# Geometrie v $\mathbb{R}^3$, 4. semestr
# šk. rok 2009/2010

Vladimír Souček

21. května 2012

## 0.1 Úvod

Hlavním tématem této přednášky je klasická geometrie křivek a ploch v $\mathbb{R}^3$. Hlavní zdroje, ze kterých vyrůstala diferenciální geometrie, jsou klasická mechanika (pohyb hmotného bodu, jeho rychlost a zrychlení) a geodézie (zeměměřictví, mapy). Počátky sahají zpět do 17. a 18. století (Huyghens, Leibniz, Newton, Euler, Monge). Klíčové postavy té části diferenciální geometrie, o které budeme mluvit, byli v 19. století Gauss, Riemann, Bolyai, Lobačevskij. Nejde tedy o moderní, současnou matematiku, ale o klasické základy, na kterých moderní matematika staví. Moderní zobecnění této části klasické matematiky se týká analogií a zobecnění do vyšších dimenzí. Nejvýznamnější čeští geometři 20. století byli Eduard Čech (geometr a topolog) a Václav Hlavatý (jeho jméno nese knihovna v Karlíně).

Jednou z hlavních větví moderní diferenciální geometrie je tzv. Riemannova geometrie, která Einsteinovy poskytla model a matematický nástroj pro jeho obecnou teorii relativity. Interakce elementárních částic jsou v současné době popisovány výhradně pomocí teorie kalibračních polí. Kalibrační pole je název, který se používá v teoretické fyzice pro analogii parciálních derivací vektor-hodnotových funkcí, zadaných na plochách. Matematici těmto derivacím říkají kovariantní derivace, nebo také konexe. Většinu těchto matematických teorií lze najít pod názvy diferenciální geometrie, globální analýza nebo analýza na varietách.

Většinu přednášky budeme studovat lokální geometrické vlastnosti křivek a ploch v trojrozměrném prostoru. Bude nás zajímat křivost a torze křivek, různé druhy křivosti ploch. Probereme základní modely neeukleidovské geometrie (sférická a hyperbolická geometrie). Budeme zkoumat geodetiky na plochách, které v křivých geometriích nahrazují přímky. Mnohem zajímavější (a také podstatně těžší) jsou globální výsledky v diferenciální geometrii (např. Gauss-Bonnetova věta pro plochy). Tyto výsledky ukazují vztahy mezi lokálními a globálními vlastnostmi křivek, či ploch, vztahy mezi topologií a geometrií.

Jsou to prototypy obecných výsledků ve vyšších dimenzích, které patří mezi jedny z velkých témat matematiky 20. století. Typickým příkladem je slavná Atiyah-Singerova věta o indexu pro eliptické diferenciální operátory (nebo jejich komplexy), které jsou definovány na vícedimenzionálních plochách. K této moderní části diferenciální geometrie a analýzy na varietách se v této přednášce nedostaneme.

Přednáška je velmi blízká k duchu knihy

H. Wilson: Curved spaces. From classical geometry to elementary differential geometry, Cambridge University Press, 2008.

Základem dobrého pochopení teorie je pro každého propočet mnoha konkrétních příkladů, kterým budou věnována cvičení k přednášce. Nejvíc ovšem pomůže, pokud si je čtenář dokáže spočítat sám. Řadu řešených příkladů je možné najít ve skriptech

J. Bureš, K. Hrubčík: Diferenciální geometrie křivek a ploch, Karolinum,

Další příklady jsou obsaženy ve skriptech

L. Boček: Příklady z diferenciální geometrie.

Hodně zajímavostí z historie vývoje geometrie za poslední století a o nedávném vyřešení jednoho z nejznámějších matematických problémů je možné najít v populární knížce D. O'Shea: Poincarého doměnka, Academia, 2009, která určitě stojí za přečtení.

# Kapitola 1

# Prolog: Eukleidovská geometrie.

## 1.1 Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$.

Geometrie v Eukleidovském prostoru (délky, úhly) je obsažena ve standardní definici skalárního součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Vzdálenost dvou bodu je pak definována pomocí Eukleidovské normy $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ vzorcem

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

## 1.2 Shodnosti.

**Definice 1.2.1** *Shodnost (isometrie) v $\mathbb{R}^3$ je zobrazení $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které zachovává vzdálenost:*

$$|S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Shodnosti je možné (relativně) snadno klasifikovat.

**Věta 1.2.2** *Libovolná shodnost je affinní zobrazení, tj. $S(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $A$ je $n \times n$ reálná matice, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Affinní zobrazení je shodností, právě když $A$ je ortogonální matice. Shodnost se nazývá přímou shodností, pokud je $\det A > 0$, v opačném případě se nazývá nepřímou shodností.*

Návod jak toto tvrzení odůvodnit se bude probírat na cvičení.

**Příklad.**

Typické nepřímé shodnosti jsou reflexe. Je-li $H \in \mathbb{R}^3$ (afinní) nadrovina definovaná rovnicí

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | (\mathbf{u}, \mathbf{x}) = c\},\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{u}| = 1, c \in \mathbb{R},$$

pak definujeme reflexi $R_H$ vzhledem rovině $H$ vztahem

$$R_H(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - c)\,\mathbf{u}.$$

Je ihned vidět, že zobrazení $R_H$ je identita na $H$ a převádí body tvaru $\mathbf{a} + t\mathbf{u}, \mathbf{a} \in H$ na $\mathbf{a} - t\mathbf{u}$. Ale každý bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ lze napsat (jednoznačně) ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}, \mathbf{a} \in H, t \in \mathbb{R}$; bod $\mathbf{a}$ je pak pata kolmice vedená bodem $\mathbf{x}$ na nadrovinu $H$. Zobrazení $R_H$ je tedy opravdu reflexe v nadrovině $H$. Tedy $R_H$ zachovává vzdálenosti, je to shodnost.

