - A| > \varepsilon\big)$.

Který z výroků je správný? A je to vůbec některý z nich?
Návod: Zkuste systematicky znegovat definici limity a výsledek porovnejte s nabízenými výroky. Rozmyslete si, *co* selže u výroků, které nejsou ekvivalentní se znegovanou definicí a zkonstruujte si příklady funkcí a bodů, u kterých to selže.

Příklad: Dirichletova funkce $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1}$$

Tato funkce nemá v žádném bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu. Nejprve dokážeme, že nemá limitu rovnou nule. Budeme postupovat sporem přesně podle definice limity: zvolme například $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pak musí existovat $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (a-\delta; a+\delta)$ různé od a platí $|D(x) - 0| < \frac{1}{2}$. Je ovšem jasné, že ať zvolíme δ libovolně malé, v uvedeném intervalu (bez bodu a) bude ležet vždy alespoň jedno racionální číslo[5] r. Pak bude $|D(r)| = 1 \not< \frac{1}{2}$.

Podobně bychom mohli dokázat, že limita není rovna jedné. Důkaz, že limita není rovna žádnému dalšímu číslu A by byl ještě jednodušší. Za ε by stačilo volit $\min\{|A-1|, |A|\}$. Potom jistě dokonce pro každé x musí být $|D(x) - A| \geq \varepsilon$.

Tento postup důkazu neexistence limity je sice přímý, ale poněkud krkolomný. Později ukážeme pohodlnější cestu pomocí Heineho věty.

Definice 13: Jednostranná limita
Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a bod $a \in \mathbb{R}$, k němuž existuje kladné α takové, že interval $(a, a+\alpha)$ je podmnožinou definičního oboru funkce.
Nechť existuje A takové, že $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)$ platí $\big(\forall x \in (a, a+\delta)\big)\big(f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)\big)$. Pak nazýváme číslo A *limitou zprava* funkce f v bodě a a píšeme

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

[5] Pro libovolné $\delta > 0$ zvolíme dostatečně velké přirozené číslo q tak, aby množina $(q[a-\delta]; q[a+\delta]) \setminus \{qa\}$ obsahovala alespoň jedno celé číslo p. Potom číslo $\frac{p}{q}$ je racionální a leží v $(a-\delta; a+\delta)$.

Naprosto analogicky — záměnou intervalů $(a, a+\delta)$ za $(a-\delta, a)$ dostáváme definici *limity zleva*, která se značí

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A.$$

Označení: Pro potřeby jednostranných limit zavedeme zvláštní pojmenování i pro intervaly $\langle a, a+\delta)$, $(a, a+\delta)$, $(a-\delta, a\rangle$ a $(a-\delta, a)$. Budeme je nazývat *pravým úplným*, *pravým redukovaným*, *levým úplným* a *levým redukovaným okolím* bodu a a značit $U_\delta^+(a)$, $U_\delta^{*+}(a)$, $U_\delta^-(a)$ a $U_\delta^{*-}(a)$.
Toto značení nám dopomůže mimo jiné k poněkud úspornější formě zápisu definic. Jako příklad symbolicky zapíšeme definici limity zleva:

Definice 14: Jednostranná limita jinak
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $\exists U_\delta^{*-}(a) \subset \mathrm{D}_f$.
Nechť $\exists A \in \mathbb{R}$ takové, že $\big(\forall U_\varepsilon(A)\big)\big(\exists U_\delta^{*-}(a)\big)\big(\forall x \in U_\delta^{*-}(a)\big)\big(f(x) \in U_\varepsilon(A)\big)$. Pak se A nazývá *limitou zleva* funkce f v bodě a.

Poznámka: Jako příklad funkce s lišícími se jednostrannými limitami v nějakém bodě může sloužit například funkce signum v bodě nula.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ pro } x > 0 \\ 0 \text{ pro } x = 0 \\ -1 \text{ pro } x < 0 \end{cases}$$

Nyní formulujeme o limitách několik zásadních vět.

Věta 1: Jednoznačnost limity
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\exists U_\delta^*(a) \subset \mathrm{D}_f$. Pak má funkce $f(x)$ v bodě a *nejvýše jednu* limitu.

Poznámka: Podobné věty se nejsnáze dokazují sporem — předpokládáme, že věta neplatí, a z tohoto předpokladu odvodíme nějaké tvrzení odporující něčemu, z čeho jsme vycházeli. V našem případě musí dle definice limity platit, že pro libovolně malé ε lze najít takové úplné okolí, že všechny funkční hodnoty $f(x)$ pro x z tohoto okolí nebudou od limity vzdáleny o více než ε. My ovšem *pro spor* předpokládáme existenci alespoň *dvou* limit, řekněme A a B, $A > B$. Když si zvolíme ε menší než je polovina jejich rozdílu, je intuitivně jasné, že x nemohou padnout současně do obou intervalů, a to je ten hledaný spor. Pro lepší představu si celý postup zrekapitulujte obrázkem. Nyní provedeme důkaz formálně:

Důkaz: Sporem. Předpokládejme, že existuje funkce $f(x)$ mající v a alespoň dvě limity a označme je A, B, bez újmy na obecnosti $A > B$. Podle definice limity musí platit $\big(\forall U_\varepsilon(A)\big)\big(\exists U_{\delta_1}^*(a)\big)\big(\forall x \in U_{\delta_1}^*(a)\big)\big(f(x) \in$ $\in U_\varepsilon(A)\big)$ a současně $\big(\forall U_\varepsilon(B)\big)\big(\exists U_{\delta_2}^*(a)\big)\big(\forall x \in U_{\delta_2}^*(a)\big)\big(f(x) \in U_\varepsilon(B)\big)$. Zřejmě existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že $U_{\varepsilon_0}(A) \cap U_{\varepsilon_0}(B) = \emptyset$; protože $A > B$, stačí zvolit $\varepsilon_0 = (A-B)/2$. Pak pro $\big(\forall x \in U_{\min\{\delta_1,\delta_2\}}^*(a)\big)\big(f(x) \in$ $\in U_{(A-B)/2}(A)\big)$ a současně $f(x) \in U_{(A-B)/2}(B)$. Obě okolí jsou ale disjunktní, číslo $f(x)$ nemůže ležet zároveň v obou, a to je spor.

Cvičení: Zkuste si sami formálně zapsat důkaz pro případ jednostranné limity.

Cvičení: Zapište následující dvě tvrzení pomocí definice limity a přesvědčte se, že jsou ekvivalentní:

$$\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Limita (oboustranná) a obě jednostranné limity funkce f v daném bodě a spolu jednoduše souvisí.

Věta 2: Souvislost oboustranné a jednostranných limit
Limita funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ existuje a je rovna A, právě když existují obě jednostranné limity f v bodě a a jsou obě rovny A.

Důkaz: Ekvivalenci dokážeme jako dvě implikace. Nejprve směrem $\Leftarrow$.

Abychom v tomto případě ukázali, že existuje (oboustranná) limita f v bodě a rovná A, musíme pro libovolné $\varepsilon > 0$ najít takové $\delta > 0$, že pro každé $x \in U_\delta^*(a)$ je $|f(x) - a| < \varepsilon$. Jednostranné limity však zaručují, že existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in U_{\delta_1}^{*-}(a) : \ |f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \forall x \in U_{\delta_2}^{*+}(a) : \ |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

Pokud zvolíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, platí

$$U_\delta^*(a) \subset U_{\delta_1}^{*-}(a) \cup U_{\delta_2}^{*+}(a) \;\Rightarrow\; \forall x \in U_\delta^*(a): \; |f(x) - A| < A.$$

Implikace ve větě $\Rightarrow$ je ještě jednodušší. Pro zadané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ patřičných vlastností. Zvolíme-li $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, pak platí (2), čímž jsme dokázali existenci a hodnotu obou jednostranných limit.

Poznámka: Uvedeme teď několik tvarů tzv. *trojúhelníkové nerovnosti*, abychom je mohli při dalších důkazech výhodně využívat. Za základní tvar této nerovnosti se obvykle považuje

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a| + |b| \geq |a + b|. \tag{3}$$

Místo tohoto tvaru lze psát také

$$|a - b| + |b| \geq |(a - b) + b|,$$

odkud plynou nerovnosti

$$|a - b| \geq |a| - |b|, \qquad |a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|, \text{ dohromady } |a - b| \geq \big||a| - |b|\big|.$$

Věta 3: Limita funkce s komplexními hodnotami
Budiž $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $a, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in U_\delta^*(a)$ platí $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$. Potom platí následující ekvivalence

$$\big(\lim_{x \to a} f(x) = A_1 + iA_2\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1\big) \wedge \big(\lim_{x \to a} f_2(x) = A_2\big).$$

Důkaz: je typickým příkladem využití trojúhelníkové nerovnosti (pro implikaci $\Leftarrow$). Ekvivalenci opět dokazujeme ve dvou krocích.

$\Rightarrow$. Chceme dokazovat existenci a hodnotu dvou limit promocí existence a hodnoty limity jiné; budeme vycházet přímo z definice limity. Zvolme libovolné pevné $\varepsilon > 0$. Víme, že musí existovat $\delta > 0$ takové, že

$$\big(\forall x \in U_\delta^*(a) \cap \mathrm{D}_f\big)\big(|f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

Víme také, že pro libovolné komplexní číslo $y = y_1 + iy_2, y_1, y_1 \in \mathbb{R}$ platí[6] $|y| \geq |y_1|$, $|y| \geq |y_2|$. Tím pádem je $\forall x \in U_\delta^*(a)$ splněno

$$\varepsilon > |f(x) - A| = \big|\big(f_1(x) - A_1\big) + i\big(f_2(x) - A_2\big)\big| \geq |f_1(x) - A_1|$$

a stejně i $\varepsilon > |f_2(x) - A_2|$. Celkem jsme tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ našli redukovaná okolí bodu a (mimochodem stejná pro f_1 i f_2), taková, že pro všechny body z těchto okolí jsou funkční hodnoty f_1 a f_2 blíže než ε k číslům A_1 a A_2.

$\Leftarrow$. Pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ tentokrát existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\big(\forall x \in U_{\delta_1}^*(a)\big)\Big(|f_1(x) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}\Big),$$
$$\big(\forall x \in U_{\delta_2}^*(a)\big)\Big(|f_2(x) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Pokud zvolíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, zůstanou obě tvrzení v platnosti, zaměníme-li δ_1 a δ_2 za δ — u jednoho tvrzení se touto záměnou nestane nic, u druhého se jen „zpřísní“ předpoklady. Sečteme-li obě nerovnosti, získáme

$$\varepsilon > |f_1(x) - A_1| + |f_2(x) - A_2| = |f_1(x) - A_1| + \big|i\big(f_2(x) - A_2\big)\big| \geq |f_1(x) - A_1 + if_2(x) - iA_2| = |f(x) - A|.$$

Na klíčovém místě zde vystupovala trojúhelníková nerovnost (3). Celkem jsme tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ opět nalezli takové redukované okolí bodu a, jehož všem bodům příslušejí funkční hodnoty f bližší k A než ε.

Věta 4: Limita absolutní hodnoty
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $\exists U_\delta^*(a) \subset D_f$. Nechť existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Pak existuje $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |A|$.

[6] Přepona pravoúhlého trojúhelníku v Gaussově rovině komplexních čísel je delší než každá z odvěsen.

Důkaz: Platí $(\forall\varepsilon > 0)\big(\exists U_\delta^*(a)\big)\big(\forall x \in U_\delta^*(a)\big)\big(|f(x) - A| < \varepsilon\big)$. Z trojúhelníkové nerovnosti pak plyne přímo $\big||f(x)| - |A|\big| \le |f(x) - A| < \varepsilon$.

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí. Protipříkladem je třeba funkce signum v bodě nula.

Věta 5: O omezenosti plynoucí z existence limity
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $\exists U_\delta^*(a) \subset D_f$. Nechť existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Pak $\big(\exists U_\delta^*(a)\big)(\exists K > 0)\big(\forall x \in$ $\in U_\delta^*(a)\big)\big(|f(x)| < K\big)$.

Důkaz: $|f(x)| \le |f(x) - A| + |A|$ (to je trojúhelníková nerovnost) a současně $\big(\exists U_\delta^*(a)\big)\big(\forall x \in$ $\in U_\delta^*(a)\big)\big(|f(x) - A| < 1\big)$ (to je definice limity, v níž volíme $\varepsilon = 1$), a proto $|f(x)| < |A| + 1$.

Věta 6:
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$. Pak $\big(\exists U_\delta^*(a)\big)\big(\forall x \in U_\delta^*(a)\big)\big(|f(x)| \ge |A|/2\big)$.

Důkaz: Podle definice limity $\big(\exists U_\delta^*(a)\big)\big(\forall x \in U_\delta^*(a)\big)\big(|f(x) - A| \le |A|/2\big)$. (V tomto případě je jedno, zda píšeme $\le$ nebo $<$, rozmyslete!) Pomocí trojúhelníkové nerovnosti $|f(x) - A| \ge |A| - |f(x)|$ dostáváme $|A|/2 \ge |A| - |f(x)|$, po úpravě $|f(x)| \ge |A|/2$.

Věta 7: Algebraické operace s limitami
Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Nechť existují $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Pak existují následující limity a platí pro ně:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = A + B$$
$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = A \cdot B$$

Nechť navíc $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$. Pak

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Důkaz:

1. Platí $(\forall\varepsilon/2 > 0)\big(\exists U_{\delta_1}^*(a)\big)\big(\forall x \in U_{\delta_1}^*(a)\big)\big(|f(x) - A| < \varepsilon/2\big)$ a současně $\big(\exists U_{\delta_2}^*(a)\big)\big(\forall x \in$ $\in U_{\delta_2}^*(a)\big)\big(|g(x) - B| < \varepsilon/2\big)$. Potom pro $\big(\forall x \in U_{\min\{\delta_1,\delta_2\}}^*(a)$ platí $\big|[f(x) + g(x)] - (A + B)\big| \le$ $\le |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon$.

2. Výraz $|f(x)g(x) - AB|$ se pokusíme upravit tak, aby se nám objevily výrazy $|f(x) - A|$, $|g(x) - B|$, pro něž máme vhodné nerovnosti:

   $$|f(x)g(x) - AB| = \big|f(x)[g(x) - B] + B[f(x) - A]\big| \le |f(x)|\big|g(x) - B\big| + |B|\big|f(x) - A\big|.$$

   Podle věty o omezenosti (5) víme, že $(\exists K > 0)\big(\exists U_{\delta_0}^*(a)\big)\big(\forall x \in U_{\delta_0}^*(a)\big)\big(|f(x)| \le K\big)$, a z definice limity $\big(\forall\varepsilon/(K + |B|) > 0\big)\big(\exists U_{\delta_1}^*(a)\big)\big(\forall x \in U_{\delta_1}^*(a)\big)\big(|f(x) - A| < \varepsilon/(K + |B|)\big)$ a současně $\big(\exists U_{\delta_2}^*(a)\big)\big(\forall x \in U_{\delta_2}^*(a)\big)\big(|g(x) - B| < \varepsilon/(K + |B|)\big)$. Potom

   $$|f(x)g(x) - AB| < \varepsilon.$$

   Protože ε je kladné, je i $\varepsilon/(K + |B|) > 0$.

3. Stačí dokazovat speciální případ této věty: Pokud $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, pak $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$, zbytek plyne z věty o limitě součinu funkcí. Postup je stejný jako v předchozím:

   $$\big(\exists U_{\delta_0}^*(a)\big)\big(\forall x \in U_{\delta_0}^*(a)\big)\left(\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|A - f(x)|}{|A||f(x)|} \le \frac{2|f(x) - A|}{|A|^2}\right).$$

   Nerovnost je odůvodněna větou (6). Pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme jistě zvolit $U_{\delta_1}^*(a) \subseteq U_{\delta_0}^*(a)$, na němž platí $|f(x) - A| < |A|^2\varepsilon/2$. Na tomto okolí pak bude zřejmě $|1/f(x) - 1/A| < \varepsilon$.

Věta 8: O dvou strážnících
Buďte $a \in \mathbb{R}$ a funkce $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť $\big(\exists U^*_{\delta_1}(a)\big)\big(\forall x \in U^*_{\delta_1}(a)\big)\big(f(x) \leq h(x) \leq g(x)\big)$ a dále $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.
Pak $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Důkaz: $\big(\exists U^*_{\delta_2}(a)\big)\big(\forall x \in U^*_{\delta_2}(a)\big)\big(f(x) > A-\varepsilon\big)$ a současně $\big(\exists U^*_{\delta_3}(a)\big)\big(\forall x \in U^*_{\delta_3}(a)\big)\big(g(x) < A+\varepsilon\big)$. Odtud $\forall x \in U^*_{\delta_1}(a) \cap U^*_{\delta_2}(a) \cap U^*_{\delta_3}(a)$

$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h(x) \in U_\varepsilon(a).$$

Poznámka: Posledních několik důkazů je aplikací stále stejných principů konstrukce, využívají se zde pouze definice a trojúhelníková nerovnost, proto jsme je neopatřili téměř žádným slovním doprovodem. Doporučujeme vám, abyste si je tímto doprovodem doplnili sami — procvičíte si tak nezbytnou formulační obratnost a snáze je pochopíte. Kreslení obrázků už snad ani nemusíme připomínat.

Věta 9: O limitě složené funkce
Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists U^*_{\delta_f}(a) \subset \mathrm{D}_f$, existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
Nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\big(\exists U^*_{\delta_g}(b) \subset [\mathrm{D}_g \cap f(\mathrm{D}_f)]\big)$ [7], existuje $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$.
Nechť $\big(\exists U^*_{\delta_0}(a)\big)\big(\forall x \in U^*_{\delta_0}(a)\big)\big(f(x) \neq b\big)$.
Pak $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) \equiv \lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = A$.

Poznámka: U této věty stojí za to se zastavit. Proč uvádíme ještě dodatečný předpoklad o tom, že vnitřní funkce se musí na nějakém redukovaném okolí *lišit* od své limity? Úskalí spojená s vynecháním tohoto předpokladu uvidíme nejlépe na příkladě – funkce $f(x) = x\sin(1/x)$ má v bodě 0 limitu 0. Vezměme za vnější funkci $g(y)$ definovanou

$$g(y) = \begin{cases} |y|, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$$

I funkce $g(y)$ má pro $y \to 0$ limitu 0. Složená funkce ale k nule jít nemůže — x taková, že v nich $g\big(f(x)\big)$ nabývá hodnoty 1, jsou na libovolně malém okolí.
Z toho je vidět, že nějaké omezení pro $f(x)$ mít musíme. Musí nám ošetřit to, že se při počítání limity $g(x)$ nezajímáme o její hodnotu v bodě b. K celému problému se dá přistoupit i z druhé strany, kladením dodatečných podmínek na $g(x)$. Až budeme mít definován pojem spojitosti, dokážeme, že stačí, když $g(x)$ je spojitá.

Důkaz: Vlastně jen přepisujeme definice:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\eta > 0)\big(\forall y \in U^*_\eta(b)\big)\big(|g(y) - A| < \varepsilon\big),$$
$$(\forall\eta > 0)(\exists\delta_1 > 0)\big(\forall x \in U^*_{\delta_1}(a)\big)\big(|f(x) - b| < \eta\big),$$
$$(\exists\delta_0 > 0)\big(\forall x \in U^*_{\delta_0}(a)\big)\big(|f(x) - b| > 0\big).$$

Na $U^*_{\delta_0}(a) \cap U^*_{\delta_1}(a)$ platí, že $\big(|f(x) - b| \in (0, \eta)\big) \Leftrightarrow \big(f(x) \in U^*_\eta(a)\big)$. Když pak v prvním řádku místo symbolu y píšeme $f(x)$, dostáváme rovnou definici limity složené funkce.

Definice 15: Spojitost v bodě
Funkce $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá, právě když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Poznámka: Srozumitelný, i když zdaleka ne přesný výklad spojitosti je tento: graf funkce spojité ve všech bodech intervalu lze na tomto intervalu nakreslit bez zvednutí tužky z papíru.

Definice 16: Jednostranná spojitost v bodě
Funkce $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$, právě když $\lim\limits_{x\to a^+} = f(a)$.
Funkce $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá zleva v bodě $a \in \mathbb{R}$, právě když $\lim\limits_{x\to a^-} = f(a)$.

Příklad: Funkce $f(x) = x$ a $g(x) = A$, $A \in \mathbb{C}$ jsou spojité pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

[7] $f(\mathrm{A})$ značí $\big\{y \in \mathbb{R} \big| (\exists x \in \mathbb{R})\big(y = f(x)\big)\big\}$, tedy $f(\mathrm{D}_f) = \mathrm{R}_f$.

V prvním případě tedy chceme dokázat $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Důkaz provedeme přímo z definice limity. Pro $\varepsilon > 0$ volíme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in U_\delta^*(a)$ je totiž zřejmě $|x - a| < \delta = \varepsilon$, což bylo dokázati.

Druhý případ je snadnější. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ stačí volit například $\delta = 1$, neboť $|g(x) - A| = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad: Funkce

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x > 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ -1 & \text{pro} \quad x < 0 \end{cases}$$

je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}$ kromě nuly. Pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$ je to totiž konstantní funkce, jejíž spojitost jsme dokázali v minulém případě. V $x = 0$ má funkce jednostranné limity: zprava rovnu 1, zleva rovnu -1. Funkční hodnota v nule je ovšem 0, tedy funkce není spojitá ani zleva ani zprava. Podle věty (2) neexistuje oboustranná limita v nule, tedy nemůže být řeč ani o oboustranné spojitosti v nule. Pokud bychom definovali například $\operatorname{sgn} 0 = 1$, byla by funkce v nule spojitá zprava, ale nikoliv zleva a oboustranně. Funkce tohoto typu, tedy „se skokem“ nám budou později sloužit jako modelový příklad funkce nespojité pouze v jednom bodě.

Příklad: Dirichletova funkce ze začátku tohoto paragrafu není spojitá v žádném bodě $\mathbb{R}$, neboť limita $\lim_{x \to a} D(x)$ neexistuje pro žádné $a \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) \overset{\text{df}}{=} xD(x)$ nemá limitu v žádném bodě $x \neq 0$. Lze to dokázat buď pracně přímo, nebo sporem: má-li f limitu v $x \neq 0$, pak podle věty o limitě podílu musí mít v x limitu i $f(x)/x = D(x)$, což není pravda. V nule má f limitu rovnu 0 (volíme $\delta = \varepsilon$, proveďte sami), a protože $f(0) = 0$, je f spojitá v nule. Máme tedy příklad funkce, která je spojitá v jediném bodě, „všude okolo“ je nespojitá. V tomto případě jednoduchý výklad pomocí kreslení grafu bez zvedání tužky selhává, neboť graf nelze tužkou nakreslit.

Věta 10: Spojitost součtu, součinu a podílu funkcí
Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou spojité v $a \in \mathbb{R}$. Pak

1. $f(x) + g(x)$ je spojitá v a.
2. $f(x)g(x)$ je spojitá v a.
3. Nechť navíc $g(a) \neq 0$. Pak $f(x)/g(x)$ je spojitá v a.

Důkaz: Plyne přímo z příslušných vět o limitách.

Příklad: S pomocí této věty již snadno dokážeme spojitost libovolného polynomu $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Díky tvrzení o součinu spojitých funkcí jsou spojité funkce $x \cdot x$, $x^2 \cdot x$, atd. a dále pak i $a_i \cdot x^i$. Pomocí věty o součtu pak sečtením všech těchto členů dostaneme též spojitou funkci.

Cvičení: Převeďte i ostatní věty o limitách na věty o spojitosti.

Poznámka: Někdy se pro důkazy hodí ekvivalentní definice spojitosti rozepsaná pomocí okolí:

$$f(x) \text{ je spojitá v } a \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall U_\varepsilon(f(a))\big)\big(\exists U_\delta(a)\big)\big(\forall x \in U_\delta(a)\big)\big[f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)\big].$$

Je podobná definici limity s tím rozdílem, že se zde objevují úplná okolí místo redukovaných.

Věta 11: Spojitost složené funkce
Nechť $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou spojité v $a \in \mathbb{R}$. Pak $g \circ f$ je spojitá v a.

Důkaz: Stačí zapsat definice spojitosti v souladu s předchozí poznámkou a ztotožnit obrazové okolí $f(x)$ s vzorovým okolím $g(y)$.

Věta 12: Limita složené funkce jinak
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f = b$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, g spojitá v $a \in \mathbb{R}$. Pak $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = g(b)$.

Důkaz: Z definice limity:

$$\big(\forall U_\varepsilon(b)\big)\big(\exists U_\delta^*(a)\big)\big(\forall x \in U_\delta^*(a)\big)\big(f(x) \in U_\varepsilon(b)\big),$$

z definice spojitosti:

$$\big[\forall U_\eta\big(g(b)\big)\big]\big(\exists U_\varepsilon(b)\big)\big(\forall y \in U_\varepsilon(b)\big)\big[g(y) \in U_\eta\big(g(b)\big)\big].$$

Syntéza obou definic dává:

$$\bigl[\forall U_\eta\bigl(g(b)\bigr)\bigr]\bigl(\exists U^*_\delta(a)\bigr)\bigl(\forall x\in U^*_\delta(a)\bigr)\bigl[g\bigl(f(x)\bigr)\in U_\eta\bigl(g(b)\bigr)\bigr],$$

což už je hledaný výsledek.

§3. Derivace funkcí jedné proměnné

Definice 17: Derivace
Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a pro $a\in\mathbb{R}$ existuje $U(a)\subset \mathrm{D}_f$. Řekneme, že funkce má v bodě a *vlastní derivaci* $f'(a)$ rovnou číslu A, pokud

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existuje a je rovna A.
Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a pro $a\in\mathbb{R}$ existuje $U^+(a)\subset D_f$,resp.$U^-(a)\subset \mathrm{D}_f$. Řekneme, že funkce má v bodě a *vlastní derivaci zleva, resp. zprava*, (značíme $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$) rovnou číslu A, pokud

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ \text{resp.}\ \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existuje a je rovna A.

Poznámka: Podívejte se na obrázek 2. V něm platí

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

přičemž přímka procházející body $[a,f(a)]$ a $[x,f(x)]$ je sečna grafu funkce f. Při limitě $x\to a$ přibližujeme bod x k a, a sečna přechází v tečnu. Takto vidíme, že

$$f'(a)=\operatorname{tg}\varphi,$$

kde φ je úhel, který svírá tečna grafu funkce f v bodě $[a,f(a)]$ s osou x. Tento limitní přechod zapisujeme někdy také

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a),\ \text{kde}\ \Delta f(a)=f(x)-f(a).$$

Poslední zápis derivace je přísně vzato nutno chápat jako nedělitelný symbol, který zastupuje jiný symbol, a to $f'(a)$. Naznačuje však, jakým myšlenkovým pochodem se k pojmu derivace dospělo. Pak ovšem není divu, že s derivacemi lze v mnohých případech formálně počítat jako se zlomky. Úplné analogii zde ovšem brání limitní přechod, a proto v následujícím textu dokážeme pro takové počítání jednotlivé věty. V praxi tedy analogie mezi derivacemi a zlomky budeme používat pouze jako mnemotechnické pomůcky. Se symboly $\mathrm{d}x$ se budeme setkávat i později, nazýváme je *diferenciály*.

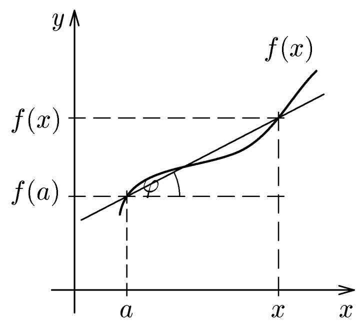
Poznámka: Pokud derivujeme funkci f, která má komplexní hodnoty, platí vztah

$$f(x)=f_1(x)+i f_2(x),\quad f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f'(x)=f_1'(x)+i f_2'(x). \tag{4}$$

Tvrzení platí z jednoduchého důvodu: derivace je definována jako limita a pro počítání limit funkcí $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ máme větu (3):

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)-f_1(a)+i\bigl(f_2(x)-f_2(a)\bigr)}{x-a}=\\&=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}+i\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a}=f_1'(x)+i f_2'(x).\end{aligned}$$

Příklad: Spočtěme derivaci funkce $f(x)=x+a, a\in\mathbb{C}$ v bodě x_0.



Obrázek 2: Ke geometrické interpretaci derivace funkce f v bodě a.

Při $a \in \mathbb{R}$ je geometrická interpretace jednoduchá: grafem funkce f je přímka svírající s osou x úhel $45°$, tečna ke grafu v libovolném bodě x_0 je opět tatáž přímka, a proto $f'(x_0) = \operatorname{tg} 45° = 1$ nezávisle na x_0.

Výpočet z hlediska definice není o mnoho složitější a umožňuje brát i $a \in \mathbb{C}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x + a - x_0 - a}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Věta 13: Derivace součtu, součinu, podílu
Nechť existují $f'(a)$ a $g'(a)$ vlastní, pak v bodě a platí

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
2. $(fg)' = fg' + f'g$,
3. $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$, pokud navíc $g(a) \neq 0$.

Obdobné věty platí pro vlastní derivaci zleva nebo zprava.

Poznámka o analogii se zlomky: První pravidlo odpovídá úpravě

$$\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}, \text{ neboť platí}$$

$$\Delta\big(f+g\big)(a) = \big(f(x) + g(x)\big) - \big(f(a) + g(a)\big) = f(x) - f(a) + g(x) - g(a) = \Delta f(a) + \Delta g(a).$$

Druhé pravidlo je složitější, neboť obecně neplatí $\Delta(f \cdot g) = \Delta f \cdot \Delta g$. Je třeba uvažovat takto:

$$\Delta\big(f \cdot g\big)(a) = f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(x) =$$
$$= g(x)\big(f(x) - f(a)\big) + f(a)\big(g(x) - g(a)\big) = g(x)\Delta f(a) + f(a)\Delta g(a).$$

V limitním přechodu $\Delta x \to 0$ pak přejde $f(x)$ na $f(a)$ a můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = \frac{g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$$

V posledním tvrzení nám pomůže rovnost

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(a) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} = -\frac{g(x) - g(a)}{g(x)g(a)} = -\frac{\Delta g(a)}{g(x)g(a)},$$

přičemž poslední výraz přejde v limitě $\Delta x \to 0$ opět v $-\big(\Delta g\big)/g^2$.

Následující formální důkazy jednotlivých tvrzení budou opisovat právě provedené konstrukce.

Lemma:
Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz lemmatu: Podle věty (5) můžeme uvažovat následujícím způsobem:

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;\Rightarrow\; (\exists K \in \mathbb{R})\big(\exists U_\delta^*(a)\big)\big(\forall x \in U_\delta^*(a)\big)\left(\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq K\right) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \big(\forall x \in U_\delta^*(a)\big)\big(|f(x) - f(a)| \leq K|x - a|\big) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Rozeberme předposlední krok: jak je třeba volit η, aby $\forall x \in U_\eta^*(a)$ hodnota $|f(x) - f(a)|$ byla menší než předem zadané ε? Zřejmě postačí volit $\eta = \varepsilon/(2K)$.

Poslední krok byl probrán v minulém paragrafu jako cvičení.

Důkaz věty:

1. Pro součet:

$$\big(f+g\big)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a),$$

   pro rozdíl budeme postupovat analogicky.

2. Pro součin:

$$\big(fg\big)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \lim_{x\to a} f(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a).$$

3. Stačí dokázat, že platí $(1/g)' = -g'/g^2$. Zbylé se poté dokáže pomocí tvrzení o derivaci součinu $(f \cdot (1/g))$.

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{-(g(x)-g(a))}{g(x)g(a)}}{x-a} = -\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \lim_{x\to a} \frac{1}{g(a)} \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$
$$= -\frac{1}{g(a)}\frac{1}{g(a)} g'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$$

Poznámka: Pro součin n funkcí dokážeme matematickou indukcí jednoduše vzorec pro derivaci jejich součinu.

$$\big(f_1.f_2\dots f_n\big)' = f_1'.f_2\dots f_n + f_1.f_2'.f_3\dots f_n + \dots f_1\dots f_{n-1}.f_n'.$$

Pro $n = 2$ tvrzení platí podle předchozí věty. Dále nechť platí tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\big(f_1.f_2\dots f_n.f_{n+1}\big)' = (f_1.f_2\dots f_n)' + f_1\dots f_n.f_{n+1}'.$$

První člen na pravé straně ale obsahuje pouze n činitelů, tedy můžeme použít indukční předpoklad a psát

$$\big(f_1.f_2\dots f_n.f_{n+1}\big)' = f_1'.f_2\dots f_n + f_1\dots f_n'.f_{n+1} + f_1\dots f_n.f_{n+1}'.$$

Indukční krok je tedy hotov.

Věta 14: O derivaci složené funkce

Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Nechť existuje $f'(a)$ a $g'\big(f(a)\big)$. Potom existuje derivace složené funkce $(g \circ f)$ a platí $\big(g \circ f\big)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$.

Poznámka o analogii se zlomky: Tvrzení této věty formálně zapisujeme jako rozšiřování zlomku symbolem $\mathrm{d}f$:

$$\frac{\mathrm{d}g(f)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(f)}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Důkaz: Definujme pomocnou funkci h na celém definičním oboru D_g následujícím způsobem:

$$h(y) = \frac{g(y) - g\big(f(a)\big)}{y - f(a)} \text{ pro } y \neq f(a) \text{ a } h\big(f(a)\big) = g'\big(f(a)\big). \tag{5}$$

Tato funkce je spojitá v bodě $y = f(a)$: limita h pro $y \to f(a)$ je z definice derivace rovna $g'\big(f(a)\big)$. Pro funkci h ovšem platí

$$\forall x \in \mathrm{D}_{g\circ f}: \ \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} = h\big(f(x)\big) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pro všechna x, kde $f(x) \neq f(a)$ stačí dosadit definici funkce h (5), pokud $f(x) = f(a)$, jsou obě strany rovny nule.
Na obě strany rovnosti nyní aplikujeme limitu $x \to a$, čímž dostáváme požadované tvrzení.

Věta 15: O derivaci inverzní funkce
Nechť platí:

1. Funkce f zobrazuje $U_\alpha(a)$ prostě na $U_\beta\big(f(a)\big)$.
2. Platí $f'(a) \neq 0$.
3. Inverzní funkce f^{-1} je spojitá v $f(a)$.

Potom platí: $\big(f^{-1}\big)'\big(f(a)\big) = 1/f'(a)$

P o z n á m k a o analogii se zlomky: V tomto případě píšeme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{-1}\big(f^{-1}(A)\big), \text{ kde } y = f(x),\ A = f(a).$$

Zlomek na pravé straně chápeme tak, že x je funkcí nezávislé proměnné y, která odpovídá funkční hodnotě funkce f v bodě x. Na levé straně tak mluvíme o derivaci funkce $y = y(x)$ a na pravé straně o derivaci inverzní funkce $x = x(y)$. Do první funkce ovšem musíme dosazovat prvky z definičního oboru f, zatímco do druhé funkce prvky z oboru hodnot f. Proto ve vzorci píšeme jednou a a podruhé $f^{-1}(A)$, i když jsou si tato čísla rovna.

Důkaz: Nejprve si uvědomíme, že existuje $U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*(a) : f(x) \neq f(a)$, neboť podle věty (6) platí:

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| > \frac{|f'(a)|}{2} > 0.$$

Dále definuji na tomto okolí pomocnou funkci h následujícím způsobem: $h(x) = (x - a)/\big(f(x) - f(a)\big)$ pro $x \neq a$ a $h(x) = 1/f'(a)$ pro $x = a$. Funkce h je potom spojitá v bodě a: její limitu pro $x \to a$ můžeme snadno spočítat pomocí věty o limitě podílu (7) a vyjde samozřejmě $1/f'(a)$. Díky tomu můžeme použít větu (12).

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(a)\big) = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}\big(f(a)\big)}{y - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} h\big(f^{-1}(y)\big) = \lim_{x \to a} h(x) = \frac{1}{f'(a)},$$

neboť $f^{-1}\big(f(a)\big) = a$.

P o z n á m k a : Předpoklad o spojitosti inverzní funkce je nadbytečný. Navíc v následujících příkladech, kdy tuto větu budeme používat k výpočtu derivací konkrétních inverzních funkcí, jej nelze jednoduše ověřit. Je proto důležité prozradit dopředu, že v kapitole 4 dokážeme větu, která potvrdí nadbytečnost třetího předpokladu. Je samozřejmé, že k důkazu příslušné věty nepoužijeme ani větu (15) ani její důsledky.

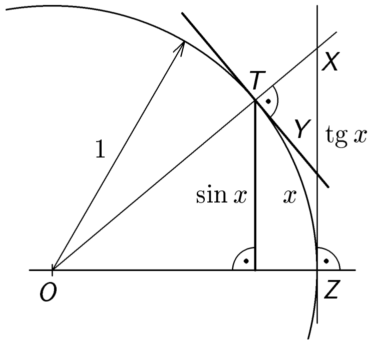
P o z n á m k a : Speciálně pro $b = f(a)$ tedy platí $(f^{-1})'(b) = 1/f'\big(f^{-1}(b)\big)$.

P ř í k l a d : Abychom mohli spočítat derivaci $\sin x$, musíme nejprve spočítat limitu $(\sin x)/x$ pro $x \to 0$. Použijeme tuto úvahu: podle obrázku platí pro x z $\big(0; \frac{\pi}{2}\big)$, resp. z $\big(-\frac{\pi}{2}; 0\big)$. Úsečka TZ je zřejmě kratší než oblouk TZ a ten je kratší než lomená čára TYZ. Protože je ale trojúhelník TXY pravoúhlý, musí být $|TY| < |XY|$, a tudíž $|XZ|$ delší než oblouk TZ.

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\sin x}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan x}{2} & \text{resp.} & \dfrac{\sin x}{2} > \dfrac{x}{2} > \dfrac{\tan x}{2} \\ 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} & & 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}. \end{array}$$

Protože $\lim\limits_{x \to 0} 1/\cos x = 1$, podle věty o dvou strážnících (8) musí být obě jednostranné limity funkce $x/\sin x$ pro $x \to 0$ rovny jedné. Věta (2) pak říká, že i oboustranná limita je rovna jedné a konečně s pomocí věty (7) určíme i limitu převrácené funkce:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Obrázek 3: K výpočtu limity $(\sin x)/x$.

Nyní již píšeme

$$(\sin x)' = \lim_{y\to x} \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \lim_{y\to x} \frac{\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}} = \lim_{y\to x} \cos\frac{y+x}{2} \lim_{y\to x} \frac{\sin\frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} =$$

$$\lim_{y\to x} \cos\frac{y+x}{2} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \cos x.$$

V předposledním kroku jsme použili větu o limitě složené funkce (9). Ověřte její předpoklady — zvláště proberte poslední!

Podobně bychom mohli ukázat, že $(\cos x)' = -\sin x$.

§4. Exponenciála, obecná mocnina

V tomto paragrafu se budeme zabývat otázkou, co máme rozumět výrazem a^b, kde b je libovolné reálné číslo a a je libovolné kladné reálné číslo. Pro $b \in \mathbb{Q}$ výpočet provést umíme

$$b \in \mathbb{N}: \quad a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b}, \quad a^{1/b} = \sqrt[b]{a} > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a,$$

$$b \in \mathbb{Z}: \quad a^{-b} = 1/a^b, \quad a^0 = 1,$$

$$b = \frac{p}{q},\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}: \quad a^b = \sqrt[q]{a^p}.$$

Pro ostatní reálná čísla b provedeme definici a^b následujícím nekonstruktivním způsobem.

Věta 16: O exponenciále
Buď $a > 0$. Pak existuje právě jedna spojitá funkce f, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{R}_f = (0;\infty)$ taková, že $f(x) = a^x$ pro každé $x \in \mathbb{Q}$. Tato funkce je prostá.
Existuje právě jedno číslo $e \in \mathbb{R}^+$, pro které platí $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Toto číslo je iracionální a je rovno $2,71828\ldots$.

Definice 18: Exponenciála a logaritmus
Funkci z první části předchozí věty s $a > 0$ nazýváme *exponenciální funkce se základem a*. Funkci k ní inverzní nazýváme *logaritmus o základu a* a značíme ji $\log_a x$.
Číslo e ze druhé části věty nazýváme *Eulerova konstanta*, logaritmus o tomto základu nazýváme *přirozený logaritmus* a značíme jej $\ln a$.

Věta 17: Pravidla pro počítání s exponenciálami

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y,\ e^{xy} = \left(e^x\right)^y,$$

$$\left(\forall a, b \in \mathbb{R}^+\right)(\forall c \in \mathbb{R}): \quad (ab)^c = a^c b^c \quad \text{a} \quad \big(\forall a \in (1;\infty)\big)(\forall b, c \in \mathbb{R})\big[(b < c) \Rightarrow \left(a^b < a^c\right)\big].$$

Definice 19: Obecná mocnina
Obecnou mocninu, tj. funkci $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme pomocí obratu (7) s tím, že pro $\alpha > 0$ rozšíříme $f_\alpha(0) = 0$. Navíc pokud je $\alpha = p/q$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a q je liché přirozené číslo, lze $f_\alpha(x)$ „rozumně“ definovat i pro záporná x, a to vztahem $f(-x) \stackrel{\text{df}}{=} -f(x)$ pro $x > 0$.