**Věta 1.2.3** *Množina všech shodností tvoří grupu (operace je skládání zobrazení).*

*Pro každé dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ existuje reflexe $R$ s vlastností $R(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.*

*Každá shodnost se dá vyjádřit jako složení nejvýše 4 reflexí.*

První tvrzení je zřejmý důsledek Věty 10.1.1. Druhé je okamžitě jasné z geometrického názoru (a snadno se napíše explicitní formule popisující příslušnou nadrovinu). Poslední tvrzení je zajímavější, stručný návod k důkazu je v Apendixu.

Grupa shodností $G$ je tedy speciálním případem grupy transformací (tj. grupy, jejíž prvky jsou vzájemně jednoznačné zobrazení dané množiny $M$ na sebe). Totéž se někdy vyjadřuje tvrzením, že grupa $G$ má zadanou akci na množině $M$.

## 1.3 Grupa rotací.

Grupa $O(3) = O(3, \mathbb{R})$ se skládá ze všech shodností, které zachovávají počátek v $\mathbb{R}^3$. Je to grupa, jejíž prvky jsou lineární zobrazení, které můžeme popsat $3 \times 3$ maticemi. Matice $A$ patří do $O(3)$, pokud $A\,A^t = Id$. Z toho ihned plyne, že $(\det A)^2 = 1$, tedy $\det A = \pm 1$. Podgrupa SO(3) je tvořena všemi prvky do $O(3)$, které mají determinant roven jedné.

**Příklady.**

(1) Matice rotace o úhel $\theta$ kolem osy $z$ má tvar

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Jak vypadá matice nepřímé shodnosti, kterou dostaneme složením rotace kolem osy $z$ a reflexí vzhledem k rovině souřadnic $x, y$?

(3) Jaká je plná grupa symetrií rovnostranného čtyřstěnu (je to zřejmě konečná podgrupa v $O(3)$)?

## 1.4 Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$.

Základní vlastností vektorového součinu (která může být zároveň jeho definicí) je následující vlastnost.

**Lemma 1.4.1** *Pro každé tři vektory* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *platí*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

V tomto lemmatu se jedná o determinant matice, jejíž řádky (nebo ekvivalentně sloupce) tvoří vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Z vlastností determinantu plyne, že pořadí vektorů v matici lze cyklicky permutovat, aniž se determinant změní. Důkaz tvrzení plyne ihned z definice obou součinů a z rozvoje determinantu podle posledního řádku. Výraz na levé straně se často nazývá smíšený součin tří vektorů.

**Tvrzení 1.4.2** *Pro každé tři vektory v* $\mathbb{R}^3$ *platí*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Návod, jak tuto formuli ověřit, je v Apendixu.

# Kapitola 2

# Křivky

Budeme křivky studovat v $\mathbb{R}^3$. Nedá mnoho námahy přenést většinu pojmů a výsledků do $\mathbb{R}^n$. Je ale jednodušší pro zájemce formulovat a rozmyslit si toto zobecnění, než se nutit představovat si obecné pojmy v jejich přirozené geometrické představě v $\mathbb{R}^3$. První věcí bude si připomenout základní informace o Eukleidovské geometrii.

Prvním tématem, které budeme probírat, budou vlastnosti křivek v $\mathbb{R}^3$. Je otázka, co se vlastně myslí pod pojmem křivka. Nejběžnější definice je zobrazení $\mathbf{c} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ (tzv. parametrická křivka). Abychom vyloučili patologické případy (např. Peanovu křivku, jejíž obraz vyplní čtverec), budeme požadovat hladkost zobrazení $\mathbf{c}$. Bylo by možné požadovat pouze existenci prvních (ev. druhých či třetích) spojitých derivací místo hladkosti, ale budeme dávat přednost jednoduchosti před takovýmto nepříliš významným zobecněním.

Intuitivně si pod pojmem křivka představujeme spíš obraz zobrazení $\mathbf{c}$, množinu v $\mathbb{R}^3$ (kružnice, přímka, elipsa, hyperbola, parabola, atd.) Příslušná množina bodů je ale obrazem (oborem hodnot) mnoha parametrických křivek. Zavedeme si proto pojem změny parametrizace křivky a budeme studovat vlastnosti, které jsou na volbě parametrizace nezávislé.

## 2.1 Parametrizované křivky.

**Definice 2.1.1** *Parametrizovaná křivka v* $\mathbb{R}^3$ *je hladké zobrazení* $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$. *Hladkost znamená existenci (spojitých) derivací všech řádů (jednostranné derivace v evtl. krajních bodech).*

*Vektor* $\mathbf{c}'(t) \equiv \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) \in \mathbb{R}^3$ *se nazývá tečný vektor k parametrické křivce* $\mathbf{c}$ *v bodě* $\mathbf{c}(t)$.

*Řekneme, že parametrizovaná křivka* $\mathbf{c}$ *je regulární v bodě* $t_0 \in I$, *pokud* $\mathbf{c}'(t_0) \neq 0$.

*Řekneme, že parametrizovaná křivka* $\mathbf{c}$ *je regulární, pokud je regulární v každém bodě* $I$.

*Množina hodnot* $\mathbf{c}(I) =< \mathbf{c} >$ *se nazývá obraz parametrizované křivky.*

**Poznámka 2.1.2** *Vektor-hodnotová zobrazení jsou určena svými složkami. Například křivka* $\mathbf{c}$ *je určena třemi reálnými funkcemi:*

$$\mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)).$$

*Vektor derivací je určen třemi funkcemi:*

$$\mathbf{c}'(t) = (c_1'(t), c_2'(t), c_3'(t))$$

*a má geometrický význam tečného vektoru ke křivce* $\mathbf{c}$.