Poznámka k důkazu: Větu o exponenciále dokážeme až v kapitole o řadách. Myšlenka důkazu bude následující. Pro libovolné $x \in \mathbb{C}$ budeme uvažovat řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{6}$$

Jak tomuto zápisu rozumět? Máme tím na mysli, že definujeme funkci

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}.$$

O této funkci nejprve ukážeme, že je skutečně definována pro všechna $x \in \mathbb{C}$ (říkáme, že řada konverguje na $\mathbb{C}$) a dále že pro $x \in \mathbb{Q}$ platí $f(x) = e^x$, kde $e \stackrel{\text{df}}{=} f(1)$ — tímto předpisem je také možno číslo e spočítat s libovolnou přesností.

Pomocí vět o *stejnoměrné konvergenci* potom ukážeme jednak spojitost funkce e^x na $\mathbb{R}$ a dále vlastnost $(e^x)' = e^x$. Podle těchto vět lze totiž provést úpravy

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

O exponenciále zapsané pomocí řady dokážeme „klasická“ algebraická pravidla uvedená v prvním řádku ve větě (17).

S pomocí tvrzení $e^{xy} = (e^x)^y$ pak můžeme definovat exponenciálu při libovolném kladném základě, a to tímto jednoduchým obratem

$$a^b = \left(e^{\ln a}\right)^b = e^{b \ln a}. \tag{7}$$

Výšeuvedená algebraická pravidla potom snadno rozšíříme i pro tuto obecnou exponenciálu.

Zatím tedy ponecháme větu o exponenciále a větu (17) bez důkazu.

Poznámka: Pomocí exponenciály definujeme i tzv. *hyperbolické funkce*, hyperbolický sinus ($\operatorname{sh} x$ či $\sinh x$), hyperbolický kosinus ($\operatorname{ch} x$ či $\cosh x$) a hyperbolický tangens ($\operatorname{th} x$ nebo $\operatorname{tgh} x$).

$$\operatorname{sh} x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Příklad:

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Příklad: Spočítejme $(\log_a x)'$. V poznámce za větou (15) bude nyní $f(y) = e^y$, $f^{-1}(x) = \log_a x$:

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Speciálně $(\ln x)' = 1/x$.

Příklad: Pro $a \in \mathbb{R}$ počítejme

$$\left(x^a\right)' = \left(e^{a \ln x}\right)' = e^{a \ln x}(a \ln x)' = a x^a \cdot x^{-1} = a x^{a-1}.$$

Příklad: Podobně jako při výpočtu derivace logaritmu:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

P o z n á m k a: Závěrem posledních dvou paragrafů shrňme naše poznatky o derivacích některých funkcí:

$$\begin{gathered}\left(x^{n}\right)=n x^{n-1},\ n\in\mathbb{R},\ n\neq 0,\\ \begin{aligned} \left(e^{x}\right)'&=e^{x}, & \left(a^{x}\right)'&=a^{x}\ln a,\ a\in\mathbb{R}^{+}\\ \left(\ln x\right)'&=\frac{1}{x}, & \left(\log_a x\right)'&=\frac{1}{x\ln a},\ a\in\mathbb{R}^{+},\\ (\sin x)'&=\cos x, & (\cos x)'&=-\sin x,\\ (\operatorname{sh} x)'&=\operatorname{ch} x, & (\operatorname{ch} x)'&=\operatorname{sh} x,\\ (\operatorname{tg} x)'&=\frac{1}{\cos^2 x} & (\operatorname{cotg} x)'&=-\frac{1}{\sin^2 x},\\ (\arcsin x)'=(\arccos x)'&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\operatorname{arctg} x)'&=\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}\end{gathered}$$

§5. Parciální derivace a derivace funkcí s komplexními hodnotami

Definice 20: Parciální derivace

Parciální derivací funkce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, tedy funkce $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, v bodě $a\in\mathbb{R}^n$, to jest v bodě $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, podle x_i rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\overset{\mathrm{df}}{=}\varphi_i'(a_i),\qquad \varphi_i(x)=f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n). \tag{8}$$

P o z n á m k a: Nechť $f:\mathbb{R}_k\to\mathbb{R}_n$ a $g:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}$. Označím $y_i=f_i(x_1,\ldots,x_k)$. Potom pro $i=1,\ldots,k$ platí

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_j}\big(f(a)\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Důkaz tohoto vzorce bude podán v kapitole o funkcích více proměnných.

P ř í k l a d: Ze stavové rovnice $pV=nRT$ s konstantami n,R můžeme vypočítat $p=p(V,T)$, $V= =V(p,T)$, $T=T(p,V)$. Tyto tři funkce můžeme parciálně derivovat; spočítejme, čemu je roven výraz

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}.$$

Funkce $p(V,T),V(p,T),T(p,V)$ jsou pomocí stavové rovnice zadány *implicitně*. Nejprve je potřeba je vyjádřit *explicitně*, tedy vztahem, na jehož levé straně stojí pouze např. p, zatímco na druhé straně se p nevyskytuje[8].

$$p=\frac{nRT}{V},\quad V=\frac{nRT}{p},\quad T=\frac{pV}{nR}.$$

Dále můžeme parciálně derivovat

$$\frac{\partial p}{\partial V}(V,T)=-\frac{nRT}{V^2},\quad \frac{\partial V}{\partial T}(p,T)=\frac{nR}{p},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{nR}.$$

Při parciálním derivování např. funkce $p(V,T)$ podle V tedy derivujeme obvyklým způsobem s tím, že V považujeme za proměnnou a T za konstantu.

Vynásobením uvedených tří výrazů zjistíme, že hledaný součin je roven $-nRT/pV=-1$. Obecně by součin některých tří parciálních derivací výše zmíněných funkcí mohl záviset na p,V i T, ale v tomto případě je konstantní. V již zmíněné kapitole o funkcích více proměnných dokážeme větu o implicitně zadaných funkcích, která nám ukáže, že k tomuto podivnému výsledku jsme nedospěli náhodou. Všimněme si také, že se symboly $\partial x/\partial y$ nemůžeme zacházet stejně jako se zlomky a nemůžeme je krátit; kromě toho, že nás k jakémukoliv krácení nic neopravňuje, vidíme, že součin parciálních derivací by takto musel vyjít 1.

[8] Funkce je zadána implicitně, pokud definiční vztah nemá tento „jednoduchý“ tvar.

Poznámka: Pojem parciální derivace lze též alternativně definovat následovně. Nechť $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$. Definuji funkci $\varphi_i(t) = f(a+te_i)$, kde $a \in \mathbb{R}_n$, $t \in \mathbb{R}$ a $e_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}_n$. Potom $\partial f(a)/\partial x_i = \varphi_i'(0)$.

Poznámka: Obdobně pro libovolný jednotkový[9] vektor $v \in \mathbb{R}_m$ můžeme vzít $\varphi_v(t) = f(a+tv)$ a definovat *derivaci ve směru* v $\partial_v f(a) = \varphi_v'(0)$.

Definice 21: Exponenciála v komplexním oboru
Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ definujeme exponenciální funkci $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takto:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{9}$$

Poznámka: Jak už jsme se zmínili, v kapitole o řadách najdeme vhodné vyjádření exponenciály pomocí nekonečné řady. To pak zároveň povede k definici logaritmu jako příslušné inverzní funkce a k definici obecné mocniny. Zde uvedenou definici exponenciály pak prohlásíme za větu, kterou dokážeme.

Poznámka (doporučení): Vztah (9) se bude používat na mnoha místech dále a je velmi vhodné si jej osvojit.

Příklad: Nechť $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}$ a $f(x) = e^{\alpha x}$. Označím $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. Použijeme-li poznámku za definicí derivace, můžeme vypočítat

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\alpha_1 x}(\cos \alpha_2 x + i \sin \alpha_2 x))' = (e^{\alpha_1 x}\cos \alpha_2 x)' + i(e^{\alpha_1 x}\sin \alpha_2 x)' = \\ &= \alpha_1 e^{\alpha_1 x}\cos\alpha_2 x - \alpha_2 e^{\alpha_1 x}\sin\alpha_2 x + i\alpha_1 e^{\alpha_1 x}\sin\alpha_2 x + i\alpha_2 e^{\alpha_1 x}\cos\alpha_2 x = \\ &= (\alpha_1 + i\alpha_2)e^{\alpha_1 x}\cos\alpha_2 x + i(\alpha_1+i\alpha_2)e^{\alpha_1 x}\sin\alpha_2 x) = (\alpha_1+i\alpha_2)e^{\alpha_1 x}(\cos\alpha_2 x + i\sin\alpha_2 x) = \alpha e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Příklad: Budiž $\alpha \in \mathbb{C}$. Platí $(x+\alpha)' = 1$, což můžeme snadno ověřit přímo z definice derivace, resp. přímým výpočtem limity.

Příklad: Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ a $n \in Z$. Potom platí

$$\begin{aligned} \big((x+\alpha)^n\big)' &= n(x+\alpha)^{n-1}, \\ \big((x+\alpha)^{-n}\big)' &= \left(\frac{1}{(x+\alpha)^n}\right)' = \frac{-n}{(x+\alpha)^{n+1}}. \end{aligned}$$

V tomto případě jsme rozepsali mocninu jako součin a použili věty o derivování součinu funkcí[10] a předchozího příkladu. Pro $n = -1$ zderivujeme $1/(x+a)$ jako podíl funkcí dle věty (13) (s využitím předchozího příkladu) a pro obecné záporné mocniny $(x+\alpha)$ použijeme stejný postup jako pro kladné mocniny.

Příklad: Nechť $x \in (0;\infty)$ a $a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$(x^a)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = a\frac{1}{x}e^{a\ln x} = ax^{a-1}.$$

§6. Vyšší derivace

Definice 22: Vyšší derivace
Nechť existuje derivace funkce f v okolí $U_\delta(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$ a nechť dále existuje derivace funkce $f'(x)$ v bodě a rovna $A \in \mathbb{C}$. Potom číslo A nazveme *druhou derivací* funkce f v bodě a a píšeme:

$$f''(a) = f^{(2)}(a) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = A. \tag{10}$$

[9] Délku vektoru $(x_1,\dots,x_n)$ počítáme jako $\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$. Přesvědčte se, že vektory z předchozí poznámky jsou jednotkové.
[10] Viz poznámku za větou (13).

Obdobně se definuje třetí, čtvrtá a další vyšší derivace.

P o z n á m k a: Obdobně definujeme vyšší derivace funkce více proměnných. Nechť existuje $\partial f/\partial x_i(a)$ a $\partial/\partial x_j\bigl(\partial f/\partial x_i\bigr)(a)$; potom tuto druhou derivaci označujeme $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(a)$.

Věta 18: Leibnizova
Nechť existují n-té derivace funkcí f a g v bodě a. Potom platí:

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí. Tvrzení platí pro $n = 1$. Předpokládáme, že tvrzení platí pro všechna $n < n_0$ dokazujeme jej pro $n = n_0$.

$$(fg)^{(n_0)}(a) = \left((fg)^{(n_0-1)}\right)'(a) = \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{n_0-1}{k} f^{(k)} g^{(n_0-1-k)}\right)'(a) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{n_0-1}{k} f^{(k)} g^{(n_0-k)} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{n_0-1}{k} f^{(k+1)} g^{(n_0-1-k)}\right)(a) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{n_0-1}{k} f^{(k)} g^{(n_0-k)} + \sum_{k=1}^{n_0} \binom{n_0-1}{k-1} f^{(k)} g^{(n_0-k)}\right)(a) =$$

$$= \Biggl(\binom{n_0-1}{0} f^{(0)} g^{(n_0)} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \binom{n_0-1}{k} f^{(k)} g^{(n_0-k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_0-1} \binom{n_0-1}{k-1} f^{(k)} g^{(n_0-k)} + \binom{n_0-1}{n_0-1} f^{(n_0)} g^{(0)}\Biggr)(a) =$$

$$= \left(\binom{n_0}{0} f^{(0)} g^{(n_0)} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \binom{n_0}{k} f^{(k)} g^{(n_0-k)} + \binom{n_0}{n_0} f^{(n_0)} g^{(0)}\right)(a) = \left(\sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} f^{(k)} g^{(n_0-k)}\right)(a).$$

Při úpravách výrazů s kombinačními čísly jsme použili známých vztahů

$$\binom{n_0-1}{k} + \binom{n_0-1}{k-1} = \binom{n_0}{k}, \qquad \binom{n_0}{0} = \binom{n_0-1}{0} = \binom{n_0-1}{n_0-1} = 1.$$

§7. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Ve fyzice, ale i v jiných oborech jsme často stavěni před problém najít na intervalu (a, b) (třeba i neomezeném) funkci $y(x)$, která pro každé $x \in (a, b)$ splňuje určitý vztah. Pokud se v tomto vztahu vyskytují derivace funkce $y(x)$ a hodnoty těchto derivací i funkce samotné jsou brány pouze v bodě[11] x, nazýváme jej *diferenciální rovnicí.* Řádem diferenciální rovnice pak rozumíme řád nejvyšší derivace $y(x)$, která se v ní vyskytuje. Nejjednodušší diferenciální rovnice prvního řádu mohou vypadat takto:

1. $y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = k; k \in \mathbb{C}$,
2. $y'(x) = \cos x \Rightarrow y(x) = \sin x + k; k \in \mathbb{C}$
3. $y'(x) = y(x) \Rightarrow y(x) = ke^x; k \in \mathbb{C}$

Všimněme si, že v řešení figuruje konstanta, na jejíž volbě nezávisí splnění diferenciální rovnice — snadno to ověříme dosazením do původní rovnice. V paragrafu o diferenciálních větách o střední hodnotě ukážeme, že v případech 1 a 2 jsou uvedené funkce dokonce jediným řešením příslušných diferenciálních rovnic, v případě 3 toto ukážeme až později v kapitole o diferenciálních rovnicích. Vezmeme-li tato tvrzení

[11] Tedy nepřipouštíme např. $y'(x+1) = y(x) + 3$.

prozatím jako fakt, vidíme, že řešení rovnic 1–3 nejsou sice jednoznačná, avšak je lze zapsat v určitém tvaru „s jedním stupněm volnosti“.

Obraťme nyní pozornost ke slíbeným diferenciálním rovnicím druhého řádu.
Mějme funkce $a_0(x), a_1(x), a_2(x), f(x)$ na intervalu (a, b) a hledejme funkci $y(x)$ na (a, b) tak, aby pro každé $x \in (a, b)$ platilo buď

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{11}$$

nebo

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \tag{12}$$

Vztah (11) nazýváme *homogenní* lineární diferenciální rovnicí 2. řádu, vztah (12) potom *nehomogenní* lineární diferenciální rovnicí 2. řádu (též lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s pravou stranou).

Co můžeme říci o řešení takových rovnic, funkcích $y = y(x)$ na intervalu (a, b)? Po zkušenosti s rovnicemi prvního řádu neočekáváme, že by existovalo jen jediné řešení. Označme tedy množinu všech řešení rovnice (11) M_*. Definujme násobení funkce konstantou z $\mathbb{C}$ a sčítání dvou funkcí na množině I

$$f_1 + f_2 : x \mapsto f_1(x) + f_2(x), \;\; cf : x \mapsto cf(x)$$

a povšimněme si následující zajímavé vlastnosti M_*: nechť y_1, y_2 jsou řešení (11) a $k \in \mathbb{C}$ je konstanta; pak $y_1 + y_2 \in M_*$ a $k.y_1 \in M_*$ — ověřte dosazením do rovnice (11). Platí totiž

$$(y_1 + y_2)'' = y_1'' + y_2'', (cy_1)'' = c.y_1''$$

a obdobně pro první derivace: jinými slovy derivace je lineární zobrazení na prostoru diferencovatelných funkcí[12]; zobrazení, které funkci přiřazuje její derivaci. Druhá derivace je podobně lineárním zobrazením na prostoru dvakrát diferencovatelných funkcí.

Bez problémů ověříme i další vlastnosti (proveďte), které charakterizují M_* jako vektorový prostor. To je také důvod, proč rovnici (11) nazýváme lineární. Nyní se samozřejmě nabízí otázka jaká je dimenze tohoto prostoru. Vyřešme tuto jednoduchou homogenní lineární rovnici

$$y''(x) = 0. \tag{13}$$

Snadno zjistíme, že (13) splňuje libovolná lineární funkce $y(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{C}$. I na tomto konkrétním případě vidíme, že M_* je vektorový prostor. Jeho bázi by mohly tvořit například funkce $y(x) = 1$ a $y(x) = x$ (proč?), tedy dimenze M_* je dvě. Nabízí se tedy myšlenka, že dimenze prostoru všech řešení lineární homogenní rovnice n-tého řádu je rovna n a zároveň i počtu libovolně volitelných konstant v obecném řešení. Toto tvrzení skutečně platí, ale dokážeme jej až později.

Dále označme M_{**} množinu všech řešení rovnice (12). Tato množina již není vektorový prostor (pokud $f(x) \not\equiv 0$) — uvědomte si proč: dosaďte do (12) funkci $y_1 + y_2$, kde y_1, y_2 řeší (12). M_{**} má ale také jednu zajímavou vlastnost. Pokud je $y(x)$ řešení rovnice (12) a $y_h(x)$ libovolné řešení příslušné homogenní rovnice (11), tedy rovnice (12), v níž místo pravé strany napíšeme nulu, je funkce $y + y_h$ řešením rovnice (12). Snadno to ověříme dosazením. Naopak pokud jsou y_1, y_2 řešení (12), pak $y_1 - y_2$ je řešením (11). To ale znamená, že pokud najdeme jeden prvek $y \in M_{**}$, pak libovolný další prvek M_{**} lze vyjádřit jako $y + y_h$, kde y_h je jedno z řešení příslušné homogenní rovnice. Vzhledem k tomu, že M_* je vektorový prostor, nazýváme M_{**} afinní (posunutý) vektorový prostor a y_h jeho vrcholem.

Podstatnou podmnožinou lineárních diferenciálních rovnic tvoří rovnice s konstantními koeficienty, tedy rovnice tvaru (11) nebo (12), v nichž a_0, a_1, a_2 jsou reálné konstanty:

$$a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x), \text{ resp. } a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0.$$

Princip řešení: řešíme-li nehomogenní rovnici, vyřešíme nejprve příslušnou rovnici homogenní a potom najdeme jedno řešení rovnice nehomogenní (tomuto řešení říkáme partikulární řešení).

Homogenní rovnice: metoda „ansatzu“[13]. Na levé straně rovnice se vyskytují tři funkce, po nichž žádáme, aby „se odečetly“. Bylo by tedy vhodné, aby se tyto funkce nějak navzájem „podobaly“ — např.

[12] Množině funkcí majících derivaci.
[13] Německy násada, zárodek.

funkce $\ln x$ a $1/x$ se zřejmě takto odečíst nepodaří[14]. Derivace se ovšem původní funkci velmi podobají pro $y(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$. Zkusme tedy tuto funkci dosadit do řešené rovnice:

$$a_2(e^{\alpha x})'' + a_1(e^{\alpha x})' + a_0 e^{\alpha x} = 0 \tag{14}$$

$$a_2\alpha^2 e^{\alpha x} + a_1\alpha e^{\alpha x} + a_0 e^{\alpha x} = 0.$$

Pokud poslední rovnici dělíme $e^{\alpha x}$, získáme podmínku pro α, kterou když splníme, bude (14) splněna pro každé x, tedy $y(x) = e^{\alpha x}$ bude řešení homogenní rovnice. Tuto podmínku nazýváme charakteristická rovnice

$$a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Pro řešení $\alpha_{1,2}$ této rovnice mohou nastat celkem tři možnosti.

1. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}; \alpha_1 \neq \alpha_2$. Pak funkce $y_1 = e^{\alpha_1 x}, y_2 = e^{\alpha_2 x}$ řeší homogenní rovnici, a tudíž libovolná funkce $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}, C_{1,2} \in \mathbb{R}$ je zřejmě také řešením. Zároveň množina těchto řešení má dimenzi dva (proč?), a tedy jsme již našli *všechna*[15] řešení homogenní rovnice.

2. $\alpha_1 = \alpha; \alpha_2 = \bar{\alpha}, \alpha \in C$, tj. pro $\alpha = a + ib$ je $e^{\alpha_{1,2} x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx)$. Obecné řešení bude opět lineární kombinací těchto dvou funkcí. Můžeme ovšem požadovat, aby toto řešení dávalo pouze reálné hodnoty (zadaná rovnice žádná komplexní čísla neobsahovala). Za bázi M_* tedy zvolíme místo $y_1 = e^{\alpha_1 x}, y_2 = e^{\alpha_2 x}$ jiné funkce, a to $y_1 + y_2$ a $-i(y_1 - y_2)$. Jako cvičení z lineární algebry zkuste dokázat, že tyto funkce jsou skutečně bází M_* za předpokladu, že y_1, y_2 tvoří bázi M_*. Libovolné řešení homogenní rovnice tedy bude mít v tomto případě tvar $y = e^{ax}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)$.

3. $\alpha_1 = \alpha_2 = a_1/(2a_2) = a$. Nyní ovšem známe jen jedno řešení, a to e^{ax}. Můžeme ověřit, že v tomto případě (a pouze v tomto případě) bude řešením také funkce xe^{ax}. Obecné řešení bude tedy ve tvaru $y = (C_1 x + C_2)e^{ax}$.

Shrnutí: metoda ansatzu obecně spočívá v tom, že předpokládáme řešení v určitém konkrétním tvaru (který nám někdo poradí) s několika (často jednou) neznámými konstantami, ve složitějším případě i funkcemi. Dosazením do řešené rovnice pak najdeme podmínku pro tyto konstanty, případně získáme jednodušší diferenciální rovnici pro neznámou funkci v ansatzu.

Nehomogenní rovnice, partikulární řešení: pro obecnou funkci $f(x)$ jsme většinou odkázáni na napovězený ansatz. Pokud je ovšem $f(x)$ například e^{ax}, resp. $\sin ax$ ($\cos ax$), platí pro y zásada „svoji k svému“ a ansatz je rozumné hledat ve tvaru součinu polynomu a e^{ax}, resp. ve tvaru obecné lineární kombinace funkcí $\sin ax$ a $\cos ax$. Přitom by v tomto ansatzu měly vystupovat dvě neznámé konstanty C_1, C_2, tedy polynom by měla být lineární funkce, případně lineární funkce násobená mocninou x.

Závěrem zkusme jednu rovnici druhého řádu vyřešit.

Příklad: Řešení pohybu hmotného bodu konajícího tlumený harmonický kmit buzený vnější silou harmonického průběhu vede na rovnici

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = d \sin ct. \tag{15}$$

Dejme tomu, že v konkrétním případě vyšly konstanty a, b, c, d po řadě rovny $2, 2, 1, 3$. Při hledání obecného řešení musíme řešit nejprve příslušnou homogenní rovnici. Charakteristická rovnice je

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0,$$

jejími řešeními jsou $\alpha_{1,2} = -1 \pm i$. Bázi prostoru všech řešení homogenní rovnice lze tedy vyjádřit buď ve tvaru $e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t}$ nebo $e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t$, obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Pro partikulární řešení použijeme ansatz $y = a \sin t + b \cos t$. Dosazením do (15) získáme po provedení derivací rovnici

$$(-a - 2b)\sin t + (-b - 2a)\cos t = 3 \sin t. \tag{16}$$

[14]Poznámka navíc: na levé straně rovnice je lineární kombinace funkcí y'', y', y, chceme tedy aby tyto funkce byly lineárně závislé.

[15]Bylo by ovšem třeba ukázat, že řešení y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá. To platí, ale dokazovat to zatím nebudeme.

Tuto rovnici je třeba splnit pro každé t, aby náš ansatz byl řešením (15). Vezmeme-li např. $t = 0$ a $t = \pi/2$, dostáváme podmínky

$$-b - 2a = 0, \ -a - 2b = 3 \Leftrightarrow a = -1 \ \wedge \ b = 2.$$

Abychom získali tyto podmínky, mohli jsme si také uvědomit, že $\sin t$ a $\cos t$ jsou lineárně nezávislé funkce (neboť mohly tvořit bázi nějaké množiny M_*) a rovnice (16) neudává nic jiného než vyjádření vektoru (funkce) $3 \sin t + 0 \cos t$ pomocí souřadnic v bázi $\{\cos t, \sin t\}$ — protože je toto vyjádření jednoznačné, musí být $-a - 2b = 3$ a $-b - 2a = 0$.

Funkce $y = -\sin t + 2 \cos t$ je tedy řešením (15) a obecné řešení (15) můžeme zapsat ve tvaru

$$y(t) = -\sin t + 2 \cos t + e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Zde ovšem narážíme na rozpor — získali jsme nejednoznačné řešení, ačkoliv očekáváme, že pohyb hmotného bodu bude určen jednoznačně. Klíč je v otázce, čím je tento pohyb určen jednoznačně. Odpověď zní: počátečními podmínkami, tedy např. polohou a rychlostí bodu v čase $t = 0$. Budeme-li například požadovat, aby $y(0) = 2$ a $y'(0) = 0$, zjistíme, že

$$2 = y(0) = 2 + C_1, \ \text{a} \ 0 = y'(0) = -1 + C_2,$$

čímž jsou již konstanty C_1, C_2 dány a řešení pohybu daného rovnicí (15) za těchto počátečních podmínek je

$$y(t) = -\sin t + 2 \cos t + e^{-t} \sin t.$$

2 Primitivní funkce

§1. Základní pojmy: definice, příklady

Definice 23: Primitivní funkce
Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce* k funkci f na intervalu I, pokud $\forall x \in I: \; F'(x) = f(x)$ (v krajních bodech I pak máme na mysli příslušné jednostranné derivace F). Primitivní funkci značíme

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme ji též *neurčitý integrál.*

Poznámka o symbolu diferenciálu: Důvod, proč se ve výšeuvedeném symbolu píše zrovna diferenciál, vysvětlíme v kapitole o Riemannově integrálu. I zde existuje analogie se symbolem Δx.

Věta 19: O nejednoznačnosti primitivní funkce
Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ na intervalu I, pak pro každou funkci $G(x)$ primitivní k $f(x)$ na I existuje konstanta c taková, že $\forall x \in I: \; G(x) = F(x) + c$. Naopak každá funkce, pro niž existuje c s touto vlastností, je též primitivní k $f(x)$.

Důkaz: Vyslovili jsme ekvivalenci. Jednodušší tvrzení je, že všechny funkce $G(x)$, k nimž existuje konstanta c, $G(x) = F(x) + c, \forall x \in I$ jsou primitivní k $f(x)$. Není přímějšího postupu, než srovnat toto tvrzení s definicí: $G'(x) = \big[F(x) + c\big]' = F'(x) + c' = f(x) + 0$. Tedy tato část věty je v pořádku.

Opačná implikace se dokáže takto: budeme předpokládat funkci $h(x) = F(x) - G(x)$. Snadno ověříme, že $h'(x) = 0, \forall x \in I$, a bude nás zajímat, zda musí být tudíž funkce $h(x)$ na I konstantní. Důkaz provedeme poměrně jednoduše s využitím vět o střední hodnotě, které nás však čekají až ve čtvrté kapitole. Čtenář nechť se proto zatím spokojí se vcelku názornou představou, případně do paragrafu o větách o střední hodnotě nahlédne.

Poznámka (důležitá): Pakliže hledáme $F(x)$ na *intervalu* $I \cup J$, $I \cap J \neq \emptyset$, je možné najít

$$F_I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na intervalu } I, \quad F_J(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na intervalu } J,$$

přičemž $\forall x \in I \cap J: \; F_I(x) - F_J(x) = c \neq 0$. V takovém případě ale můžeme pomocí předchozí věty ukázat, že např. k $F_I(x)$ existuje taková $G_J(x)$, že $F_I(x) = G_J(x), \forall x \in I \cap J$ — vskutku, pokud je průnikem intervalů jediný bod a, volíme $G_J(x) = F_J(x) + F_I(a) - F_J(a)$. Pakliže je tímto průnikem interval A, použijeme pro $F_I(x)$, $F_J(x)$ na A předchozí větu přímo.

V prvním případě ($I \cap J = \{a\}$) ověřte, že funkce F definovaná na $I \cup J$

$$F(x) = \begin{cases} F_I(x) & \text{pro } x \in I \\ G_J(x) & \text{pro } x \in J \end{cases}$$

má derivaci v bodě a a platí $F'(a) = f(a)$, tedy že F je primitivní funkcí f na $I \cup J$. Návod: určete jednostranné derivace.

Cvičení: V předchozí poznámce nechť $I \cap J = \{a\}$. Položme $F(x) = F_I(x)$ pro $x \in I$ a $F(x) = G_J(x)$ pro $x \in J$. Ukažte, že nová funkce má všude na $I \cap J$ derivaci a že $F'(x) = f(x)$. Speciálně se zaměřte na bod $x = a$.

Věta 20: Základní primitivní funkce

1. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$,
2. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$, $x \neq 0$,
3. $\int (x+a)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + c, \; n \neq -1, \; a \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{Z}$,
4. $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \ln|x+a| + c, \; a \in \mathbb{R}, \; x \neq -a$,

5. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$,
6. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$,

kde c je konstanta nezávislá na x.

Důkaz: Tato tvrzení by si zajisté čtenář zvládl dokázat opět pomocí definice primitivní funkce (tedy zderivováním). Obtíže by snad mohla u bodu 2 činit absolutní hodnota — má-li tvrzení platit pro $x \in \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, můžeme však důkaz provést zvlášť pro x kladná a záporná.

Poznámka: V minulé větě jsme s železnou pravidelností psali primitivní funkce ve tvaru $F(x) + + c$. Konstantu c nazýváme *integrační konstanta* a v dalším textu již nebudeme v jejím případě tolik důslední — budeme vědět, že kteroukoliv primitivní funkci získáme ze spočítané funkce přičtením vhodné konstanty.

Poznámka: Čtenáře možná napadne, proč jsme u bodu 4 kladli požadavek $a \in \mathbb{R}$. Povšimněme si příkladů na konci paragrafu o derivacích. Zvládli jsme derivovat funkce $(x + \alpha)^n, 1/(x + \alpha)^n$ pro $\alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}$, nikoliv však $\ln(x + \alpha)$. Příčina je v tom, že zatímco $z^n,\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}$ je dobře definované číslo, $\ln z,\ z \in \mathbb{C}$ není. Máme tím na mysli, že logaritmus v komplexním oboru *není* jednoznačná funkce; platí například $e^0 = e^{2\pi i} = 1$. Funkce komplexní proměnné se vyznačují některými zvláštnostmi a jejich problematikou se budeme zabývat až ve čtvrtém semestru (kapitola 13); proto také funkci $(z + a)^n$ derivujeme zatím jako součin funkcí a ne jako složenou funkci, neboť vnější funkce z^n by byla $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Věta 21: Integrace součtu
Nechť pro $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existují $\int f(x) \, \mathrm{d}x, \int g(x) \, \mathrm{d}x$ na intervalu I. Pro $c \in \mathbb{C}$ potom existují i $\int [f(x) + + g(x)] \, \mathrm{d}x$ a $\int c.f(x) \, \mathrm{d}x$ a platí

$$\int [f(x) + g(x)] \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \int c.f(x) \, \mathrm{d}x = c \int f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz: Opět triviálně z definice primitivní funkce.

Věta 22: Integrace per partes[16]
Buďte $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s existujícími derivacemi na I. Pokud existuje primitivní funkce k funkci $f(x) \cdot g'(x)$, pak existuje i primitivní funkce k $f'(x) \cdot g(x)$ a platí

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz: Zderivujeme-li pravou i levou stranu této rovnosti obdržíme tentýž výraz, tedy opět důkaz z definice. Stojí za povšimnutí, že tento vztah je vlastně „zintegrovaná“ věta o derivaci součinu funkcí (napište si ji).

Příklad: Vypočtěme $\int x \cdot e^x \, \mathrm{d}x$.

Podle značení z předchozí věty položíme $f(x) = x,\ f'(x) = 1,\ g'(x) = e^x,\ g(x) = e^x$, a můžeme psát

$$\int x \cdot e^x \, \mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, \mathrm{d}x = x \cdot e^x - e^x.$$

Příklad: Spočtěme $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

Tentokrát použijeme funkce $f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ g'(x) = 1,\ g(x) = x$:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - x.$$

Cvičení: Spočítejte $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x, \int \arcsin x \, \mathrm{d}x, \int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$. Návod: v prvních dvou případech použijte triku s „vložením jedničky“ z minulého příkladu, v třetím případě integrujte dvakrát per partes.

[16] Integrace po částech.

Příklad: Určete $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

Vezměme $f(x) = \sin^{n-1} x,\ g'(x) = \sin x$. Pak platí:

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\sin^{n-1} x \cos x - \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos x(-\cos x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní označíme $I_n(x) = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x,\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n(x) = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}(x) - (n-1)I_n(x)$$
$$I_n(x) = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x).$$

Takto jsme sice přímo integrál nespočetli, avšak získali jsme rekurentní vzorec, který když budeme dostatečně– (konečně–) krát opakovat, dojdeme k cíli[17].

Věta 23: O substituci

Buď φ zobrazení intervalu I do intervalu J, nechť existuje $\varphi'(x)$ na I. Potom

1. existuje-li $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ na J, existuje i $\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ a je rovná $F\big(\varphi(t)\big)$.
2. Pokud je navíc φ prosté a $\varphi'(x) \neq 0$ na I, pak platí pro funkci $G(t) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ vztah $G\big(\varphi_{-1}(x)\big) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: První tvrzení potvrdíme snadno zderivováním za použití věty o derivaci složené funkce. Tvrzení druhé ověříme stejným způsobem, jen ještě s využitím věty o derivaci inverzní funkce — budeme psát $t = \varphi_{-1}(x), x = \varphi(t)$:

$$G'\big(\varphi_{-1}(x)\big) = G'(t)\cdot\varphi'_{-1}(x) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x).$$

Poznámka: Tato věta nás opravňuje provést při integrování novou „úpravu“:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{x=\varphi(t)\\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}}{\longleftrightarrow} \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

přičemž šipce doleva odpovídá první část věty, šipce doprava část druhá. Například pokud chceme spočítat integrál nalevo, můžeme místo něj počítat integrál napravo („převést jej na tento integrál“) a druhý bod věty nám zaručí, že ve vypočtené funkci $G(t)$ se můžeme substitucí $t = \varphi_{-1}(x)$ vrátit k proměnné x a že funkce $G\big(\varphi_{-1}(x)\big)$ je skutečně hledanou primitivní funkcí k f.

Příklad: Vypočtěme $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\ln^2 x. \qquad \begin{array}{l} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Používáme druhý bod věty přesně podle předchozí poznámky.

Poznámka navíc: Druhý bod ovšem můžeme formulovat také jinak:

Věta 24:

Nechť existuje $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ na I a budiž $\varphi(t)$ funkce zobrazující interval J do I, k níž existuje funkce inverzní. Potom na J existuje $G(t) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, přičemž $G\big(\varphi_{-1}(x)\big)$ je primitivní funkcí k $f(x)$.

Poznámka: Požadavek na existenci $F(x)$ může být v praxi často zastoupen silnějším tvrzením, že $f(x)$ je spojitá. Existenci inverzní funkce k $\varphi(t)$ lze zaručit taktéž silnějším požadavkem monotonie — není ale nutné, aby $\varphi(t)$ měla nenulové derivace na J.

[17] Náš vzoreček funguje pro $n \geq 2$, tedy skončíme ve chvíli, kdy budeme počítat I_1 nebo I_0. Ani jeden z těchto integrálů však nepatří mezi ty obtížnější.

Důkaz: Zde již poznáváme přímý důsledek prvního bodu předchozí věty. Tak je zajištěna existence $G(t) = F\big(\varphi(t)\big)$. Protože k $\varphi(t)$ existuje inverzní funkce, lze v této rovnosti substituovat $t = \varphi_{-1}(x)$, čímž docházíme ke vztahu $G\big(\varphi_{-1}(x)\big) = F(x)$, tedy $G\big(\varphi_{-1}(x)\big)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

Poznámka (triviální): Nezapomínejme na to, že až po zasubstituování provedeme integraci, získáme výraz v jiné proměnné než jsme měli na začátku. Je tedy nutné provést zpětnou substituci.

Příklad: Určeme $\int 1/(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \qquad x = t^2$$
$$= 2(t - \ln|1+t|) = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}). \qquad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

Úmluva: V dalším se již nebudeme při integrování striktně držet zápisu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, ale budeme se symbolem $\mathrm{d}x$ nakládat jako s řádným činitelem (toto platí pouze z hlediska zápisu!): budeme například psát $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ místo $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Na závěr tohoto úvodního paragrafu spočítáme pomocí substituce ještě dva užitečné integrály.

Příklad: Spočtěme $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \qquad t = x + \tfrac{p}{2},\quad \alpha^2 = q - \tfrac{p^2}{4},\ \alpha > 0$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{\alpha}+1\right)^2} = \qquad \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\alpha}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg} z = \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-p^2/4}}. \qquad z = \frac{t}{\alpha},\ \mathrm{d}z\ = \mathrm{d}t.$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{(ax+b)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$ za podmínky $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

$$\int \frac{(ax+b)\,\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\int \frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{x^2+px+q} + \int \frac{(b-\frac{ap}{2})\,\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \qquad t = x^2+px+q$$
$$= \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\ln|t| + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \qquad \mathrm{d}t = 2x+p$$
$$= \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}(x+p/2).$$

§2. Integrace racionálních funkcí

Obsah této kapitoly je nutným předpokladem pro zvládnutí integrace racionálních lomených funkcí. Dokážeme zde několik málo vět, v podstatě jen věty nezbytné pro další rozvoj schopnosti integrovat, která je motivem kapitoly.

Definice 24: Polynom, stupeň polynomu, kořen polynomu
Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, resp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkce. Nechť existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, resp. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Takovou funkci f nazveme *polynomem jedné reálné proměnné nad tělesem* $\mathbb{R}$*, resp.* $\mathbb{C}$. Tuto skutečnost formalizujeme symbolikou $f \in \mathbb{R}[x]$, resp. $f \in \mathbb{C}[x]$. *Stupněm polynomu* P nazveme nezáporné celé číslo

k, pokud $a_k \neq 0$ a zároveň pro $i > k$ je $a_i = 0$. Symbolem pro výše uvedenou skutečnost je $k = \mathrm{st}(P)$. Pro polynom $P(x) \equiv 0$ stupeň $st(P)$ nedefinujme. *Kořenem* polynomu P nazveme každé číslo $a \in \mathbb{C}$, pro nějž $P(a) = 0$. Řekneme, že tento kořen je ν*-násobný* právě tehdy, když $\forall z \ \in \mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$ lze P zapsat ve tvaru $P(z) = R(z) \cdot (z-a)^\nu$, kde $R(z)$ je polynom, jehož a není kořenem.

Úmluva: Výraz polynom jedné reálné proměnné nad tělesem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ budeme zjednodušovat na výraz reálný, resp. komplexní polynom.

Polynom P identicky rovný nule budeme zapisovat $P \equiv 0$.

Cvičení: Provedením sčítání, resp. násobení ukažte, že jsou-li p, q dva nenulové polynomy, pak $\mathrm{st}(p \cdot q) = \mathrm{st}(p) + \mathrm{st}(q)$ a $\mathrm{st}(p+q) \leq \max\{\mathrm{st}(p), \mathrm{st}(q)\}$.

Poznámka: Polynomy mohou rozdělit množinu $\mathbb{R}$ do dvou disjunktních množin, řekněme T a A, na základě schopnosti čísla nebýt či být kořenem rovnice $P(x) = 0$, kde P je polynom s *celočíselnými* koeficienty, tj. $P \in \mathbb{Z}[x]$. Formálně zapsáno $A = \{x \in \mathbb{R} | \ \exists P \in \mathbb{Z}[x] \wedge P(x) = 0\}$, $T = \mathbb{R} \setminus A$. Čísla z T se nazývají *transcendentní* a čísla z A *algebraická*. Racionální čísla jsou zřejmě podmnožinou A, neboť číslo $x = \frac{p}{q}$ je kořenem rovnice $qx - p = 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$; do A ale patří typicky i „odmocniny“ z racionálních čísel, například $\sqrt{2}$, $\sqrt{3+\sqrt{2}}$. Naopak T je podmnožinou iracionálních čísel. Dnes víme, že např. e i π jsou transcendentní, viz např. B. Novák: Vybrané partie z teorie čísel či A. V. Šidlovskij: Diofantovy približenija i transcendentnyje čisla.

Nyní uvedeme velmi důležitou větu nazývanou základní věta algebry (ZVA). Zatím ji však budeme používat bez důkazu, neboť ten se opírá teorii funkcí komplexní proměnné, jíž se budeme zabývat v kapitole 13.

Věta 25: Základní věta algebry
Buď P polynom stupně alespoň prvého. Pak P má alespoň jeden kořen v množině komplexních čísel.

Věta 26: O dělení polynomů
Buďte P, Q nenulové polynomy. Existuje právě jeden polynom S a právě jeden polynom R, tak aby identicky platilo $P = Q.S + R$ a R splňovalo podmínku $\mathrm{st}(R) < \mathrm{st}(Q)$ nebo $R \equiv 0$.