**Definice 2.1.3** *Je-li* $\mathbf{c}$ *parametrická křivka na* $I \subset \mathbb{R}$ *a je-li* $\phi : \tilde{I} \to I$ *difeomorfismus, pak se parametrická křivka* $\tilde{\mathbf{c}}(t') := \mathbf{c}(\varphi(t'))$ *na* $\tilde{I}$ *nazývá reparametrizací parametrické křivky* $\mathbf{c}$. *Takovéto dvě křivky mají zřejmě tentýž obraz.*

*Reparametrizace určují relaci ekvivalence na množině všech parametrických křivek. Křivkou budeme nazývat třídu ekvivalence parametrizovaných křivek vůči této relaci.*

*Řekneme, že reparametrizace zachovává orientaci parametrické křivky, pokud je derivace reparametrizace* $\phi'$ *stále kladná funkce. Také reparametrizace, které zachovávají orientaci parametrické křivky, tvoří relaci ekvivalence. Tyto třídy ekvivalence budeme nazývat orientované křivky.*

Všimněte si, že každá reparametrizace regulární parametrické křivky je zřejmě opět regulární parametrická křivka, protože pro křivku a její reparamerizaci platí

$$\left|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t(s))\right| \left|\frac{dt}{ds}\right|,$$

a derivace $\frac{dt}{ds}$ je všude nenulová. Můžeme tedy mluvit o regulárních křivkách, resp. regulárních orientovaných křivkách. V dalším budeme vyšetřovat vlastnosti křivek (resp. orientovaných křivek), tj. ty vlastnosti parametrizovaných křivek, které nezávisí na parametrizaci.

Předpokládejme, že $\mathbf{c}$ je parametrizovaná křivka na $I$ a zvolme bod $t_0$ v intervalu $I$. Pak definujeme funkci $s(t)$ vztahem

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du.$$

Hodnota $s(t)$ je právě délka křivky $\mathbf{c}$ na intervalu $(t_0, t)$. Pokud změníme počáteční hodnotu parametru $t_0$, pak se funkce $s(t)$ změní o konstantu.

Je-li $\mathbf{c}$ regulární parametrizovaná křivka, je funkce $s = s(t)$ zřejmě hladká a rostoucí (protože $s'(t) = |\mathbf{c}'(t)| > 0$ v každém bodě) a je to tudíž difeomorfimus definičního intervalu $I$ na jiný interval $\tilde{I}$. Označme $t = t(s)$ odpovídající inverzní funkci.

Pro novou parametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s)), s \in \tilde{I}$ platí

$$\left|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)\right| \frac{1}{|\frac{ds}{dt}(t)|} = 1.$$

Tím jsme dostali jakousi význačnou parametrizaci (její parametr je právě délka křivky od počátečního bodu), která existuje pro každou regulární křivku. Bylo by výhodné další vztahy počítat v této význačné parametrizaci. Uvidíme však, že explicitní výpočet příslušného integrálu je možný jen ve výjimečných případech, a tak bude třeba umět používat i vzorce pro libovolnou parametrizaci.

To vede k následující definici.

**Definice 2.1.4** *Nechť* $\mathbf{c}$ *je parametrizovaná křivka na* $I$. *Řekneme, že* $\mathbf{c}$ *je parametrizovaná obloukem, pokud platí*

$$\left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)\right| = 1$$

*pro všechna* $t \in I$.

**Tvrzení 2.1.5**
*(1) Parametrizace* $\mathbf{c}(t), t \in I$ *je regulární, právě když ji lze parametrizovat obloukem, tj., pokud existuje její reparametrizace* $\tilde{\mathbf{c}}$ *na* $\tilde{I}$, *pro kterou platí*

$$|\tilde{\mathbf{c}}'(s)| = 1$$

*pro všechna* $s \in \tilde{I}$.
*(2) Je-li* $\mathbf{c}(s)$ *jedna parametrizace obloukem, pak každá jiná parametrizace obloukem se získá pomocí změny parametrizace tvaru*

$$\tilde{s} = \pm s + c,$$

*kde* $c$ *je vhodná konstanta.*

*Důkaz.*
(1) Pokud je $\mathbf{c}$ regulární, pak jsme si již ukázali, že existuje její parametrizace obloukem. Naopak, pokud pro křivku $\mathbf{c}$ na $I$ existuje reparametrizace obloukem, je norma její derivace v každém bodě rovna 1, a tedy je křivka regulární.
(2) Jsou-li $s = s(t), u = u(t)$ dvě reparametrizace, které obě vedou na parametrizaci obloukem, pak z předchozího bodu plyne

$$\frac{du}{dt} = \pm\left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right| = \pm\frac{ds}{dt}.$$

Z toho požadované tvrzení ihned plyne.

□

Viděli jsme, že pro každou křivku $\mathbf{c}$ na $I$ a každou volbu bodu $t_0 \in I$ dostáváme parametrizaci obloukem $\tilde{\mathbf{c}}(s)$ s vlastností, že bodu $t_0$ odpovídá parametr $s = 0$. Zde platí, že parametr $s$, odpovídající bodu $\mathbf{c}(t)$, je délka křivky (velikost oblouku) mezi bodem $\mathbf{c}(t_0)$ a bodem $\mathbf{c}(t)$. Tyto parametrizace obloukem křivky $\mathbf{c}$ jsou charakterizovány vlastností, že 0 patří do definičního oboru $\tilde{I}$.

I když teoreticky je parametrizace obloukem definovaná pro každou regulární křivku, je zpravidla nemožné ji explicitně spočítat.

**Příklad 2.1.6**
*(1) Najděte parametrickou křivku, jejíž obraz je kružnice o středu v bodě $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ a poloměru $R > 0$ a spočítejte parametrizaci obloukem této křivky.*

*Jedna z možných odpovědí je*

$$\mathbf{c}(t) = (a_1 + R\cos t, a_2 + R\sin t), t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$

$$\tilde{\mathbf{c}}(s) = \left(a_1 + R\cos\frac{s}{R}, a_2 + R\sin\frac{s}{R}\right).$$

*(2) Spočítejte parametrizaci obloukem pro tzv. logaritmickou spirálu*

$$\mathbf{c}(t) = \left(e^t\cos t, e^t\sin t\right), t \in \mathbb{R}.$$

*Nakreslete si její graf!*

Je ihned vidět (spočítejte si!), že jsou-li $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ dvě parametrické křivky, pak pro derivaci jejich skalárního, resp. vektorového součinu platí

$$(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)' = \mathbf{c}_1' \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2',$$

$$(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)' = \mathbf{c}_1' \times \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2'.$$

Podobně pro tři křivky $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ platí

$$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]' = \det[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3'].$$

## 2.2 Křivost křivky.

Teď bychom chtěli vhodným způsobem charakterizovat, jak je křivka v kterém bodě 'křivá'. Tato vlastnost (jako všechny, které zkoumáme) nesmí záviset na volbě parametrizace. Navíc bychom zřejmě chtěli, aby křivost přímky byla nula a aby kružnice s větším poloměrem měly křivost menší než kružnice s menším poloměrem.