Důkaz: Idea je velice názorná; spočívá v algoritmu dělení polynomů.
1. Existenci ukážeme tak, že polynomy R, S zkonstruujeme. Budeme postupovat indukcí dle $\mathrm{st}(P)$. Pro $\mathrm{st}(P) = 0$ je věta (26) triviální, a proto další přenecháváme čtenáři. Návod: rozdělte důkaz na dva případy $\mathrm{st}(Q) = 0$ a $\mathrm{st}(Q) \geq 1$.
Předpokládejme platnost věty (26) pro polynomy P stupně nejvýše $p-1$, vyvoďme její platnost i pro polynomy P stupně p.

Je-li $\mathrm{st}(Q) > \mathrm{st}(P)$, zvolme $S \equiv 0$ a $R = P$. Tehdy jistě $\mathrm{st}(R) = \mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$, což bylo dokázat.

Je-li $\mathrm{st}(Q) \leq \mathrm{st}(P)$, označme $q = \mathrm{st}(Q)$ a definujme $r(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$, kde a_p resp. b_q je koeficient při nejvyšší mocnině v polynomu P, resp. Q. Polynom r je volen tak, aby $\mathrm{st}(P - r \cdot Q) \leq \mathrm{st}(P) - 1$

$$P(x) - r(x) \cdot Q(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \ldots + a_0 - a_p x^p - b_{q-1} \frac{a_p}{b_q} x^{p-1} - \ldots - b_0 \frac{a_p}{b_q} =$$
$$= x^{p-1} \left(a_{p-1} - b_{q-1} \frac{a_p}{b_q} \right) + \ldots$$

Pro $P - r \cdot Q$ potom ale dle indukční premisy nalezneme R, s takové, aby $P - r \cdot Q = s \cdot Q + R$, tj. $P = (s+r) \cdot Q + R$. Tím jsem nalezli $S = s \ + r$ a R, čímž byla existence dokázána.
2. Jednoznačnost R, S. Předpokládejme, že existují dva různé polynomy S_1, S_2 a k nim polynomy R_1, R_2 tak, že jsou splněny rovnosti

$$P = S_1 Q + R_1, \qquad P = S_2 Q + R_2.$$

Srovnáním máme $Q \cdot (S_1 - S_2) = R_2 - R_1$. Jde o identitu dvou podle předpokladu nenulových polynomů, pročež tyto polynomy musí být identické (viz lemma o rovnosti polynomů níže). To je ovšem spor, neboť mají různé stupně (viz cvičení výše).

Definice 25: Racionální lomená funkce
Funkci
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad D_R = \{z \in \mathbb{R}|\ Q(z) \neq 0\}$$
nazveme *racionální lomenou funkcí*. Zobecnění pro komplexní z je zřejmé.

Příklad: Vydělme (ve smyslu předchozí věty) $(x^2-1)^3 : (x^4+1)$.

$$\begin{array}{l}
(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) : (x^4+1) = x^2 - 3 \\
\underline{-x^6 \qquad\quad - x^2 \qquad\quad} \\
\qquad -3x^4 + 2x^2 - 1 \\
\qquad\ \ \underline{3x^4 \qquad\quad + 3 \quad} \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2 + 2
\end{array}$$

Píšeme tedy $(x^2-1)^3 = (x^2-3)\cdot(x^4+1) + 2x^2 + 2$.

Cvičení: Dokažte, že množina všech polynomů nad tělesem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným, resp. komplexním číslem, jak je znáte ze střední školy, je vektorovým prostorem nad tělesem reálných, resp. komplexních čísel. Ukažte na základě ZVA, že se jedná o prostor nekonečné dimenze, najděte jednu bázi tohoto prostoru.

Lemma:
Je-li $P(z)$ polynom a je-li $P(z_0) = 0$, pak $P(z)/(z-z_0)$ je také polynom, jinými slovy „dělení vyjde beze zbytku".

Důkaz lemmatu: Použijeme větu (26). Existují polynomy R a S, takové, že platí $P(z) = (z-z_0)\cdot \cdot S(z) + R(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Polynom R ovšem musí být pro všechna z roven konstantě c, neboť jeho stupeň je nula nebo dokonce není definován. Pokud do rovnosti dosadíme $z = z_0$, dostaneme $R(z_0) = 0$, tedy $R \equiv 0$.

Věta 27: O rozkladu na kořenové činitele
Buď $n \in \mathbb{N}$, $P(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i$ a $a_n \neq 0$. Potom existují $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{C}$ a $\nu_1, \ldots, \nu_s \in \mathbb{N}$ taková, že

1. pro každé $i = 1, \ldots, s$ je z_i kořen P násobnosti ν_i,
2. všechna z_i, $i = 1, \ldots, s$ jsou po dvou různá,
3. $n = \nu_1 + \ldots + \nu_s$ a
4. pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $P(z) = a_n \prod\limits_{i=1}^{s} (z - z_i)^{\nu_i}$.

Množina kořenů $\{z_1, \ldots, z_s\}$ a jim příslušejících násobností $\{\nu_1, \ldots, \nu_s\}$ je až na pořadí určena jednoznačně.

Poznámka: Zápis v bodu 4 nazýváme kořenový rozklad polynomu P. Bod 3 znamená, že pokud každý kořen počítáme včetně jeho násobnosti (tedy tolikrát, kolik je jeho násobnost), má každý polynom stupně n právě n kořenů v $\mathbb{C}$.

Důkaz: Indukcí podle stupně polynomu n; nejprve existence. Případy $n = 0, 1$ jsou triviální. Nechť tvrzení věty platí pro všechny polynomy stupně nejvýše n a nechť P je polynom stupně $n+1$. Podle ZVA má P alespoň jeden kořen $\widetilde{z}$ v $\mathbb{C}$ a podle lemmatu je $\widetilde{P}(z) = P(z)/(z-\widetilde{z})$ také polynom. Z cvičení za definicí (24) plyne, že $\widetilde{P}$ je stupně nejvýše n, pročež se na něj vztahuje indukční předpoklad. Existují tedy $\{z_1, \ldots, z_s\}$ a $\{\nu_1, \ldots, \nu_s\}$ splňující 1.–4. bod věty. Dále konstruujeme množinu kořenů a jejich násobností pro polynom P. Pokud $\widetilde{z} = z_i$, pak množina kořenů zůstane nezměněna a u násobností se změní pouze ν_i na $\nu_i + 1$. Pokud $\widetilde{z}$ není kořenem $\widetilde{P}$, pak jej zahrneme do množiny kořenů P jako $z_{s+1} = \widetilde{z}$ s násobností $\nu_{s+1} = 1$. Body 1–4 zřejmě zůstanou v platnosti i pro P. Povšimněme si, že a_n v rozkladu dle bodu 4 je zároveň koeficientem u nejvyšší mocniny polynomu P.

Jednoznačnost dokážeme opět indukcí podle n. Pro $n = 0, 1$ je situace opět triviální, indukční krok vypadá takto. Nechť

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{s} (z - z_i)^{\nu_i} = a_n \prod_{i=1}^{\tilde{s}} (z - \tilde{z}_i)^{\tilde{\nu}_i} \overset{\mathrm{df}}{=} \widetilde{P}(z).$$

Číslo z_1 je kořenem P a musí být i kořenem $\widetilde{P}$, neboť jinak by $\widetilde{P}(z_1) \neq P(z_1) = 0$. Polynomy

$$Q(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{P(z)}{z - z_1} = \frac{\widetilde{P}(z)}{z - z_1} \overset{\mathrm{df}}{=} \widetilde{Q}(z)$$

jsou ovšem stupně $n - 1$, a tedy pro ně platí indukční předpoklad, tedy mají stejný kořenový rozklad. Totéž pak platí i pro P a $\widetilde{P}$.

Lemma o rovnosti polynomů:
Nechť $P(x)$ a $R(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše n. Pokud alespoň pro $n + 1$ různých $x \in \mathbb{C}$ platí $P(x) = R(x)$, jsou oba polynomy identické.

Důkaz lemmatu: Sporem. Pokud jsou P, R různé, pak polynom $Q = P - R$ má stupeň nejvýše $\max\{\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(R)\} \leq n$. Podle předpokladu má ale $n + 1$ kořenů, což je spor.

P o z n á m k a : Lehce se nahlédne, že je-li P reálný polynom a x jeho kořenem, pak i $\overline{x}$ je jeho kořenem. Buď x kořenem reálného polynomu P a spočteme $P(\overline{x})$.

$$0 = P(x) = \overline{P(x)} = \overline{a_n}\,\overline{x}^n + \ldots + \overline{a_o} = a_n x^n + \ldots + a_o = P(\overline{x}),$$

což bylo ukázat. Tato poznámka usnadní počínání při hledání kořenů nějakého polynomu.

Lemma o kroku při rozkladu na parciální zlomky:
Buďte P, Q nenulové polynomy, $\mathrm{st}(Q) > \mathrm{st}(P)$. Je-li x kořenem Q násobnosti ν, pak $\exists! A \in \mathbb{C}$ a $\exists! \widetilde{P} \in \mathbb{C}[z]$ definovaný rovnicí

$$\frac{P}{Q}(z) = \frac{A}{(z - x)^\nu} + \frac{\widetilde{P}(z) \cdot (z - x)}{Q(z)},$$

aby pro $\widetilde{P}$ platilo buď $\mathrm{st}(\widetilde{P}) < \mathrm{st}(Q) - 1$, nebo $\widetilde{P} \equiv 0$.

Důkaz: Nechť $Q(z) = (z - x)^\nu . \widetilde{Q}(z)$ a $\widetilde{Q}(x) \neq 0$. Spočtěme

$$\frac{P(z)}{\widetilde{Q}(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} (z - x)^\nu = A + \frac{\widetilde{P}(z)}{\widetilde{Q}(z)} \cdot (z - x).$$

Otázkou je, zda skutečně existují číslo A a polynom $\widetilde{P}$ takové, aby byla poslední rovnost splněna pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Zvolíme-li v předešlé rovnici $z = x$, vyjde $P(x)/\widetilde{Q}(x) = A$, pro všechna z může tedy může vyhovovat pouze toto A. Spočtěme dále $\widetilde{P}(z)$, které bude-li existovat, pak také pouze právě jedno, což plyne z jednoznačnosti A a z jednoznačnosti rovnosti polynomů. Stačí dokázat, že $\widetilde{P}(z)$ existuje a má požadované vlastnosti. Vypočteme

$$\widetilde{P}(z) = \frac{P(z)}{z - x} - \frac{A \cdot Q(z)}{(z - x)^{\nu+1}} = \frac{P(z) - A \cdot \widetilde{Q}(z)}{z - x}.$$

Zatím není zřejmé, že se jedná o polynom — zatím vidíme pouze racionální lomenou funkci. Uvědomíme-li si ale, že A jsme zvolili tak, aby x bylo kořenem $P(z) - A\ \widetilde{Q}(z)$, zjistíme jako již několikrát v důkazech předchozích vět, že lze tento polynom vydělit beze zbytku polynomem $z - x$.

Existence jediného možného $\widetilde{P}(z)$ je ukázána, spočtěme ještě $\mathrm{st}(\widetilde{P})$. Jelikož je jistě $\mathrm{st}(Q) > \mathrm{st}(\widetilde{Q})$ a $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$ dle předpokladu lemmatu, můžeme psát $\mathrm{st}(\widetilde{P}) < \mathrm{st}\left(\frac{Q(z)}{z-x}\right) = \mathrm{st}(Q) - 1$. Pokud vyjde $\widetilde{P} \equiv 0$ pak tato rovnost postrádá smysl, nicméně tvrzení lemmatu je splněno rovněž. Důkaz je uzavřen.

P o z n á m k a : Další věta je finálním výsledkem našeho snažení. Tvzení lemmatu ještě upravíme; zlomek zapíšeme ve tvaru

$$\frac{P}{Q}(z) = \frac{A}{(z - x)^\nu} + \frac{\widetilde{P}(z).(z - x)}{Q(z)} = \frac{A}{(z - x)^\nu} + \frac{\widetilde{P}(z)}{Q_1(z)},$$

kde $Q_1(z)$ je polynom vzniklý vydělením $Q(z)$ polynomem $z-x$, což lze beze zbytku, neboť x je kořenem Q.

Věta 28: O rozkladu na parciální zlomky
Buďte $Q(z)$, $P(z)$ nenulové polynomy stupně $n \in \mathbb{N}$, buďte $x_1, \ldots, x_s$ kořeny $Q(z)$ s násobnostmi $\nu_1, \ldots, \nu_s$. Existují $A_{ij} \in \mathbb{C}$, kde $i = 1, 2, \ldots, s$ a $j = 1, \ldots, \nu_i$, že

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{\nu_1} \frac{A_{1j}}{(z - x_1)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{\nu_s} \frac{A_{sj}}{(z - x_s)^j}. \tag{17}$$

Důkaz: Stačí domyslet (indukcí) předešlé lemma. Důkaz nebude přísně formální, složitý zápis sumací by spolu s indukcí věc jen poněkud zatemňoval. Dle lemmatu výše existuje A a $P_1(z)$, že

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z - x_1)^{\nu_1}} + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}.$$

Jelikož dle lemmatu $\mathrm{st}(P_1) < \mathrm{st}(Q_1)$, můžeme jej znovu použít i pro tuto dvojici. Lemma zaručí existenci $B \in \mathbb{C}$ a $P_2(z)$ takových , že $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{B}{(z-x)^{\nu_1 - 1}} + \frac{P_2(z)}{Q_2(z)}$. Psali jsme ve jmenovateli $(z - x)^{\nu_1 - 1}$, protože x_1 je násobnosti $\nu - 1$ v Q_1, neboť $Q_1(z) = \frac{Q(z)}{z-x}$, jak jsme uvedli výše. Takto lze postupovat, dokud x_1 bude kořenem Q_i. Je zřejmé, že k tomu dojde po ν krocích, protože tehdy x_1 nebude kořenem Q_ν. Dále vezmeme kořen x_2 a budeme rozkládat dle lemmatu racionální lomenou funkci P_{ν_1}/Q_{ν_1}, kde místo kořene x dosadíme do tvrzení lemmatu x_2. Je zřejmé (korektněji indukcí), že takto dospějeme k rozkladu ve větě, kterou máme dokázat.

Poznámka: Všimněme si opět reálných racionálních lomených funkcí. Jak již víme, je-li x kořenem reálného polynomu, pak i $\overline{x}$ je jeho kořenem, dokonce téže násobnosti jako x. Rozložíme-li racionální funkci na parciální zlomky, pak jistě ke každému x nalezneme $A_{kl}/(z-x)^l$, a nebude-li x reálné, naleznu i $A_{ml}/(z-\overline{x})^l$. Jelikož předpokládáme $R(z) = P(z)/Q(z)$ reálnou, můžeme i P a Q upravit tak, aby byly reálné, a můžeme psát $P(z)/Q(z) = \overline{P(z)/Q(z)} = P(\overline{z})/Q(\overline{z})$, a tedy pro $z \in \mathbb{R}$

$$\ldots + \frac{A_{kl}}{(z - \overline{x})} + \frac{A_{ml}}{(z - x)} + \ldots = \ldots + \frac{\overline{A_{kl}}}{(z - \overline{\overline{x}})} + \frac{\overline{A_{ml}}}{(z - \overline{x})} + \ldots$$

Porovnáme-li zlomky se stejnými jmenovateli, dostaneme $A_{kl} = \overline{A_{ml}}$, neboť $\overline{\overline{x}} = x$. Budeme-li integrovat, přepíšeme vždy

$$\frac{A_{kl}}{(z-x)} + \frac{A_{ml}}{(z-\overline{x})} = \frac{A_{kl}(z-\overline{x}) + A_{ml}(z-x)}{(z-x)(z-\overline{x})} = \frac{A_{kl}(z-\overline{x}) + A_{ml}(z-x)}{(z^2 - z(x+\overline{x}) + |x|^2)},\ z \in \mathbb{R},$$

kde jest $\overline{x} + x$ i $|x|^2$ reálné. Výraz v čitateli má rovněž reálné hodnoty, neboť

$$\overline{A_{kl}(z-\overline{x}) + A_{ml}(z-x)} = A_{ml}(z-x) + A_{kl}(z-\overline{x}).$$

Dostáváme tím pádem funkci, kterou již umíme snadno integrovat — viz příklady na konci minulého paragrafu.

Poznámka: Zřejmě lze dodefinovat polynom jako funkci komplexní proměnné, všechny citované věty by měly své analogie. Avšak vzhledem k tomu, že pojem limity, tedy i derivace jsou zavedeny jen pro reálné funkce, je i pojem primitivní funkce, dík kterému byla tato pasáž o polynomech připravena, budován pro reálný definiční obor, a právě proto jsme se omezili jen na $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Věta o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky nás opravňuje k postupu, který by se dal shrnout následujícím způsobem (předpokládáme již, že stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele a výraz ve jmenovateli je rozložen na součin mocnin *navzájem různých* lineárních dvojčlenů):

1. Zakryjeme jeden z činitelů ve jmenovateli (i s jeho mocninou) a číslo, jež je jeho kořenem dosadíme do zbylého výrazu (tedy jeho nezakryté části).
2. Do vznikajícího rozkladu zkoumané funkce připíšeme výraz, v jehož čitateli je toto číslo a jmenovateli zakrytý[18] výraz (včetně jeho mocniny).

[18] „Zakrývání“ $(z - x_s)^{\nu_s}$ můžeme chápat tak, že rovnost (17) tímto výrazem vynásobíme a do vzniklé rovnosti dosadíme x_s. Na pravé straně pak budou všechny členy obsahovat $z - x_s$ alespoň v první mocnině, a budou se tedy rovnat nule s výjimkou čísla $A_{s\nu_s}$, které zbylo ze zlomku $A_{s\nu_s}/(z - x_s)^{\nu_s}$.

3. Body 1. a 2. opakujeme do té doby, než vyčerpáme všechny kořeny jmenovatele.

4. Pokud násobnost všech kořenů jmenovatele byla právě jedna, jsme již hotovi. V opačném případě v rozkladu stále chybějí členy typu $\frac{a}{(x-x_k)^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$ je menší než násobnost kořene x_k. Proto celý náš dosavadní částečný rozklad odečteme od rozkládané racionální funkce. Pokud jsme upravovali správně, vznikne nám po krácení racionální funkce, jejíž jmenovatel bude vytvořen ze jmenovatele funkce původní tak, že snížíme násobnosti všech kořenů o 1 (jednonásobné nám tedy vypadnou). V čitateli bude obecný polynom stupně nižšího než polynom ve jmenovateli.

5. Získanou „jednodušší“ funkci opět rozkládáme podle bodu 1.

Cvičení: Tvrzení podané na konci bodu 4. si promyslete — je triviálním důsledkem lemmatu použitého při důkazu věty o rozkladu na parciální zlomky.

Příklad: Rozložme na parciální zlomky

$$\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3} = \frac{(t^2-1)^2}{(t+i)^3(t-i)^3}.$$

Pro $t = i$ je $\frac{(t^2-1)^2}{(t+i)^3} = \frac{i}{2}$, podobně pro $t = -i$ je $\frac{(t^2-1)^2}{(t-i)^3} = -\frac{i}{2}$. Všimněme si, že čísla v čitatelích zlomků příslušných komplexně sdruženým kořenům stejné násobnosti jsou skutečně komplexně sdružená, jak jsme uvedli v poznámce výše — ušetří nám to příště práci. Získáváme tak „částečný“ rozklad, jak se o něm mluví v bodu 4. Odečteme jej od původního zlomku:

$$\frac{(t^2-1)^2}{(t-i)^3(t+i)^3} - \left(\frac{\frac{i}{2}}{(t-i)^3} + \frac{-\frac{i}{2}}{(t+i)^3}\right) = \frac{t^4-2t^2+1-(-3t^2+1)}{(t-i)^3(t+i)^3} =$$
$$= \frac{t^2(t-i)(t+i)}{(t-i)^3(t+i)^3} = \frac{t^2}{(t-i)^2(t+i)^2}.$$

Dále postupujeme stejným způsobem: $\frac{t^2}{(t-i)^2(t+i)^2}$ „částečně“ rozložíme na $\frac{\frac{1}{4}}{(t-i)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{(t+i)^2}$ a po odečtení tohoto výrazu získáme zlomek $\frac{\frac{1}{2}}{t^2+1}$, který bychom sice mohli popsaným způsobem dále rozkládat, avšak pro účely pozdější integrace je pohodlnější jej ponechat v tomto tvaru. Celý rozklad tedy je

$$\frac{\frac{i}{2}}{(t-i)^3} + \frac{-\frac{i}{2}}{(t+i)^3} + \frac{\frac{1}{4}}{(t-i)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+i)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{t^2+1}.$$

§3. Důležité substituce: vzorové příklady

V následujícím označíme $R(x)$, $R(x,y)$ libovolné racionální funkce jedné nebo dvou proměnných. Racionální funkce dvou proměnných je podíl dvou polynomů dvou proměnných[19], funkce „racionální“ vůči oběma proměnným, tedy, položíme-li kteroukoliv z těchto proměnných rovnou konstantě, obdržíme racionální funkci.

I. $\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x$.

Po substituci $y = e^{\alpha x}$, a tudíž $\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha y}\,\mathrm{d}y$ přejdeme k integrálu z $R(y)\frac{1}{\alpha y}\,\mathrm{d}y$, tedy racionální funkce.

II. $\displaystyle\int \frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Substitucí $y = \ln x$ (tj. $\mathrm{d}x/x = \mathrm{d}y$) přejdeme opět k integrálu racionální funkce proměnné y.

[19] Polynom dvou proměnných definujeme jako $P(x,y) = \sum\limits_{0 \le i+j \le n} a_{ij}x^i y^j$. Například $R(x,y) = x^2y + 2y - x^4$.

III. $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x, \ ad - bc \neq 0, \ s \in \mathbb{N}.$

Volíme substituci

$$t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{z čehož} \quad x = \frac{-dt^s + b}{ct^s - a} \quad \text{a} \quad \mathrm{d}x = \frac{(ad-bc)st^{s-1}}{(ct^s - a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad: Řešte $\int x^2/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Rozšíříme-li integrovaný zlomek $\sqrt{1+x}$, dostáváme

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1+x} x^2\,\mathrm{d}x = \int t\frac{t^2+1}{2t} \cdot \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \qquad \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

$$= \int 2\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}t = \int \left[\frac{i}{(t-i)^3} + \frac{-i}{(t+i)^3} + \frac{\frac{1}{2}}{(t-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(t+i)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{-\frac{i}{2}}{(t-i)^2} + \frac{\frac{i}{2}}{(t+i)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{t-i} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+i} + \operatorname{arctg} t = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t = \frac{t(1-t^2)}{(t^2+1)^2} + \operatorname{arctg} t$$

Závěrem samozřejmě můžeme přejít zpět k proměnné x, dosazením $t = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Tento postup je univerzální. Existuje ovšem i rychlejší a snadnější cesta k cíli. Vzhledem k výskytu členu $\sqrt{1-x^2}$ zkusíme goniometrickou substituci

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t\,\mathrm{d}t = \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right]\mathrm{d}t = \qquad \begin{array}{l} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t \cos t = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Obezřetný čtenář si již jistě dopočítal výsledek předchozím způsobem a při porovnávání obou výsledků narazil na otázku, zda platí identita $\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\arcsin x$. Ne zcela, platí totiž

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{\pi}{4}, \ \text{neboť}$$

$$\sin\left(2\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\operatorname{arctg} t = \sin^2 \operatorname{arctg} t - \cos^2 \operatorname{arctg} t = \frac{t^2}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} = \frac{2x}{2} = x.$$

Konstanta $\pi/4$ ovšem nevadí, obě vypočtené primitivní funkce se o konstantu lišit mohou.

IV. Eulerovy substituce.

Při řešení $\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,\mathrm{d}x$ mohou nastat celkem čtyři netriviální případy (někdy i dva najednou).

1. $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2), \ x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Pak substituujeme $\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^{\frac{1}{2}} = t$, tedy $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2)$, čímž jsme úlohu převedli na případ 3.

2. $a > 0$. Pak volíme $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$, z čehož vyjádříme $x = (t^2-c)/(b-2\sqrt{a}t)$ a $\mathrm{d}x$ zderivováním tohoto vztahu — zřejmě obdržíme $\mathrm{d}x = R(t)\,\mathrm{d}t$.

3. $c > 0$. Položíme naopak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$ a proměnnou vyjádříme $x = (2\sqrt{c}t - b)/(a-t^2)$, přičemž opět zřejmě $\mathrm{d}x = R(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Kvadratická funkce pod odmocninou nemá kořen v $\mathbb{R}$ a $a \leq 0$ (což mimochodem implikuje $c \leq 0$). Pak ovšem tato funkce nenabývá nezáporných hodnot, tedy její odmocnina není v $\mathbb{R}$ pro žádné x definována. Takové integrály pak lze v rámci teorie funkcí komplexní promenné řešit obdobou postupu bodu (a) pro komplexní kořeny.

Příklad: Řešme Eulerovou substitucí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{-(1+t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \qquad \begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t+x, \quad x = \frac{1-t^2}{2t} \\ \mathrm{d}x = -\frac{1+t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

$$= \int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]\mathrm{d}t = \ln(t-1) - \ln(t+1) = \ln\frac{t-1}{t+1} = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{\sqrt{1+x^2}-x+1}.$$

V. Čebyševovy substituce.

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x, \qquad m,n,p\in\mathbb{Q} \tag{18}$$

umíme řešit pomocí pomocí elementárních funkcí pouze v následujících třech případech:

1. $p\in\mathbb{Z}$. Pak pišme $m = m'/l$, $n = n'/l$, $m',n',l\in\mathbb{Z}$, $l>0$ a $t=\sqrt[l]{x}$, čímž po vyjádření $\mathrm{d}x$ dostáváme funkci t integrovatelnou podle 3.

2. $(m+1)/n\in\mathbb{Z}$, $p=k/s$, $k,s\in\mathbb{Z}$. Pak budiž $t=\sqrt[s]{a+bx^n} \;\Rightarrow\; x=\frac{(t^s-a)^{1/n}}{b^{1/b}}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{nb^{1/n}}(t^s - {}$ ${}-a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}\,\mathrm{d}t$. Snadno se přesvědčíme, že po dosazení do původní funkce dostaneme k integrování racionální funkci

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}(t^s-a)^{\frac{m}{n}}t^k\frac{1}{nb^{1/n}}(t^s-a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int t^{s+k-1}(t^s-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,\mathrm{d}t.$$

3. $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, $p=k/s$, $k,s\in\mathbb{Z}$. Pak položme $t=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, pročež $x=\left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\mathrm{d}x = {}$ ${}= -\frac{a^{1/n}}{n}(t^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}st^{s-1}\,\mathrm{d}t$. Opět dosadíme do původního integrálu a získáme racionální funkci

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{m}{n}} t^k x^{np}\frac{a^{\frac{1}{n}}}{-n}(t^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}st^{s-1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{a^{\frac{m+1}{n}}s}{n}\int (t^s-b)^{-\frac{m}{n}}t^k(t^s-b)^{-p}(t^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}t^{s-1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{a^{\frac{m+1}{n}}s}{n}\int t^{k+s-1}(t^s-b)^{-(\frac{m+1}{n}+p-1)}\,\mathrm{d}t.$$

VI. Goniometrické substituce.

Máme-li provést $\int R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$, vede *vždy* k cíli substituce $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Vyjádříme-li x, získáme po zderivování vztah $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$. Siny a kosiny vyjádříme pomocí následujících rovností:

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$
$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Nyní již máme zřejmě integrovat pouze racionální funkci. V některých případech však lze zavést i jednodušší substituce:

1. platí-li $R(-\cos x,\sin x) = -R(\cos x,\sin x)$, použijeme $y=\sin x$,

2. pokud platí naopak $R(\cos x,-\sin x) = -R(\cos x,\sin x)$, zavedeme neočekávaně $y=\cos x$ a konečně

3. pro $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, ušetří nám práci substituce $y = \operatorname{tg} x$. Zde použijeme vztahů

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$
$$\sin^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$
$$\sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Poznámka: Platí-li předpoklad (a), očekáváme, že integrovaná funkce má tvar $\widetilde{R}(\cos^2 x, \sin^2 x) \cos x$. Doporučená substituce $y = \cos x$ integrál převede na $\widetilde{R}(y^2, 1 - y^2) y \, \mathrm{d}y$. Analogicky v bodě (b). V případě (c) očekáváme tvar $\widetilde{R}(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cos x)$, který přejde substitucí na $\widetilde{R}\big(\frac{1}{1+y^2}, \frac{y^2}{1+y^2}, \frac{y}{1+y^2}\big) \cdot (1+y^2) \, \mathrm{d}y$, tedy opět racionální lomenou funkci y.

Příklad: Při řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sin x - \cos x + 5}, \qquad x \in (-\pi; \pi)$$

užijeme substituce $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, neboť neplatí ani jedna z podmínek pro výhodnější substituce (a–c). Integrál upravíme tedy takto

$$\int \frac{2 \, \mathrm{d}y}{1 + y^2} \frac{1}{\frac{4y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2} + 5} = \int \frac{\mathrm{d}y}{3y^2 + 2y + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}y}{(y + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}} =$$
$$= \frac{3}{5} \int \frac{\mathrm{d}y}{\big((y + \frac{1}{3}) / \frac{\sqrt{5}}{3}\big)^2 + 1} = c_k + \frac{3}{5} \frac{\sqrt{5}}{3} \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{1}{3}}{\sqrt{5}/3} =$$
$$= c_k + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} \tag{19}$$

Poslední integrál jsme řešili vlastně substitucí $z = \big(y + \frac{1}{3}\big) / \frac{\sqrt{5}}{3}$, protože se však jedná o jednoduchou lineární substituci ($z = ay + b$), lze příslušné úpravy snadno provádět i rychleji. Přesto by měl být čtenář schopen celý tento postup detailně rozepsat (zkuste to).

Povšimněme si ještě definičního oboru původně integrované funkce. Pokud bychom jej rozšířili na celou množinu reálných čísel, substituce $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ zřejmě celý tento interval nepokryje, substituci nelze použít pro $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkce však je definována na celém $\mathbb{R}$. Na každém z intervalů $\big((2k - 1)\pi; (2k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$ je nepochybně její primitivní funkce (19). Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce byla spojitá celém $\mathbb{R}$, musí být spojitý i její neurčitý integrál (vlastní derivaci mají pouze spojité funkce). Je tedy třeba zajistit dvě věci: dodefinovat funkce (19) v krajních bodech definičních oborů příslušnými jednostrannými limitami, čímž podle definice zajistíme spojitost funkcí v těchto bodech, a dále tyto funkce navzájem vhodně posunout tak, aby „navazovaly“. Zmiňované jednostranné limity v krajních bodech intervalů jsou $c_k \pm \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$. Aby funkce vytvořená sloučením primitivních funkcí na intervalech $\big((2k - 1)\pi; (2k + 1)\pi\big)$, $\big((2k + 1)\pi; (2k + 3)\pi\big)$ byla spojitá, musí si být obě jednostranné limity v bodě $(2k+1)\pi$ rovny, čímž dostáváme podmínku pro integrační konstanty c_k, c_{k+1} primitivních funkcí na těchto dvou intervalech (jejich rozdíl musí být roven rozdílu těchto limit, tj. $c_{k+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + c_k$). Tato podmínka nám tedy váže navzájem integrační konstanty primitivních funkcí (19) na všech výšeuvedených intervalech, čímž dospíváme ke kýžené primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Všimněme si ještě závěrem, že těchto funkcí je stále nekonečně mnoho — abychom mohli užít podmínku svazující všechny integrační konstanty, musíme nejprve jednu z nich zvolit a zde nejsme ničím omezeni.

3 Limity podruhé a naposled

§1. Nevlastní limity a limity v nevlastních bodech, limity posloupností

Definice 26: Vlastní a nevlastní limita ve vlastním a nevlastním bodě
Mějme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a nechť $(\exists k\ \in\mathbb{R})\big((k;+\infty)\subset \mathrm{D}_f\big)$, resp. $(-\infty;k)\subset \mathrm{D}_f$.
Řekneme, že f má *vlastní limitu v nevlastním bodě* ∞, resp. $-\infty$ rovnou A, což zapisujeme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$, právě když $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists L\in\mathbb{R})(\forall x>L)$, resp. $(\forall x<L)$ platí $|f(x)-A|<\varepsilon$.
Budiž dále $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nechť $\big(\exists U^*(a)\subset\mathbb{R}\big)\big(U^*(a)\subset \mathrm{D}_f\big)$.
Řekneme, že f má *ve vlastním bodě a nevlastní limitu* ∞, resp. $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, právě když $(\forall K\in\mathbb{R})\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x\in U^*(a)\big)$ platí $f(x)>K$, resp. $f(x)<K$.
Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nechť $\exists k\in\mathbb{R}$ tak, že $(k;+\infty)\subset \mathrm{D}_f$, resp. $(-\infty;k)\subset \mathrm{D}_f$.
Pak říkáme, že f má *nevlastní limitu* ∞ *v nevlastním bodě* ∞, resp. $-\infty$, zapsáno $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, právě když $(\forall K\in\mathbb{R})(\exists L\in\mathbb{R})(\forall x>L)$, resp. $(\forall x<L)$ platí $f(x)>K$.
Nevlastní limita $-\infty$ v nevlastním bodě by se definovala analogicky.

Definice 27: Posloupnost
Posloupností reálných nebo komplexních čísel rozumíme zobrazení $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ nebo $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$. Čísla $\varphi(n)=a_n$ pro $n\in\mathbb{N}$ nazýváme členy posloupnosti. Posloupnost zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka: Posloupnost lze zadat buď přímo předpisem pro výpočet n-tého členu, například $a_n = n^2+\sin n$, nebo *rekurentním vzorcem*, tj. udáním prvního či prvních několika členů a předpisu, jak z prvních n členů vypočítat člen $(n+1)$-ní. Příkladem je Fibonacciho posloupnost: $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$. Její prvních několik členů je $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$.

Definice 28: Limita posloupnosti
Řekneme, že *posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* $A\in\mathbb{C}$, což značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, právě když $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)$ $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)$ platí $\big(|a_n-A|<\varepsilon\big)$.

Všechny výšeuvedené definice limit lze shrnout do jedné. K tomu ovšem budeme potřebovat zobecnit pojem okolí a dále se zaměřit i na případy, kdy funkce není definována úplně všude v okolí bodu, v němž vyšetřujeme limitu.

Tedy co budeme rozumět pojmem *okolí* bodu $a\in\mathbb{C}$ o poloměru ε? Definujeme okolí bodu $U(a) = U_\varepsilon(a)=\big\{z\in\mathbb{C}\big|\,|z-a|<\varepsilon\big\}$ a ekvivalentně k tomu definujeme redukované okolí $U^*(a)\overset{\mathrm{df}}{=}U(a)\setminus\{a\}$. K doplnění položíme v reálném oboru $U(\infty)=U_K(+\infty)\overset{\mathrm{df}}{=} df=(K;\infty)$ a $U(-\infty)=U_K(-\infty) = (-\infty;K)$.

Jak jsme si všimli, u posloupností musíme provést jisté úpravy. Je-li posloupnost zadaná zobrazením $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, nelze trvat na požadavku $U(+\infty)\subset \mathrm{D}_\varphi$. Stačí nám ale slabší požadavek $\big(\forall U_K(+\infty)\big)$ $\big(\exists x\in \mathrm{D}_\varphi\big)\big(x\in U_K(+\infty)\big)$. Nyní již můžeme vyslovit definici společnou pro funkce i posloupnosti.

Definice 29: Limita obecně
Nechť f je zobrazení $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}^*$, $A\in\mathbb{R}^*$ nebo $A\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.
Řekneme, že *funkce* f *má v bodě* a *limitu* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, pokud platí zároveň

1. $\big(\forall U^*(a)\big)\big(U^*(a)\cap D_f\neq\emptyset\big)$,
2. $\big(\forall U(A)\big)\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x\in U^*(a)\cap D_f\big)$ platí $f(x)\in U^*(A)$.

Analogicky definujeme jednostranné limity ve vlastním bodě $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)=A$.

Poznámka: Podle této definice je limita posloupnosti speciálním případem limity funkce f s definičním oborem $\mathrm{D}_f=\mathbb{N}$ v bodě $a=+\infty$. Jednostrannou limitu funkce f lze chápat jako limitu funkce zadané stejným předpisem, ale s vhodně zredukovaným definičním oborem.

Příklad: Z definice snadno plyne ekvivalence

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A,\ \text{kde } x_n=n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Obě dvě strany ekvivalence projdou stejně dobře podmínkami, které definice klade. Toto tvrzení bude později také triviálně plynout z Heineho věty.

P o z n á m k a nepovinná: Zopakujme, že na $\mathbb{C}$ definujeme okolí pomocí absolutní hodnoty, zatímco na $\mathbb{R}$ je definujeme přímo zapsáním příslušného intervalu. V prvním případě potom neuvažujeme okolí $+\infty$ nebo $-\infty$, ale prostě ∞, a to podle definice $U_K(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \| \, |z| > K\}$; v definici s absolutní hodnotou by nemělo smysl obracet nerovnost ($|f(x)| < K$), neboť $|z|$ je vždy z $\mathbb{R}^+$. Tato úvaha má ještě další důsledek. V komplexní rovině je „nekonečen“ mnoho: pro každý úhel $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ se můžeme do nekonečna blížit po polopřímce svírající úhel φ s kladnou reálnou poloosou (pro $\varphi = 0$, resp. $\varphi = \pi$ dostáváme již „známá“ $+\infty$ a $-\infty$). Touto definicí okolí nekonečna jsme ovšem *všechna* tato nekonečna nahradili jediným.

Později budeme zkoumat limity na méně obvyklých prostorech[20]. Definice bude vypadat naprosto stejně, budeme ovšem muset vědět, co znamená „okolí bodu a o poloměru $\varepsilon > 0$“. Prostory, v nichž toto víme, nazýváme *topologickými prostory.* Zmíněná okolí samozřejmě musí splňovat určité vlastnosti analogické těm, které můžeme pozorovat u okolí, která jsme definovali na $\mathbb{C}$; zájemce zatím odkážeme na příslušnou literaturu. „Rozumně“ můžeme okolí $U_\varepsilon(a)$ definovat například jako „body, které mají od a vzdálenost menší než ε“. Na zkoumaném prostoru tedy stačí mít definovánu vzdálenost dvou bodů a, b, což na $\mathbb{C}$ může být například $|a - b|$.

P ř í k l a d : Uveďme několik typických funkcí, které mají nevlastní limity v nevlastních bodech.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty.$$

Důkaz první limity je triviální: pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ volíme v definici (26) $L = K$, tedy $U(\infty) = (K; \infty)$. Pro každé x z tohoto okolí nekonečna pak zřejmě je $f(x) = x > K$. Při důkazu druhé a třetí limity se musíme odvolat na vlastnosti exponenciály probírané za definicí (18). Pro dané $K > 0$ zvolíme $L = \ln K$ — v definici se říká, že exponenciála zobrazuje prostě $\mathbb{R}$ na $(0; \infty)$, tedy inverzní funkce logaritmus je definována na celém $\mathbb{R}^+$. Potom pro $x \in (L; \infty)$ je $e^x > K$, neboť $e^L = K$ a platí $e^a > e^b$ pro $a > b$. U logaritmu podobně pro $K \in \mathbb{R}$ volíme $L = e^K$ a důkaz dokončíme analogicky.

Dále se budeme zabývat základními tvrzeními pro limity při takto rozšířených definicích.

Věta 29: Jednoznačnost limity v $\mathbb{R}^*$, rozšířená věta (1)
Každé zobrazení má v daném bodě $a \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Pro $a \in \mathbb{R}$ a případ, že $\exists U^*_\delta(a) \subset \mathrm{D}_f$ jsme již důkaz provedli dříve. Zkusíme nyní případ $a = +\infty$. Myšlenka je stejná jako při důkazu věty (1). Předpokládáme existenci dvou různých limit A, B a pak zvolíme dvě okolí bodů A, B tak malá, aby se nepřekrývala. Na dostatečně malém okolí a pak musí být všechny hodnoty f jak v prvním, tak v druhém okolí, což je spor. Přitom se opíráme o předpoklad, že v libovolně malém okolí bodu a existuje alespoň jeden bod, v němž je hodnota funkce definována.

Věta 30: Limita absolutní hodnoty, rozšířená věta (4)
Jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$, pak $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |A|$, přičemž pokládáme $|\pm\infty| \stackrel{\mathrm{df}}{=} +\infty$.

P ř í k l a d : Posloupnost $a_n = (-1)^n n$ nemá limitu, ovšem $|a_n|$ má limitu $+\infty$.

Věta 31: O chování funkce mající limitu, rozšířená věta (5)
Budiž $a \in \mathbb{R}^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

1. Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak platí $(\forall p, q \in \mathbb{R})(p < A < q)\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}_f\big)\big(p < f(x) < q\big)$;
2. je-li $A = +\infty$, resp. $A = -\infty$, pak $(\forall K \in \mathbb{R})\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}_f\big)\big(f(x) > K\big)$, resp. $\big(f(x) < K\big)$.

   V případě $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podobně.
3. pokud $A \in \mathbb{C}$, potom $\exists K > 0$, $\exists U^*(a)$, že $\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}_f$ je $|f(x)| < K$;
4. pokud $A = \infty$, potom $\forall K > 0$, $\exists U^*(a)$, že $\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}_f$ je $|f(x)| > K$;

[20] Množinách prvků s definovanými operacemi mezi těmito prvky. Viz například vektorové prostory.

P o z n á m k a : V dalších větách budeme pro jednoduchost předpokládat, že definiční obory uvažovaných funkcí jsou stejné. Věty je možno snadno rozšířit i na případ, kdy jsou definiční obory shodné alespoň na malém okolí, v němž limity vyšetřujeme — stačí opět místo původních funkcí uvažovat funkce zadané sice stejným předpisem, ale s vhodně zmenšenými definičními obory. Jiné případy se v praxi vyskytují zřídka a čtenář bude časem jistě sám schopen podle potřeby věty upravovat.

Věta 32: Limita součtu, součinu, podílu, rozšířená věta (7)
Budiž $a \in \mathbb{R}^*$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g$. Je-li splněno $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{C}$ pak následující limity existují a jsou rovny:

$$\lim_{x\to a}\big[f(x)+g(x)\big] = A + B, \qquad \lim_{x\to a}\big[f(x)g(x)\big] = AB$$

a pokud $B \neq 0$, pak také

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

P o z n á m k a (vysvětlovací): Připomeňme ještě, že tato implikace neplatí opačně — známe-li limitu součtu[21] dvou funkcí, nemůžeme předem nic říci o limitách těchto funkcí zvlášť, dokonce ani o jejich existenci[22] — protipříklad je jednoduchý: vezměme např. funkce $\sin x$ a $-\sin x$; jejich součet má v $+\infty$ samozřejmě nulovou limitu, limita každé z těchto funkcí zvlášť však neexistuje. Rozmysleme si při této příležitosti, jak vlastně používáme vět o limitě součtu, součinu atd. Píšeme-li např. $\lim\limits_{x\to 1}(x + e^x) = \lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} e^x$, netvrdíme tím, že z existence limity na levé straně plyne existence obou limit napravo, ale obráceně. Rovnost, kterou zde píšeme, je tedy vlastně podmíněná: směrem doleva „platí“ vždy — to je věta (32) — směrem doprava tehdy a jen tehdy, když limity napravo existují (proč?).

P o z n á m k a : Čtenář si nyní pravděpodobně myslí, že výšeuvedené věty o limitách dokáže používat správně podle „zdravého rozumu“. Za odstrašující příklad[23] takového „zdravého rozumu“ nechť slouží výpočet této limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{0+\sin 2x}{0+\sin x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 2,$$

případně ještě odvážněji

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+0}{x+0} = 1.$$

Postup v prvním případě je až na záměnu 0 za x správný a dokonce vede k cíli, zkuste dopočítat [správně $\frac{3}{2}$]. Zkuste si uvědomit, které věty při výpočtu této limity používáme a zda některou z nich nepoužíváme při výšeuvedeném výpočtu neoprávněně (aniž bychom splnili její požadavky).

Věta 33: O dvou strážnících, rozšířená věta (8)
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g = \mathrm{D}_h$. Nechť $\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}_f\big)\big(f(x) \le g(x) \le h(x)\big)$. Potom existuje limita f v a a je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Věta 34: Limita složené funkce, rozšířená věta (9)
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí podmínky

1. $\big(\forall U^*(a)\big)\big(\exists x \in U^*(a)\big)\big[(x \in \mathrm{D}_f) \wedge \big(f(x) \in \mathrm{D}_g\big)\big]$, tj. $x \in \mathrm{D}_{g\circ f}$.
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$;
3. (a) $\exists U^*(a)$ takové, že $\big(\forall x \in U^*(a)\big)\big(g(x) \neq A\big)$ nebo
   (b) f je spojitá v A.

Pak $\lim\limits_{x\to a} f \circ g(x) = B$.

[21] Např. součtem dvou funkcí $f(x)$, $g(x)$ rozumíme funkci $h(x) \equiv f(x) + g(x)$.
[22] Slovo „nic“ je zde přece jen poněkud přísné — zkuste např. dokázat, že existuje-li limita součtu a jednoho ze sčítanců, existuje i limita druhého sčítance. Souvisí to s otázkou na konci této poznámky.
[23] V anglické literatuře bývá tento postup označován jako „Hollow Head's Simplification Method.“

C v i č e n í : Důkaz těchto vět nechť si čtenář zkusí provést sám — jedná se o variace stejného tématu, jak je ostatně vidět z předvedeného důkazu věty (29). V případě nejasnosti je samozřejmě nejlepší se vrátit k větám (8), (9).

P o z n á m k a : Uvědomme si, že díky zobecněné definici limity (29) můžeme všechny tyto věty používat i pro posloupnosti.

Dalším okruhem jednoduchých jevů, kterými se budeme zabývat, je to, jak se změní naše dřívější výsledky ohledně záměny limitního procesu a jistého okruhu algebraických operací s funkcemi (součet, rozdíl, součin, podíl) po rozšíření definice limity, speciálně pro limity s nevlastními hodnotami. Jsou dány dvě funkce (speciálním případem jsou posloupnosti) a známe jejich limity; zajímá nás, zda můžeme ze znalosti těchto limit určit limitu funkce, která vznikne sečtením, násobením atd. funkcí původních. Zatím jsme zjistili, že v případě *vlastních* limit platí vcelku přirozeně působící vztahy popsané větami (32),(34).

Věta 35: Limita součtu pro nevlastní limity
Budiž $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ a $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g = \mathrm{D}$.

1. Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ a $(\exists K \in \mathbb{R})\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(g(x) > K\big)$, tedy g je zdola omezená, pak $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$.
2. Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ a $(\exists K \in \mathbb{R})\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(g(x) < K\big)$, tedy g je shora omezená, pak $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$.

Důkaz: Dokážeme zde jedno z obou tvrzení, druhý důkaz je zcela analogický.

Vezměme například tvrzení 2. Zkoumejme, zda $(\forall M \in \mathbb{R})\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}\big)$ je $f(x) + g(x) <$ $< M$. Víme, že

$$\big(\exists U_1^*(a)\big)\big(\forall x \in U_1^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(g(x) < K\big),$$
$$\big(\exists U_2^*(a)\big)\big(\forall x \in U_2^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(f(x) < M - K\big).$$

Pokud pro dané M zvolíme $U^*(a) = U_1^*(a) \cap U_2^*(a)$, bude zřejmě platit

$$\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}: \ f(x) + g(x) < M - K + K = M,$$

což bylo dokázati.

Označení: Budiž $A \in \mathbb{R}$. Označíme

$$A \pm \infty = \pm\infty, \quad +\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty.$$

Věta, kterou jsme právě vyslovili, ukazuje, že tyto vztahy mají při počítání s limitami své opodstatnění, a je proto účelné je pro naši další práci zavést.

Nemá ovšem dobrý smysl podobně definovat výrazy typu $+\infty - \infty$ a $-\infty + \infty$. Důvod je prostý — součet dvou funkcí, o nichž pouze víme, že mají nevlastní limity opačných znamének, může být funkce s limitou nevlastní (obou znamének), libovolné reálné číslo, nebo dokonce funkce nemající limitu, a to jak omezená, tak neomezená. Zkusíme si takové příklady zkonstruovat.

P ř í k l a d : Funkce $\sin x$ nemá limitu pro $x \to \pm\infty$. Důkaz by byl analogický případu Dirichletovy funkce probrané v úvodním paragrafu o limitách (nevěříte-li, zkuste navrhnout nějaké číslo, které by bylo limitou). Brzy ukážeme pohodlný způsob důkazu neexistence pomocí Heineho věty.

Funkce $f(x) = x + \sin x$ má podle předchozí věty limitu ∞ pro $x \to \infty$. Funkce $g(x) = -x$ má tutéž limitu rovnu $-\infty$ a součet $f(x) + g(x) = \sin x$ tuto limitu vůbec nemá. Pokud nahradíme $\sin x$ libovolnou konstantou A, bude mít $f(x) + g(x)$ limitu právě A.

Nyní obraťme svou pozornost k součinu dvou funkcí:

Věta 36: Limita součinu pro nevlastní limity
Buďte $a \in \mathbb{R}^*$ a $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, přičemž $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g = \mathrm{D}$.

1. Nechť dále $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ a $(\exists \alpha > 0)\big(\exists U^*(a)\big)$ taková, že $\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}$ platí $g(x) \geq \alpha$.

   Pak $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$.

2. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Nechť $(\exists \beta < 0)\big(\exists U^*(a)\big)$ taková, že $\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}$ je $g(x) \leq \beta$.

   Potom $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \mp\infty$.

P o z n á m k a : Stačí tedy, aby funkce g měla nevlastní limitu, vlastní limitu nebo alespoň aby byla omezená (ke každé možnosti si vzpomeňte na příklad).

Důkaz: Opět jako v předchozím případě dokážeme jen 2. případ. První se dokáže analogicky.
Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Potřebuji dokázat

$$(\forall M > 0)\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(f(x)g(x) > M\big).$$

Víme, že platí

$$\big(\exists U_2^*(a)\big)\big(\forall x \in U_2^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(g(x) \leq \beta < 0\big) \text{ a } \left(\forall L = \frac{M}{\beta} < 0\right)\big(\exists U_1^*(a)\big)\big(\forall x \in U_1^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(f(x) < L < 0\big).$$

Z toho plyne $f(x)g(x) > \beta L = M$ na $U^*(a) \cap \mathrm{D} \overset{\mathrm{df}}{=} U_1^*(a) \cap U_2^*(a) \cap \mathrm{D}$, což bylo dokázati.

Pozorný čtenář si jistě povšimne, že při násobení „nekonečen“ bychom se mohli dostat do potíží tak, jako v předchozím případě. Musíme si tedy ujasnit, jaké operace s nekonečny pro nás mají smysl.

Označení: Pro libovolná $A > 0$ nebo $A = +\infty$ a $B < 0$ nebo $B = -\infty$ zavedeme

$$\pm\infty \cdot A = \pm\infty \qquad \text{a} \qquad \pm\infty \cdot B = \mp\infty.$$

Nemá ovšem v tuto chvíli dobrý smysl definovat výraz typu $0 \cdot \pm\infty$.

P ř í k l a d : Chování polynomu $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ v bodech $\pm\infty$ určuje vždy chování členu s nejvyšší mocninou. Můžeme totiž psát

$$a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 = x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^n}\right).$$

Limita členů v závorce pro $x \to \pm\infty$ je rovna a_n a limita x^n je rovna $\pm\infty$ pro n liché a $+\infty$ pro n sudé. Například limita $P(x)$ v $x \to -\infty$ pro n liché a a_n kladné je rovna $-\infty$. Součet funkcí x^2 a $-x$ má tedy v ∞ limitu ∞, i když sčítáme funkce s limitami ∞ a $-\infty$.

C v i č e n í : Zkuste opět ukázat, že součin funkce s nulovou limitou v a a funkce s nevlastní limitou v a může mít limitu nevlastní, či rovnou libovolnému reálnému číslu, nebo že tato limita ani nemusí existovat.

Pokračujeme ve vytýčeném programu studiem limity podílu dvou funkcí.

Věta 37: Limita podílu pro nevlastní limity
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce a $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Nechť $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$; pak $\lim_{x\to a} 1/|f(x)| = 0$.
2. Předpokládejme, že $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Nechť $\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap D_f\big)$ platí $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$. Pak $\lim_{x\to a} 1/f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x\to a} 1/f(x) = -\infty$.
3. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, $A \in \mathbb{C}$ pak $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 1/A$.

Zřejmě opravdu nic nového pod sluncem! Srovnejte s větou (7). K tomu je ještě potřeba dodat něco o smysluplnosti podílů s „nekonečny“.

Označení: Pokud $a \in \mathbb{C}$, má smysl definovat $a/\pm\infty = 0$. Neurčitý výraz typu $\frac{a}{0}$, kde $a \in \mathbb{C}$ obecně nedefinujeme, limita nemusí vůbec existovat, ovšem pro $a \neq 0$ lze samozřejmě psát $\left|\frac{a}{0}\right| = +\infty$. Nedefinujeme také ∞/∞ a $0/0$.

Důkaz: Ad 1. Pro zadané $\varepsilon > 0$ chceme tedy, aby $|1/f(x)| < \varepsilon$ na určitém redukovaném okolí bodu a. Víme ale, že existuje redukované okolí a, na němž je $|f(x)| > K = 1/\varepsilon$, čímž jsme hotovi.

Ad 3. Toto tvrzení je pouze přirozeným rozšířením tvrzení věty (7) s ohledem na upravenou definici limity. Stačí tedy provést důkaz pro $a = \pm\infty$, což jistě čtenář zvládne po zkušenostech s důkazy předchozími.
Ad 2. Dokažme toto tvrzení:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall K \in \mathbb{R})\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\left(\frac{1}{f(x)} < K\right).$$

Zřejmě postačí dokázat tvrzení $\forall K < 0$, neboť pro $K \geq 0$ platí tím spíše. Víme, že $(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in$ $\in U^*(a) \cap \mathrm{D}\big)\big(-\varepsilon < f(x) < 0\big)$. Potom ovšem $1/f(x) < -1/\varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, což bylo dokázati. Důkaz tvrzení pro $f(x) > 0$ je analogický.

Poznámka: Stojí za pozornost, jakým způsobem se liší proces „přibližování se do bodu“ v Gaussově rovině a na reálné přímce. V komplexním oboru se můžeme přibližovat po polopřímce, ale také po obecné křivce. Tento rozdíl zřejmě povede k tomu, že v komplexním oboru *nelze* jednoduše formulovat tvrzení 2 předchozí věty. Používáme proto tvrzení 1.

Příklad: Pro $n > 0$ dokažme

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

V našem zobecněném zápisu „počítání s nekonečny“ zřejmě platí

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Druhou limitu můžeme počítat pomocí úvahy $x^n = e^n \ln x$ a dále pomocí věty o limitě složené funkce (34), neboť $\ln x \to \infty$ pro $x \to \infty$. Poslední limita je pak již triviální.

V souvislosti s tímto tématem se nabízí otázka, kterou lze vágně formulovat asi takto: „Jak lze porovnat rychlost růstu různých funkcí do nekonečna?“ Lehce předběhneme vývoj a zformulujeme následující větu, jež nám umožní počítat limity neurčitých výrazů, jejichž hodnoty jsme zatím v předchozích úvahách nedefinovali.

Věta 38: L'Hôspitalova
Buď $a \in \mathbb{R}^*$; předpokládejme, že jsou splněny následující podmínky

1. $\exists U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*(a)$ existují derivace $f'(x), g'(x)$ a $g'(x) \neq 0$,
2. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$.

Dále nechť platí jedna z podmínek (a): $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ nebo (b): $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje a je rovna A.

Tato věta představuje mocný nástroj pro vyšetřování limit neurčitých výrazů. Zároveň ovšem ještě nemáme vybudován potřebný aparát k jejímu důkazu. Použijeme ji tedy jako nástroj a k jejímu důkazu se vrátíme na vhodném místě budování teorie[24]. Jako ilustraci užití věty (38) vezměme

Příklad: Vypočtěme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Pokud $a < 0$, počítáme limitu výrazu $x^{-a}e^x$, přičemž limity obou činitelů jsou ∞. Limita součinu je tedy také ∞. Pro $a > 0$ můžeme opakovaným použitím L'Hôspitalovy věty exponent mocniny ve jmenovateli snižovat o jedničku tak dlouho, až bude záporný:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{a(a-1)x^{a-2}} = \ldots$$

Konstantu $1/[a(a-1)\ldots]$ můžeme vytknout před limitu, kterážto vyjde rovna ∞. Poslední případ $a = 0$ je triviální, a tak můžeme shrnout

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty, \text{ ale také } \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

[24] Hledejte v paragrafu o větách o střední hodnotě — tyto věty udávají určitý vztah mezi funkčními hodnotami a hodnotami derivací.

Cvičení: Spočítejte pomocí věty (38) limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Správné výsledky jsou 3 a $\frac{1}{2}$.

Příklad: Bez l'Hôspitalovy věty by se druhá limita počítala trikem

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Poznámka (formální): Větu (38) vlastně používáme „na čestné slovo". Limitu upravujeme tak, že derivujeme zvlášť čitatele a jmenovatele, a teprve, když jsme schopni spočítat upravenou limitu, a dokázat tak její existenci, můžeme použít l'Hôspitalovu větu a určit hodnotu původní limity.

Příklad: Následující limity je možné řešit l'Hôspitalovým pravidlem.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Je ovšem užitečné si uvědomit, že první limita je přímo z definice výraz pro $\big(e^x\big)'\big|_{x=0}=e^0=1$ a že druhou limitu lze převést na první substitucí $z=\ln(x+1)$.

Příklad: Číslo e bývá někdy definováno také jako $\lim\limits_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$. Spočtěme tuto limitu, pokud za definici e bereme hodnotu přirozené exponenciály definované výše v bodě $x=1$.

V souladu se zobecněnou definicí limity budeme uvažovat nikoliv limitu posloupnosti, ale funkce.

$$\lim_{x\to\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^x=\lim_{x\to\infty}\exp\big[x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)\big].$$

Použijeme samozřejmě větu o limitě složené funkce a budeme se dále věnovat pouze vnitřní funkci.

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}.$$

Substitucí[25] $z=1/x$ ale přejdeme k limitě výše, o níž víme, že vyjde rovna 1. Celkem tedy je

$$\lim_{x\to\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^x=e^1=e.$$

S tímto aparátem přistoupíme k systematizaci nekonečně malých resp. velkých veličin.

§2. Symboly o, O: klasifikace nekonečně malých a nekonečně velkých veličin

Poznámka: Co vlastně rozumíme nekonečně malými, resp. velkými veličinami? O funkci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ je „rozumné" říci, že je *nekonečně malá* v $a\in\mathbb{R}^*$, pokud $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ a že je *nekonečně velká* v $a\in\mathbb{R}^*$ při $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Definice 30: Symboly O,o
Buďte $f,g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$.

1. Píšeme $f=o(g)$, $x=a$, pokud $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$;
2. píšeme $f=O(g)$, $x=a$, jestliže $\big(\exists U^*(a)\big)(\exists K>0)\big(\forall x\in U^*(a)\big)$ je $\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|\le K$;
3. konečně označíme $f\sim g$, $x=a$ při $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

[25] Pod substitucí se skrývá opět věta o limitě složené funkce, substitucí nahrazujeme vnitřní funkci.

P o z n á m k a : Uvědomte si, že stejně jako všechny tři popsané symboly definují *relace* a nikoliv funkce (u $\sim$ je to zřejmé, ale u O, o by při tomto způsobu zápisu mohl vzniknout nesprávný dojem, že např. $o(g)$ je jedna určitá funkce. Zájemci nechť si promyslí, že pokud zvolíme pevně funkci g, pak množina všech funkcí $\{f|\, f = o(g)\}$ s běžně definovanou operací sčítání tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$.

P o z n á m k a vysvětlující: Výrok $f = o(g)$, $x = a$ se čte „funkce f je malé o funkce g v bodě $x = a$", což můžeme chápat tak, že f má v tomto bodě podstatně menší hodnoty než g. Pokud g roste v tomto bodě nade všechny meze, plyne z toho, že f je buď omezená, nebo roste nade všechny meze podstatně pomaleji než g. Pokud se g například blíží k nule, znamená to, že f se blíží k nule podstatně rychleji.

Zápis $f = O(g)$, $x = a$ čteme „funkce f je velké O funkce g v bodě $x = a$" a říká, že f nemá v bodě $x = a$ řádově větší hodnoty než g; k tomu samozřejmě postačuje aby existovala vlastní limita $\frac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \to a$ (prozkoumejte úvodní paragraf o limitách) — podmínka to však není nutná.

Relace $f \sim g, x = a$ zřejmě vystihuje to, že f a g se v bodě a „chovají řádově stejně". Tento vztah se nazývá *slabá ekvivalence*. Ověřte přímo z definice, že tato relace je skutečně ekvivalence, tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní[26].

C v i č e n í : Přímo z definice ukažte, že $x = O\big(x \sin x\big)$, $x = +\infty$.

C v i č e n í : Mezi výšeuvedenými třemi relacemi je řada vztahů, snadno odvoditelných z jejich definic a jednoduchých logických úvah. Zkuste například ověřit tato tvrzení

$$x = o(y) \Rightarrow x = O(y), \quad x \sim y \Rightarrow x = O(y), \quad \big[x = o(y) \wedge y = o(z)\big) \Rightarrow x = o(z)\big].$$

P o z n á m k a : Obvykle se definuje též relace silné ekvivalence: $f \cong g$, $x = a$ pro $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ta znamená, že f a g se v bodě a „chovají přibližně stejně". Pokud má alespoň jedna z funkcí v bodě a limitu, pak zde má limitu i druhá funkce a obě limity jsou stejné.

Definice 31: Porovnávání nekonečně malých a nekonečně velkých funkcí
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce nekonečně malé v a, resp. nekonečně velké v a, tedy takové, že $\lim\limits_{x\to a} f = \lim\limits_{x\to a} g = 0$, resp. $\lim\limits_{x\to a} f = \lim\limits_{x\to a} g = +\infty$. Řekneme, že

1. f je *nekonečně malá vyššího řádu* než g v a, resp. že f je *nekonečně velká nižšího řádu* než g v a, pokud $f = o(g)$, $x = a$;
2. f je *nekonečně malá*, resp. *nekonečně velká stejného řádu* jako g v a, pokud $f \sim g$, $x = a$;
3. f je *nekonečně malá nižšího řádu* než g v a, resp. že f je *nekonečně velká vyššího řádu* než g v a, pokud $g = o(f)$, $x = a$.

P ř í k l a d : Vraťme se k naší otázce o chování funkcí v nevlastních bodech. Předchozí definice nám umožňuje vhodně srovnávat „rychlost růstu nade všechny meze", případně „rychlost blížení se k nule". V následujícím schématu volíme bod $a = +\infty$. Pokud v jednom sloupečku leží f ve vyšším řádku než g, pak $g = o(f)$; o všech funkcích v levém sloupečku víme, že rostou v $a = +\infty$ nade všechny meze, a o funkcích v pravém sloupečku je známo, že mají v $a = +\infty$ nulovou limitu.

$$\begin{array}{ll}
e^x, & \dfrac{1}{\ln x}, \\
x^\alpha,\ \alpha > \beta, & x^\beta,\ \beta < 0 \\
x^\beta,\ \beta > 0, & x^\alpha,\ \alpha < \beta \\
\ln x, & e^{-x}
\end{array}$$

Tyto funkce tvoří určitý škálovací systém, k němuž lze vztahovat rychlost růstu testovaných funkcí v nevlastních bodech. Zopakujme ještě, že v levém sloupečku roste „řád nekonečné velikosti" odzdola nahoru a v pravém sloupečku roste „řád nekonečné malosti" odshora dolů.

C v i č e n í : Připomeňte si limity, s jejichž pomocí odůvodníme „škálu" výše. Uvědomte si, že zřejmě platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, právě když $1/g = o(1/f)$.

[26] Tedy že platí $x \sim x, x \sim y \Rightarrow y \sim x, (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.

P ř í k l a d : Jakým způsobem budeme s pomocí uvedených funkcí konstruovat nekonečně malé či nekonečně velké veličiny v konečném bodě? K tomu nám podle věty o limitě složené funkce (34) může posloužit záměna $x \to \frac{1}{|x-a|}$ v příslušných funkcích. Například funkce $\ln\left|\frac{1}{x-a}\right| = -\ln|x-a|$ jde zřejmě k $+\infty$ při $x \to a$.

Nyní přejděme k aplikaci toho, co jsme vytvořili:

P ř í k l a d : Ukažme, že se $f(x) = 1 - \cos x$ v $x = 0$ chová podobně jako x^2, tedy že $f \sim g$.

Na konci minulého paragrafu jsme spočetli limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

§3. Další věty o limitách: limity monotónních funkcí a posloupností

V tomto paragrafu se budeme zabývat zobrazeními typu $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Naším programem pro následující úsek práce bude zejména hledání kritérií existence limit ve specifické množině funkcí.

Věta 39: Limitní přechod v nerovnosti
Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce se shodnými definičními obory ($\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g = \mathrm{D}$) a $a \in \mathbb{R}^*$. Pokud existují limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$ a zároveň existuje $U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*(a) \cap \mathrm{D}$ platí $f(x) \le g(x)$, pak platí $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$.

Důkaz: sporem. Nechť příslušná limita f je A, limita g je B. Předpokládejme, že $B < A$. Volímeli $\varepsilon = \frac{1}{2}(A - B)$, potom z definice limity existují okolí $U_f^*(a), U_g^*(a)$, pro něž platí $\forall x \in U_f^*(a) \cap \mathrm{D}$ nerovnost $A + \varepsilon > f(x) > A - \varepsilon)$ a podobně $\forall x \in U_f^*(a) \cap \mathrm{D}$ omezení $B + \varepsilon > g(x) > B - \varepsilon$. Ježto $A - \varepsilon = \frac{1}{2}(A+B) = B + \varepsilon$, musí pro všechna x z množiny $U_f^*(a) \cap U_g^*(a) \cap \mathrm{D}$ platit $f(x) > \frac{1}{2}(A+B) > g(x)$. Pro všechny prvky x této množiny tedy platí zároveň $f(x) \le g(x)$ a $f(x) > g(x)$. Z předpokladů věty však plyne, že tato množina je neprázdná, a tedy docházíme ke sporu.

P o z n á m k a : Tvrzení právě dokázané věty lze samozřejmě použít i pro posloupnosti a jednostranné limity (a není nutné tuto větu nijak měnit). Uvědomme si například, že lze splnit předpoklady věty, pokud budou všechny prvky $U^*(a) \cap \mathrm{D}$ ležet jen „na jedné straně od a“. Zhruba řečeno, stačí, aby nerovnost mezi $f(x)$ a $g(x)$ byla splněna kdekoliv „libovolně blízko“ k a.

P o z n á m k a (důležitá): Ve větě nelze neostré nerovnosti nahradit ostrými, vlastnost „býti ostře větší než“ se limitním přechodem „kazí“. Uvažujme například funkce $f(x) = 1/x$ a $g(x) = 0$ a jejich limity v $+\infty$.

Dále budeme směřovat k vyslovení jedné z postačujících podmínek pro existenci limity. V příslušné větě ovšem budeme muset předpokládat monotonii funkce:

Definice 32: Rostoucí, klesající a monotónní funkce
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a $M \subset \mathrm{D}_f$ je množina. Řekneme, že f je

1. *rostoucí* na M, pokud $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$;
2. *klesající* na M, pokud $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$;
3. *nerostoucí* na M, pokud $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \ge f(x_2)$;
4. *neklesající* na M, pokud $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \le f(x_2)$.

Všechny tyto dílčí vlastnosti zahrnu do pojmu *monotonie* funkce (funkce je monotónní, pokud splňuje alespoň jednu z podmínek), funkci splňující jednu z prvních dvou podmínek pak nazvu *ryze monotónní.*

P o z n á m k a : Povšimněme si, že dosud jsme studovali *lokální* vlastnosti zobrazení na nějakém systému okolí bodu $a \in \mathrm{D}_f$, přičemž všechna (neredukovaná) okolí bodu a mají společný právě jen bod a. Pojem monotonie je oproti tomu zjevně pojmem globálním, vztahuje se k pevné množině.

Definice 33: Rozšíření pojmu suprema a infima na hodnoty funkcí
Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

1. M není shora omezená, právě když neexistuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že $(\forall x \in M)(x \leq k)$. Pak řekneme, že $\sup M = +\infty$.
2. M není zdola omezená, právě když neexistuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že $(\forall x \in M)(x \geq k)$. V takovém případě píšeme $\inf M = -\infty$.

   Nechť dále $M \subset \mathrm{D}_f$.
3. Označíme $\sup_M f(x) = \sup_M f \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup \big\{ y \in \mathbb{R} \big| \, (\exists x \in M)\big(y = f(x)\big) \big\}$ a
4. $\inf_M f(x) = \inf_M f \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf \big\{ y \in \mathbb{R} \big| \, (\exists x \in M)\big(y = f(x)\big) \big\}$.

Stěžejní věta v našem programu práce s monotónními funkcemi bude následující:

Věta 40: Jednostranné limity monotónní funkce
Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Nechť f je neklesající na (a, b). Pak $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$ a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$.
2. Nechť f je nerostoucí na (a, b). Pak $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f$ a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f$.

Dále platí, že příslušné jednostranné limity jsou konečné, je-li f na (a, b) omezená.

Důkaz: provedeme pro druhý případ, případ prvý je plně analogický. Bude nás zajímat $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ a $\inf_{(a,b)} f = -\infty$, případy zbývající se opět vyřeší analogicky. Jaká je základní idea důkazu? Chceme dokázat, že

$$(\forall K < 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall x \in (b - \delta; b) \cap \mathrm{D}_f\big)\big(f(x) < K\big).$$

Hledáme alespoň jedno x_0 takové, že $f(x_0) < K$; potom pro každé $x > x_0$ je tato podmínka také splněna, neboť f je nerostoucí, tedy $f(x) \leq f(x_0)$. Formálně to zapíšeme takto. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Pak z definice infima $\big(\exists x_0 \in (a, b)\big)\big(f(x_0) < K\big)$. Zvolíme $\delta = b - x_0 > 0$. Následně $\forall x \in (b - \delta; b) \cap D_f$ je $f(x) < K$, protože pro nerostoucí funkci platí $(x > b - \delta) \Rightarrow \big(f(b - \delta) \leq f(x) < K\big)$.

Poznámka: Nechť f je monotónní na (a, b). Například f bereme nerostoucí. Pak $\forall c \in (a, b)$ existují jednostranné limity v c a platí $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$. Existence limit je jednoduchý důsledek předcházející věty, nerovnosti můžeme mimo jiné vyvodit z limitního přechodu (39) použitého pro jednostranné limity. Za jednu funkci volíme přímo f a za druhou funkci identicky rovnu $f(c)$.

Shrňme nyní věty o „jednostranných a oboustranných pojmech“.

Věta 41: Souvislost jednostranných a oboustranné limity, spojitosti a derivace
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $a \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje, právě když existují $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ a obě limity se sobě rovnají. Jednostranné limity se potom rovnají limitě oboustranné.
2. f je spojitá v a, právě když je spojitá v a zleva i zprava.
3. $f'(a)$ existuje, právě když existují $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ a jsou si rovny, přičemž v takovém případě si jsou všechny derivace v a rovny.

Důkaz: V případě prvního tvrzení jsme jej provedli již dříve, viz větu (2).

Tvrzení 2. a 3. lze dokázat přímo z definice a použitím prvního tvrzení. Uvědomte si, že spojitost i derivace je definována jako limita.

§4. Heineho věta: kritérium pro existenci limity funkce

V tomto paragrafu nás bude zajímat následující problém. Mějme funkci definovanou na nějakém okolí bodu a. Její funkční hodnoty se budou nacházet v okolí bodu A. Sestrojme posloupnost $x_n \to a$ takovou, že $x_n \neq a$. Co se stane s posloupností příslušných funkčních hodnot? Za jakých podmínek lze očekávat $f(x_n) \to A$? A kdy platí opačné tvrzení, tedy kdy z existence limity $f(x_n)$ plyne existence limity funkce? Odpověď poskytne následující věta.

Věta 42: Heineho
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$ nechť jsou čísla. Pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \big[\forall\{x_n\} \subset \mathrm{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n\to\infty} x_n = a\big]\big(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\big).$$

Poznámka: Zkusme si rozmyslet silnější tvrzení. Platí dokonce, že

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \big[\forall\{x_n\} \subset \mathrm{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n\to\infty} x_n = a\big]\big(\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n)\big).$$

Implikace $\Rightarrow$ je snadným důsledkem Heineho věty. Naopak $\Leftarrow$ je silnější než příslušné tvrzení Heineho věty, neboť nepožadujeme, aby všechny limity byly stejné. Jednoduše sporem ale ukážeme, že pokud všechny tyto limity existují, musí už být stejné. Berme $a_n \to a$, $b_n \to a$ a funkční hodnoty nechť konvergují k různým číslům $f(a_n) \to A$, $f(b_n) \to B$. Stačí uvažovat posloupnost c_n definovanou $c_n = a_n$ pro n liché a $c_n = b_n$ pro n sudé. Posloupnost c_n jistě konverguje k a, ale $f(c_n)$ limitu vůbec nemá, neboť pro velká n osciluje mezi A a B.

Nyní se ale vrátíme k původní Heineho větě.

Důkaz: $\Rightarrow$. Nechť $\lim_{x\to a} f = A$ a nechť $x_n \in \mathrm{D}_f$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Potřebujeme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, tedy $\big(\forall U(A)\big)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\big(f(x_n) \in U(A)\big)$. Víme, že platí $\big(\forall U(A)\big)\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x \in U^*(a) \cap D_f\big)\big(f(x) \in U(A)\big)$. Vezmeme-li libovolnou posloupnost $x_n \to a$, musí pro toto $U^*(a)$ existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ bude $x_n \in U^*(a)$, a tudíž $f(x_n) \in U(A)$. Tím je implikace ověřena.
$\Leftarrow$. Tuto implikaci ověříme sporem. Předpokládejme, že $\forall\{x_n\} \subset \mathrm{D}_f$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$ je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a že $\lim_{x\to a} f(x) \neq A$. Pak ovšem existuje $U(A)$ takové, že $\big(\forall U^*(a)\big)\big(\exists x \in U^*(a) \cap D_f\big)\big(f(x) \notin U(A)\big)$. Z takových x nyní sestrojíme posloupnost. Nechť pro určitost $a \in \mathbb{R}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N})\big(\exists x_n \in \big[(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}) \setminus \{a\}\big] \cap D_f\big)$ a platí $x_n \neq a$, $x_n \to a$ a také $x_n \in D_f$. Navíc ovšem $f(x_n) \not\to A$, což je hledaný spor.

Pro $a = \pm\infty$ bychom pouze za okolí a, z nějž vybíráme prvek x_n volili $(n; \infty)$, resp. $(-\infty; -n)$.

Poznámka: Jako obvykle se tvrzení této věty vztahuje i na případ jednostranných limit a limit posloupností. Ve druhém případě máme na mysli tento výrok:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall\{k_n\},\ k_i \in \mathbb{N},\ k_i > k_j \text{ pro } i > j\big)\big(\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A\big).$$

Posloupnosti $\{a_{k_n}\}$, které se vyskytují na pravé straně ekvivalence, nazýváme vybrané posloupnosti z $\{a_n\}$ a budeme o nich hovořit v dalším paragrafu. V obou případech stačí u dané funkce vhodně omezit definiční obor.

Cvičení: Zkuste formálně provést důkaz zesílené Heineho věty způsobem naznačeným výše. Pokud neuspějete, přečtěte si následující paragraf a hledejte pojem „vybraná posloupnost“.

Jakým způsobem se Heineho věta užívá? Na dvou příkladech si ukážeme její užití k důkazu neexistence limit.

Příklad: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ zřejmě neexistuje, protože provedu-li výběr posloupnosti $\{x_n\}$ blížící se zleva, bude zjevně $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (např. $\alpha_n = -\frac{1}{n}$) a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(-\frac{1}{n}) = -1$, kdežto pro $\{\beta_n\}$ blížící se zprava bude $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ (např. $\beta_n = \frac{1}{n}$) a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(\frac{1}{n}) = 1$. Funkční hodnota $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Zajímavějším případem je $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$. Volíme-li například $x_n = 1/\big[(2n + \frac{1}{2})\pi\big]$, je zřejmě $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ a $\sin\frac{1}{x_n} = 1$. pro $y_n = 1/(2n\pi)$ jsou první dvě podmínky splněny též $\sin\frac{1}{y_n} = 0$. Máme tedy opět dvě posloupnosti se stejnou limitou, přičemž limity posloupností funkčních hodnot se liší, pročež $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ neexistuje (samozřejmě ani jako jednostranná). Poznamenejme, že tím pádem neexistuje ani $\lim_{x\to\infty} \sin x$.

Poznámka: Jinou možností využití Heineho věty je výpočet limit posloupností z limit funkcí, jejichž tvar získáme změnou definičního oboru příslušného zobrazení.

§5. Vybrané posloupnosti: Weierstrassova věta, Bolzano–Cauchyova podmínka

Definice 34: Vybraná posloupnost
Nechť a_n je posloupnost a k_n je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Posloupnost $b_n = a_{k_n}$ nazveme *vybranou posloupností* (podposloupností) posloupnosti a_n.

Věta 43: Weierstrassova
Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz: Označme zkoumanou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sestrojíme posloupnosti A_n a B_n. Zvolíme A_0 tak, aby bylo dolní závorou posloupnosti $\{a_n\}$, obdobně B_0 tak, aby bylo horní závorou (tedy aby $A_0 \leq \leq a_n \leq B_0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$). Ostatní členy posloupností A_n a B_n sestrojíme následovně. Položíme $C_n = = \frac{1}{2}(A_{n-1} + B_{n-1})$. Protože interval $\langle A_{n-1}; B_{n-1}\rangle$ obsahuje nekonečně mnoho členů uvažované omezené posloupnosti, musí alespoň jeden z intervalů $\langle A_{n-1}; C_n\rangle$, $\langle C_n; B_{n-1}\rangle$ obsahovat také nekonečně mnoho členů této posloupnosti. Je-li to prvý z nich, položíme $A_n = A_{n-1}$ a $B_n = C_n$, v opačném případě $A_n = C_n$ a $B_n = B_{n-1}$. Obě posloupnosti A_n a B_n mají limitu, neboť jsou omezené a monotónní. Obě limity musí být stejné, neboť zřejmě $|B_n - A_n| = |A_0 - B_0|/2^n$, a tedy $\lim_{n\to\infty} B_n - A_n = 0$. Nyní setrojíme posloupnost k_n indexů členů podposloupnosti v původní posloupnosti. k_0 volíme libovolně. k_n zvolíme tak, aby $k_n > k_{n-1}$ a člen původní posloupnosti $a_{k_n} \in \langle A_n; B_n\rangle$. To lze, neboť tento interval obsahuje nekonečně mnoho členů původní posloupnosti, speciálně tedy alespoň jeden mající index větší k_n. Tato podposloupnost však má podle věty o dvou strážnících (8) limitu, je omezena posloupnostmi A_n a B_n.

Věta 44:
Pokud posloupnost a_n není shora omezená, potom existuje její podposloupnost mající limitu $+\infty$. Není-li omezená zdola, potom existuje její podposloupnost mající limitu $-\infty$.

Lemma:
Jestliže posloupnost a_n není shora omezená, pak pro každé $K \in \mathbb{N}$ existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ takových, že platí $a_k > K$.

Důkaz lemmatu: Postupujeme sporem. Nechť takových k je pouze konečný počet. Není-li takové k dokonce žádné, potom K je horní závorou uvažované posloupnosti, což je spor s její neomezeností. V opačném případě určím maximum z (konečné) množiny $\{a_k\}$ všech členů posloupnosti větších než K. Potom toto maximum je horní závorou uvažované posloupnosti, což je ovšemže spor.

Důkaz věty: Sestrojujeme posloupnost k_n, tak aby $b_n = a_{n_k}$ byla podposloupnost splňující první část dokazované věty. Položíme $k_0 = 0$ a k_n volíme tak, aby $k_n > k_{n-1}$ a $a_{k_n} > n$; to lze, neboť existuje nekonečně mnoho hodnot větších než n, a tedy alespoň jedna z nich vyhovuje této podmínce. Tato podposloupnost splňuje podmínky věty.

Definice 35: Limita suprem, limita infim
Položme $b_n = \sup\{a_k\}_{k=n}^{+\infty}$ a $c_n = \inf\{a_k\}_{k=n}^{+\infty}$. Pro posloupnost a_n se zavádí následující označení:

$$\limsup a_n = \overline{\lim} a_n \overset{\text{df}}{=} \lim_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\liminf a_n = \underline{\lim} a_n \overset{\text{df}}{=} \lim_{n\to+\infty} c_n.$$

První symbol čteme *limes superior* (limita suprem), druhý *limes inferior* (limita infim).

Poznámka: Platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = A.$$

Limity suprem a infim existují vždy, neboť to podle definice jsou limity z monotónních posloupností (promyslete). Označíme-li P množinu limit všech vybraných posloupností, potom $\underline{\lim}\, a_n = \inf P$ a $\overline{\lim}\, a_n = \sup P$.