Víme již, že křivka je částí přímky, pokud $\frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2} = 0$ pro všechna $t \in I$. Nabízí se tedy definovat křivost křivky v bodě $t \in I$ jako velikost $|\frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2}|$. Bohužel, tato veličina závisí (a to velmi komplikovaným způsobem) na volbě parametrizace. Je možné tuto libovůli při volbě parametrizace odstranit požadavkem, aby křivka byla parametrizovaná obloukem. Pak již víme, že zbyde jen malá možnost reparametrizace, která veličinu $|\frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2}|$ zřejmě nemění:

$$u = \pm s + c, \frac{d\mathbf{c}}{ds} = \frac{d\mathbf{c}}{du}\frac{du}{ds} = \pm\frac{d\mathbf{c}}{du},$$

$$\frac{d^2\mathbf{c}}{ds^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right)\frac{du}{ds} = \pm\frac{d}{du}\left(\pm\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right) = \frac{d^2\mathbf{c}}{du^2}.$$

To vede k následující definici.

**Definice 2.2.1** *Je-li* $\mathbf{c}$ *křivka parametrizovaná obloukem, pak její křivost v bodě* $\mathbf{c}(s)$ *je rovna* $|\mathbf{c}''(s)|$.

**Příklad 2.2.2**

*Spočítejme křivost kružnice o poloměru $R$, parametrizované obloukem:*

$$\mathbf{c}(s) = \left(a_1 + R\cos\frac{s}{R}, a_2 + R\sin\frac{s}{R}\right).$$

*Dostaneme*

$$\mathbf{c}'(s) = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)$$

$$\mathbf{c}''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)$$

$$|\mathbf{c}''(s)| = \frac{1}{R}.$$

Výše uvedená definice křivosti je těžko použitelná pro praktický výpočet křivosti křivky. Jen ve velmi málo případech dokážeme explicitně parametrizaci obloukem spočítat. Je tedy potřeba umět spočítat křivost křivky z jakékoliv její parametrizace.

K tomu slouží následující věta.

**Věta 2.2.3** *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}(t)$ *je regulární křivka v* $\mathbb{R}^3$. *Pak pro její křivost* $\kappa$ *platí*

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3},$$

*kde tečka značí derivaci* $\frac{d}{dt}$.

*Důkaz.*

Základem důkazu je přechod od obecné parametrizace křivky k parametrizaci obloukem. Předpokládejme, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ je křivka v obecné parametrizace (na nějakém intervalu $I$). Zvolme si nějakou parametrizaci $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ této křivky obloukem (víme, že je to vždy možné) a označme $s$ příslušný parametr. Tedy $s = s(t), t \in I$ a $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(s(t)), t \in I$.

Někdy bývá v matematice zvykem označovat příslušné funkce rozdílnými symboly, tj. označit parametrizaci obloukem např. písmenem $\mathbf{d} = \mathbf{d}(s)$, označit reparametrizaci symbolem $s = f(t)$ a psát $\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}(f(t)), s = f(t)$. Je to přesnější, ale málo přehledné. Budeme používat výše uvedené intuitivní označení, čtenář si snadno rozmyslí, v kterém významu se příslušný symbol používá. Pro lepší odlišení ale budeme používat různé symboly pro derivace podle proměnné $t$, resp. $s$: derivaci $\frac{d}{dt}$ budeme označovat tečkou, derivaci $\frac{d}{ds}$ budeme označovat čárkou. Platí tedy:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(s(t));\ \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'(s(t))\,\dot{s}(t)$$

a (již bez proměnných):

$$\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}''\,(\dot{s})^2 + \mathbf{c}'\,\ddot{s}.$$

Z definice oblouku dostaneme ihned $\dot{s} = |\dot{\mathbf{c}}|$ a

$$(\dot{s})^2 = \dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}\ \Rightarrow \dot{s}\ddot{s} = \dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}}.$$

Podle definice křivosti dostaneme

$$\kappa = \left|\mathbf{c}''\right| = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{c}}\frac{1}{\dot{s}}\,\ddot{s}\right|}{(\dot{s})^2} = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{s})^2 - \dot{\mathbf{c}}\,\dot{s}\,\ddot{s}\right|}{(\dot{s})^4} = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}})\right|}{|\dot{\mathbf{c}}|^4}.$$

Nyní již stačí použít identitu pro trojitý vektorový součin (viz předchozí tvrzení):

$$|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}})| = |\dot{\mathbf{c}} \times (\ddot{\mathbf{c}} \times \dot{\mathbf{c}})| = |\dot{\mathbf{c}}|\ |\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|\,.$$

□

(1) Vypočítejte křivost šroubovice, která je zadaná parametrickým popisem $\mathbf{c}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Výsledek: $\kappa = \frac{|a|}{a^2+b^2}$.

(2) Přesvědčte se, že pro $b = 0$ (kružnice o poloměru $a$) a $a = 0$ (přímka) vychází očekávané hodnoty křivosti.

Pro křivky v prostoru již nestačí samotná křivost k charakterizaci křivky. Je např. z předchozích příkladů jasné, že kružnice a šroubovice v prostoru mohou mít stejnou křivost, i když zřejmě není možné převést jednu na druhou pomocí shodnosti v prostoru. Budeme si nyní definovat další geometrickou charakteristiku prostorové křivky – tzv. torzi křivky. K tomu nám pomůže studium vlastností ortogonálních bazí, svázané s každým bodem křivky.

V rovině určoval jednotkový tečný vektor v daném bodě jednoznačně kladně orientovanou ortonormální bazi. Změna této baze podél křivky byla vyjádřena pomocí derivací baze podle parametru křivky. Tyto derivace bylo možné rozložit v každém bodě do této baze. Koeficient v tomto vyjádření byla znaménková křivost křivky. Zkusíme si nyní podobnou proceduru provést i pro prostorové křivky. V každém bodě (netriviální) křivky si určíme význačnou bazi svázanou s chováním křivky, tzv. Frenetovou bazi.

### 2.2.1 Frenetova baze.

Každá regulární křivka $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ má automaticky v každém bodě jeden význačný směr, tečný směr. Pro regulární křivku je možné v každém bodě definovat jednotkový tečný vektor $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$.

Druhá derivace $\ddot{\mathbf{c}}$ je důležitá informace o křivce. Pokud jsou vektory $\ddot{\mathbf{c}}$ a $\dot{\mathbf{c}}$ nezávislé, pak určují význačnou rovinu (tzv. oskulační rovinu křivky v daném bodě). Vektory $\ddot{\mathbf{c}}$ a $\dot{\mathbf{c}}$ jsou závislé právě když křivost křivky v daném bodě je rovna nule. Pro definici Frenetovy baze tedy budeme muset předpokládat, že křivost křivky je nenulová.

Uvažujme nyní křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizovanou obloukem. Tedy $|\mathbf{c}'| = 1$ a $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$ je jednotkový tečný vektor. Derivací vztahu $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, dostaneme $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$. Pokud je křivost $\kappa$ nenulová, je také $\mathbf{t}' \neq 0$. To umožňuje následující definici.

**Definice 2.2.4** *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}(s)$ *je regulární křivka parametrizovaná obloukem, která má v bodě* $\mathbf{c}(s_0)$ *nenulovou křivost. Pak v tomto bodě definujeme význačnou ortonormální bazi, tzv. Frenetovu bazi* $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, *následujícím způsobem.*

$$\mathbf{t} = \mathbf{c}'; \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}; \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

*Rovina, generovaná vektory* $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ *se nazývá oskulační rovina křivky; rovina generovaná vektory* $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ *se nazývá normálová rovina křivky a rovina generovaná vektory* $\mathbf{b}, \mathbf{t}$ *se nazývá rektifikační rovina křivky.*

V každém bodě regulární parametrické křivky s nenulovou torzí máme definovánu význačnou ortonormální (Frenetovu) bazi. Chování křivky se odráží ve změně této baze. Infinitezimální změna je popsána derivacemi prvků Frenetovy baze v daném bodě. Přirozený způsob, jak zachytit informaci o těchto derivacích, je spočítat koeficienty v rozkladu těchto derivací vzhledem k Frenetově bazi v daném bodě. Co víme o těchto derivacích?

Nechť $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ je regulární křivka, parametrizovaná obloukem, která má nenulovou křivost. Pak víme, že $\mathbf{t}' = \kappa\, \mathbf{n}$.

Protože $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, dostaneme

$$\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' = \mathbf{t} \times \mathbf{n}',$$

Tedy $\mathbf{b}'$ je kolmé na $\mathbf{t}$. Navíc, z $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$ plyne $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b}=0$, tedy $\mathbf{b}'$ je kolmé také na $\mathbf{b}$. Vektory $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{n}$ jsou tedy závislé. To umožňuje následující definici.

**Definice 2.2.5** *Je-li $\mathbf{c}=\mathbf{c}(s)$ regulární křivka parametrizovaná obloukem $s$ nenulovou křivostí, pak definujeme torzi $\tau$ této křivky vztahem*

$$\mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}.$$

Znaménko v definici $\tau$ je jen konvence. Nyní chybí již jen spočítat $\mathbf{n}'$. Všechny derivace jsou shrnuty v následujícím klíčovém tvrzení.

**Věta 2.2.6 (Frenetova věta)** *Předpokládejme, že $\mathbf{c}=\mathbf{c}(s)$ je regulární křivka, parametrizovaná obloukem, která má nenulovou křivost. Pak*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}.$$

*Důkaz.*
Připomeňme, že $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$, a tedy $\mathbf{t}=\mathbf{n}\times\mathbf{b}$ a $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}$. Pak

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{b}\times\mathbf{t})' = \mathbf{b}'\times\mathbf{t}+\mathbf{b}\times\mathbf{t}' = -\tau\,\mathbf{n}\times\mathbf{t}+\kappa\mathbf{b}\times\mathbf{n} = \tau\,\mathbf{b}-\kappa\,\mathbf{t}.$$

□

Zatím ještě nevíme, jestli torze křivky nezávisí na volbě parametrizace, jestli je to geometrická vlastnost křivky. V definici jsme předpokládali paramatrizaci křivky obloukem, ale ta je určena až na změnu parametrizace tvaru $s\mapsto \pm s+c$, kde $c$ je konstanta. Je užitečné si rozmyslet, jak se mění prvky Frenetovy baze a jejich derivace při takovéto změně parametrizace. Dostaneme

$$\mathbf{t}\mapsto\pm\mathbf{t},\ \mathbf{t}'\mapsto\mathbf{t}';\ \ \mathbf{n}\mapsto\mathbf{n},\ \mathbf{n}'\mapsto\pm\mathbf{n}';\ \mathbf{b}\mapsto\pm\mathbf{b},\ \mathbf{b}'\mapsto\mathbf{b}'.$$

Takže křivost ani torze znaménko nemění.

Jako pro případ křivosti, ukážeme si nyní, jak se vypočítá torze křivky z obecné parametrizace křivky. To je podstatná praktická informace, protože explicitní výrazy pro parametrizaci obloukem nejsou obvykle k dispozici. Zároveň znovu dokážeme nezávislost torze na volbě parametrizace.