Pro funkce lze analogicky zavést

$$\overline{\lim_{x\to a^+}} f(x) = \lim_{x\to a^+} \Big[\sup_{(a,x)} f(x)\Big].$$

Věta 45: Bolzano–Cauchyho (B.–C.) podmínka

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Dále ať pro každé $U^*(a)$ platí $U^*(a) \cap \mathrm{D}_f \neq \emptyset$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ vlastní právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists U^*(a)\big)\big(\forall x', x'' \in U^*(a)\big)\big(\big|f(x') - f(x'')\big| < \varepsilon\big).$$

Důkaz: $\Rightarrow$. Z existence limity vyplývá pro libovolné $\varepsilon > 0$ existence $U^*(a)$ takového, že $\big(\forall x \in U^*(a)\big)\big(|f(x) - A| < \frac{1}{2}\varepsilon\big)$, kde A je limita této funkce. Použitím trojúhelníkové nerovnosti získáme $\forall x', x'' \in U^*(a)$

$$\varepsilon > \big|f(x') - A\big| + \big|f(x'') - A\big| = \big|f(x') - A\big| + \big|A - f(x'')\big| \geq \big|f(x') - f(x'')\big|.$$

$\Leftarrow$. Funkce f je na určitém okolí $U^*(a)$ omezená, což snadno nahlédneme použitím předpokladu pro x' pevné; zvolíme $\varepsilon = 1$, z příslušného $U^*(a)$ vybereme libovolné x' a všechna x'' z $U^*(a)$ pak musí ležet v intervalu $(x'-1; x'+1)$. Uvážíme libovolnou posloupnost y_n takovou, že má limitu a. Podle Weierstrassovy věty existuje podposloupnost posloupnosti funkčních hodnot $f(y_n)$, která má limitu, označím ji A. Podle předpokladu naleznu $U^*(a)$ takové, že pro libovolné x', x'' z tohoto okolí platí $\big|f(x') - f(x'')\big| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Z definice limity posloupnosti plyne existence k takového, že $\big|f(y_k) - A\big| < \frac{1}{2}\varepsilon$ a $y_k \in U^*(a)$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti získáme $\forall x \in U^*(a)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$ — „složíme“ obě nerovnosti podobně jako výše, v první volíme $x' = x$ a $x'' = y_k$.

4 Vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

§1. Lokální extrémy: podmínky nutné

Poznámka: Budeme se zabývat extrémy funkcí $M \to \mathbb{R}$, definovaných většinou na intervalu $(a; b)$.

Definice 36: Lokální extrém
Řekneme, že funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ *neklesající*, resp. *nerostoucí*, právě když $\big(\exists U^*(a) = U^{*+}(a) \cup \cup U^{*-}(a) \subset \mathrm{D}_f\big)\big(\forall x \in U^{*+}(a)\big)$ platí $f(x) \geq f(a)$, resp. $f(x) \leq f(a)$ a zároveň $\forall x \in U^{*-}(a)$ platí $f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$. Funkci *rostoucí* (resp. *klesající*) definujeme stejným způsobem, neostré nerovnosti $(\leq, \geq)$ však zaměníme za ostré $(<, >)$.

Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ *lokální maximum*, resp. *lokální minimum*, právě když $\big(\exists U^*(a) \subset \subset \mathrm{D}_f\big)\big(\forall x \in U^*(a)\big)$ platí $f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$. Pro *ostré lokální maximum*, resp. *minimum* pak musí platit tento výrok s ostrými nerovnostmi místo neostrých. Má-li funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ (ostré) lokální maximum nebo lokální minimum, mluvíme o (ostrém) *lokálním extrému.*

Poznámka: Funkce může mít v daném bodě více z těchto vlastností. Například funkce rostoucí je i neklesající (obráceně to však nemusí platit — viz konstantní funkci), má-li funkce v bodě ostrý lokální extrém, má zde i „neostrý“ extrém — tedy extrém bez přívlastku (konstantní funkce je opět příkladem, že opačné tvrzení neplatí). Konečně, je-li funkce v bodě nerostoucí a neklesající, pak je na určitém okolí bodu konstantní atd.

Věta 46: Podmínky nutné pro lokální extrém
Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

1. má-li f v a lokální extrém, je $f'(a) = 0$;
2. pokud $f'(a) > 0$, je f v a rostoucí, pokud $f'(a) < 0$, je klesající.

Důkaz: Tvrzení 2. dokážeme z definice derivace a jedné z triviálních vět o limitách. Nechť je například $f'(a) > 0$ (pro záporné derivace je důkaz obdobný). Pak $\big(\exists U^*(a) = U^{*+}(a) \cup U^{*-}(a)\big)\big(\forall x \in \in U^*(a)\big)\big([f(x) - f(a)]/(x - a) > 0\big)$. Z toho plyne $\big(\forall x \in U^{*+}(a)\big)\big(f(x) - f(a) > 0\big)$ a $\big(\forall x \in \in U^{*-}(a)\big)\big(f(x) - f(a) < 0\big)$. Pokud je v bodě a lokální extrém, pak funkce v tomto bodě není dle definice ani rostoucí ani klesající, pročež nemůže být ani $f'(a) > 0$ ani $f'(a) < 0$. Tedy $f'(a) = 0$, čímž jsme ověřili i tvrzení první.

Poznámka: Body a, v nichž buď $f'(a) = 0$, nebo derivace neexistuje, označíme za *podezřelé* (hledáme-li extrémy).

Příklad: Tyto podmínky jsou skutečně jen nutné a nikoliv postačující: funkce $y = x^3$ má v bodě $x = 0$ derivaci sice nulovou, extrém tu však nemá. Stejně tak funkce $y = (x - 1)^2 + |x|$ nemá v $x = 0$ definovanou derivaci a extrém tu rovněž nemá.

§2. Globální extrémy

Definice 37: Globální extrémy
Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in M$ *globální maximum*, resp. *minimum*, právě když $\forall x \in M$ platí $f(x_0) \geq f(x)$, resp. $f(x_0) \leq f(x)$ nebo též $f(x_0) = \sup_M f$, resp. $f(x_0) = \inf_M f$). Zapisujeme $f(x_0) = \max_M f$, resp. $f(x_0) = \min_M f$). Globální maximum či minimum nazveme *globálním extrémem*, ostré globální extrémy definujeme opět stejným způsobem až na neostré nerovnosti zaměněné za ostré.

Pro důkaz následující věty budeme potřebovat tvrzení o limitě „funkce složené s posloupností“. Lze se sice odvolat na obecnou větu (34), ale pro zopakování připomeneme důkaz ještě jednou v tomto konkrétním případě.

Lemma:
Buď f funkce spojitá v bodě a a x_n posloupnost, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Pak existuje $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Důkaz: Zcela rutinním způsobem.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ \Rightarrow\ \big(\forall U(f(a))\exists U(a)\big)\big(\forall x \in U(a)\big)\big[f(x) \in U\big(f(a)\big)\big],$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0)\big(x_n \in U(a)\big) \Rightarrow \big[f(x_n) \in U\big(f(a)\big)\big].$$

Cvičení: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro niž existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ nevlastní. Pak f není v a spojitá. Návod: postupujte sporem, uvažujte $f(a)$ a definici nevlastní limity.

Věta 47: Existence globálního extrému na $\langle a;b\rangle$
Nechť f je reálná, spojitá na $\langle a;b\rangle$. Pak existují $\min_{\langle a;b\rangle} f$ a $\max_{\langle a;b\rangle} f$.

Důkaz: Tvrzení dokážeme pro minimum (pro maximum bude postup analogický). Označme $A = \inf_{\langle a;b\rangle} f$ a dokažme, že existuje v $\langle a;b\rangle$ bod x_0, pro nějž $A = f(x_0)$. Důkaz rozdělíme na tři části:

1. Najdeme „minimizující“ posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \langle a,b\rangle$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
2. Z této posloupnosti vybereme posloupnost x_{k_n} konvergující k určitému bodu x_0.
3. Ukážeme s pomocí lemmatu uvedeného před touto větou, že $f(x_{k_n})$ konverguje k $f(x_0)$, a proto $f(x_0) = A$.

Bod 1. Je-li $A \in \mathbb{R}$ infimem oboru hodnot funkce, pak z definice infima plyne, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in \langle a;b\rangle)\big(A \le f(x_n) \le A + \frac{1}{n}\big)$. Z věty o dvou strážnících (8) pak díky $A = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} A + \frac{1}{n}$ plyne $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Pakliže je $A = -\infty$[27], budeme používat intervaly $(-\infty;-n)$ s $n \in \mathbb{N}$, čímž podle věty o limitním přechodu v nerovnost získáme posloupnost $f(x_n)$ s limitou $-\infty$.
Bod 2. Z Weierstrassovy věty plyne (proč je $\{x_n\}$ omezená?), že z posloupnosti x_n můžeme vybrat posloupnost x_{k_n} (kde $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí), která konverguje k nějakému číslu. Označíme jej x_0. Podle poznámky za důkazem Heineho věty (42) pak i posloupnost $f\big(x_{k_n}\big)$ konverguje k A, neboť je to vybraná posloupnost z $f(x_n)$. Ad 3. Protože je funkce f spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, je spojitá i v bodě x_0 tohoto intervalu. Lemma, jež jsme dokázali před touto větou, pak dává

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0).$$

Vzhledem k tomu, že A je infimem oboru hodnot f, funkce f určitě nenabývá na celém $\langle a;b\rangle$ hodnot menších, a proto má f v bodě x_0 globální minimum. Ze spojitosti f také okamžitě plyne, že nemůže být $A = f(x_0) = -\infty$.

Poznámka: Předpoklady věty nelze zeslabovat bez újmy na obecnosti vysloveného tvrzení. Snadno totiž najdeme protipříklady: pokud by funkce f nemusela být spojitá, lze vzít např. funkci f definovanou $f(x) = x$ pro $x \in (-1;1)$ a $f(-1) = f(1) = 0$ — ačkoliv je D_f uzavřený interval, nemá funkce ani globální maximum, ani globální minimum. Jestliže bychom naopak netrvali na uzavřenosti D_f, stačí uvažovat např. $\operatorname{arctg} x$ při $x \in (-\infty;\infty)$, případně opět $f(x) = x$ na $(-1;1)$, nemá-li snad někdo rád neomezené intervaly.

Poznámka o důsledcích věty (47): Je-li f spojitá reálná či komplexní funkce definovaná na uzavřeném intervalu I, je omezená a nabývá dokonce svého „maxima“ i „minima“ na I, pokud definujeme „maximum“, resp. „minimum“ komplexní funkce $g(x)$ jako maximum, resp. minimum funkce $|g(x)|$. Komplexní funkci lze totiž jednoznačně rozepsat do tvaru $f_1(x) + if_2(x)$, přičemž $f_1(x)$ i $f_2(x)$ musí být spojité na I (triviální důsledek věty o limitě komplexní funkce jako součtu limit jejích složek), a proto i omezené. Pišme nyní novou spojitou funkci g reálné proměnné definovanou na I předpisem $g(x) \equiv |f(x)| = \sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)}$. Tato funkce má podle věty (47) globální extrémy, a je tudíž těmito extrémy omezená.

Další důsledek je skutečnost, že je-li f spojitá na $(a;b)$ a její jednostranné limity v krajních bodech jsou vlastní, pak lze f v krajních bodech intervalu $(a;b)$ dodefinovat těmito limitami a pak použít věty (47).

[27] Brzy sice ukážeme, že tato situace nastat nemůže, zatím však nemáme důvod ji ze našich úvah vylučovat.

Věta 48: Existence globálního extrému na $(a;b)$
Nechť f je spojitá na (a,b) a nechť existují $\lim_{x\to a+} f(x) = A,\ \lim_{x\to b-} f(x) = B,\ A,B \in \mathbb{R}^*$. Označme $K = \max\{A,B\}$ a množinu podezřelých bodů $P = \{x \in (a,b) |\ f'(x) \text{ nedef. } \vee f'(x) = 0\}$. Nechť existuje $\max_{x\in P} f(x) = H$. Pak existuje $\max_{x\in(a;b)} f(x)$ a je rovno H, právě když $H \geq K$.

Důkaz: Ekvivalenci dokážeme jako obousměrnou implikaci. Nejprve $\Rightarrow$:

$$\big(\exists \max_{(a,b)} f(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x_0 \in (a;b)\big)\big(f(x_0) = \max_{(a,b)} f(x)\big) \Rightarrow \big(f'(x_0) \text{ nedef. } \vee f'(x_0) = 0\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_0 \in P) \Rightarrow \big(\max_P f(x) = f(x_0) = \max_{(a,b)} f(x)\big)$$

Dále zřejmě $\forall x \in (a;b) : f(x) \leq f(x_0)$, a limitním přechodem v nerovnosti tedy $A, B \leq f(x_0) = H$.

Dále dokážeme obrácenou implikaci. Pokud $H \geq K$, ukážeme sporem, že f nemůže nabývat na $(a;b)$ větších hodnot než H. Nechť $\exists x_0 \in (a;b)$ takové, že $f(x_0) > H \geq K$, a tedy $\big(\exists U_\alpha^{*+}(a), U_\beta^{-*}(b)\big)\big(\forall x \in \in U_\alpha^{*+}(a) \cup U_\beta^{*-}(b)\big)\big(f(x) < f(x_0)\big)$. Pak ale existuje $z \in \langle a+\alpha; b-\beta\rangle$, v němž nastává maximum na tomto uzavřeném intervalu (dle předchozí věty) a přitom z není krajním bodem tohoto intervalu. Tedy musí ležet v P a rovněž musí být $f(z) \geq f(x_0) > K = \max_P f(x)$, což je spor. Funkce f pak nabývá svého maxima v těch bodech $x \in P \subset (a;b)$, kde je $f(x) = H$.

Poznámka: Poslední dvě věty platí analogicky samozřejmě i pro opačné extrémy. Nechceme-li tvrdit, že důkaz by se provedl podobným způsobem, můžeme například říci, že větu budeme aplikovat na funkci $-f(x)$ — je jistě spojitá (byla-li $f(x)$ spojitá) a musí mít dle věty minimum. Minimum funkce $-f(x)$ je ale totéž co maximum $f(x)$ (uvědomte si definici maxima a minima).

Poznámka: Hledáme-li extrémy funkce na intervalu $I = \langle a;b\rangle$ — existenci nám zajišťuje věta (47) — stačí se omezit na prozkoumávání (většinou konečné) množiny podezřelých bodů rozšířené o krajní body intervalu

$$P = \{x \in (a,b) |\ f'(x) \text{ nedef. } \vee f'(x) = 0\} \cup \{a,b\},$$

přičemž $\max_I f = \max_P f$. Toto tvrzení jsme již použili výše. Stačí si uvědomit, že hledané maximum je buď krajním bodem I, nebo lokálním extrémem, a tudíž musí být bod, v němž tento extrém nastane, zahrnut v množině P, jak tvrdí věta (46).

Příklad: Vyšetřeme na intervalu $\langle -2;2\rangle$ extrémy funkce $f(x) = 9|x| - x^3$.

První užitečná informace je, že f je spojitá na celém intervalu (je součtem spojitých funkcí). Hledejme nyní body podezřelé ve smyslu předchozí poznámky. Krajní body jsou podezřelé automaticky, dále do P jistě náleží bod 0, v němž neexistuje derivace f. Nalezněme nyní derivaci f ve všech ostatních bodech. Hledejme ji zvlášť na množinách (zde intervalech), kde x nemění znaménko, pročež lze $|x|$ derivovat jako lineární funkci:

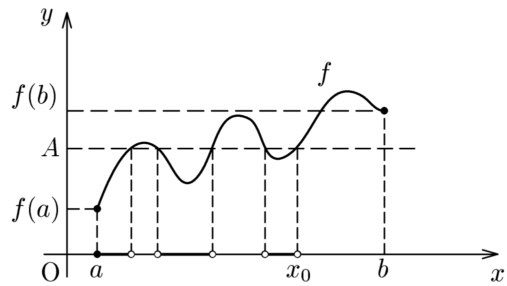
$$x \in (-2;0) :\ f'(x) = -9 - 3x^2 \quad \text{a} \quad x \in (0;2) :\ f'(x) = 9 - 3x^2.$$

Je vidět, že na intervalu $(-2;0)$ je derivace f stále záporná, proto zde extrém nenastane. Naopak v $(0;2)$ existuje právě jeden nulový bod $f'(x)$, a to $x = \sqrt{3}$. Podezřelé body tedy jsou $-2, 0, \sqrt{3}$ a 2. Zjistíme, že hodnoty f v těchto bodech jsou po řadě $26, 0, 6\sqrt{3}$ a 10. Na intervalu $\langle -2;2\rangle$ má proto f globální maximum v bodě -2 a globální minimum v bodě 0 (uvědomte si znovu, proč nemůže (globální) extrém nastat kdekoliv jinde).

Příklad: Najděte obdélník o obvodu 4 s maximálním obsahem.

Označme délky stran obdélníka a, b, přičemž zřejmě $a \in (0;2)$. Musí platit $2a + 2b = 4$, tj. $b = 2 - a$ a obsah obdélníka pak bude $S(a) = a(2-a)$. Ptejme se nejprve, zda tato funkce (zřejmě spojitá) má maximum na intervalu $(0,2)$. Odpověď nám dá věta (48): jednostranné limity v krajních bodech intervalu určíme snadno (S je spojitá na $\mathbb{R}$) — obě jsou nulové. Hledejme dále množinu podezřelých bodů: S je diferencovatelná na celém intervalu a $S'(a)$ je nulová pouze pro $a = 1$. To je také jediný prvek P, a tudíž $\max_P S(a) = 1$, což je číslo větší než obě limity v krajních bodech, tedy S má na $(0,2)$ maximum, a to v bodě $a = 1$. Proto má maximální obsah ze všech takových obdélníků právě čtverec.

Věta 49: Darbouxova vlastnost spojitých funkcí
Je-li f spojitá na $\langle a;b\rangle$, pak nabývá všech hodnot mezi $f(a), f(b)$.



Obrázek 4: K důkazu Darbouxovy věty. Na ose x je vyznačena množina M a x_0 pro konkrétní volbu A.

Důkaz: Budeme předpokládat, že $f(a) < f(b)$ (v případě rovnosti není co dokazovat, opačná nerovnost by se dokazovala stejným způsobem). Musíme nyní ukázat, že ať zvolíme jakékoliv číslo A, $f(a) < A < < f(b)$, bude vždy existovat $x_0 \in \langle a; b\rangle$, že $f(x_0) = A$.
Označme $M = \{x \in \langle a; b\rangle \big| \; f(x) < A\}$ — jistě se jedná o neprázdnou množinu. Označme supremum této množiny x_0 a dokažme, že $f(x_0) = A$. Zajisté existuje posloupnost[28] $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ s vlastností $x_0 - \frac{1}{n} \le x_n < x_0$. Dle věty o dvou strážnících tato posloupnost konverguje k x_0 a protože f je spojitá, konverguje i posloupnost $f(x_n)$, a to k číslu $f(x_0)$. Věta o limitním přechodu v nerovnost však tvrdí, že jelikož zřejmě $f(x_n) < A$, je i limita, to jest $f(x_0) \le A$.
Nakonec ukážeme, že nemůže být $f(x_0) < A$. Nechť naopak $f(x_0) < A$. Protože je x_0 suprémem M, platí $f(x) \ge A$ pro každé $x > x_0$. Opět podle věty o limitním přechodu v nerovnost je proto v x_0 limita zprava větší nebo rovna A, a tedy oboustranná limita f (i kdyby existovala) by musela být větší nebo rovna A — rozhodně by však nebyla rovna $f(x_0) < A$, čili f by nebyla spojitá v tomto bodě, což je spor.

Věta 50:
Nechť f je neklesající na $(a; b)$ a nechť je $\mathrm{R}_f = f\big((a; b)\big)$ (tedy interval $(a; b)$ zobrazený f) rovněž interval. Pak je f na $(a; b)$ spojitá.

Důkaz: nepřímo. Nechť existuje $c \in (a; b)$, $f(c) < \lim_{x\to c+} f(x) = d_2$, resp. $d_1 = \lim_{x\to c-} f(x) < f(c)$ — obě limity existují, viz větu (40). Pak ale intervaly $(c; d_2)$ a $(d_1; c)$ nejsou obsaženy v R_f.

Věta 51: Existence inverzní funkce
Nechť f je spojitá a rostoucí na $(a; b)$. Pak k ní existuje invezní funkce f_{-1}, která je také spojitá a rostoucí. Označíme-li navíc $A = \lim\limits_{x\to a+}(x)$, $B = \lim\limits_{x\to b-}(x)$, platí $\mathrm{D}_{f_{-1}} = (A; B)$, $\mathrm{R}_{f_{-1}} = (a; b)$.

Důkaz: Dle Darbouxovy vlastnosti spojitých funkcí je

$$\big(\mathrm{R}_f = (A; B) \Rightarrow \big(\forall C \in (A; B)\big)\big(\exists! x \in (a; b)\big)\big(f(x) = C\big);$$

pokud by existovalo více takových x, byl by to spor s předpokladem, že f je rostoucí. Tedy $\mathrm{D}_{f_{-1}} = (A; B)$, $\mathrm{R}_{f_{-1}} = (a; b)$ a f_{-1} je funkce.

Buď $c < d$ a $C = f(c)$, $D = f(d)$, pak $f_{-1}(C) = c$, $f_{-1}(D) = d$. Požadavek, aby f byla rostoucí však způsobí, že pak i $C < D$. Stejně tak je-li $c > d$, je i $C > D$, přičemž $c = d$ je právě pro $C = D$ (f je rostoucí). Celkově jsme tedy ověřili ekvivalenci $C > D \Leftrightarrow c > d$, což však znamená, že f_{-1} je rostoucí.

Konečně dokažme, že f_{-1} je spojitá. Okamžitě to plyne pomocí předchozí věty ze skutečnosti, že f_{-1} je rostoucí (tedy neklesající) a obor jejích hodnot je interval.

Poznámka: Věta (51) ukazuje, že třetí předpoklad (existence spojité inverzní funkce) ve větě o derivaci inverzní funkce (15) je nadbytečný. Smazali jsme tak opět jeden ze starých dluhů.

Definice 38: Stejnoměrná spojitost funkce na intervalu
Nechť f je komplexní funkce, I interval. Řekneme, že f je *stejnoměrně spojitá* na I, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in I)\big(|x' - x''| < \delta\big) \text{ platí } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

[28] Většinou stačí volit přímo $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$.

Poznámka: Pokud vyšetřujeme obyčejnou spojitost funkce f v libovolném bodě $x' \in I$, pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ žádáme, aby pro všechna x'' z nějakého okolí $U_\delta(x')$ bylo $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Velikost tohoto okolí se ovšem může při stejném ε a různých x' měnit. Vyšetřujeme-li stejnoměrnou spojitost f na I, pak žádáme, aby bylo pro dané ε možné volit δ stejné pro všechna $x' \in I$. Je patrné, že ze stejnoměrné spojitosti plyne obyčejná spojitost.

Příklad: Funkce $f(x) = 1/x$ na $(0; 1)$ je sice spojitá, ale nikoliv stejnoměrně spojitá. Zvolíme-li pevně například $\varepsilon = 1$, pak pro x' blízké jedné stačí volit $\delta \approx \frac{1}{2}$, ale čím více se blížíme s x' k nule, musíme δ zmenšovat (pro $x' = \frac{1}{100}$ musíme volit již $\delta < \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \approx 2.10^{-4}$). Při dalším přibližování x' k nule zřejmě potřebné δ nemá žádnou dolní hranici větší než nula, a tedy neexistuje $\delta > 0$, které by stačilo volit pro všechna $x' \in (0; 1)$. Na libovolném podintervalu $(0; 1)$ ovšem již funkce f stejnoměrně spojitá je.

Závěr předchozího odstavce vyjadřuje skutečnost, že na $(0; 1)$ se sice hodnoty f v okolí x blíží k $f(x)$, ale ne všude stejně rychle.

Věta 52: Cantorova
Je-li funkce f spojitá na $\langle a; b\rangle = I$, je i stejnoměrně spojitá na I.

Důkaz: sporem. Nechť f je spojitá na I a

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x'_n, x''_n \in I)\big(|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}\big)\big(|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon\big).$$

Rozdíl $|x'_n - x''_n|$ tedy konverguje k nule. Podle Weierstrassovy věty lze z x'_n, x''_n vybrat konvergující posloupnosti x'_{n_k}, x''_{n_k} a má-li jejich rozdíl konvergovat k nule, musí i ony samy konvergovat k témuž číslu, které označíme x_0. Je-li ale f spojitá, musí i $f(x'_{n_k})$ a $f(x''_{n_k})$ konvergovat k témuž číslu $f(x_0)$. Proto konverguje $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})$ k nule. To je ovšem spor.

§3. Věty o střední hodnotě: l'Hôspitalova věta

Poznámka: V tomto paragrafu se budeme zabývat diferencovatelnými funkcemi.

Věta 53: Rolleova
Nechť f je reálná funkce na $\langle a; b\rangle$, pro niž platí:

1. f je na $\langle a; b\rangle$ spojitá a pro $x \in (a; b)$ existují též $f'(x)$,
2. $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $\xi \in (a; b)$, pro nějž $f'(\xi) = 0$.

Důkaz: Je-li f konstanta, stačí vzít za ξ libovolný prvek $(a; b)$. Není-li f konstanta, existuje dle věty (47) maximum i minimum f na $\langle a; b\rangle$ v nějakých bodech ξ_1, ξ_2, a zřejmě tedy musí být $f(\xi_1) \neq f(\xi_2)$. Alespoň jedno z čísel $f(\xi_1), f(\xi_2)$ se ovšem musí lišit od čísla $f(a) = f(b)$; nechť je to $f(\xi_1)$. Pak ale $a \neq \xi_1 \neq b$, tedy $\xi_1 \in (a; b)$. Dle věty (46) však $f'(\xi_1)$ buď neexistuje, nebo je nulová. První předpoklad této věty tedy potvrzuje, že $f'(\xi_1) = 0$.

Věta 54: Lagrangeova (také věta o přírůstku)
Nechť f je reálná funkce na $\langle a; b\rangle$ splňující první předpoklad z minulé věty. Pak existuje $\xi \in (a; b)$ tak, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{20}$$

Poznámka: Pokusíme se definovat pomocí f novou funkci, která již bude splňovat požadavky Rolleovy věty: odečteme od f funkci, která je v a rovna $f(a)$ a v bodě b je rovna rozdílu $f(b)$. Nejjednodušší taková „opravná“ funkce bude samozřejmě lineární. Tato funkce má zároveň i tu výhodu, že po derivování v nějakém bodě intervalu (a, b) z ní zůstane pouze konstanta nezávislá na ξ, které se nám ve vztahu (20) jinde než v argumentu derivace nevyskytuje.

Důkaz: Uvažujme tedy

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right].$$

Tato funkce vznikla sčítáním a násobením funkcí majících derivaci na $(a;b)$, a má proto sama derivaci na $(a;b)$ (podobně je tomu se spojitostí). Dále zřejmě $F(a) = F(b) = 0$. Dle Rolleovy věty tedy existuje $\xi \in (a;b)$, $F'(\xi) = 0$. Funkci F nyní zderivujeme: $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - [f(b) - f(a)]/(b-a)$. Z tohoto však okamžitě dostáváme kýžený vztah (20).

Poznámka: Věta Lagrangeova nám říká, že u funkce splňující dané předpoklady najdeme tečnu jejího grafu rovnoběžnou se spojnicí krajních bodů grafu funkce na daném intervalu. Viz obrázek 5 (b).

Poznámka: Předpoklady Rolleovy věty nelze oslabit — jako protipříklady při odbourání prvního předpokladu může sloužit funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x - x$ na intervalu $\langle 0;1\rangle$, resp. funkce $f(x) = |x|$ na $\langle -1;1\rangle$, podmínka druhá je zřejmá (stačí vzít $f(x) = x$). Rovněž nelze tvrzení zobecnit pro komplexní funkce — např. $y = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ na intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$.

Příklad: Snadno nyní dokážeme, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ je

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Protože je $\sin x$ spojitá a lze ji derivovat na celém $\mathbb{R}$, existuje pro každá různá x, y číslo ξ ležící mezi x a y, pro něž je $\big(\sin x - \sin y\big)/(x - y) = f'(\xi) = \cos \xi$. Absolutní hodnota kosinu je ale vždy menší než jedna, čímž získáme dokazovaný vztah.

Věta 55: Cauchyova
Buďte f, g reálné funkce definované na $\langle a;b\rangle$ s následujícími vlastnostmi:

1. f, g jsou na $\langle a;b\rangle$ spojité,
2. na $(a;b)$ existují $f'(x), g'(x)$ a dále $g'(x)$ je vlastní,
3. $g(a) \neq g(b)$.

Pak existuje $\xi \in (a;b)$ takové, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(\xi). \tag{21}$$

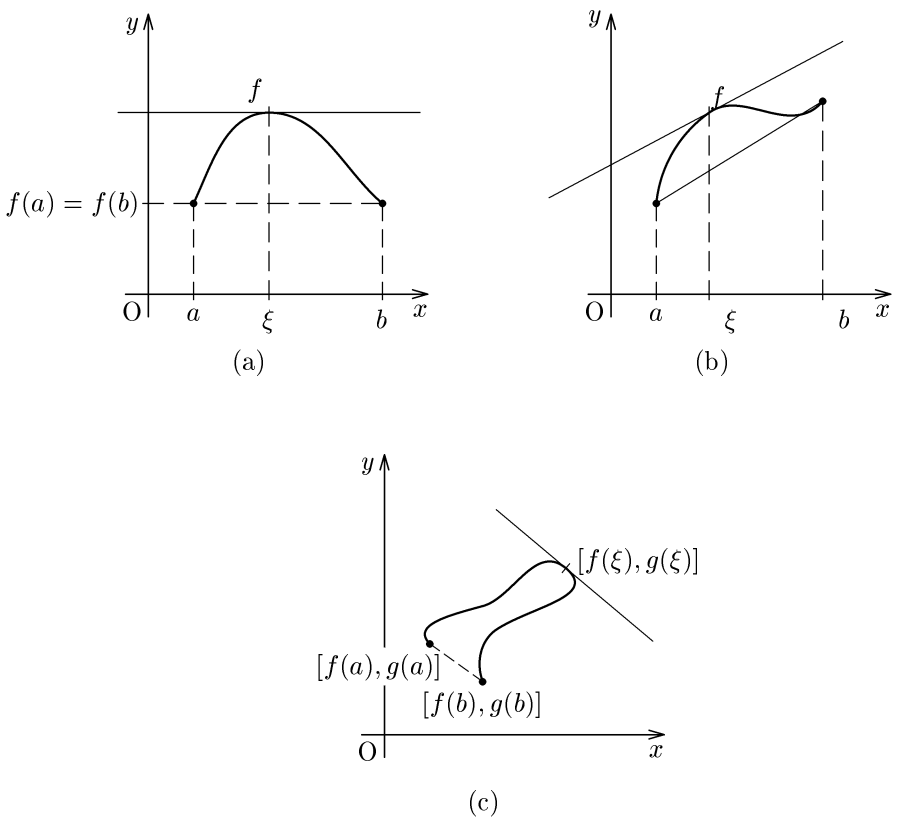
Poznámka: Pokusíme se opět vytvořit novou funkci Ψ jedné proměnné, která by měla v bodech a, b stejné hodnoty, například nulové a zahrnovala by $f(x)$ a $g(x)$ pokud možno v součtu, popřípadě násobené nějakými konstantami. Dále by již tato funkce neměla obsahovat členy (sčítance) závislé na x — ty by po zderivování nezmizely — ve vztahu (21) jsou pouze členy obsahující $f'(\xi), g'(\xi)$. Jako „vhodná“ funkce poslouží

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{f(b) - f(a)}(f(x) - f(a)) - \frac{1}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Poznámka: Jiný způsob jak vytvořit „vhodnou“ funkci pro následující důkaz je použít „vhodnou“ funkci z důkazu Lagrangeovy věty a dosadit do ní novou funkci $x = g(t)$ (a dále pak budeme psát $g(a)$ místo a a $g(b)$ místo b). Místo složené funkce $f \circ g$ pak budeme psát F. Zde se však dopouštíme jisté nesrovnalosti, neboť F není nezávislá na g (i když je vztah mezi nimi — funkce f — libovolný, způsobí například, že není možné, aby g byla na určité části (a, b) konstantní a přitom F nebyla). Proto je třeba dále považovat funkce F a g za naprosto nezávislé, čímž se poněkud smazává pojítko mezi získanou funkcí a původní „vhodnou“ funkcí z důkazu Lagrangeovy věty. Zde bychom tedy získali funkci (místo F píšeme opět f):

$$\Psi_2(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Vidíme, že je $\Psi_2 = \Psi_1.(f(b) - f(a))$, pročež pro $f(a) \neq f(b)$ bude platit např. $\Psi_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \Psi_2'(x) = 0$, obě funkce tedy budou při použití Lagrangeovy věty dávat stejná ξ. Pro zavedení funkce Ψ_1 je však ještě nutné předpokládat $f(a) \neq f(b)$, což je další požadavek, jenž snižuje obecnost důkazu. Proto je lepší použít Ψ_2, na Ψ_1 si však přesto můžeme uvědomit způsob, jakým bylo potřeba konstruovat funkce vhodné pro tento důkaz.



Obrázek 5: Geometrický význam vět o střední hodnotě: (a) Rolleovy, (b) Lagrangeovy a (c) Cauchyovy.

Důkaz: Uvažujme např. funkci $\Psi_2(x)$. Snadno ověříme, že je funkce spojitá na $(a;b)$ a má na intervalu $(a;b)$ derivace (proč?) a dále že $\Psi_2(a) = \Psi_2(b) = 0$. Podle Rolleovy věty tedy existuje $\xi \in (a;b)$, pro něž $0 = \Psi_2'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. Cauchyovu větu jsme tedy dokázali.

P o z n á m k a : Pokud by byla g ryze monotónní, bylo by možné dokázat tuto větu za použití „vhodné“ funkce $F(x) = (f \circ g_{-1})(x)$. Co odráží tato skutečnost? Cauchyova věta nám říká, že k hladké křivce (tedy mající v každém bodě právě jednu tečnu) nalezneme v nějakém jejím bodě tečnu rovnoběžnou se spojnicí jejích koncových bodů. Tuto křivku budeme mít v rovině zadanou parametricky funkcemi $y = f(t)$, $x = g(t)$. Vskutku — pokud je tato křivka funkce, lze ji vyjádřit ve tvaru $y = h(x)$, čímž dospíváme ke tvrzení minulé věty. Tuto úpravu je možno provést, vždy pokud $g(t)$ nepřiřazuje dvěma různým t stejné x. Pokud by totiž v různých t bylo $g(t)$ stejné, ale $f(t)$ různé, znamenalo by to, že h musí stejnému x přiřadit dvě různé hodnoty, a není tudíž funkce jako například v případě znázorněném na obr. 5 (c).

Ú m l u v a : Pro $I = \langle a;b \rangle$ budeme definovat vnitřek intervalu $I^0 = (a;b)$.

Věta 56:
Buď f komplexní funkce ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Platí-li na intervalu I^0 rovnost $f'(x) = 0$, pak f je na I^0 konstantní. Jinak řečeno

$$(\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C})\big[(\forall x \in I^0)\big(f'(x) = g'(x)\big) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{C})\big(f(x) = g(x) + c\big)\big].$$

Důkaz: Dokažme tvrzení nejprve pro reálné funkce[29]. Bereme-li $x_0 \in I^0$ pevné, pak dle Lagrangeovy věty platí pro každé $x \in I^0$: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0$, $\xi \in I_0$.
Komplexní funkci f pak lze definujeme (viz úvodní kapitolu) jako $f_1(x) + i f_2(x)$, kde f_1, f_2 jsou reálné

[29] Nelze brát komplexní funkce, viz poznámku za Lagrangeovou větou.

funkce. Má-li platit $f'(x) = 0$, musí být $f_1'(x) = f_2'(x) = 0$. Pro tyto dvě funkce použijeme právě dokázané tvrzení, čímž zjistíme, že f musí být součtem konstantních funkcí a je tedy sama konstanta.

Poznámka: Tímto jsme tedy konečně dokázali i opačný směr implikace v tvrzení, jež jsme vyslovili jako ekvivalenci v kapitole o primitivních funkcích.

Věta 57: O limitě jednostranných derivací
Nechť f je komplexní funkce a nechť je v bodě a spojitá zprava. Dále nechť existují vlastní derivace $f'(x)$ pro všechna x nějakého $U^{*+}(a)$, přičemž $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$. Pak existuje $f'_+(a) = A$. Analogicky pro limity zleva.

Důkaz: Na intervalu $U^{*+}(a)$ je f spojitá, tedy při $x \in U^{*+}(a)$ lze pro interval (a, x) použít Lagrangeovu větu: $\big(\exists \xi \in (a;x)\big)\big(f'(\xi) = [f(x) - f(a)]/(x-a)\big)$. Pokud zkoumáme limity zprava obou stran této rovnosti, zjistíme, že na pravé straně je přímo hledaná derivace $f'_+(a)$, na levé straně pak po použití věty o limitě složené funkce[30] limita derivací z prava.

Příklad: Pomocí této jednoduché věty budeme moci snáze počítat jednostranné derivace, např. v krajních bodech nějakého intervalu. Mějme například funkci definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{pro } x \in (0,\infty), \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

a hledejme její derivaci zprava v bodě $x = 0$.
Nejprve snadno zjistíme, že $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Lze tedy použít právě dokázanou větu. $f(x)$ tedy zderivujeme pro kladná x: $f'(x) = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$. Dále počítáme limitu tohoto výrazu zprava pro $x \to 0$. Dvojnásobným použitím l'Hôspitalovy věty[31] zjistíme, že tato limita je nulová, proto i $f'_+(0) = 0$.

Poznámka (nepovinná): Všimněme si ještě, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_+^{(n)}(0) = 0$, ale přesto $f(x) \not\equiv 0$ — pro výpočet těchto derivací budeme opakovaně používat l'Hôspitalovu větu. Libovolná derivace $f(x)$ totiž zřejmě bude ve tvaru $R(x)e^{-\frac{1}{x}}$, kde $R(x)$ je racionální funkce (uvědomte si, jak se derivuje součin funkcí), vypočítat $f'_+(0)$ jako limitu takového výrazu tedy bude žádat určit $\lim_{y\to\infty} \frac{P(x)}{e^x}$, kde $P(x)$ je polynom[32]. O této limitě však víme, že je nezávisle na stupni polynomu $P(x)$ nulová.

V tuto chvíli již také máme aparát postačující pro pohodlnější odstranění dalšího našeho dluhu, a to důkazu l'Hôspitalovy věty. Připomeňme si ji:

Věta 38: l'Hôspitalova
Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť je splněna jedna z podmínek 1a, 1b a dále podmínky 2 a 3:

1. (a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,
   (b) $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$;
2. $\exists U^*(a), \forall x \in U^*(a)$ jsou definovány vlastní $f'(x)$, $g'(x)$;
3. existuje $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$.

Pak existuje $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

Důkaz: Větu rozdělíme na několik částí. Nejprve budeme předpokládat, že byla splněna podmínka 1a.

1. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak můžeme dodefinovat (případně předefinovat) funkce f, g v tomto bodě a takto: $f(a) = g(a) = 0$. Na limitě $f(x)/g(x)$ to nic nezmění — v její definici se nikde nevyskytují čísla $f(a), g(a)$. Snadno ověříme, že na libovolném intervalu $I = (a;x)$ nebo $I = (x;a)$, $x \in U^*(a)$ (z podmínky 2), lze použít Cauchyovu větu (55). Tedy existuje $\xi = \xi(x) \in I$, pro něž platí

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

[30] ξ můžeme považovat za neznámou funkci proměnné x — pro $x \to a$ bude jistě také $\xi \to a$ ($a < \xi < x$) dle věty o dvou strážnících ($a < \xi < x$) a dále, protože $\xi \neq a$, lze použít zmiňovanou větu o limitě složené funkce.

[31] Limitu upravíme do tvaru $\lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^y}$.

[32] Na tento tvar limitu upravíme způsobem analogickým jako při určování první derivace.

Protože však $\lim_{x \to a} \xi = a$ (věta o dvou strážnících), ale $\xi \neq a$, lze za použití věty o limitě složené funkce[33] určit limity obou podílů pro $x \to a$, čímž máme dokázánu požadovanou nerovnost

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2. Buď nyní naopak $a = \pm\infty$. Pak za použití tvrzení obdobného jako výše zmiňovaná věta o limitě složené funkce snadno ukážeme, že

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0\pm} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0\pm} \frac{f'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})}{g(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Při úpravách jsme využili dokázaného předchozího bodu, resp. v jeho lehké obměně pro jednostrannou limitu.

Nyní prověřme, zda tvrzení platí i za podmínky 1b. Tvrzení dokážeme pro $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, důkaz pro limitu zleva je analogický.

1. Promysleme nejprve případ $A = 0$. Podstatná úprava pro pochopení systému důkazu je

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}. \tag{22}$$

Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu 3 musí existovat $x_1 > a$ takové, že

$$\forall \xi \in (a; x_1): \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < \varepsilon.$$

Pro toto x_1 pevně zvolené potom

$$(\exists \delta > 0)\big(\forall x \in (a; a+\delta)\big)\left[\left(\left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\right| < \varepsilon\right) \wedge \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < 1\right)\right].$$

To ale znamená, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ stačí zvolit x_1 podle požadavku výše a použít Cauchyho větu (55). Z (22) dostaneme omezení

$$\forall x \in (a; a+\delta): \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Nenulovost výrazů ve jmenovatelích v (22) je zajištěna díky podmínce $\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < 1$.