**Věta 2.2.7** *Je-li křivost regulární křivky $\mathbf{c}$ nenulová a je-li $\mathbf{c}=\mathbf{c}(t)$ její libovolná parametrizace, pak pro její torzi platí*

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}}\times\ddot{\mathbf{c}})\cdot\dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}}\times\ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\dot{\mathbf{c}},\ddot{\mathbf{c}},\dddot{\mathbf{c}}]}{|\dot{\mathbf{c}}\times\ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

*Důkaz.*
(1) Nejdříve ověříme vzorec pro torzi v parametrizaci obloukem $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$. Pak $|\mathbf{c}'| = 1$, $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'' = \mathbf{t}' = \kappa\,\mathbf{n}$. Z definice torze $\mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}$ plyne

$$\tau = -(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}) = -(\mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{t} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}'.$$

Do tohoto vzorce nyní stačí dosadit vyjádření jednotlivých vektorů pomocí derivací křivky $\mathbf{c}$. Víme, že $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$ a $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{c}''$. Tedy

$$\tau = \left(\mathbf{c}' \times \frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right) \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right) = \left(\mathbf{c}' \times \frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right) \cdot \left[\frac{\mathbf{c}'''}{\kappa} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \mathbf{c}''\right] = \frac{1}{\kappa^2}[(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''].$$

Protože vektory $\mathbf{c}'$ a $\mathbf{c}''$ jsou na sebe kolmé, platí $|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|^2 = |\mathbf{c}'|\,|\mathbf{c}''|^2 = \kappa^2$.
(2) Nyní ukážeme, že vzorec pro torzi nezávisí na volbě parametrizace. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(u), \mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ jsou dvě libovolné parametrizace křivky $\mathbf{c}$, které spolu souvisí pomocí reparametrizace $u = u(t)$, tj. $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(u(t))$. Pro stručnost označíme $\frac{d}{dt}$ tečkou a $\frac{d}{du}$ čárkou. Pak dostaneme

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'\,\dot{u}; \quad \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}''\,(\dot{u})^2 + \mathbf{c}'\,\ddot{u}; \quad \dddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'''\,(\dot{u})^3 + 3\,\mathbf{c}''\dot{u}\ddot{u} + \dddot{u}\,\mathbf{c}'.$$

Z toho ihned plyne

$$\det[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}] = (\dot{u})^6 \det[\mathbf{c}', \mathbf{c}''\mathbf{c}''']; \quad |\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}| = (\dot{u})^3 |\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|.$$

□

**Příklad 2.2.8** *Ukažte, že torze šroubovice*

$$\mathbf{c} = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$$

*je rovna* $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Přidejme ještě komentář o tom, jak spočítat tvar Frenetovy baze $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ pomocí obecné parametrizace křivky $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. Nejdříve je třeba spočítat derivace do třetího řádu: $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ .

Tečný vektor je dán vztahem $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$. Dvojice $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ a $\{\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}\}$ generují tutéž rovinu a jsou souhlasně orientované. Vektor $\mathbf{n}$ se tedy dostane pomocí obecné Gramm-Schmidtovy ortogonalizace. Výsledek je

$$\mathbf{n} = \ddot{\mathbf{c}} - (\ddot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{c}}|^2}[(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}})\ddot{\mathbf{c}} - (\ddot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}})\dot{\mathbf{c}}].$$

Poslední vektor ortonormální baze, vektor binormály $\mathbf{b}$, je pak vektorový součin $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Tyto poznámky také naznačují, jak vypadá zobecnění Frenetovy baze pro případ křivek ve vyšší dimenzi. Systém je dobře vidět z případu křivek v $\mathbb{R}^4$.

Pro konstrukci Frenetovy baze musíme předpokládat, že jsou vektory $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ nezávislé. V tomto případě bychom postupovali následujícím způsobem.

Pro křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ v obecné parametrizaci nejprve spočítáme derivace až do čtvrtého řádu. První vektor $\mathbf{e}_1$ Frenetovy baze má tvar $\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$. Pokud jsou vektory $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}$ nezávislé, pak je vektor $\mathbf{e}_2$ jednoznačně určen požadavkem, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}$ generují tutéž rovinu a jsou souhlasně orientovány.

Další vektor $\mathbf{e}_3$ je jednoznačně určen požadavkem, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ generují tentýž trojrozměrný podprostor v $\mathbb{R}^4$ jsou souhlasně orientovány. Vektor $\mathbf{e}_4$ je pak určen jednoznačně požadavkem, že $\{\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_4\}$ je ortonormální baze v $\mathbb{R}^4$.

Frenetova věta pak říká, že

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0\\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0\\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3\\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix}.$$

Koeficienty $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ se nazývají zobecněné křivosti. První dvě funkce jsou kladné, třetí může nabývat libovolné znaménko.

Obecně, v libovolné dimenzi, platí, že zobecněné křivosti určují jednoznačně (až na shodnost) danou křivku a že mohou být zvoleny libovolně s tím omezením, že zobecněné křivosti, až na poslední z nich, jsou kladné a všechny funkce jsou hladké. Toto tvrzení si nyní dokážeme v $\mathbb{R}^3$.

**Věta 2.2.9**
*(1) Jsou-li $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ a $\mathbf{d} = \mathbf{d}(s)$ dvě křivky v $\mathbb{R}^3$ v parametrizaci obloukem na intervalu $(\alpha, \beta)$, které mají tutéž křivost a torzi, pak existuje (přímá) shodnost $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taková, že $\mathbf{d}(s) = S(\mathbf{c}(s))$.*
*(2) Jsou-li $k > 0, t$ dvě dané hladké funkce na $(\alpha, \beta)$, pak existuje křivka $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ v parametrizaci obloukem, jejíž křivost je $k$ a její torze je rovna $t$.*

*Důkaz.*
(1) Jsou-li $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, resp. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, Frenetovy baze pro křivky $\mathbf{c}$, resp. $\mathbf{d}$ a zvolíme-li libovolně bod $s_0 \in (\alpha, \beta)$, pak existuje jednoznačně určené otočení $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pro které platí $\mathbf{f}_i(s_0) = R(\mathbf{e}_i(s_0))$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathbf{d}(s_0) = \mathbf{c}(s_0) + \mathbf{b}$. Chceme ukázat, že hledaná shodnost má tvar $S(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$.

Nejdříve ukážeme, že rovnost $\mathbf{f}_i(s) = R(\mathbf{e}_i(s))$ platí ve všech bodech křivky. To dostaneme ihned z Frenetových rovnic. Označme $\omega_{ij}$ koeficienty ve Frenetových rovnicích. Podle předpokladu jsou stejné pro $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{f}_i$. Tedy

$$\mathbf{f}_i' = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\mathbf{f}_j; \quad [R(\mathbf{e}_i)]' = R(\mathbf{e}_i') = R\left(\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} R(\mathbf{e}_j).$$

Tvrzení tedy plyne z věty o jednoznačnosti pro řešení soustavy obyčejných lineárních rovnic.