2. Pro $A \in \mathbb{R}$ definujeme funkci $F(x) = f(x) - Ag(x)$. Pak předpoklad 3 implikuje

$$\lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right) = 0$$

a podle předchozího bodu je $0 = \lim\limits_{x \to a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - A\right)$, tedy $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

3. Berme konečně $A = \pm\infty$ (uvažujme například $A = -\infty$). Použijeme opět funkci (22) a postup u bodu 1 mírně obměníme: budeme hledat pravé okolí a, v němž $|g(x)| > 2|g(x_1)|$; pak platí $\left(1 - \frac{|g(x_1)|}{|g(x)|}\right) > \frac{1}{2}$. Omezíme-li člen $\frac{|f(x_1)|}{|g(x)|}$ např. číslem 1 a zvolíme-li libovolné K, bude pro každé x splňující $\frac{f'(x)}{g'(x)} < 2K - 2$ pravá strana (22) vždy menší než K, tedy $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Vyčerpali jsme všechny možnosti připuštěné podmínkami věty, důkaz je proto hotov.

[33] Lze si představit, že ξ je nějakou blíže neurčenou funkcí x splňující podmínku $a < \xi < x$ nebo $x < \xi < a$.

§4. Souvislost první derivace a monotonie

Věta 58: Souvislost monotonie na intervalu s derivací
Nechť $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na intervalu I a nechť v každém bodě I existuje derivace (vlastní nebo nevlastní). Pak

1. $\forall x \in I : \; f'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f$ je nerostoucí v I; $\forall x \in I : \; f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow f$ je neklesající v I.
2. $\forall x \in I : \; f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ je klesající v I; $\forall x \in I : \; f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ je rostoucí v I.

Důkaz: První ekvivalence v bodu 1.
$\Leftarrow$. Nechť f je nerostoucí v I. To znamená, že $(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2)$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$. Zvolme pevně libovolný bod $x_0 \in I$. Potom

$$\forall x \in I, \, x \neq x_0 : \; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

a limitním přechodem v nerovnosti dostaneme žádané tvrzení.
$\Rightarrow$. Zvolíme-li libovolné $x_1, x_2 \in I, \; x_1 < x_2$, pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (54) existuje $\xi \in (x_1; x_2)$ tak, že

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) \leq 0.$$

Z toho ale plyne $f(x_1) \geq f(x_2)$. Důkaz druhé ekvivalence je jen variací tohoto důkazu, proto ho přenecháváme čtenáři.

V případě bodu 2 použijeme stejný postup jako při důkazu $\Rightarrow$ u prvního bodu jen s ostrými nerovnostmi místo neostrých.

P o z n á m k a : Povšimněte si, že implikace v bodě 2 nelze obrátit. Například funkce $x \mapsto x^3$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ a přesto má v nule derivaci rovnou nule.

Věta 59: Postačující podmínky pro lokální extrémy
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v a. Pak:

1. f rostoucí (resp. klesající) na $U^{*-}(a)$, klesající (resp. rostoucí) na $U^{*+}(a) \Longrightarrow f$ má v bodě a ostré lokální maximum (resp. minimum). Pokud zaměníme výraz „klesající“ za „nerostoucí“ a „rostoucí“ za „neklesající“, získáme tvrzení pro (neostré) lokální maximum (resp. minimum).
2. $f'(x) > 0 \; (f'(x) < 0), \forall x \in U^{*-}(a), \; f'(x) < 0 \; (f'(x) > 0), \forall x U^{*+}(a) \Longrightarrow \; f$ má v bodě a ostré lokální maximum (minimum). Záměnou ostrých nerovností za neostré získáme opět tvrzení pro extrémy neostré.

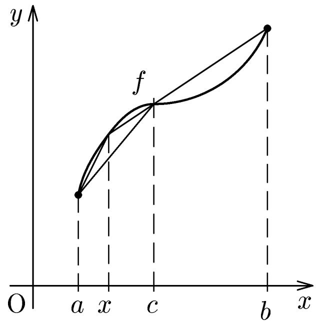
Důkaz: Stačí dokazovat první tvrzení, protože podle předchozí věty druhé tvrzení plyne z prvního.
Nechť f má vlastnosti z bodu 1. Pak platí

$$f(a) = \lim_{x \to a-} f(x) = \sup_{U^{*-}(a)} f(x)$$

Je tedy $f(a) \geq f(x), \; \forall x \in U^{*-}(a)$. Pokud položíme $x' = \frac{1}{2}(x + a)$, platí $x < x' < a, \; f(x') \leq f(a)$, a tudíž $f(x) < f(x') \leq f(a)$, takže platí ostrá nerovnost. Podobně lze postupovat i na $U^{*+}(a)$.
Další tvrzení mají důkaz analogický prvnímu a čtenář si je může dokázat v rámci cvičení.

Věta 60: Další postačující podmínky pro lokální extrémy
Nechť $\exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Pak

1. n je sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0 \;\Longrightarrow\; f$ má v x_0 ostré lokální minimum.
2. n je sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0 \;\Longrightarrow\; f$ má v x_0 ostré lokální maximum.
3. n je liché a $f^{(n)}(x_0) > 0 \;\Longrightarrow\; f$ je v x_0 rostoucí.
4. n je liché a $f^{(n)}(x_0) < 0 \;\Longrightarrow\; f$ má v x_0 klesající.



Obrázek 6: Funkce f je konkávní na $(a;c)$, konvexní na $(c;b)$ a má v c inflexní bod.

Důkaz: Matematickou indukcí:

1. $n=1$, např. $f'(x_0)>0$, pak je funkce rostoucí — viz předchozí věty.
   $n=2$, nechť například $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$, pak $f'(x)$ je v x_0 rostoucí, tudíž platí $f'(x)<$ $<f'(x_0)=0$ na nějakém levém okolí bodu x_0 a $f'(x)>f'(x_0)=0$ na nějakém pravém okolí. Funkce f má tedy v x_0 ostré lokální minimum.
2. Nechť tvrzení platí pro n.
   Budiž $n+1$ sudé a například $f^{(n+1)}(x_0)>0$, čili $(f')^{(n)}(x_0)>0$. Pak je podle indukčního předpokladu f' rostoucí v x, tudíž je podle úvah analogických s úvahami předchozího odstavce v x_0 ostré lokální minimum funkce f.
   Pokud je $n+1$ liché a například $f^{(n+1)}(x_0)>0 \iff (f')^{(n)}(x_0)>0$, čili f' má podle indukčního předpokladu v x_0 ostré lokální minimum, a tedy $f'(x)>f'(x_0)=0$ na nějakém okolí. Je tedy f rostoucí v x_0.

§5. Konvexita a konkavita

Definice 39: Funkce konvexní a konkávní na intervalu

1. Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je *na intervalu I konvexní*, pokud pro $\forall x,y,z\in I$ taková, že $x<y<z$, platí $f(y)\le f(x)+\frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$.
2. Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je *na intervalu I konkávní*, pokud pro $\forall x,y,z\in I$ taková, že $x<y<z$, platí $f(y)\ge f(x)+\frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$.
3. Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je *na intervalu I ryze konvexní*, pokud pro $\forall x,y,z\in I$ taková, že $x<y<z$, platí $f(y)<f(x)+\frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$.
4. Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je *na intervalu I ryze konkávní*, pokud pro $\forall x,y,z\in I$ taková, že $x<y<z$, platí $f(y)>f(x)+\frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$.

Poznámka: Konvexita a konkavita má názorný geometrický význam. Pokud nakreslíme graf a spojíme přímkou body o souřadnicích $[x,f(x)]$ a $[z,f(z)]$, má tato přímka rovnici $p(y)=f(x)+\frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-$ $-x)$. Nerovnost v první části věty tedy znamená, že všechny body grafu přímky na otevřeném intervalu $(x;z)$ leží nad grafem funkce f, nejvýš je některý bod společný, viz obrázek (6). Podobný význam mají i další části věty. Konkavita a konvexita se zahrnuje pod společný pojem *křivost grafu funkce.*

Lemma:
Funkce f je konvexní v I právě když pro každé $x,y,z\in I$ platí

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\ \Leftrightarrow\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\ \Leftrightarrow\ \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Důkaz: Provede se jednoduchou algebraickou úpravou, necháváme proto na čtenáři, aby ho sám vypracoval. Z geometrického pohledu srovnáváme směrnice přímek: zvolíme-li v I libovolné body a, x, c, $a < x < c$, pak např. u konkávní funkce musí být přímka „ax“ strmější než přímka „xc“, viz obrázek (6).

Věta 61: Souvislost křivosti funkce s druhou derivací na intervalu
Nechť f je spojitá na $\langle a; b\rangle$ a f'' existuje na $(a; b)$,

1. Funkce f je konvexní na $\langle a; b\rangle$, právě když $f''(x) \geq 0$ na $(a; b)$.
2. Je-li $f''(x) > 0$ na $(a; b)$, pak f je ryze konvexní na $\langle a; b\rangle$.
3. Funkce f je konkávní na $\langle a; b\rangle$, právě když $f'' \leq 0$ na (a, b).
4. Je-li $f'' < 0$ na $(a; b)$, pak f je ryze konkávní na $\langle a; b\rangle$.

Důkaz: Dokážeme opět pouze první část věty.

1. $\Longrightarrow$. Nechť f je konvexní na $\langle a; b\rangle$. Uvažujme $\alpha < x < y < \beta$. Pak podle lemmatu platí
$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(\beta) - f(y)}{\beta - y}.$$
Podle věty o limitním přechodu v nerovnosti plyne $f'(\alpha) \geq f'(\beta)$ a to spolu s $\alpha > \beta$ znamená, že f' je neklesající $\Rightarrow f''(x) \leq 0$.
2. $\Longleftarrow$. Nechť $f''(x) \geq 0$ na $(a; b)$ a $x, y, z \in \langle a, b\rangle$ jsou $x < y < z$. Podle Lagrangeovy věty existují body $\xi_1 \in (x; y)$, $\xi_2 \in (y; z)$, $\xi_1 < \xi_2$ tak, že $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi_1)$ a $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(\xi_2)$. Díky předpokladu $f''(x) \geq 0$ pak máme $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ a díky tomu i $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$, což je podle lemmatu ekvivalentní s konvexitou f na $\langle a; b\rangle$.

Definice 40: Funkce ryze konvexní a konkávní v bodě, inflexní bod
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0)$ existuje vlastní.

1. Nechť $\exists U^*(x_0)$ takové, že $f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, pak řekneme, že f je *v bodě x_0 ryze konvexní.*
2. Nechť $\exists U^*(x_0)$ takové, že $f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, pak řekneme, že f je *v bodě x_0 ryze konkávní.*
3. Nechť na nějakém $U^{*-}(x_0)$ platí $f(x) < f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ a na $U^{*+}(x_0)$ platí $f(x) > f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ nebo na $U^{*-}(x_0)$ platí $f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ a na $U^{*+}(x_0)$ platí $f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, pak řekneme, že f má *v bodě x_0 inflexní bod.*

Věta 62: Souvislost druhé derivace a křivosti v bodě
Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak f je ryze konvexní v x_0.
2. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak f je ryze konkávní v x_0.
3. Je-li x_0 inflexní bod a $f''(x_0)$ existuje, pak $f''(x_0) = 0$.

Důkaz:

1. Nechť $f''(x_0) > 0$, čili $f'(x)$ je rostoucí v x_0. Pak $\exists U^*(x_0)$, v němž $\big(\forall \xi \in U^{*-}(x_0)\big)\big(f'(\xi) < f'(x_0)\big)$ a $\big(\forall \xi \in U^{*+}(x_0)\big)\big(f'(\xi) > f'(x_0)\big)$. Potom ovšem podle Lagrangeovy věty pro nějaké ξ_1 platí $\big(\forall x \in U^{*-}(x_0)\big)\big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_1) < f'(x_0)\big)$ a analogicky pro nějaké ξ_2 platí $\big(\forall x \in U^{*-}(x_0)\big)$ $\big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_2) > f'(x_0)\big)$. Odtud již přímo plyne definice konvexity v bodě.
2. Důkaz je analogický bodu 1.
3. Plyne přímo z obměny implikací 1 a 2.

Věta 63: Postačující podmínky pro konvexitu, konkavitu a inflexní bod
Nechť $n \geq 2$, $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1. Je-li n liché, pak f má v x_0 inflexní bod.
2. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak f je v x_0 ryze konvexní.
3. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak f je v x_0 ryze konkávní.

Důkaz: Matematickou indukcí.

1. $n = 3$. Potom $(f')''(x_0) \neq 0$, čili f' má v x_0 ostrý lokální extrém. Tehdy ovšem existuje $U^{*-}(x_0)$, že pro každé ξ_1 z $U^{*-}(x_0)$ platí $f'(\xi_1) < f'(x_0)$ a existuje $U^{*+}(x_0)$, že pro každé ξ_2 z $U^{*+}(x_0)$ platí $f'(\xi_2) > f'(x_0)$ (nebo naopak). Podle Lagrangeovy věty pak ke každému bodu x z $U^{*-}(x_0)$ můžeme najít ξ_1, v němž platí $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_1) < f'(x_0)$ a ke každému bodu x z $U^{*+}(x_0)$ můžeme najít ξ_2, v němž $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_2) > f'(x_0)$ (nebo naopak). Srovnáme-li to s definicí inflexního bodu, vidíme, že jsme hotovi.
   $n = 2$. Přímo předchozí věta.
2. $n+1$ je liché a například $f^{(n+1)}(x_0) = (f')^{(n)} > 0$. Pak je podle indukčního předpokladu f' ryze konvexní. Protože je zároveň nulová, má f' v x_0 ostrý lokální extrém. Tento případ jsme ovšem už diskutovali pro $n = 3$.
   $n+1$ je sudé a $f^{(n+1)}(x_0) = (f')^{(n)} > 0$. Potom můžeme podle indukčního předpokladu říci, že f' má v x_0 inflexní bod. Podle věty o souvislosti derivací vyšších řádů a monotonie víme, že f' je v x_0 rostoucí, tedy je na tomto okolí $f'(\xi) > f'(x_0) = 0$. Lagrangeova věta potom dává přímo hledaný výsledek.

Poznámka: *Jensenova nerovnost*
S pojmy konvexita a konkavita úzce souvisí také tzv. Jensenova nerovnost. Nechť f je konvexní na intervalu I. Pak pro $x_1, x_2, \ldots x_n \in I$ a $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ kladná taková, že $\sum \lambda_i = 1$ platí

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_n x_n).$$

Obrácená nerovnost platí pro konkávní funkci.

Důkaz této nerovnosti není složitý (zvídavý čtenář nechť vyjde z definice konvexity), o to více překvapí hloubka výsledků, které z ní plynou. Důkaz řady známých nerovností lze založit na vhodné volbě funkce f a váhovacích koeficientů λ_i.

Cvičení: Jako dobrovolné domácí cvičení zkuste dokázat nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pomocí Jensenovy nerovnosti.

§6. Taylorův polynom

Poznámka: Mějme dánu spojitou funkci f. Budeme si rozmýšlet, jak nejlépe tuto funkci aproximovat v okolí daného bodu polynomem stupně n. Pro případ $n = 1$ nám poslouží následující lemma. Připomeňme definici: pro každé dvě funkce f, g definujeme

$$f = o(g),\ x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Lemma:
Nechť f je spojitá v bodě x_0. Pak existuje polynom $P_1(x)$ prvního stupně s vlastností $\big[f(x) - P_1(x) = o(x - x_0)\big] \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$.

Důkaz: Nejprve prověříme implikaci $\Rightarrow$.
Zřejmě musí být $\lim_{x \to x_0}(f(x) - P_1(x)) = 0$, tedy $f(x_0) = P_1(x_0)$. Vědouce toto, můžeme psát

$$P_1'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x) - P_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} + \frac{P_1(x) - P_1(x_0)}{x - x_0} \right) =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Zjistili jsme tedy, nejen že v tomto případě existuje derivace $f'(x_0)$, ale i jak určit vhodný polynom $P_1(x)$. Část $\Leftarrow$ nám již tím pádem nečiní starosti: existuje-li derivace, je vhodným polynomem splňujícím požadavky na funkční hodnotu a první derivaci v x_0 jistě $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$.

Věta 64: Peanova
Buď $n \in \mathbb{N}$ a f funkce, jež má vlastní derivace až do řádu n na nějakém okolí $U^*(x_0)$. Pak existuje právě jeden polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n splňující podmínku $f(x) - P_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big)$. Tento polynom má tvar

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0). \tag{23}$$

Definice 41: Taylorův polynom
Polynom $P_n(x)$ z Peanovy věty nazýváme *Taylorovým polynomem* n-tého stupně funkce f v bodě x_0 (nebo v okolí bodu x_0).

P o z n á m k a : Z formálního hlediska nelze při tomto zápisu definovat hodnotu $P_n(x_0)$, neboť suma pak obsahuje výraz $(x_0 - x_0)^0$. Proto budeme v tomto případě (a dalších podobných případech, jež budou následovat) definitoricky klást první člen sumy rovný výrazu $f(x_0)$.

Důkaz: Existence. Použijeme návodu ve větě, tedy ověříme, zda pro $P_n(x)$ definovaný vztahem (23) platí $f(x) - P_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big)$. Výpočet limity provedeme pomocí l'Hôspitalovy věty použité n-krát za sebou. Všechny derivace jmenovatele $(x - x_0)^n$ jsou v $x = x_0$ nulové až do řádu $n - 1$ včetně, n-tá derivace je pak rovna $n!$. Naproti tomu všechny derivace čitatele až do řádu n včetně jsou rovny nule (dokažte indukcí). Limita je tedy rovna nule, a polynom podmínku splňuje.

Dokažme ještě, že neexistuje jiný polynom n-tého stupně s touto vlastností. Budeme postupovat, jak to bývá v těchto případech obvyklé, sporem. Nechť tedy existují dva různé takové polynomy $P_1(x), P_2(x)$. Je-li pro ně splněna podmínka z Peanovy věty, musí být

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_2(x) - \big(f(x) - P_1(x)\big)}{(x - x_0)^n} = 0 - 0 = 0. \tag{24}$$

Rozdíl $P_1(x) - P_2(x)$ bude jistě polynom stupně nejvýše n (označme jej $P(x)$), k výpočtu této limity lze tedy opět užít l'Hôspitalovu větu (a to n-krát). Podobně jako v předchozím zjistíme, že $P^{(k)}(x_0) = 0$, $\forall k \in$ $\in \{0, 1, .., n\}$. Na druhou stranu však víme, že $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, z nichž alespoň jedno je nenulové, takové, že $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$. Nyní je vidět, že $P(x_0) = a_0$, $P^{(k)}(x_0) = n(n-1)\dots(n-k+1)a_k$, $k \in$ $\in \{1, 2, \dots, n\}$, tedy všechny derivace (první až n-tá) $P^{(k)}(x_0)$ nulové nebudou, tedy ani limita (24) nebude nulová, což je spor.

P o z n á m k a : Peanova věta ukazuje, že polynom (23) bude vhodný pro aproximaci f v daném bodě, bude mít v tomto bodě s f *dotyk n-tého řádu*. Nic však neříká o absolutní hodnotě rozdílu $f(x) - P(x)$ v okolí x_0, neurčí nám konkrétní číslo. Pro praktické použití aproximací bychom však takový odhad potřebovali. V následujících úvahách se proto obrátíme tímto směrem.

P o z n á m k a : Zkusme nejprve hledat $R_2(x) = f(x) - P_1(x)$ na okolí x_0, v němž existují derivace $f'(x), f''(x)$. Použijeme-li na intervalu mezi x, x_0, resp. ξ, x_0[34] pro funkce f, f' Lagrangeovu větu, můžeme psát:

$$R_2(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\big(f'(\xi) - f'(x_0)\big) = (x - x_0)^2 f''(\xi_1),$$

ξ_1 leží mezi ξ a x_0. Známe-li maximum f'' na intervalu mezi x a x_0, můžeme tedy tímto výrazem shora omezit chybu $f(x) - P_1(x)$. Stejně jako v úvodním lemmatu bychom mohli takto pokračovat dále a určit $R_{n+1}(x)$ pro libovolné $P_n(x)$. My však nyní vyslovíme větu ještě obecnější.

[34] Užívá se zde této formulace, neboť jsme neurčili, která mez intervalu je horní a která dolní — mluvíme tedy o intervalu (x_0, ξ) nebo (ξ, x_0) atd.

Věta 65: Odhad chyby pro Taylorův polynom
Budiž f reálná funkce definovaná na intervalu $\langle x_0; x\rangle$ a nechť existují na intervalu $(x_0; x)$ derivace až do řádu $n+1$. Buď dále ϕ libovolná reálná funkce spojitá na $\langle x_0; x\rangle$, jejíž derivace ϕ' na intervalu $(x_0; x)$ existují a jsou nenulové a vlastní. Označme $R_{n+1}(x)$ zbytek $f(x) - P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je Taylorův polynom f v x_0. Pak existuje $\xi \in (x_0; x)$ takové, že:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi). \tag{25}$$

Speciálně v případě $\phi(t) = (x-t)^{n+1}$ dojdeme k tzv. Lagrangeovu tvaru zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

pro $\phi(t) = t$ naopak ke Cauchyovu tvaru

$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\Theta)^n}{n!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0)),\ \Theta \in (0;1).$$

Poznámka: Důkaz povedeme přes věty o střední hodnotě. Pokusíme se proto zkonstruovat funkci, jejíž funkční hodnota by byla nějak spojená s chybou $R_{n+1}(x)$. Pro tuto funkci pak použijeme Cauchyovu větu: budeme ji, resp. její derivaci porovnávat s funkcí ϕ, resp. ϕ'. Naše nová funkce by tedy rozhodně měla být ve tvaru $f(x) - P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je Taylorův polynom pro funkci f v nějakém jejím bodě.

Důkaz: Vezměme funkci $F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ a zkoumejme její hodnoty pro $t = x$ a $t = x_0$: $F(x) = f(x) - f(x) = 0$, $F(x_0) = f(x) - P_n(x) = R_{n+1}(x)$[35]. Dále spočtěme derivaci $F'(t)$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= [f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n]' = \\ &= 0 - f'(t) - \big[f'(t)(-1) + f''(t)(x-t)\big] - \left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right] - \ldots \\ &\qquad \ldots - \left[\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]. \end{aligned}$$

Vidíme, že v každé závorce se vždy první člen odečte s druhým členem z předchozí závorky, a to díky znaménku minus, které vznikne derivováním $(x-t)$. Jediný člen, který se takto neodečte, bude jistě druhý člen závorky poslední. Můžeme tedy psát

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Nyní použijeme Cauchyovu větu pro funkce $F(t)$ a $\phi(t)$ na intervalu $(x_0; x)$[36]. Existuje tedy $\xi \in (x_0; x)$, pro něž

$$F(x_0) - F(x) = \frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)}\big[\phi(x_0) - \phi(x)\big].$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu hodnoty $F(x_0), F(x)$ spočítané na začátku důkazu a právě odvozenou derivaci $F'(\xi)$, docházíme k rovnici (25).
Lagrangeův tvar zbytku uvedený jako součást věty lze odvodit snadno prostým dosazením do právě dokázané obecné formule. Druhý, Cauchyův tvar, získáme, pokud po dosazení $\phi(t) = t$ volíme $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$ — volbou $0 < \Theta < 1$ můžeme umístit bod ξ kamkoliv do intervalu $(x_0; x)$.

Příklad: Spočtěte pomocí Taylorova polynomu hodnotu e^2 s přesností na jednu desetitisícinu.
Budeme aproximovat funkci e^x pomocí $P_n(x)$ v bodě[37] $x_0 = 0$. Nejprve určíme $f^{(n)}(x) = e^x$, čili $f^{(n)}(0) = 1$. Taylorův polynom tedy bude mít tvar $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Zjistěme nyní, jaké musíme vzít n, aby rozdíl mezi skutečnou hodnotou e^x a $P_n(x)$, tedy $R_{n+1}(2)$, byl menší než $0,0001$. Vezmeme-li Lagrangeův tvar zbytku, máme $R_{n+1}(2) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$, $\xi \in (0,2)$. Číslo e^{ξ} bude tedy určitě menší než např. 10.

[35] $P_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0.
[36] Promyslete, zda jsou splněny požadavky této věty — např. jestli nemůže nastat $\phi(x_0) = \phi(x)$.
[37] Volíme tento bod, protože v $P_n(x)$ se vyskytuje číslo $f(x_0)$ — to v tomto případě umíme určit přesně pouze pro $x_0 = 0$.

Vzhledem k tomu, že tento zbytek pro $n \to \infty$ konverguje k nule, lze jistě najít nějaké n, pro nějž tento zbytek bude menší než požadovaná $0,0001$. Metodou pokusu a omylu určíme, že např. pro $n = 11$ bude již tato podmínka splněna[38]. Číslo $P_{11}(2)$ tedy bude udávat hodnotu e^2 s vyžádanou přesností.

Ú m l u v a: V dalším budeme značit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k \equiv \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Lemma:
Mějme funkci f s derivacemi všech řádů na $U(x_0) \subset \mathrm{D}_f$. Platí následující výrok:

$$\forall x \in U(x_0) : \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow P_\infty(x) = f(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ je zbytek ve smyslu věty (65) pro Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 a $P_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$.

Důkaz: Tvrzení je názorné — pokud zvyšováním stupně Taylorova polynomu docílíme pro nějaké[39] x, že zbytek $R_{n+1}(x)$ se blíží k nule, lze hodnotu $f(x)$ nahradit hodnotou polynomu $P_\infty(x)$. Navíc je i důkaz tvrzení vcelku triviální. Nejedná se o nic jiného než o již dříve zmiňovanou ekvivalenci

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(x) - P_n(x)\big) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x).$$

Příklady: Budeme hledat $P_\infty(x)$ k některým známým funkcím a zkoumat, pro která x konverguje $R_n(x)$[40] k nule. Budeme tedy muset určit obecný vzorec pro n-tou derivaci funkce f v bodě $x_0 = 0$ [41], v němž budeme tvořit Taylorův polynom.

1. $f(x) = e^x$. Taylorův polynom v $x_0 = 0$ má dle již spočítaného příkladu tvar $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$. Ověřme ještě, že $R_n(x)$ konverguje k nule pro všechna x. Užijeme Lagrangeova tvaru zbytku:

   $$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi)\right| < \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} e^x = 0,$$

   ξ zde bylo z intervalu $(0; x)$, poslední limitu pro libovolné x reálné nechť nevěřící čtenář laskavě vyhledá v jedné z předchozích kapitol. Podle našeho lemmatu lze tedy psát

   $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

2. $f(x) = \sin x$. Zjistíme, že $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, tedy pro každé k přirozené platí $f^{(k)}(x) = f^{(k+4)}(x)$. Důležité je, že $|f^{(n)}(x)| \le 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto lze psát $|R_n(x)| \le \frac{x^n}{n!}$, díky čemuž postupem stejným jako u předchozího příkladu dokážeme, že $R_n(x)$ konverguje k nule. Nyní již zbývá jen určit $P_\infty(x)$.

   Zkoumáme-li derivace f pro $x = 0$, lze psát pro každé přípustné k: $f^{(2k)} = 0, f^{(4k+1)} = 1$, $f^{(4k-1)} = -1$ (posloupnost těchto derivací bude $1, 0, -1, 0, 1, \dots$, samozřejmě $f(0) = 0$). Proto lze psát

   $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

3. $f(x) = \cos x$. Postup bude téměř stejný jako u minulého bodu, jen posloupnost derivací se bude lišit: $0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots, f(0) = 1$. Získáme tak rozvoj

   $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

---

[38]Samozřejmě chceme aby n bylo co nejmenší možné — $P_n(x)$ pak bude obsahovat méně sčítanců, a bude se tudíž snáze počítat.

[39]Ovšem x může být samozřejmě různé od x_0.

[40]Čtenář se jistě nenechá zmást tím, že nadále budeme psát $R_n(x)$ místo $R_{n+1}(x)$.

[41]Taylorovy rozvoje v bodě $x_0 = 0$ se někdy označují jako Maclaurinovy řady.

4. $f(x) = \ln(1+x)$. Opět postupným derivováním určíme $f^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ a zbytek budeme zkoumat nyní v Cauchyově tvaru (Lagrangeův tvar zbytku by se nám nepodařilo omezit — to však ještě samozřejmě neznamená, že $R_n(x)$ nekonverguje k nule; vždy děláme totiž jen *horní odhady* $R_n(x)$, tedy skutečná hodnota tohoto zbytku může být menší, což se i často stává). Navíc budeme muset předpokládat, že $|x| < 1$:

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^n}{(n-1)!}(1-\Theta)^{n-1}\frac{(n-1)!}{|1+\Theta x|^n} = \frac{|x|^n}{|1+\Theta x|}\left|\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right|^{n-1} \leq \frac{|x|^n}{1+\Theta x} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|}.$$

Za zmíněného omezení pro x již poslední výraz konverguje k nule. Úprava, při níž jsme odstranili zlomek umocněný na $n-1$, byla podložena úvahou, že pro $|x| < 1$ je $1+\Theta x > 1-\Theta$, tedy celý zlomek musel být menší než jedna. Vidíme tedy, že na intervalu $(-1;1)$ má smysl konstruovat $P_\infty(x)$. Dokonce si povšimneme, že i pro $x = 1$ konverguje k nule (dosadíme za x přímo do prvního tvaru zbytku a zjistíme, že pro jakéholiv $\Theta \in (0;1)$ bude zbytek ve tvaru a^n, $0 < a < 1$). Bez důkazu pak dodáme, že pro ostatní x (tj. $x \in (1;\infty) \ \vee \ x \leq -1$) skutečně zbytek $R_n(x)$ rozvoje $P_\infty(x)$ v bodě $x_0 = 0$ k nule nekonverguje a dokonce roste nade všechny meze. Nyní tedy $P_\infty(x)$ sestrojíme.

Pomocí obecně vypočtené derivace $f^{(n)}(x)$ snadno určíme $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$, a tím pádem ($f(0) = 0$):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$. Zde bude postup velmi podobný případu minulému. Opět určíme $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ a pro důkaz konvergence $R_n(x)$ znovu použijeme Cauchyova tvaru zbytku za omezení $|x| < 1$:

$$|R_n(x)| = \frac{|x^n|}{(n-1)!}(1-\Theta)^{n-1}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+\Theta x)^{\alpha-n} \leq$$
$$\leq K\ \frac{|x|^n}{1+\Theta x}\left|\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right|^{n-1}.$$

Pod konstantu K jsme zahrnuli číslo $(1+\Theta x)^\alpha$ násobené $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}$. Tento zlomek je možné pro dostatečně velká n rozdělit na součin dvou zlomků $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{1.2\ldots k}$, $k \geq \alpha - k$ a $\frac{(\alpha-k-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(k+1)\ldots(n-1)}$. První zlomek je pak nějaké číslo nezávislé na n, zatímco v druhém zlomku je i-tý činitel jmenovatele vždy v absolutní hodnotě větší než i-tý činitel čitatele, tedy celý tento zlomek je v absolutní hodnotě menší než 1. Součin těchto zlomků lze tím pádem omezit konstantou[42] nezávislou na n. Tím jsme již dospěli do místa, od kterého bude postup naprosto stejný jako v předchozím příkladu. Intervalem, na němž bude mít smysl konstruovat $P_\infty(x)$ bude opět $\langle -1;1)$, pro $x = -1$ bychom ale konvergenci $R_n(x)$ nedokázali naznačeným způsobem[43].

Definujme ještě:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \equiv \binom{\alpha}{n};$$

je patrné že pro α přirozené je tento výraz skutečně roven známému kombinačnímu číslu. Tato definice je tedy přirozeným rozšířením tohoto výrazu pro α reálné či komplexní.

Dosazením do již spočteného určíme $f^{(n)}(0) = \binom{\alpha}{n}n!$, tedy lze psát

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + x\binom{\alpha}{1} + x^2\binom{\alpha}{2} + x^3\binom{\alpha}{3} + \ldots;$$

[42] Pokud by ovšem bylo α přirozené, vyskytl by se pro $n > \alpha$ v čitateli nulový činitel, tedy celý $R_n(x)$ by byl samozřejmě od tohoto n výše roven nule.

[43] Kdybychom dosadili do zbytku $x = -1$, dospěli bychom k výrazu $\frac{1}{1-\Theta}$, jenž zřejmě k nule nekonverguje — stejná situace nastala v minulém příkladu.

všimneme si ještě, že pro α přirozené máme takto odvozenu binomickou větu, neboť pro $n > \alpha$ je $\binom{\alpha}{n} = 0$ a zároveň — jak jsme si povšimli již dříve — i $R_n(x) = 0$ pro všechna x. Pro ostatní α (ještě s výjimkou 0 a -1[44]) je pak nutné, aby $x \in \langle -1; 1\rangle$.

P ř í k l a d : V relativistické fyzice se často setkáme s přiblížením

$$\sqrt{1-v^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2},$$

které plyne z posledního příkladu, pokud se omezíme jen na první dva členy rozvoje.

P o z n á m k a : Zamysleme se ještě nad tím, jak určit Taylorův polynom součtu, součinu nebo podílu funkcí, případně složené funkce, známe-li Taylorovy polynomy pro tyto dvě funkce (je samozřejmě potřeba, aby oba tyto polynomy byly určeny pro tentýž bod x_0 — pro zkrácení zápisů budeme brát $x_0 = 0$).
Než však postoupíme dále, připomeneme si několik pravidel pro počítání se symboly $o(x)$. Jejich důkaz čtenář snadno provede na základě definice tohoto symbolu:

$$\forall f,g:\ o(f) \pm o(f) = o(f), \quad o(f).o(g) = o(f.g),$$
$$\forall f,g,h: \big[h = o(g), g = o(f)\big] \ \Rightarrow\ \big[h = o(f), h + g = o(f)\big],$$
$$(\forall f)(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\lambda \neq 0)\big(o(\lambda f) = o(f)\big).$$

Mějme tedy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

1. $f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k + o(x^n)$,
2. $f(x) \cdot g(x) = \big[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)\big]\big[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + o(x^n)\big] =$ $= a_0 b_0 + x(a_1 b_0 + a_0 b_1) + x^2(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} x^k + o(x^n)$.
3. Pro $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(0) = b_0 \neq 0$ máme dvě možnosti:
   (a) „Metoda neznámých koeficientů“: hledáme polynom stupně n, který splňuje vztah:

   $$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)};$$

   rozšíříme jej jmenovatelem zlomku, čímž obdržíme rovnost dvou polynomů n-tého stupně platnou pro každé x z nějakého intervalu. Ta ovšem nastane, právě když jsou koeficienty u jednotlivých mocnin x na obou stranách stejné — tím problém převádíme na řešení soustavy $n+1$ lineárních rovnic o $n+1$ neznámých α_k.

   (b) Lze psát $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$. Taylorův polynom pro součin již známe, budeme se tedy zabývat určením $1/g(x)$. Platí:

   $$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0}\frac{1}{1 - (-\frac{b_1}{b_0}x - \frac{b_2}{b_0}x^2 - \ldots)} = \frac{1}{b_0}\frac{1}{1-G}.$$

   Poznamenejme, že pokud $b_0 = 0$, nelze Taylorův rozvoj $1/g(x)$ vůbec provést — první člen rozvoje rovný $1/g(x_0)$ není vůbec definován. Pokud je $|G| < 1$, lze podle dříve spočítaného psát:

   $$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0}\left[1 + G + G^2 + \ldots + G^n + o(x^n)\right],$$

   neboť pro $k > n$ je jistě $G^k = o(x^n)$. Pro $k \leq n$ ovšem výrazy G^k budou také obsahovat mnoho členů, které již lze zahrnout pod $o(x^n)$. Tohoto postupu lze s výhodou užít např. při určování Taylorova polynomu pro $\operatorname{tg} x = \sin x \frac{1}{\cos x}$.

[44]Platí $\frac{1}{1-x} = \frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{1-x^{n+1}}$; pro $|x| < 1$ jistě jmenovatel konverguje k 1, tedy lze psát $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$, což je známý vztah pro součet geometrické posloupnosti, použitý opačným směrem.

4. $(f \circ g)(x)$, tj. $f(y),\ y = g(x)$. Musí být samozřejmě $b_0 = 0$ (pokud bychom dosadili do $f(y)$ za $y \neq 0$, nevíme nic o rozdílu $f(x) - P_n(x)$ — viz Peanovu větu). Potom funkce $o(y^n)$ jsou i $o(x^n)$ a po dosazení za y do $f(y)$ píšeme

$$(f \circ g)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{l=1}^{n} b_l x^l \right)^k + o(x^n),$$

opět s dodatkem, že i výrazy y^k budou obsahovat některé členy, které již budou $o(x^n)$, čímž se výpočet obvykle poněkud usnadní.

Příklad: Spočtěte

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}.$$

Řešení této limity klasickými prostředky (viz kapitolu o limitách) by bylo poměrně obtížné. Zkusíme proto jednotlivé funkce v této limitě nahradit Taylorovými polynomy takového řádu [tedy s chybou $o(x^n)$], aby nám po zjednodušení zlomku (sečteme a vynásobíme polynomy podle toho, jak se mají sčítat a násobit funkce, které těmito polynomy nahrazujeme) nezbyly pouze výrazy $o(x^n)$. V praxi to činíme tak, že volíme řád $n = 2 \sim 4$ podle toho, jak „se nám zdá limita zákeřná“, a v případě, že se nám všechny mocninné členy odečtou, řád zvýšíme. Zde je třeba volit $n = 4$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[1 + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + o(x^4)\right] - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^3 \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{12} + o(x^4)/x^4}{1 + o(x^4)/x^4} = \frac{1}{12}.$$

5 Riemannův integrál

Čtenář již jistě tuší, že integrály jsou mocným nástrojem jak v matematice, tak ve všech oborech z matematiky vycházejících. Doposud jsme se seznámili pouze s Newtonovým (Leibnizovým) integrálem, jehož teorie nám umožňovala řešit diferenciální rovnice. Ukazuje se však, že tentýž integrál může posloužit i k výpočtu obsahu obrazce ohraničeného grafem dané funkce, objemu či povrchu příslušných rotačních těles. Nechme se motivovat následující úlohou:

Příklad: Uvažujme tyč, jejíž délková hustota je dána funkcí $\rho(x)$, kde x je polohová souřadnice, konce tyče jsou určeny hodnotami $x = a$, $x = b$.

Pro konstantní funkci $\rho(x) = \rho_0$ bude tyč homogenní a její hmotnost zřejmě bude $|a - b|\rho_0$. Co se však stane v případě, že tyč homogenní není? Zkusme problém vyřešit pomocí již známého Newtonova integrálu. Vezměme úsek tyče mezi body x a y ($a \leq x < y \leq b$) a berme funkci $m(x)$ udávající hmotnost části tyče mezi body a a x. Hmotnost části mezi x a y pak jistě bude $m(y) - m(x)$ a její průměrná délková hustota $[m(x) - m(y)]/(x - y)$. Pokud budeme zkoumat limitu posledního výrazu pro $y \to x$, dospějeme zřejmě k délkové hustotě v daném bodě (takto ji definujeme)[45]. Srovnáme-li tuto limitu s definicí derivace, vidíme, že $m'(x) = \rho(x)$ a úloha se redukuje na problém nalézt primitivní funkci k $\rho(x)$. Hmotnost tyče pak totiž zřejmě bude $m(b) - m(a)$. Víme, že primitivní funkce k dané $\rho(x)$ je určena jednoznačně až na aditivní konstantu, ale zároveň hmotnost tyče by měla být nějaké pevné číslo určené již pouze funkcí $\rho(x)$. Snadno se ovšem můžeme přesvědčit, že dosadíme-li do uvedeného výrazu pro hmotnost tyče postupně dvě funkce $m(x)$ lišící se pouze o konstantu, dostaneme vždy stejný výsledek. Zdánlivý rozpor v úvaze je tedy šťastně zažehnán.

Zkusme uvažovat jinak: rozdělme tyč na určitý počet dílů a v každém dílu stanovme nějakou střední délkovou hustotu. Hmotnost tyče pak bude samozřejmě rovna součtu hmotností jednotlivých dílů. Hmotnost každého dílu přibližně spočteme jako součin jeho délky a střední délkové hustoty. Přesnost výpočtu bude zřejmě záviset na tom, co prohlásíme za tuto střední hodnotu (abychom ji mohli určit přesně, museli bychom již znát hmotnost dílu). Lze však očekávat, že tato střední hustota nebude větší než největší a menší než nejmenší hustota vyskytující se v daném úseku tyče. Nalezli jsme tedy alespoň interval, z něhož budeme střední hodnotu vybírat. Bylo by pak přirozené, kdyby se při zmenšování délky jednotlivých úseků blížila hmotnost vypočtená naznačeným způsobem hmotnosti skutečné.

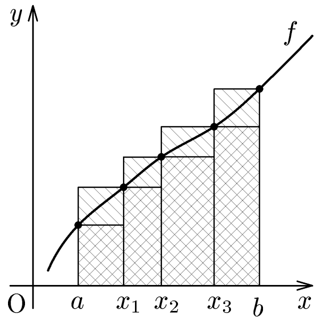
V této kapitole pro tento postup zavedeme název Riemannův integrál a ukážeme dva různé způsoby jak volit zmíněné střední hodnoty.

Poznámka: Vyznačme si výšeuvedený postup do grafu zkoumané funkce $\rho(x)$: rozdělíme jej nejprve na určitý počet dílů a do každého dílu vepíšeme obdélník s šířkou shodnou s šířkou tohoto dílu a výškou odpovídající zvolené střední hodnotě v tomto dílu. Zmiňovaný součet pak bude přibližně roven obsahu obrazce omezeného grafem zkoumané funkce, osy x a okraji příslušného intervalu (v našem případě $\langle a; b\rangle$). Výhoda této úvahy je, že nejsme závislí na existenci primitivní funkce k funkci zkoumané (prozkoumejte funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$). V této kapitole tedy po zavedení Riemannova integrálu ukážeme, že vykazuje vlastnosti, jež bychom očekávali od procedury udávající obsah určitého obrazce[46], a dále že v případě existence příslušné primitivní funkce jsou obsahy ploch omezených křivkou zkoumané funkce, vypočtené pomocí Newtonova i Riemannova integrálu, stejné.

§1. Horní a dolní Riemannovy součty

Definice 42: Dělení intervalu
Budiž $\langle a; b\rangle \subset \mathbb{R}$ a $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Řekneme, že čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ určují *dělení D intervalu* $\langle a; b\rangle$, každý z bodů $x_i, 0 \leq i \leq n$ nazveme dělícím bodem D a číslo $\nu(D) = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{x_i - x_{i-1}\}$ nazveme normou tohoto dělení.

[45] Vzpomeňte si například na objemovou sílu zmiňovanou kupříkladu ve fyzice kontinua: $\vec{G} = \mathrm{d}\vec{F}/\,\mathrm{d}V$.
[46] Typu: obsah sjednocení dvou disjunktních obrazců je roven součtu obsahů těchto obrazců.



Obrázek 7: Geometrický význam horního a dolního Riemannova součtu pro funkci f na intervalu $\langle a; b\rangle$ a konkrétní dělení tohoto intervalu.

Definice 43: Zjemnění dělení
Řekneme, že dělení D' je *zjemněním dělení* D, pokud každý z dělících bodů D je dělícím bodem D'.

Definice 44: Horní a dolní Riemannův součet
Budiž funkce f reálná omezená funkce na $\langle a; b\rangle$. Nechť D je dělení $\langle a; b\rangle$ a označme $M_i = \sup_{\langle x_i, x_{i-1}\rangle} f(x)$ a $m_i = \inf_{\langle x_i, x_{i-1}\rangle} f(x)$. Čísla

$$S(f, D) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \text{resp. } s(f, D) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

nazveme *horním*, resp. *dolním Riemannovým součtem* funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$.

Poznámka: Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme u sumačních symbolů (a v dalších podobných situacích) vynechávat indexy a sčítat budeme přes všechny úseky dělení.

Věta 66:
Budiž f omezená na $\langle a; b\rangle$. Potom pro $m = \inf_{\langle a;b\rangle} f(x), M = \sup_{\langle a;b\rangle} f(x)$, platí

$$m(b - a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b - a)$$

pro každé dělení D.

Důkaz: Platí zřejmě $m \leq m_i$ a $M_i \leq M$ pro každé i, a proto $s(f, D) = \sum m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum m(x_i - -x_{i-1}) = m \sum(x_i - x_{i-1}) = m(b-a)$. Podobně ukážeme $S(f, D) \leq M(b-a)$. Konečně víme, že $m_i \leq M_i$, a proto $s(f, D) = \sum m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, D)$. Tvrzení věty je také velmi dobře patrné z obrázku (7). Uvědomte si, jak by bylo v obrázku znázorněno $m(b - a)$ a $M(b - a)$.

Definice 45: Horní a dolní Riemannův integrál
Nechť f je reálná omezená funkce na $\langle a; b\rangle$. Pro množinu Δ všech dělení intervalu $\langle a; b\rangle$ nazveme číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{df}}{=} \sup_D\{s(f, D)\} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{D\in\Delta} s(f, D)$$

dolním Riemannovým integrálem f na intervalu $\langle a; b\rangle$. *Horní Riemannův integrál* definujeme analogicky jako infimum množiny všech horních součtů.

Poznámka: Horní a dolní Riemannův integrál omezené funkce (a o jiných zatím nemluvíme) je vždy definován a platí

$$-\infty \neq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \infty.$$

Nerovnosti plynou přímo z věty (66). Množina všech horních a dolních součtů je podle této věty omezená, a tudíž má vlastní supremum i infimum.

Definice 46: Riemannův integrál
Nechť pro omezenou reálnou funkci f jsou na $\langle a;b\rangle$ hodnoty dolního a horního Riemannova integrálu stejné. Číslo

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\mathrm{df}}{=} \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

pak nazveme Riemannovým integrálem f na intervalu $\langle a;b\rangle$. Nehrozí-li záměna s jiným integrálem, písmeno R před znakem integrálu vynecháme.
Pro omezenou komplexní funkci $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad: Zkoumejme existenci Riemannova integrálu nám známé Dirichletovy funkce ($f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ pro ostatní x) na intervalu $\langle 0;1\rangle$.

Zvolme libovolný interval $\langle a;b\rangle$, $0 \le a < b \le 1$. Existuje věta, jež tvrdí, že mezi každými dvěma různými reálnými čísly leží alespoň jedno číslo racionální[47], tedy v $\langle a;b\rangle$ existuje bod x, v němž je $f(x) = 1$. Dle definice suprema musí být tedy $\sup_{\langle a;b\rangle} f(x) = 1$. Tato úvaha platí pro každý interval $\langle a;b\rangle$, proto každý horní Riemannův součet bude roven jedné, které bude tím pádem roven i horní Riemannův integrál. Podobně si uvědomíme, že $\inf_{\langle a;b\rangle} f(x) = 0$, neboť mezi každými dvěma různými čísly reálnými existuje též alespoň jedno číslo iracionální[48] a stejným postupem zjistíme, že dolní Riemannův integrál na $\langle 0;1\rangle$ je roven nule. Protože $0 \ne 1$, našli jsme omezenou funkci, jejíž Riemannův integrál neexistuje.

Cvičení: Zkuste z definice ukázat existenci Riemannova integrálu funkce $f(x) = 11$ na intervalu $\langle 5,7\rangle$ a určete jeho hodnotu.

Věta 67:
Nechť f je omezená reálná funkce na $\langle a;b\rangle$ a nechť dělení D' je zjemnění D. Potom platí

$$s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D).$$

Důkaz: Prostřední nerovnost je již pokryta větou (66). Důkaz krajních nerovností formálně provedeme matematickou indukcí podle počtu dělících bodů D', které nejsou obsaženy v D. Nechť obsahuje D' oproti D navíc jediný bod. Tedy $D : x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n$, $D' : x_0, \dots, x_{k-1}, x', x_k, \dots, x_n$. Potom např. pro dolní součty podle D a D' zřejmě platí

$$\begin{aligned} s(f,D') - s(f,D) &= m_{k_1}(x' - x_{k-1}) + m_{k_2}(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) = \\ &= (m_{k_1} - m_k)(x' - x_{k-1}) + (m_{k_2} - m_k)(x_k - x') \ge 0. \end{aligned}$$

Čísla m_{k_1}, m_{k_2} jsou infima $f(x)$ na příslušných intervalech D'. Interval $\langle x_{k-1}; x_k\rangle$ jsme rozdělili podle rovnosti $x_k - x_{k-1} = (x_k - x') + (x' - x_{k-1})$ a v závěru jsme využili nerovnosti $m_{k_1}, m_{k_2} \ge m_k$[49]. Tím jsme dokázali větu pro jeden bod v D' navíc. Indukční krok se provede naprosto stejným způsobem — ukázali jsme totiž, že zjemníme-li libovolné dělení o jeden bod, hodnota dolního součtu neklesne, při formálním důkazu matematickou indukcí lze tedy psát $s(f,D) \le s(f,D'_n) \le s(f,D'_{n+1})$, tedy $s(f,D) \le s(f,D'_{n+1})$ (D'_n značí zjemnění D lišící se od D v n bodech).
Důkaz pro horní Riemannovy součty je stejný.

Věta 68:
Pro každou omezenou reálnou funkci f na $\langle a;b\rangle$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[47] Návod pro zvídavé — pomůže nám tzv. Archimédův princip: $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+)(\exists n \in \mathbb{N})(n\alpha > \beta)$, ten lze dokázat z definice reálných čísel. Existuje proto číslo $q \in \mathbb{N}$, pro něž má interval $\langle qa; qb\rangle$ délku alespoň 1 a obsahuje tudíž alespoň jedno celé číslo p. Konečně ověříme, že číslo $\frac{p}{q}$ leží v $\langle a;b\rangle$.

[48] Dokažte sporem, opět interval „nafoukněte“ tak, aby obsahoval například $\sqrt{2}$.

[49] Dokažte si sami: $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \inf \mathrm{A} \ge \inf \mathrm{B}$. Analogická věta platí i pro suprema.

Lemma:
Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $\langle a;b\rangle$ a f je reálná omezená funkce na $\langle a;b\rangle$. Potom platí $s(f,D_1) \leq$ $\leq S(f,D_2)$.

Důkaz lemmatu: Pomůže nám jednoduchá myšlenka a předchozí věta: uvažujme společné zjemnění D dělení D_1, D_2 (D je zjemněním D_1 i D_2) — sestrojíme jej například tak, že položíme $D = D_1 \cup D_2$, tedy do D zařadíme všechny dělící body obsažené v D_1 nebo D_2). Pak dle věty (67) platí $s(f,D_1) \leq s(f,D)$ a $S(f,D) \leq S(f,D_2)$. Nyní použijeme dřívější větu (66), dle které $s(f,D) \leq S(f,D)$, čímž dojdeme ke kýženému $s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$.

Důkaz věty: je nyní již jednoduchý. Shrňme dosavadní poznatky: pro dvě množiny (horní a dolní Riemannovy součty) platí, že každý prvek z množiny prvé je větší nebo roven libovolnému prvku z množiny druhé. Infimum I první množiny pak nemůže být menší než supremum S množiny druhé; vzpomeneme na definici infima: v prvé množině by jinak musel existovat prvek P menší než S. Dle definice suprema by se pak ve druhé množině musel nacházet prvek větší než P, což je spor. Tedy skutečně horní Riemannův integrál není menší než dolní Riemannův integrál.

Poznámka: Povšimněte si nerovnosti

$$\forall D_1, D_2 : \; s(f,D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f,D_2)$$

a jejího důsledku

$$S(f,D_1) - s(f,D_2) \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

S jeho pomocí nyní snadno dokážeme následující větu.

Věta 69: Ekvivalentní podmínka pro existenci Riemannova integrálu
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, právě když $(\forall\varepsilon > 0)(\exists D)\big[\; S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon\big]$.

Důkaz: $\Rightarrow$. Existuje-li zmíněný Riemannův integrál, jsou si příslušné horní a dolní Riemannovy integrály, tedy infimum horních součtů h a supremum dolních součtů d rovny. Definice suprema a infima nám pak zaručí, že pro libovolné $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existují D_1, D_2 taková, že $d - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,D_1) \leq d$ a $h \leq S(f,D_2) < h - \frac{\varepsilon}{2}$. Spojením těchto dvou nerovností ($d = h$) získáme $S(f,D_2) - s(f,D_1) < \varepsilon$; pokud by D_1 a D_2 nebyly stejné, stačí vzít jejich společné zjemnění D a použitím věty (67) dojdeme k hledanému $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.
$\Leftarrow$. V tomto případě využijeme poznámky za předešlou větou. Pro každé ε kladné tedy existuje D takové, že $\varepsilon > S(f,D) - s(f,D) \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Rozdíl horního a dolního Riemannova integrálu je tedy menší než libovolné kladné číslo a musí být roven nule[50], neboť předchozí věta zaručuje, že nemůže být záporný.

Věta 70: Existence Riemannova integrálu u funkcí spojitých na uzavřeném intervalu
Je-li f spojitá na $\langle a;b\rangle$, existuje $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: V souladu s předchozí větou budeme zkoumat výraz $S(f,D) - s(f,D)$. Platí

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Cantorova věta (52) praví, že funkce spojitá na $\langle a;b\rangle$ je též na $\langle a;b\rangle$ stejnoměrně spojitá, tedy že

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall y_1, y_2 \in \langle a;b\rangle)\big(|y_1 - y_2| < \delta\big)\big(|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon\big).$$

Pišme místo ε kladné číslo $\frac{1}{2}\varepsilon/(b-a)$. I pro něj jistě existuje δ se shora popsanou vlastností. Zvolme dělení D takové, aby $\nu(D) < \delta$ — viz definici (42). Pro libovolný interval $I = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ nyní platí $\forall y_1, y_2 \in I : |f(y_1) - f(y_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon/(b-a)$, a tím pádem $|M_i - m_i| \leq \frac{1}{2}\varepsilon/(b-a)$[51]. Pro toto dělení D tedy

[50] Pokud vám to nepřipadne zřejmé, rozmyslete si, k čemu by došlo, kdyby byl tento rozdíl větší než nula.
[51] Zkuste si toto tvrzení dokázat sporem, podobně jako v důkazu první části minulé věty. $\forall x, y \in \mathrm{A} : |x - y| \leq \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \sup \mathrm{A} - \inf \mathrm{A} \leq \varepsilon$, najděte protipříklad k analogickému tvrzení s ostrými nerovnostmi, vzpomeňte si na analogii s limitním přechodem v nerovnosti.

můžeme psát

$$\sum (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) < \varepsilon.$$

Tedy jsme pro libovolné kladné ε našli dělení D, pro něž $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$, což dle předchozí věty značí, že příslušný Riemannův integrál existuje.

Příklad: Větu ovšem nelze obrátit: existují i nespojité funkce, které mají Riemannův integrál. Zkusme najít $\int_0^1 d(x)\,\mathrm{d}x$, kde $d(x) = 0$ pro $x \neq 0$ a $d(0) = 1$.

Všechny dolní Riemannovy součty budou rovny nule — v každém dílčím podintervalu $\langle 0, 1\rangle$ zřejmě existuje x, pro něž $d(x) = 0$. Jak budou vypadat horní Riemannovy součty? Členy odpovídající jiným intervalům než levému krajnímu budou zřejmě nulové (v nich je totiž všude $d(x) = 0$). Jediný nenulový člen bude roven $1.(x_1 - x_0) = x_1$. I horní Riemannův součet bude mít tím pádem tuto hodnotu. Vezmeme-li v úvahu všechna možná dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$, může x_1 nabývat všech hodnot z intervalu $(0; 1\rangle$. Infimem horních Riemannových součtů tedy bude 0. Horní a dolní Riemannův integrál je roven nule, proto Riemannův integrál funkce $d(x)$ na intervalu $\langle 0; 1\rangle$ existuje a je roven nule.

§2. Integrál jako limita integrálních součtů: ekvivalentní zavedení Riemannova integrálu

Definice 47: Riemannův integrální součet
Nechť D je dělení $\langle a; b\rangle$, $D : a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$. Označme

$$N(D) = \big\{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \big| \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle, i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Pro $\xi \in N(D)$ nazveme číslo

$$\sigma(f, D, \xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Riemannovým integrálním součtem funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$.

Poznámka: Zde zavádíme jinou volbu střední hodnoty — požadujeme, aby to byla funkční hodnota v některém z bodů daného úseku — může to být i krajní bod, může to být hodnota v minimu či v maximu funkce na daném úseku, čímž lze někdy dojít k hornímu či dolnímu Riemannovu součtu.

V grafu funkce pak budou tuto volbu představovat obdélníčky s výškou odpovídající funkční hodnotě v některém z bodů patřičného úseku. Srovnejte tento obrázek s případem horních a dolních Riemannových součtů a ověřte, že platí $s(f,D) \leq \sigma(f,D,\xi) \leq S(f,D)$ pro libovolné dělení D a $\xi \in N(D)$.

Poznámka: Jak jsme již předeslali na začátku této kapitoly, budeme se snažit zkoumat chování Riemannových součtů, zmenšujeme-li normu dělení. K tomu ovšem potřebujeme tento proces přesně definovat:

Definice 48: Limita Riemannových integrálních součtů
Pro $\delta > 0$ označme $U_\delta = \big\{(D,\xi) \big| \nu(D) < \delta,\ \xi \in N(D)\big\}$. Řekneme, že

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A \in \mathbb{R}, \text{ pokud}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall (D,\xi) \in U_\delta\big)\big[|\sigma(f,D,\xi) - A| < \varepsilon\big].$$

Poznámka: Pokud se zamyslíme nad touto definicí, zjistíme, že se v podstatě jedná o nám již dobře známou klasickou definici limity, pouze s tím rozdílem, že pro danou funkci f není $\sigma(f,D,\xi)$ funkce jedné reálné proměnné, ale funkce proměnné (D,ξ), která pochází z „nekonečněrozměrného prostoru[52]“.

[52] Zájemci z řad příznivců algebry mohou na toto téma zkonstruovat nějaký vektorový prostor nekonečné dimenze.

Procedura „přibližování se k danému bodu“ je však analogická jak v jednorozměrném případě (klasická limita), tak v dvourozměrném případě (limita funkce dvou proměnných — okolí bodu zde není interval, tedy úsečka, ale např. kruh) i v případě limity právě probrané. Lze tedy očekávat, že pro tuto limitu budou platit některé věty dokázané pro limitu jedné reálné proměnné. Zkuste dokázat:

1. Heineho větu. $\big[\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f,D,\xi)=A\big]\Leftrightarrow\big[\big(\forall\{(D^k,\xi^k)\}\big)\big(\nu(D^k)\to 0\ \Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\sigma(f,D^k,\xi^k)\to A\big)\big]$.
2. Bolzano-Cauchyovu podmínku. $\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f,D,\xi)=A$ existuje, právě když $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ $\big(\forall(D^1,\xi^1),(D^2,\xi^2)\in U_\delta\big)\big[|\sigma(f,D^1,\xi^1)-\sigma(f,D^2,\xi^2)|<\varepsilon\big]$.
3. Větu o limitě součtu. $\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f_1,D,\xi)=A,\ \lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f_2,D,\xi)=B\ \Rightarrow\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f_1+f_2,D,\xi)=$ $=A+B$.
4. Větu o limitě násobku. $\forall k\in\mathbb{R}:\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f(x),D,\xi)=A\ \Rightarrow\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(k\cdot f(x),D,\xi)=k\cdot A$.
5. Větu o limitním přechodu v nerovnosti. $\big[(\exists U_\delta)\big(\forall(D,\xi)\in U_\delta\big)\big(\sigma(f,D,\xi)\leq\sigma(g,D,\xi)\big)\big]\Rightarrow$ $\Rightarrow\big[\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f(x),D,\xi)\leq\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(g(x),D,\xi)\big]$.

U bodu 3 si uvědomte, že platí $\sigma(f,D,\xi)+\sigma(g,D,\xi)=\sigma(f+g,D,\xi)$, zatímco pro součin obdobná rovnost neplatí (napište si, jak se násobí dvě sumy). Nelze tedy vyslovit větu o limitě součinu v podobě „limita součinu je součin limit[53]“.

Poznámka (extempore): Pro součin dvou funkcí platí: existují-li limity pro funkce f,g existuje i limita pro funkci $f\cdot g$. Důkaz tohoto tvrzení lze snadno provést, mluvíme-li o Riemannových integrálech namísto limit (použijeme větu (69)).

Příklad: Aby čtenář viděl, že v důkazech tvrzení uvedených v poznámce skutečně nejsou žádné nové myšlenky, zkusíme zde dokázat tvrzení 3.
Podle předpokladu existuje pro každé $\frac{\varepsilon}{2}$ určité okolí U_δ takové, že $\forall(D,\xi)\in U_\delta:|\sigma(f,D,\xi)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|\sigma(g,D,\xi)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$[54]. Sečteme tyto dvě nerovnosti:

$$\varepsilon>|\sigma(f,D,\xi)-A|+|\sigma(g,D,\xi)-B|\geq|\sigma(f,D,\xi)+\sigma(g,D,\xi)-(A+B)|=|\sigma(f+g,D,\xi)-(A+B)|.$$

Při úpravách jsme použili nejprve trojúhelníkovou nerovnost a poté již dříve zmíněný *zřejmý* vztah $\sigma(f,D,\xi)+\sigma(g,D,\xi)=\sigma(f+g,D,\xi)$ (ověřte jeho zřejmost). Nyní vidíme, že okolí U_δ, které jsme našli díky existenci limit pro funkce f a g, vyhovuje i podmínce pro funkci $f+g$, a tedy limita integrálních součtů $f+g$ existuje a je rovna $A+B$.

Věta 71:
Pokud existuje $\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f,D,\xi)$, je funkce f omezená.

Důkaz: Použijeme definici limity. Víme, že pokud zvolíme nějaké ε, např. 1, existuje $\delta>0$ takové, že $\forall(D,\xi)\in U_\delta$ platí $|\sigma(f,D,\xi)-A|<1$, je-li A zmíněná limita. Tato nerovnost má platit pro každé dělení s dostatečně malou normou a každé $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Zvolme tedy D a $(\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n)$ pevné, rozepišme integrální součet a použijme trojúhelníkovou nerovnost

$$1>|\sigma(f,D,\xi)-A|=\big|f(\xi_1)(x_1-x_0)-\big[-f(\xi_2)(x_2-x_1)-\ldots-f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})+A\big]\big|\geq$$
$$\geq|f(\xi_1)(x_1-x_0)|-|K|,$$

kde K je pevné číslo dané členem v hranaté závorce. Jednoduchou úpravou pak dostaneme $(1+|K|)/$ $/|x_1-x_0|\geq|f(\xi_1)|$. Nyní si uvědomíme, že ξ_1 může nabývat libovolné hodnoty z intervalu $\langle x_1;x_0\rangle$ (jediný požadavek byl aby $\xi\in N(D)$), tedy na tomto intervalu je funkce f omezená. Podobně ukážeme, že je f omezená i na ostatních intervalech dělení D, z čehož vyplyne závěr, že f je omezená na celém intervalu $\langle a;b\rangle$.

[53] Můžeme si uvědomit, že to souvisí s aditivitou obsahu — chápeme-li naši limitu mimo jiné jako obsah nějaké plochy, lze očekávat, že operaci sčítání bude zachovávat (obsah sjednocení disjunktních ploch je součtem jejich obsahů); u operace násobení toto čekat nemůžeme.

[54] Přesněji řečeno, existují okolí U_δ^f pro funkci f a U_δ^g pro funkci g, která nemusí být stejná. Vezmeme-li však jejich průnik (tedy to „menší“ z nich, splníme podmínky pro f i g zároveň.

Věta 72: Ekvivalentní definice Riemannova integrálu
$\int_a^b f(x)\,dx$ existuje a je roven číslu A, právě když existuje $\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi) = A$, v němž D je dělení intervalu $\langle a;b\rangle$.

Poznámka: Tato věta má poměrně velký význam. Konečně totiž říká, že budeme-li zmenšovat normu dělení, dospějeme v limitním případě vždy ke stejnému výsledku jako u horních a dolních Riemannových součtů, a to nezávisle na volbě střední hodnoty v jednotlivých úsecích.

Její důkaz ve směru $\Rightarrow$ bude poměrně náročný, neboť námi zavedený Riemannův integrál se opírá o suprema a infima určitých množin součtů. Ta dle definice zaručují, že v jejich okolí (tj. v okolí bodu A) *existuje* nějaký Riemannův součet, zatímco v definici limity se žádá, aby v tomto okolí ležely *všechny* Riemannovy součty s dostatečně malou normou. Naopak tvrzení $\Leftarrow$ je poměrně jednoduché. Pokročme tedy k důkazu.

Důkaz: $\Leftarrow$. Použijeme ekvivalentní definici Riemannova integrálu (69) a výše zmíněnou Bolzano–Cauchyovu podmínku. Podle ní existuje pro každé $\varepsilon > 0$ kladné δ takové, že pro každá $(D,\xi^1),(D,\xi^2) \in U_\delta$ je $|\sigma(f,D,\xi^1) - \sigma(f,D,\xi^2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom ale platí $\sup_\xi \sigma(f,D,\xi) - \inf_\xi \sigma(f,D,\xi) \le \frac{\varepsilon}{2}$ [55]. Není těžké si uvědomit, že při pevném D je supremum rovno $S(f,D)$ a infimum $s(f,D)$, tedy $S(f,D) - s(f,D) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, což podle zmíněné věty (69) znamená, že tento Riemannův integrál existuje.
Uvažujme nyní, že by nebyl roven A, jeho hodnota R by byla např. větší než A. Protože R je supremem všech dolních Riemannových součtů, muselo by existovat D' takové, že $R - \frac{1}{2}(R-A) < s(f,D') \le R$. Zároveň by však pro $\varepsilon = \frac{1}{2}(R-A)$ muselo existovat δ, pro něž by $\forall (D,\xi) \in U_\delta$ bylo $\sigma(f,D,\xi) < R - \frac{R-A}{2}$. Mezi těmito (D,ξ) bude jistě D, které je zjeměním D' (vezmeme libovolné dělení E s dostatečně malou normou $\nu(E) < \delta$ a sestrojíme společné zjemnění E a D'). Pak musí ovšem platit $\sigma(f,D,\xi) < R - \frac{1}{2}(R-A) < s(f,D') \le s(f,D)$. Na začátku tohoto paragrafu jsme však zjistili, že pro každé (D,ξ) platí $s(f,D) \le \sigma(f,D,\xi) \le S(f,D)$, tedy jsme narazili na spor. Stejně ukážeme, že nemůže být $R < A$, a proto $R = A$.

Jiný způsob: budeme dokazovat, že pro limitu rovnou A existuje pro každé kladné ε součet $s(f,D) > A - \frac{\varepsilon}{2}$, resp. $S(f,D) < A + \frac{\varepsilon}{2}$. Využijeme-li nerovnosti $s(f,D) \le S(f,D)$, plyne již z tohoto faktu, že horní i dolní Riemannův integrál je roven A[56].

Zvolíme tedy libovolné $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ a uvažujeme U_δ popsané v definici limity. Jistě $\forall (D,\xi) \in U_\delta$: $\sigma(f,D,\xi) > A - \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolíme posloupnost ξ^k takovou, že $\lim_{k\to\infty} f(\xi_i^k) = m_i \overset{\text{df}}{=} \inf_{\langle x_{i-1};x_i\rangle} f(x)$[57]. Podle věty o limitním přechodu v nerovnosti pak musí platit

$$s(f,D) = \lim_{k\to\infty} \sum_i f(\xi_i^k)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{k\to\infty} \sigma(f,D,\xi^k) \ge A - \frac{\varepsilon}{4} > A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\Rightarrow$. V tomto případě budeme hledat předpis pro δ, které zaručí, že pro všechny $(D,\xi) \in U_\delta$ bude $A - \varepsilon < \sigma(f,D,\xi) < A + \varepsilon$. Soustředíme se pouze na první nerovnost, druhá se dokáže obdobným postupem.
Víme, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje dolní Riemannův součet $s(f,D) > A - \frac{\varepsilon}{2}$. Bohužel se nám nepodaří najít takové δ, aby pro *všechna* $(D',\xi) \in U_\delta$ bylo $\sigma(f,D',\xi) \ge s(f,D)$. Pro dělení D', která jsou zjemněním D, tato nerovnost platí, neboť $s(f,D) \le s(f,D') \le \sigma(f,D',\xi)$. Avšak ať vezmeme δ jakkoliv malé, budou jistě v U_δ existovat dělení, která zjemněním D nejsou. Pokusíme se tedy určit δ dostatečně malé na to, aby alespoň $\sigma(f,D',\xi)$ nebylo „o mnoho menší" než $s(f,D)$. Uvažujme společné zjemnění E dělení D a D'. Zřejmě platí $s(f,D) \le s(f,E)$ a $s(f,D') \le \sigma(f,D',\xi)$, budeme tedy zkoumat, oč může být $s(f,D')$ menší než $s(f,E)$ — z těchto nerovností totiž plyne $s(f,D) - \sigma(f,D',\xi) \le s(f,E) - s(f,D')$. Některé z úseků se v E a D' nemusí lišit, jim odpovídající sčítance[58] se v rozdílu $s(f,E) - s(f,D')$ odečtou. Spočtěme, kolik bude těch ostatních. Dělení E vzniklo tak, že jsme do D' přidali všechny dělící body D, přičemž některé body D a D' mohly splývat. Obsahovalo-li D celkem n bodů, mohlo v D' „být zasaženo" nejvíce n intervalů. Ostatní zřejmě zůstaly nezměněny a v rozdílu se odečtou. Tedy v součtu $s(f,D')$ je nejvýše n intervalů, které se neodečtou. Když jsme konstruovali dělení E, rozdělili jsme některé

[55] Připomeňte si znovu na důkaz věty (70).
[56] Dokázat lze sporem.
[57] Budeme ji konstruovat podobně jako minimizující posloupnosti v kapitole 4 — z definice infima budeme požadovat, aby např. $f(\xi_i^k) \in \langle m_i; m_i + \frac{1}{k})$.
[58] Typu $m_i(x_i - x_{i-1})$ — indexy těchto sčítanců mohou být v $s(f,E)$ a $s(f,D')$ různé, podstatné ale je, zda představují stejný interval (stejné hodnoty x_i, x_{i-1}, a tudíž i m_i).

intervaly D' dělícími body z D. Každý takový bod nám přidal nejvýše dva nové intervaly v D' (to když jsme jej umístili do ještě „nezasaženého“ intervalu z D'[59]), tedy v E je obsaženo nejvýše $2n$ intervalů odlišných od dělení D'. Velikost všech těchto zbylých sčítanců je omezena, neboť oba činitelé v každém sčítanci jsou omezeni: žádný interval z D' a tím spíše z E není delší než $\nu(D')$ a existence Riemannova integrálu zaručuje, že f je omezená, a snadno nahlédneme, že musí být omezené i $\inf_I f(x)$ na libovolném podintervalu $I \subset \langle a;b\rangle$, tj. $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall i)(|m_i| < K)$. Můžeme proto psát

$$\left|s(f,E) - s(f,D')\right| \le s(|f|,E) + s(|f|,D') \le 2n\nu(D')K + n\nu(D')K = 3n\nu(D')K.$$

Vidíme, že zvolíme-li $\nu(D') < \varepsilon/(6nK)$, bude i rozdíl $|s(f,E) - s(f,D')|$ menší než $\frac{\varepsilon}{2}$. Tím pádem je ale určitě pro libovolné (D',ξ) s takovou normou

$$\sigma(f,D',\xi) \ge s(f,D') \ge s(f,E) - \frac{\varepsilon}{2} \ge s(f,D) - \frac{\varepsilon}{2} > A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon,$$

což jsme měli dokázat.

Konečně se ještě zmiňme o případu, kdy f má komplexní hodnoty. Riemannův integrál takové funkce $f(x) = f_1(x) + i f_2(x),\ f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definitoricky zaveden

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

a pro limitu integrálních součtů lze snadno[60] ověřit platnost vztahu

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi) = \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f_1,D,\xi) + i \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi).$$

S využitím této rovnosti rozšíříme platnost této věty i na funkce s komplexními hodnotami.

§3. Vlastnosti Riemannova integrálu

V tomto článku ověříme, že Riemannův integrál skutečně splňuje některé vlastnosti odpovídající funkci „obsah plochy“.

Věta 73: Riemannův integrál součtu a násobku

Nechť existují $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Pak existuje $\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a platí:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz: Použijeme-li větu (72), můžeme místo o Riemannových integrálech mluvit o limitách příslušných integrálních součtů. Nyní použijeme tvrzení zmíněné v poznámce za definicí (48) pod bodem 3 (resp. 4), tedy že součet limit je limita součtu a limita násobku je násobek limity. Závěrem opět užijeme větu (72) a limity integrálních součtů převedeme na Riemannovy integrály.

Cvičení: Zopakujte si tvrzení pro integrál součinu dvou funkcí a uvědomte si znovu, proč není integrál součinu součinem integrálů (v obecném případě).

Věta 74: Monotonie integrálu

Buďte f, g, h reálné funkce a nechť existují jejich Riemannovy integrály na intervalu $\langle a;b\rangle$. Pak platí následující tvrzení:

1. Pokud $h(x) \ge 0, \forall x \in \langle a;b\rangle$, pak $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$.
2. Pokud $f(x) \le g(x), \forall x \in \langle a;b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

[59] Pokud padnul již do nějakého „nového“ intervalu, vytvořil z něj dva nové, tedy celkem zvýšil počet nových intervalů o jeden. Konečně v případě, že splynul s některým dělícím bodem D', nepřidal žádný nový interval.

[60] Opět podobně jako u klasických limit.

Důkaz: Pokud existuje Riemannův integrál $h(x)$, nemůže být menší než libovolný dolní Riemannův součet. Pakliže jsou hodnoty funkce $h(x)$ na $\langle a;b\rangle$ nezáporné, budou všechny sčítance v dolním Riemannově součtu také nezáporné; ověřte sporem — pakliže by snad bylo na některém intervalu infimum $h(x)$ menší než nula, musela by v tomto intervalu existovat záporná funkční hodnota $h(x)$. Proto bude i Riemannův integrál $h(x)$ nezáporný.

Druhé tvrzení je snadným důsledkem prvního, zvážíme-li že funkce $g(x) - f(x)$ nabývá na $\langle a;b\rangle$ nezáporných hodnot, a proto její Riemannův integrál je nezáporný. Využijeme předchozí věty, integrál rozdílu napíšeme jako rozdíl integrálů, čímž dojdeme k požadovanému tvrzení.

Věta 75: Integrál absolutní hodnoty
Nechť na intervalu $\langle a;b\rangle$ existuje Riemannův integrál funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Pak existuje na tomtéž intervalu i Riemannův integrál funkce $|f(x)|$ a platí mezi nimi nerovnost

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

Důkaz: Použijeme opět větu (69), to jest budeme zkoumat rozdíl $S(|f|,D) - s(|f|,D)$, respektive rozdíl odpovídající jednomu intervalu dělení. Pro komplexní funkci $f(x)$ budeme uvažovat reálné funkce f_1, f_2 : $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$. Pro libovolná X, x z uvažovaného intervalu $\langle x_{i-1};x_i\rangle$ musí platit

$$\begin{aligned}|f(X)| - |f(x)| &\le \big|f(X) - f(x)\big| = \big|f_1(X) - f_1(x) + i\big(f_2(X) - f_2(x)\big)\big| \le \\ &\le \big|f_1(X) - f_1(x)\big| + |i|\big|f_2(X) - f_2(x)\big| \le M_i(f_1) - m_i(f_1) + M_i(f_2) - m_i(f_2),\end{aligned} \tag{27}$$

je-li $M_i(f) = \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$, resp. $m_i(f) = \inf_{\langle x_i,x_{i-1}\rangle} f(x)$, poslední nerovnost nechť si čtenář rozmyslí sám. Omezili jsme takto shora výraz $|f(X)| - |f(x)|$. Limitním přechodem v nerovnosti jej však můžeme nahradit rozdílem $M_i(|f|) - m_i(|f|)$[61]. Pakliže nerovnost (27) použijeme pro všechny intervaly dělení D, získáme vztah

$$S(|f|,D) - s(|f|,D) \le \big(S(f_1,D) - s(f_1,D)\big) + \big(S(f_2,D) - s(f_2,D)\big). \tag{28}$$

Má-li však existovat příslušný Riemannův integrál f, musí existovat i stejné integrály f_1 a f_2 (dle definice Riemannova integrálu), což podle podmínky (69) znamená, že existuje dělení D, pro něž jsou hodnoty obou závorek na pravé straně (28) menší než libovolné $\frac{\varepsilon}{2}$ kladné. Jejich součet je proto menší než ε, čímž jsme splnili podmínku (69) pro funkci $|f|$. Riemannův integrál $|f|$ tedy existuje.
Vztah (26) dokážeme pomocí trojúhelníkové nerovnosti a přechodu v nerovnosti pro limity integrálních součtů — viz poznámku za definicí (48), bod 5:

$$\begin{aligned}|\sigma(f,D,\xi)| &= \left|\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \le \sum \big|f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\big| = \sigma(|f|,D,\xi) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow \left|\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D,\xi)\right| \le \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(|f|,D,\xi).\end{aligned}$$

Na závěr použijeme větu (69), čímž limity převedeme na Riemannovy integrály a důkaz je hotov.

Poznámka (zjednodušující): Jestliže vám připadne v existenční části důkazu povídání o limitním přechodu v nerovnosti příliš složité, vězte, že pokud skutečně v některých bodech $X, x \in \langle x_{i-1};x_i\rangle$ nabývá $|f|$ svého suprema (infima), tj. $|f(X)| = M_i(|f|)$, $|f(x)| = m_i(|f|)$, plyne z nerovnosti (27) přímo žádané $M_i(|f|) - m_i(|f|) \le M_i(f_1) - m_i(f_1) + M_i(f_2) - m_i(f_2)$.

Věta 76: Součet Riemannových integrálů na dvou intervalech
Nechť existují $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak existuje i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[61] Vezmeme nejprve např. X pevné a sestrojíme posloupnost $\{x_k\} \subset \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takovou, aby $|f(x_k)|$ konvergovalo k $m_i(|f|)$ — čili minimizující posloupnost — viz např. první část důkazu věty (72). Pro členy posloupnosti $\{|f(X)| - |f(x_k)|\}$ platí omezující podmínka (27), proto pro její limitu, tedy $|f(X)| - m_i(|f|)$ bude platit tato podmínka též (to je limitní přechod v nerovnosti). Pak zvolíme posloupnost $\{X_k\}$, pro niž $|f(X_k)|$ konverguje $M_i(|f|)$ a zopakujeme postup pro posloupnost $|f(X_k)| - m_i(|f|)$, čímž dostaneme kýžené omezení pro $M_i(|f|) - m_i(|f|)$.

Důkaz: Pomocí věty (72) přejdeme opět k limitám integrálních součtů a budeme dokazovat uvedenou rovnost z definice této limity, čímž zároveň ověříme i existenci integrálu na $\langle a;b\rangle$. Potřebujeme tedy omezit výraz

$$\left|\sigma(f,D,\xi) - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right|, \tag{29}$$

kde D je dělení intervalu $\langle a;b\rangle$, $\xi \in N(D)$. Vezměme dělení D', které vznikne přidáním bodu c do dělení D (D' je zjemněním D), a jemu příslušející ξ', jehož hodnoty se shodují s ξ kromě dvou interalů „nových" v D' oproti D (tedy ty, jejichž krajním bodem je c); hodnoty ξ'_i v nich nechť jsou libovolné. Jestliže je náhodou $c \in D$, položíme $D' = D$, $\xi' = \xi$.

Zároveň uvažujme dělení D'_1, resp. D'_2, která jsou průnikem dělení D' s intervalem $\langle a;c\rangle$, resp. $\langle c;b\rangle$ (tedy restrikcí, omezením dělení D' na tyto podintervaly $\langle a;b\rangle$). K intervalům dělení D'_1, D'_2 přiřaďme z ξ' (pro D') odpovídající hodnoty ξ'_i, tj. vytvoříme dvojice $(D'_1,\xi'_1),(D'_2,\xi'_2)$, které vzniknou „roztržením" (D',ξ') v bodě c. Jistě platí $\sigma(f,D',\xi') = \sigma(f,D'_1,\xi'_1) + \sigma(f,D'_2,\xi'_2)$, výraz (29) tedy můžeme upravovat podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\left|\sigma(f,D,\xi) - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| =$$

$$= \left|\big(\sigma(f,D,\xi) - \sigma(f,D',\xi')\big) + \left(\sigma(f,D'_1,\xi'_1) - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\sigma(f,D'_2,\xi'_2) - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \le$$

$$\le \big|\sigma(f,D,\xi) - \sigma(f,D',\xi')\big| + \left|\sigma(f,D'_1,\xi'_1) - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\sigma(f,D'_2,\xi'_2) - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Poslední dvě absolutní hodnoty můžeme vhodnou volbou U_δ, z nichž vybíráme (D'_1,ξ'_1), resp. (D'_2,ξ'_2), omezit libovolným kladným $\frac{\varepsilon}{3}$, zbývá tedy prověřit první sčítanec. Pokud bylo náhodou $c \in D$, a tedy $D = D'$, $\xi = \xi'$, je roven samozřejmě nule a jsme hotovi. Jinak ale platí

$$\begin{aligned}\big|\sigma(f,D,\xi) - \sigma(f,D',\xi')\big| &= \big|f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \big(f(\xi'_{k_1})(c - x_{k-1}) + f(\xi'_{k_2})(x_k - c)\big)\big| \le \\ &\le \big|f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\big| + \big|f(\xi'_{k_1})(c - x_{k-1})\big| + \big|f(\xi'_{k_2})(x_k - c)\big|,\end{aligned}$$

neboť i tak se dělení D a D' liší pouze v intervalech „okolo" c. Funkce f je samozřejmě na $\langle a;b\rangle$ omezená, jak plyne z existence integrálů na obou dílčích intervalech, tedy jistě existuje $K \in \mathbb{R}$, aby $K > |f(\xi_{k_1})|, |f(\xi_{k_2}|, |f(\xi_k)|$. Poslední výraz je tedy jistě menší než $3\nu(D)K$, neboť zajisté $\nu(D) \ge \nu(D')$. Budeme chtít, aby $3\nu(D)K \le \frac{\varepsilon}{3}$, z čehož plyne podmínka pro normu dělení D, potažmo pro normy dělení D'_1, D'_2 (jakpak musíme zvolit normy těchto dvou dělení, aby $\nu(D)$ splňovalo naši podmínku?). Tuto podmínku ještě sloučíme s požadavkem na $\nu(D'_1), \nu(D'_2)$ zaručujícím, aby výše zmíněné poslední dvě absolutní hodnoty byly menší než $\frac{\varepsilon}{3}$, čímž jsme omezili výraz (29) libovolným kladným ε, což jsme potřebovali dokázat.