Pro derivace křivek $\mathbf{d}$ a $S(\mathbf{c})$ pak platí

$$\frac{d\mathbf{d}}{ds} = \mathbf{f}_1 = R(\mathbf{e}_1) = R\left(\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(R(\mathbf{c})) = \frac{d}{ds}(S(\mathbf{c})).$$

Spolu s počátečními podmínkami to ukazuje, že se křivky rovnají.
(2) Předpokládejme, že jsou na intervalu $(\alpha, \beta)$ zadány hladké funkce $\kappa > 0$ a $\tau$. Zvolme $s_0 \in (\alpha, \beta)$ libovolně. Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je libovolná ortonormální baze. Z vět o existenci řešení soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic plyne existence řešení $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ Frenetových rovnic

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & t\\ 0 & -t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}.$$

na $(\alpha, \beta)$ s počátečními podmínkami $\mathbf{e}_i(s_0) = \mathbf{v}_i$ $i = 1, 2, 3$. Pak stačí definovat $\mathbf{c}(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{e}_1(u) du$.

Výsledná křivka je zřejmě parametrizovaná obloukem, její tečný vektor v každém bodě je $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1$, a $\ddot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{e}_1} = k\,\mathbf{e}_2$. Tedy křivost $\kappa = |\ddot{\mathbf{c}}|$ je rovna $k$. Navíc, vektor $\mathbf{e}_2$ je vektor normály, takže $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je Frenetova baze křivky $\mathbf{c}$. Z toho plyne, že také torze $\tau$ je rovna funkci $t$. $\square$

# Kapitola 3

# Sférická geometrie.

## 3.1 Přímky na sféře

**Definice 3.1.1** *Ve sférické geometrii zvolíme jako množinu všech bodů sféru $S^2$ (s poloměrem 1). Přímka na sféře je definována jako průsečík sféry s libovolnou rovinou, která prochází počátkem (hlavní kružnice). Úsečka spojující dva body $A, B$ je kratší část oblouku hlavní kružnice ohraničená těmito dvěma body, pokud body $A, B$ nejsou protilehlé. Pro protilehlé body je to libovolná polokružnice, která je spojuje. Vzdálenost $\rho(A, B)$ dvou bodů na sféře je délka úsečky, která je spojuje.*

*Sférický trojúhelník je definován třemi body na sféře, jeho hrany jsou tvořeny úsečkami, spojujícími příslušné tři body. Budeme uvažovat jen trojúhelníky, jejichž hrany mají délku menší než $\pi$. (To je ekvivalentní s tím, že celý trojúhelník se vejde do nějaké polosféry ohraničené nějakou velkou kružnicí).*

**Poznámka.**

(1)

Všimněte si, že vlastnosti přímek ve sférické geometrii jsou podobné jako v Eukleidovské geometrii. Liší se např. tím, že neexistují žádné rovnoběžky, každé dvě přímky se protínají. Také existují dvojice bodů (protilehlé body na sféře), pro které existuje nekonečně mnoho přímek, které jimi procházejí.

(2) Dá se ukázat (zkuste si!), že úsečka mezi dvěma body na sféře má nekratší délku mezi všemi křivkami na sféře, které tyto dva body spojují. V praktickém životě je to vidět například z toho, jak létají letadla do Ameriky či do Asie. Jeji pohyb nakreslený na obrazovce pro cestující vypadá zbytečně dlouhý, což je důsledkem toho, že (všechny) mapy zkreslují vzdálenosti. Ve skutečnosti letí letadlo nejkratší možnou cestou.

## 3.2 Kosinová a sinová věta v Eukleidovské geometrii.

Pro trojúhelník v Eukleidovské rovině s úhly $\alpha, \beta, \gamma$ označme $a, b, c$ délky příslušných protilehlých stran. Pak platí

1. $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

2. $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kosinová věta je zobecnění Pythagorovy věty, na kterou se redukuje, pokud je úhel $\gamma$ pravý úhel.

Teď si ukážeme, jak vypadá analogie těchto vět ve sférické geometrii.

## 3.3 Plocha sférického trojúhelníka.

**Věta 3.3.1** *Předpokládejme, že části tří hlavních kružnic na sféře ohraničují sférický trojúhelník $ABC$. Úhly u vrcholů $A, B, C$ postupně označíme $\alpha, \beta, \gamma$. Pak se velikost $|ABC|$ plochy trojúhelníka $ABC$ vypočte ze vztahu*

$$|ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Všimněte si, že součet úhlů ve sférickém trojúhelníku není $\pi$, ale musí být větší než $\pi$! To je zřejmé, protože velikost plochy trojúhelníka musí být kladná. Všimněte si také, že velikost plochy sférického trojúhelníka se vypočte jen pomocí úhlů, ve vzorci nejsou žádné délky stran! Velikost plochy je zřejmě menší než $2\pi$, rozmyslete si, že najdeme trojúhelníky s velikostí plochy libovolně blízko u $2\pi$.

*Důkaz.*

Označme $A', B', C'$ body protilehlé bodům $A, B, C$ (nakreslete si!). Dvě hlavní kružnice, které svírají úhel $al$ ohraničují dva protilehlé 'stroužky' na sféře. Velikost plochy každého z nich jsou stejné a závisí na úhlu $\alpha$. Pokud se $\alpha$ blíží k nule, tato plocha se blíží k nule a pokud se $al$ blíží k $\pi$, blíží se tento povrch k povrchu polosféry, tj. k $2\pi$. Zřejmé tento povrch závisí lineárně na $\lambda$, tedy se rovná $2\alpha$. (Později spočítáme velikost této plochy přímo způsobem, kterým ji počítal již Archimedes.)