Věta 77: Existence Riemannova integrálu na podintervalu

Nechť existuje $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak pro libovolné $\langle \alpha,\beta\rangle \subset \langle a;b\rangle$ existuje $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: Použijeme věty (69). Podle ní pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje dělení D, pro nějž platí $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Pro zjemnění tohoto dělení $D' = D \cup \{\alpha,\beta\}$ jistě platí tato nerovnost tím spíše (vzpomeňte si na větu (67)). Vezměme dělení E vzniklé restrikcí dělení D' na interval $\langle \alpha,\beta\rangle$. V dělení E bude méně nebo stejně intervalů jako v D', proto $S(f,E) - s(f,E)$ bude obsahovat méně nebo stejně kladných členů typu $(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ než $S(f,D') - s(f,D')$, neboli

$$S(f,E) - s(f,E) \le S(f,D') - s(f,D') \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Dělení E je tedy hledané dělení pro libovolné kladné ε, což opět dle věty (69) značí, že integrál na $\langle \alpha;\beta\rangle$ existuje, což bylo dokázati.

Poznámka: Pojem Riemannova integrálu nyní rozšíříme z hlediska požadavků na čísla $a; b$. Doposud jsme předpokládali, že $a < b$, tedy horní mez je větší než mez dolní. Nyní definujme ještě

$$\forall a \in \mathbb{R} : \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \equiv 0,$$

$$\forall a; b \in \mathbb{R},\ a < b : \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ pokud druhý integrál existuje.}$$

Tato úmluva nám umožní zobecnit předchozí větu.

Věta 78:

Buďte $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha = \min\{a; b, c\}$, $\beta = \max\{a; b, c\}$. Pokud existuje $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, existují i následující tři integrály a je splněna rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{30}$$

Důkaz: provedeme výčtem všech možných případů. Seřadíme čísla $a; b, c$ od nejmenšího k největšímu a zkoumáme platnost rovnosti (30) — použijeme-li předchozí úmluvy, jsme schopni určit i hodnotu integrálu, jehož meze jsou stejné nebo v obráceném pořadí. Ve všech případech vystačíme s tvrzením poslední a předposlední věty (77), (76). Musíme však projít skutečně všechny možnosti (např. $b < a < c$, $c = a < b$, atd.).

Čtenář nechť si tento postup sám vyzkouší pro několik případů.

Věta 79: Hodnota Riemannova integrálu při změně funkce v konečném počtu bodů
Hodnota[62] Riemannova integrálu se nezmění, změníme-li hodnoty funkce v konečném počtu bodů.

Poznámka: Počítám-li Riemannův integrál funkce, která nemá definovány hodnoty v konečně mnoha bodech, mohu je v těchto bodech dodefinovat libovolně, a hodnota Riemannova integrálu na daném intervalu bude vždy stejná.

Důkaz: Budeme uvažovat, že se funkce f a g liší v jediném bodě c: $f(x) = g(x)$ pro $x \neq c$ a $f(c) \neq g(c)$); případ konečného počtu takových bodů se snadno dořeší indukcí. Využijeme vyřešeného příkladu za větou (70), kde jsme definovali funkci $d(x)$ rovnou jedné v nule a nulovou pro všechna ostatní x. Funkci f píšeme ve tvaru $f(x) = g(x) + d(x) \cdot \big[f(c) - g(c)\big]$ a podle zmíněného příkladu a věty (73) můžeme vypočíst

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(g(x) + d(x) \cdot \big[f(c) - g(c)\big]\big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \big[f(c) - g(c)\big] \int_a^b d(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + 0.$$

§4. Postačující podmínky pro existenci Riemannova integrálu

První užitečnou podmínku zaručující existenci Riemannova integrálu jsme již formulovali v úvodním paragrafu — každá spojitá funkce má na uzavřeném intervalu Riemannův integrál[63]. Zkusíme nyní tuto podmínku zobecnit.

[62] Korektní formulace této věty by měla mluvit i o existenci Riemannova integrálu — ve větě říkáme, že integrály obou funkcí buď oba existují, nebo oba neexistují a v prvním případě tvrdíme, že jejich hodnoty jsou stejné.

[63] Vzpomeňme si na paragraf o globálních extrémech — spojitá funkce na uzavřeném intervalu má globální maximum i minimum, pročež je omezená. Toto slovíčko tedy lze vynechat.

Věta 80:
Nechť je funkce f spojitá na $\langle a; b\rangle$ kromě konečně mnoha bodů. Pokud je tato funkce omezená na $\langle a; b\rangle$, pak existuje integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz: Uvažujme funkci f nespojitou v jediném bodě, například v bodě b zleva (tedy f je spojitá na $\langle a; b)$). Riemannův integrál funkce nespojité v konečném počtu bodů na uzavřeném intervalu pak vypočteme jako součet integrálů na intervalech, uvnitř nichž je funkce spojitá a jejichž krajní body jsou body nespojitosti[64] — použijeme větu (76). Mohou nastat dva případy:

1. Pokud by existovala v bodě b limita $f(x)$ zleva, stačí položit $f(b)$ rovno této limitě. Nová funkce bude spojitá, a tedy integrabilní, a přitom se od $f(x)$ bude lišit v jediném bodě. Dle předchozí věty bude pak existovat Riemannův integrál $f(x)$ na $\langle a; b\rangle$.
2. Obecně samozřejmě nemůžeme existenci zmíněné limity předpokládat. Zkoumejme proto opět rozdíl $S(f, D) - s(f, D)$; viz větu (69).

   Pro libovolné $\alpha, a < \alpha < b$ samozřejmě existuje $\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$, což podle věty (69) znamená, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje dělení D' intervalu $\langle a, \alpha\rangle$, pro něž $S(f, D') - s(f, D') < \frac{\varepsilon}{2}$. Uvažujme nyní dělení D intervalu $\langle a; b\rangle$ — k dělení D' přidáme bod b. Potom však zřejmě platí

   $$S(f, D) - s(f, D) = S(f, D') + (b - \alpha)M - s(f, D') - (b - \alpha)m < \frac{\varepsilon}{2} + (b - \alpha)(M - m),$$

   pro supremum a infimum na příslušném intervalu M a m. Je-li však $f(x)$ omezená, tedy $|f(x)| < K, \forall x \in \langle a; b\rangle$, je jistě $M - m \leq 2K$. Rozdíl horního a dolního Riemannova součtu tedy omezíme takto:
   Pro $\varepsilon > 0$ zvolíme α tak, aby $(b - \alpha)(M - m) < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy $b - \alpha < \frac{\varepsilon}{4K}$, a dále zvolíme D', pro něž je $S(f, D') - s(f, D') < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak bude samozřejmě $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$, tedy existuje $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 81:
Pro každou monotónní funkci f definovanou na $\langle a; b\rangle$ existuje $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka: Předně si uvědomíme, že taková funkce je zřejmě omezená hodnotami $f(a), f(b)$.

Důkaz: Budeme opět vyšetřovat podmínku (69). Pro zadané $\varepsilon < 0$ volme dělení D o $n + 1$ bodech s pravidelnými odstupy $\frac{1}{n}$ $(x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n})$. Dále si uvědomíme, že $m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i)$ pro neklesající funkci (u nerostoucí funkce naopak). Nyní již píšeme

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\big[f(x_i) - f(x_{i-1})\big]\frac{1}{n} =$$
$$= \frac{1}{n}\big[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})\big] = \frac{f(b) - f(a)}{n}$$

a za n volíme pochopitelně číslo menší než $\varepsilon/\big(f(b) - f(a)\big)$.

Příklad: Tato věta je poměrně závažná — nezmiňuje se totiž vůbec o spojitosti. S její pomocí tedy můžeme sestrojit například funkci nespojitou v nekonečně mnoha bodech, která bude přesto integrabilní v Riemannově smyslu (naproti tomu Dirichletova funkce integrabilní není).

Uvažujme libovolnou konvergentní řadu $\sum_{i=1}^n a_i$ s nezápornými členy (funkce $f(n) = \sum_{i=1}^n a_i$ je tedy neklesající a má vlastní limitu pro $n \to \infty$) a spočetnou množinu A čísel[65] $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots$. „Schodovitá“ funkce $f(x) = \sum_i a_i$ (sčítáme přes všechna i, pro která je $x_i < x$) je pak jistě neklesající (v každém bodě x_i „poskočí“ nahoru, „mezi body x_i, x_{i+1}“ je konstantní). Výraz „mezi body“ byl uveden v uvozovkách, neboť bude-li A hustá na $\langle 0; 1\rangle$ (každý interval z $\langle a; b\rangle$ obsahuje alespoň jeden prvek z A), nenajdeme dvě různá x, y, pro než by $f(x) = f(y)$ (rozmyslete si). V bodech x_i bude samozřejmě f spojitá zleva

[64] Interval, jehož oba krajní body jsou body nespojitosti „složíme“ ze dvou intervalů — každý bude obsahovat již jen jeden bod nespojitosti.
[65] Tedy množinu, která nemá více prvků než $\mathbb{Q}$ a lze ji tudíž očíslovat přirozenými čísly.

a nespojitá zprava, tedy celkově nespojitá. Zvolíme-li za A například $\mathbb{Q} \cap \langle 0; 1\rangle$, můžeme se přesvědčit, že $f(x)$ nebude spojitá v žádném bodu intervalu $\langle 0; 1\rangle$ (v racionálních bodech zřejmě a okolí každého iracionálního bodu obsahuje alespoň jeden bod racionální). Přesto tato funkce bude mít na zmíněném intervalu Riemannův integrál. Podrobnosti k této úloze vizte v Jarníkově Integrálním počtu I (kapitola Další vlastnosti Riemannova integrálu, cvičení za §2 Podmínky pro existenci integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ve vydání z roku 1963).

§5. Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

V tomto paragrafu ukážeme souvislost mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem.

Věta 82: Vlastnosti funkce $F_c(x) = \int\limits_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu J a nechť c je číslo z tohoto intervalu. Definujme funkci $F_c(x)$ proměnné x vztahem

$$F_c(x) = \int\limits_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Platí:

1. $F_c(x)$ je spojitá na J, patří-li do J některý krajní bod, je spojitá v tomto bodě zleva či zprava.
2. Pokud je f spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$.
3. $\forall x, c_1, c_2 \in J$ je $F_{c_1}(x) - F_{c_2}(x) = \int\limits_{c_1}^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Důkaz: Nejprve si uvědomíme, že z existence integrálu na J plyne existence integrálu na libovolném podintervalu J (věta (77)). U prvního tvrzení dokážeme, že $\lim\limits_{x\to x_0} F_c(x) - F_c(x_0) = 0$. Dle věty (78) platí $F_c(x) - F_c(x_0) = F_{x_0}(x)$ (přesvědčte se). Je zřejmě

$$\left|\int\limits_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le K|x - x_0|, \tag{31}$$

neboť z existence integrálu na J plyne omezenost f na tomto intervalu ($|f(x)| < K$), tedy pro každé $x \in J, |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K}$ bude jistě hodnota výrazu vlevo menší než libovolné kladné ε, čímž jsme nulovost limity dokázali.

V druhém tvrzení použijeme opět limitní definici, tentokrát pro derivaci: ukážeme, že

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = 0.$$

Čitatele zlomku upravíme stejně jako v minulém odstavci na $F_{x_0}(x)$ a dále si uvědomíme, že nerovnost (31) zůstane v platnosti i pokud K položíme rovno supremu hodnot $f(x)$ na intervalu I omezeném čísly x, x_0[66] — v tomto případě se jedná o již dříve dokázanou nerovnost mezi Riemannovým integrálem a horním součtem. Tedy

$$\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \le \sup_I f(x) - f(x_0).$$

Protože je ale f spojitá v x_0, lze pro $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ jistě zvolit takové δ, že pro každé $x \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$ je splněno $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, pročež $|\sup_{\mathrm{U}_\delta(x_0)} f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$[67]. Zkoumaná limita je tedy rovna nule a důkaz je tím pádem hotov.

Konečně třetí tvrzení je jen triviálním důsledkem věty o aditivitě Riemannova integrálu (78).

[66]Nepíšeme $\langle x_0, x\rangle$, neboť může být jak $x > x_0$, tak $x < x_0$.

[67]Přechod od $f(x)$ k supremu je vlastně limitní přechod v nerovnosti a nechce-li si čtenář uvědomit tuto souvislost, nechť tvrzení dokáže sporem.

Nyní jsme si již připravili půdu pro toto tvrzení:

Věta 83: Newtonova
Je-li f spojitá funkce na $\langle a;b\rangle$ a F primitivní funkce k f na tomtéž intervalu, pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{32}$$

Důkaz: Z předchozí věty víme, že derivací funkce $F_a(x)$ podle x je $f(x)$, tedy $F_a(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$. V paragrafu o větách o střední hodnotě jsme dokázali, že každé dvě primitivní funkce k f na tomtéž intervalu se liší o konstantu. Tedy $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in \langle a;b\rangle : F(x) + c = F_a(x)$, přičemž

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_a(b) - F_a(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a),$$

což bylo dokázati.

Příklad: Tato věta nám také umožní snadno spočítat derivaci funkce

$$\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Můžeme totiž psát

$$\varphi'(x) = (F(g(x)) - F(a))' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x).$$

Čtenář nechť si sám zkusí zderivovat funkci

$$\varphi(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Následují věty, které nám zjednoduší počítání při integraci per partes či substitucí.

Věta 84: Integrace per partes u určitého integrálu
Nechť f, g jsou funkce, jejichž první derivace existují a jsou spojité na $\langle a;b\rangle$. Potom platí rovnost

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \text{ kde } [h(x)]_a^b \stackrel{\mathrm{df}}{=} h(b) - h(a).$$

Důkaz: V původní větě o integraci per partes jsme dokázali za výšeuvedených předpokladů platnost vztahu

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

pro libovolné $x \in \langle a;b\rangle$. Nuže, dosaďme tedy nejprve $x = b$ a poté $x = a$ a vzniklé rovnosti odečtěme. Rozdíly primitivních funkcí v bodech b a a jsou pak dle Newtonovy věty rovny Riemannovým integrálům, čímž je důkaz proveden.

Věta 85: Substituce v určitém integrálu
Nechť existuje první derivace funkce $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \langle a;b\rangle$ na celém $\langle\alpha,\beta\rangle$ a nechť funkce f je spojitá na $\langle a;b\rangle$. Potom platí rovnost (přesněji: „z existence integrálu napravo plyne existence integrálu nalevo a rovnost těchto integrálů“)

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pokud je navíc funkce φ prostá a $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, platí i

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

přičemž tentokrát plyne z existence integrálu vlevo existence integrálu vpravo.

Důkaz: Použijeme znovu „staré“ věty o substituci:

$$\forall t \in \langle\alpha, \beta\rangle :\ F\big(\varphi(t)\big) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

je-li $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$. Do rovnice dosadíme opět $x = \alpha$ a $x = \beta$, vzniklé rovnosti odečteme a s využitím Newtonovy věty rozdíly primitivních funkcí nahradíme Riemannovými integrály.

Druhý vztah je ekvivalentní s prvním za předpokladu $\varphi^{-1}(a) = \alpha, \varphi^{-1}(b) = \beta$, který je evidentně splněn pro prostou funkci $\varphi(t)$.

Poznámka: Tyto věty na první pohled neříkají mnoho nového, vlastně jen slučují dvě jiné dříve dokázané věty. Bez nich bychom ovšem určité (Riemannovy) integrály řešené metodou per partes či pomocí substituce nemohli počítat přímo. Například po užití substituce $x = \varphi(t)$ získáme výslednou funkci v proměnné t. Původní meze integrálu „byly vyjádřeny v proměnné x[68]“. I bez právě vyslovených vět bychom problém vyřešili — v neurčitém integrálu bychom dosazovali $t = \varphi^{-1}(x)$. To však může být poměrně pracné (t se může ve výsledku vyskytovat na více místech). Daleko jednodušší je samozřejmě přetransformovat tímto vztahem meze.

§6. Integrální věty o střední hodnotě

Naším cílem bude vytvořit si aparát, který nám umožní odhadovat hodnoty některých integrálů, které neumíme vyčíslit přímo pomocí primitivních funkcí. Poslouží nám k tomu následující tři věty.

Věta 86:
Nechť existuje Riemannův integrál reálné funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť M a m jsou supremum a infimum $f(x)$ na tomto intervalu. Potom existuje $c \in \langle m, M\rangle$ (pro $m = M$ je $c = m = M$) takové, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c.(b - a).$$

Důkaz: Předpis, jak najít c, je zřejmý: c je podílem zmíněného integrálu a délky intervalu $\langle a; b\rangle$. Zbývá dokázat, že takové c bude ležet ve zmíněném intervalu. Použijeme nerovnosti

$$m \le f(x) \le M$$

platné pro každé $x \in \langle a; b\rangle$. Použití věty o monotonii integrálu (74) ovšem dává nerovnost

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x,$$

jejíž krajní členy, integrály z konstantních funkcí jsou rovny $m(b-a)$, $M(b-a)$. Vydělíme-li tyto nerovnosti kladným $(b - a)$, dostáváme již požadovanou nerovnost.

Věta 87:
Nechť f, g jsou reálné funkce na $\langle a; b\rangle$, přičemž $g(x) \ge 0$ pro všechna x tohoto intervalu. Pokud m, M jsou opět infimum a supremum $f(x)$ na $\langle a; b\rangle$, existuje $c \in \langle m, M\rangle$, pro něž

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

[68] Do primitivní funkce jsme měli dosazovat za x.

Pokud je navíc f spojitá, existuje $\xi \in \langle a;b\rangle$, pro něž je toto c rovno $f(\xi)$.

Důkaz: Stejně jako u předchozí věty c spočteme jako podíl integrálů $f(x)g(x)$ a $g(x)$ a je třeba ukázat, že toto číslo leží v intervalu $\langle m, M\rangle$. Myšlenka je naprosto stejná jako u předchozí věty; nerovnosti

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$$

plynou ihned z nerovností $m \leq f(x) \leq M$, vezmeme-li v úvahu, že $g(x) \geq 0$[69]. Znovu použijeme větu (74) a po jednoduché úpravě získáme žádanou nerovnost.

Dodatek věty pro spojitou funkci f není nic jiného než důsledek Darbouxovy vlastnosti spojitých funkcí — to jest f musí nabývat hodnoty $c \in \langle m, M\rangle$.

Cvičení: Zkuste dokázat tuto větu za předpokladu $g(x) \leq 0$.

Poznámka: Zamysleme se nad významem předchozích dvou vět, potažmo nad jednou z aplikací integrálu. Vezmeme-li místo integrálu nějaký třeba horní součet s rovnoměrným dělením (tj. vzdálenosti mezi sousedními dělícími body jsou stejné), např. o $n+1$ bodech, je číslo

$$\frac{S(f,D)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\sum_i M_i \frac{b-a}{n} = \frac{\sum_i M_i}{n}$$

zjevně aritmetickým průměrem čísel M_i. Pokud budeme dělení zjemňovat, bude počet průměrovaných čísel růst, až v limitním případě, kdy horní součet přejde v integrál, získáme „aritmetický průměr všech čísel $f(x), x \in \langle a;b\rangle$“. Nalezené číslo c lze tedy za tento „průměr“ považovat a dle očekávání jsme i pro „nekonečný počet“ průměrovaných čísel zjistili, že jejich „průměr“ bude ležet mezi jejich infimem a supremem, tedy jako u konečných průměrů.
Podobně integrál $f(x).g(x)$ není nic jiného než odpovídající „vážený průměr“ — číslo $f(x)$ má váhu $g(x)$. V této souvislosti je vcelku pochopitelný požadavek, aby váhy $g(x)$ nebyly záporné — snadno si ověříme, že ani průměr např. dvou čísel 2 a 1 s váhami 1 a -2 neleží mezi jedničkou a dvojkou.

Věta 88:
Nechť f je reálná funkce spojitá na $\langle a;b\rangle$ a g je reálná funkce se spojitou první derivací na $\langle a;b\rangle$. Je-li $g(x)$ na $\langle a;b\rangle$ monotónní, existuje číslo $\xi \in \langle a;b\rangle$, pro které

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz: Integrál na levé straně rovnice budeme upravovat nejprve metodou per partes a dále ve druhém kroku použijeme předchozí větu:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)\big[g(b)-g(a)\big] = g(b)\big[F(b)-F(\xi)\big] + g(a)\big[F(\xi)-F(a)\big].$$

V závěru použijeme opět Newtonovu větu a rozdíly primitivních funkcí převedeme opět na Riemannovy integrály. Uvědomíme si ještě, že předchozí větu o střední hodnotě jsme mohli použít, neboť $g'(x)$ je vždy nezáporná nebo nekladná (podle toho, zda je $g(x)$ neklesající nebo nerostoucí).

Poznámka: Tato věta platí i v daleko silnější formě — u $f(x)$ i $g(x)$ není nutné předpokládat ani spojitost, postačuje existence integrálu z f[70]. Důkaz ovšem není nezbytný pro chápání další látky, a proto jej nebudeme provádět.

Poznámka: Tvrzení poslední věty platné i pro nespojité funkce $g(x)$ umožní následující obrat: je-li funkce $g(x)$ nezáporná nerostoucí, můžeme změnit její hodnotu v bodě b, aniž by se změnila hodnota

[69] Pro tento krok je to ovšem nutná podmínka.
[70] g je integrabilní, protože je monotónní, a tím pádem existuje i integrál z fg.

integrálu fg — protože je nezáporná, můžeme klást $g(b) = 0$, aniž bychom porušili její monotonii. Pak ovšem pro libovolnou takovou funkci g platí pro nějaké $\xi \in \langle a; b\rangle$ rovnost

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně můžeme uvažovat pro ostatní varianty funkcí $g(x)$, důležité zde pouze je, aby funkce $g(x)$ neměnila na $\langle a; b\rangle$ znaménko.

P ř í k l a d: Jak jsme řekli na začátku paragrafu, pokusíme se těchto vět využít pro odhad některých těžko vyčíslitelných integrálů.

Riemannův integrál

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

jistě pro libovolné $k > 1$ existuje (pročpak?). Vezmeme-li tento výraz jako funkci proměnné k, můžeme zkoumat její limitu pro $k \to \infty$. Bude nás zajímat, zda tato limita existuje (kdybychom integrovali např. $\sin x$, snadno bychom pomocí Newtonovy věty zjistili, že neexistuje — $-\cos k + \cos 1$ zřejmě osciluje (nemá limitu)).

Je známo, že k funkci $\frac{1}{x}\sin x$ neexistuje primitivní funkce v analytickém tvaru, tedy přímé použití Newtonovy věty není možné. Zkusme proto nejprve použít větu (87). Položíme $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, čímž dostáváme

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \sin\xi.(\ln k - \ln 1) = \sin\xi \ln k.$$

Vzhledem k tomu, že však nevíme, kde v intervalu $\langle 1; k\rangle$ leží číslo ξ, nemůžeme tímto způsobem pro k rostoucí nade všechny meze hodnotu integrálu nijak omezit ($\ln k \to \infty$).

Zkusíme tedy použít (88), a to ve tvaru uvedeném v poznámce za větou ($\frac{1}{x}$ je na daném intervalu nerostoucí a nezáporná, položíme tedy opět $g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sin x$:

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1}\int_1^\xi \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos\xi + \cos 1. \tag{33}$$

V tomto tvaru již vidíme, že hodnota integrálu bude určitě omezená pro na $k \in (1; \infty)$, tedy pokud bude limita existovat, bude vlastní. Existenci limity vyšetříme pomocí Bolzanova–Cauchyova kritéria pro limitu funkce $h(k)$:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{R})(\forall k_1, k_2 > n)\big(|h(k_1) - h(k_2)| < \varepsilon\big).$$

Pokud funkce $h(k)$ značí hodnotu vyšetřovaného integrálu, jistě platí dle věty (76)

$$h(k_1) - h(k_2) = \int_{k_1}^{k_2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme-li na tento integrál opět větu (88), získáme samozřejmě opět odhad (33) s tím, že $\xi \in \langle k_2; k_1\rangle$ (pro $k_1 < k_2$):

$$\int_{k_1}^{k_2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k_1}\int_{k_1}^\xi \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k_1}(-\cos\xi + \cos k_1).$$

Hodnota závorky posledního výrazu ovšem zřejmě nikdy nepřekročí 2, a tak zvolíme-li v Bolzanově–Cauchyově podmínce $n = \frac{2}{\varepsilon}$, bude jistě $|h(k_1) - h(k_2)| < \varepsilon$, tedy limita existuje a je konečná.

P ř í k l a d: Zkusíme nyní určit limitu pro $k \to \infty$ z integrálu

$$\int_1^k \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integrál jako funkce k je zřejmě neklesající, tedy má limitu pro $k \to \infty$. Otázka zůstává, zda limita bude konečná či nekonečná. Graf zkoumané funkce je vepsán do grafu funkce [71] $\frac{1}{x}$, pro níž je limita $\int\limits_1^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $k \to \infty$ rovna ∞, lze tedy očekávat, že i limita zkoumaného integrálu bude ∞. Dokážeme to. Na libovolném intervalu $\langle (k-1)\pi; k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ jistě platí

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{|\sin x|}{k\pi}.$$

Podle věty (74) pak je

$$\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}.$$

Zřejmě potom musí platit

$$\int\limits_{\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=2}^{k} \int\limits_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{i=2}^{k} \frac{2}{i\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i}.$$

Zajímalo by nás tedy chování poslední sumy. Jedná se o tzv. harmonickou řadu a v příští kapitole se s ní ještě setkáme. Nyní ovšem ukážeme jednoduchý obrat, který nám umožní dokázat, že tato řada diverguje.

Berme tuto sumu jako horní Riemannův součet pro funkci $\frac{1}{x}$ na intervalu $\langle 1; k \rangle$ při dělení $x_0 = 2$, $x_1 = 3$,$x_2 = 4, \ldots x_{k-1} = k+1$ (délka intervalů bude 1, supremem na intervalu $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ bude samozřejmě $\frac{1}{i+1}$). Potom ovšem platí

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i+1} = S(\tfrac{1}{x}, D) \geq \int\limits_2^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln k \; - \ln 2.$$

Protože pro $k \to \infty$ jde $\ln k \to \infty$, musí dle věty o limitním přechodu v nerovnosti jít i zkoumaná suma do nekonečna a stejně tak i hodnota integrálu z $|\sin x|/x$ pro $k \to \infty$.

Cvičení: Zamyslete se, jak spolu souvisí věty o střední hodnotě integrální a diferenciální (Rolleova, Lagrangeova a Cauchyova).

§7. Zobecněný Riemannův integrál

Poznámka: Doposud jsme hovořili pouze o integrálech funkcí omezených a definovaných na omezených intervalech. Pojem integrálu nyní rozšíříme i na funkce neomezené způsobem, jaký jsme již použili na konci minulého paragrafu v příkladech.

Definice 49: Zobecněný Riemannův integrál
Nechť pro každé c z intervalu $(a; b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ existuje Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, c \rangle$. Pokud existuje

$$\lim_{x \to b^-} \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = A \in \mathbb{R},$$

nazveme číslo A *zobecněným Riemannovým integrálem* funkce f na intervalu $\langle a; b \rangle$. Analogicky definujeme zobecněný Riemannův integrál pro limitu $x \to a^+$.

Nechť pro funkci $f(x)$ existuje dělení $D = x_0, \ldots x_n$ intervalu $\langle a; b \rangle$ takové, že na každém podintervalu $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ je definován zobecněný Riemannův integrál f. Pak definujeme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[71] A plochu pod touto křivkou „vyplňuje poměrně dobře“, podle odhadu ze $\frac{2}{\pi}$.

P o z n á m k a: Měli bychom ovšem ověřit, zda takto zavedený zobecněný Riemannův integrál je dobře definován, tedy není v rozporu s definicí Riemannova integrálu.

Předně je zřejmé, že pokud je na $\langle a; b\rangle$ definován Riemannův integrál, je definován též zobecněný Riemannův integrál a jejich hodnoty jsou stejné. Toto je přímý důsledek spojitosti funkce $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ dokázané před Newtonovou větou. Dále bychom měli ukázat, že hodnota zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na volbě dělení. Stejnou hodnotu dvou takových integrálů s různým dělením nám ovšem umožní prokázat věta (76).

P ř í k l a d: Určíme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Striktně vzato, měli bychom interval $(-\infty; \infty)$ rozdělit na dva, např. $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 0; \infty)$, neboť teprve na nich jsou definovány zobecněné Riemannovy integrály (ve smyslu první části definice). Pak budeme s pomocí Newtonovy věty psát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x + \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \pi.$$

Vidíme, že hodnoty v bodě $x = 0$ primitivních funkcí k $1/(1+x^2)$, které lze volit samozřejmě na obou intervalech stejně, se odečtou ($\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 0$ — samozřejmě již $\operatorname{arctg} 0 = 0$, ale mohli jsme volit např. primitivní funkci $1 + \operatorname{arctg} x$). To nás může svést přímo k zápisu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \pi.$$

V tomto případě jsou výsledky stejné, následující příklad však ukáže, že tomu tak nemusí být vždy.

P ř í k l a d: Spočtěme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nedbalá metoda naznačená v minulém příkladu nás dovede k výsledku

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Přitom je zřejmé, že funkce je nezáporná, a plocha omezená jejím grafem jistě není nulová. Korektní postup nás dovede k jinému výsledku

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 1 - \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right) - 1 - 1 - \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + 1.$$

Vidíme, že v posledním výrazu se vyskytují limity s nevlastními hodnotami, tedy příslušné zobecněné Riemannovy integrály vůbec nejsou definovány a stejně tak není definován tento integrál pro funkci $\frac{1}{x^2}$ na intervalu $(-\infty; \infty)$.

Pokud bychom připustili v tomto případě i nevlastní hodnoty, vidíme, že hodnota integrálu vychází $\infty + \infty = \infty$, tedy plocha omezená křivkou $\frac{1}{x^2}$ má nekonečný obsah. Obecně nevlastní hodnoty zobecněného Riemannova integrálu nepřipouštíme, neboť například u funkce $\frac{1}{x}$ bychom došli k výrazu $\infty - \infty$, jehož hodnotu jsme v kapitole o nevlastních limitách vůbec nedefinovali. Je však přirozené říci, že integrál liché funkce definované na $(-\infty; \infty)$ je na tomto intervalu roven nule (kreslete si obrázek) — rozpor může vyřešit jiná definice zobecněného Riemannova integrálu, například pro funkci x^3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x^3\,\mathrm{d}x = 0.$$

C v i č e n í : Konečně budeme zkoumat integrál, který nalezne využití v příští kapitole:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \alpha > 0.$$

Postup bude v tomto případě naprosto standardní, je jen potřeba rozlišit případy $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ a $\alpha > 1$.

§8. Aplikace Riemannova integrálu

P o z n á m k a : Riemannův integrál coby limitní přechod sumy součinů $f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i \to 0$ nachází zásadní uplatnění i mimo matematiku, například ve fyzice. S jeho pomocí (a především s pomocí Newtonovy věty) můžeme snadno počítat hodnoty veličin typu $h = \sum_i f(x_i)\Delta x_i$, jako například práce, výkonu, dráhy, energie a mnohých dalších. Ovšem i samotná matematika poskytuje mnoho možností pro užití Riemannova integrálu. Je například patrné, že hodnota Riemannova integrálu pro nezáporné funkce je rovna ploše obrazce omezeného grafem funkce, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, kde $a < b$ jsou meze integrace. Je totiž přirozené obsah plochy přímo definovat jako například dolní Riemannův integrál, tedy jako supremum celkových ploch jednoduchých obrazců (zde složených z obdélníků, jejichž plochu klademe rovnou součinu délek jejich sousedních stran) vepsaných do daného grafu. Podobně odvodíme vzorec pro délku křivky za předpokladu, že křivka bude mít některé „rozumné“ vlastnosti.

Definice 50: Křivka v $\mathbb{R}^n$
Nechť $x_1, \dots x_n$ jsou reálné funkce s reálnými hodnotami. *Křivkou* v $\mathbb{R}^n$

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \dots,\ x_n = x_n(t),\ t \in A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset \tag{34}$$

rozumíme množinu všech bodů $(x_1, \dots, x_n)$, pro něž existuje $t \in A$ takové, že jsou splněny vztahy (34).

P o z n á m k a : O takto zadané křivce mluvíme jako o křivce parametrizované pomocí t. Parametr t můžeme chápat například jako čas, ve kterém se částice nacházela v bodě $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ prostoru $\mathbb{R}^n$.

Následující definice a věta se budou vztahovat ke kartézským souřadnicím.

Definice 51: Délka křivky v $\mathbb{R}^n$
Nechť k je křivka v $\mathbb{R}^n$ definovaná vztahy (34), kde množina A je interval. Nechť $D = t_0, t_1, \dots, t_p$ je libovolné dělení intervalu A. Řekneme, že křivka je rektifikovatelná, pokud je supremum

$$\sup_D \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \big[x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})\big]^2} = d \tag{35}$$

vlastní. V takovém případě nazveme číslo d *délkou křivky k*.

P o z n á m k a : Definice není složitá — v podstatě říká, že délku křivky máme počítat tak, že na ní zvolíme nějaké body $\big\{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)\big\}$ a tyto body pospojujeme úsečkami (vždy dva sousední). Tím vepíšeme do křivky k lomenou čáru, jejíž délku spočteme jednoduše z Pythagorovy věty aplikované na každý úsek zvlášť[72]. Definice říká, že abychom mohli křivce přisoudit nějakou délku, nesmí délky lomených čar při zjemňování dělení růst nade všechny meze. K praktickému výpočtu délky křivky použijeme následující slíbenou větu

Věta 89: Délka křivky v $\mathbb{R}^n$
Nechť k je křivka v $\mathbb{R}^n$ definovaná vztahy (34) a nechť je její délka d. Pokud jsou první derivace funkcí $x_1, \dots, x_n$ spojité na celém intervalu $A = \langle a; b\rangle$, potom platí následující vztah

$$d = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big[x_i'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t. \tag{36}$$

[72] V neeuklidovském prostoru by se Pythagorovy věty nahradily podle vztahu $d_i^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} g_{jl}[x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})] \cdot [x_l(t_i) - x_l(t_{i-1})]$ pro metrický tenzor g_{jl}.

Idea důkazu: Předpoklady věty umožňují použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkce x_j na každém z intervalů $\langle t_{i-1}; t_i\rangle$:

$$\sum_{i=1}^{p}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\big[x_j(t_i)-x_j(t_{i-1})\big]^2}=\sum_{i=1}^{p}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\big[x_j'(\tau_{ij})\big]^2(x_i-x_{i-1})^2}=\sum_{i=1}^{p}(x_i-x_{i-1})\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\big[x_j'(\tau_{ij})\big]^2},$$

kde $\tau_{ij}\in\langle x_{i-1}; x_i\rangle$. Poslední výraz ještě není Riemannův integrální součet pro funkci jedné proměnné, protože derivace pod odmocninou nemusejí být brány ve stejném bodě ($\tau_{ia}\neq\tau_{ib}$). Pokud bychom ovšem v tomto výrazu kladli $\tau_{ia}=\tau_{ib}\overset{\mathrm{df}}{=}\tau_i$, mohli bychom již tento výraz považovat za integrální Riemannův součet funkce $h(t)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}[x_j'(t)]^2}$, který pro $\nu(D)\to 0$ musí nutně konvergovat k integrálu (36) — ten existuje, neboť funkce $x_i'(t)$ jsou spojité[73]. Důkaz věty potom závisí na tvrzení, že touto záměnou se nedopustíme velké chyby, tedy že rozdíl těchto dvou výrazů se při zjemňování dělení blíží nule. Plné znění důkazu lze nalézt v Kopáčkově Matematice pro fyziky I., paragrafu Aplikace integrálu.

Poznámka: Pokud je křivka rovna grafu funkce $f(x)$ v $\mathbb{R}^2$, lze ji zapsat ve tvaru (34) jako $x_1=t$, $x_2=f(t)$, čímž po použití předchozí věty získáváme vztah

$$D=\int_a^b\sqrt{1+\big[f'(x)\big]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení: Spočtěte délku oblouku paraboly $y=1-x^2$ mezi body $(-1;0)$ a $(1;0)$.

Cvičení: Určete délku jednoho závitu spirály $x_1=r\sin at$, $x_2=r\cos at$, $x_3=bt$.

Poznámka: Jak se velmi brzy ukáže, výpočty délek i zdánlivě jednoduchých křivek mohou představovat velice náročný úkol: například pro $y=\sin x$.

Příklad: Riemannův integrál lze použít i pro výpočet objemu či povrchu rotačního tělesa.

Objem rotačního tělesa je pro nás nový pojem a nebude jistě překvapující, když jej zavedeme opět jako supremum celkového objemu disjunktních válců souosých s rotační osou symetrie tělesa vepsaných do tělesa — těleso postavené „na výšku“ nahradíme jakoby sloupkem mincí. Pokud vznikne těleso rotací křivky $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ kolem osy x, bude pro jeho objem platit

$$V\equiv\sup_D\sum_i\pi\big(f(\xi_i)\big)^2\Delta x_i=\pi\int_a^b\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x,$$

kde ξ_i je takové číslo z i-tého intervalu, že $f(\xi_i)$ je na tomto intervalu minimální. Jedná se tedy o dolní Riemannův integrál. Pokud budeme předpokládat, že existuje Riemannův integrál napravo (většinou je $f(x)$ spojitá), je rovnost evidentní.

V případě povrchu je vzorec jen o málo složitější: nechť opět rotuje křivka $f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ okolo osy x. Pak pro povrch pláště vzniklého tělesa (samozřejmě bez podstav) platí

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\big[f'(x)\big]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ke vztahu dospějeme podobnou úvahou jako při určování objemu. Plášť tělesa tentokráte rozřežeme na prstence výšek Δx_i. Kdyby se jednalo o válcové prstence, byla by plocha jejich pláště v integrálním součtu rovna $2\pi f(\xi_i)\Delta x_i$. Ve skutečnosti se může jednat o pláště komolých kuželů, které budou mít obsah větší. Vzdálenost podstavných hran (tj. jejich vzdálenost po povrchu komolého kužele) bude $\Delta x_i\sqrt{1+\big[f'(\xi_i)\big]^2}$ — zde se jedná jen o úvahy o délce křivky. Plocha pláště bude přesně rovna $2\pi\sqrt{1+\big[f('\xi_i)\big]^2}\Delta x_i\frac{1}{2}\big(f(x_i)+f(x_{i-1})\big)$, pro $\nu(D)\to 0$ se potom bude $f(\xi_i)$ i $\frac{1}{2}\big(f(x_i)+f(x_{i-1})\big)$ blížit ke společné hodnotě $f(x)$.

[73] Opíráme se o ještě jednu větu, kterou jsme nezmínili — pokud existuje integrál funkcí f a g, pak existuje i integrál funkce $\sqrt{f^2+g^2}$. Důkaz stejně jako pro integrál součinu fg lze nalézt v Jarníkově Integrálním počtu I v kapitole Další vlastnosti Riemannova integrálu, §4 Určitý integrál komplexní funkce.

P ř í k l a d : Na závěr ještě zmiňme výpočet těžiště a momentů setrvačnosti těles. Pro soustavy hmotných bodů je těžiště definováno vztahem

$$\mathbf{r}_T = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

a moment setrvačnosti vůči ose o

$$J_o = \sum_i m_i r_i^2(o),$$

kde $\mathbf{r}_i, r_i(o), m_i$ jsou polohové vektory, vzdálenosti od osy o a hmotnosti pro jednotlivé body. To, že v prvním vztahu figurují vektory, které neumíme integrovat, vyřešíme tak, že vektory nahradíme jejich souřadnicemi, čímž dostaneme v $\mathbb{R}^3$ celkem tři vztahy pro tři souřadnice. Pokud potom budou ρ_i a r_i či $r_i(o)$ spojitými funkcemi souřadnic v prostoru, nic nám nebrání přejít od sum k integrálům

$$r_T = \frac{\int_V \rho(x) m(x)\,\mathrm{d}x}{\int_V \rho(x)\,\mathrm{d}x}, \quad J_o = \int_V \rho(x) r_o^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

přičemž těleso jsme rozdělili na dílky s hmotností $m(x) = \rho(x)\Delta x_i$. Meze integrace se budou shodovat s „mezemi" tělesa v prostoru, případně můžeme integrovat od $-\infty$ do ∞ s tím, že mimo těleso je $\rho(x) \equiv 0$. V případě jednorozměrných těles (tyč) je postup jasný, v případě vícerozměrných těles budeme muset integrovat přes více proměnných, čímž se mimo jiné budeme zabývat v příštích kapitolách. Praktické postupy v těchto případech však čtenář najde ve většině základních učebnic mechaniky.

Obsah