Víme tedy, že

$$2\alpha = |ABC| + |A'BC|;\ 2\beta = |ABC| + |AB'C|;\ 2\gamma = |ABC| + |ABC'|.$$

Trojúhelníky $A'BC'$ a $AB'C$ se na sebe zobrazují při symetrii podle počátku, mají tedy stejný povrch. Velikost povrchu polosféry, ohraničená kružnicí

$ACA'C'$, je rovna zřejmě $2\pi$. Tedy

$$2\pi = |ABC|+|ABC'|+|A'BC'|+|A'BC| = |ABC|+|ABC'|+|AB'C|+|A'BC|$$

Pokud odečteme tři předchozí rovnosti od tohoto posledního vztahu, dostaneme tvrzení věty. $\square$

## 3.4 Kosinová a sinová věta ve sférické geometrii.

**Věta 3.4.1** *Předpokládejme, že trojúhelník $ABC$ leží v jedné polosféře. Úhly při vrcholech $A, B, C$ označíme postupně $\alpha, \beta, \gamma$ a délky stran protilehlých úhlům $\alpha, \beta, \gamma$ označíme postupně $a, b, c$. Pak platí*

1. $$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

2. $$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

**Věta 3.4.2** *(Pythagorova věta). Jako důsledek pro pravoúhlý troúhelník ($\gamma = \pi/2$) dostaneme*

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

*Důkaz.*

Nejdříve dokážeme kosinovou větu. Body $A, B, C$ jsou body v $\mathbb{R}^3$, ale budeme je chápat jako vektory spojující počátek $O$ s příslušným bodem. Označme $N_1, N_2, N_3$ jednotkové normály k rovinám $OBC, OAC, OAB$. Orientaci normál vybereme tak, aby směřovaly ven z tělesa $OABC$ (nakreslete si!!). Pak

$$N_a = \frac{C \times B}{\sin a},\ N_b = \frac{A \times C}{\sin b},\ N_c = \frac{B \times A}{\sin c}.$$

(pokud jsme orientovali pořadí vrcholů trohúhelníka proti směru hodinových ručiček). Úhel při vrcholu sférického trojúhelníka je zřejmě roven úhlu rovin definujících příslušné strany trojúhelníka. Platí také

$$N_a \cdot N_b = -\cos \gamma,\ N_b \cdot N_c = -\cos \alpha,\ N_c \cdot N_a = -\cos \beta.$$

Víme, že platí identita

$$(C \times B) \cdot (A \times C) = (A \cdot C)(B \cdot C) - (C \cdot C)(B \cdot A).$$

Protože vektory $A, B, C$ jsou jednotkové, pravá strana se zjednoduší. Celkem dostaneme

$$-\sin a \sin b \cos \gamma \quad = \quad \sin a \sin b (N_1 \cdot N_2) =$$

$$\begin{aligned} &= (C \times B) \cdot (A \times C) = \\ &= (A \cdot C)(B \cdot C) - (B \cdot A) = \\ &= \cos b \cos a - \cos c. \end{aligned}$$

Sinová věta se odvodí takto. Pokud dosadíme do identity

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

postupně vektory $\mathbf{a} = A \times C, \mathbf{b} = C, \mathbf{c} = B$, dostaneme identitu

$$(A \times C) \times (C \times B) = ((A \times C) \cdot B)C = ((B \times A) \cdot C)C$$

V našem případě dostaneme nalevo $-(N_1 \times N_2) \sin a \sin b$. Součin $N_a \times N_b$ je zřejmě násobek $C$ a dá se snadno ověřit, že $N_a \times N_b = C \sin \gamma$. Porovnáním násobků $C$ dostaneme

$$C \cdot (A \times B) = \sin a \sin b \sin \gamma.$$

Vzhledem k tomu, že je součin $C \cdot (B \times A)$ (tj. determinant!) invariantní při cyklických záměnách, dostaneme

$$\sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta.$$

Relaci pak stačí vydělit $\sin a \sin b \sin c$. □

# Kapitola 4

# Plochy v $\mathbb{R}^3$.

Nejdříve se musíme dohodnout, co myslíme pod pojmem plocha. Nejjednoduší je užít parametrický popis plochy, tj. (hladké) zobrazení z otevřené množiny v $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$. Aby obraz tohoto zobrazení byl opravdu dvojdimenzionální, je třeba předpokládat, že zobrazení je regulární.

## 4.1 Základní definice.

### 4.1.1 Regulární parametrická plocha, hladká plocha.

**Definice 4.1.1** *Parametrická regulární plocha v $\mathbb{R}^3$ definovaná na $\mathcal{O}$ je hladké zobrazení $\mathbf{p}$ otevřené množiny $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ takové, že $\mathbf{p}$ je regulární na $\mathcal{O}$, tj. hodnost Jacobiho matice $\mathbf{p}$ je ve všech bodech rovna 2. Ekvivalentně, vektory parciálních derivací*

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \equiv \mathbf{p}_u, \ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \equiv \mathbf{p}_v$$

*musí být v každém bodě lineárně nezávislé.*

*Je-li $\phi : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ difeomeorfismus (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, které je spolu se svým inverzním zobrazením nekonečně diferencovatelné) otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$, pak definujeme $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi$ a $\phi$ nazýváme reparametrizací.*

*Regulární parametrickou plochu $\mathbf{p}$ nazveme mapou, pokud je $\mathbf{p}$ navíc homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Množinu $U = \mathbf{p}(\mathcal{O}) \subset S$ nazveme obrazem mapy, někdy ji budeme značit $< \mathbf{p} >$ . Pro přesnost budeme obvykle pod mapou na $S$ rozumět dvojici $(U, \mathbf{p})$, kde $U = \mathbf{p}(\mathcal{O})$.*

**Věta 4.1.2** *(1) Je-li $\mathbf{p}$ regulární parametrická plocha a $\phi$ difeomorfismus, pak je také $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi$ regulární parametrická plocha.*
*(2) Jsou-li $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}'$ dvě mapy a $< \mathbf{p} > = < \mathbf{p}' >$, pak existuje reparametrizace $\phi$ taková, že*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi.$$

*Důkaz.*
(1) Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{p}'$ je součin Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{p}$ a Jacobiho matice zobrazení $\phi$. Je-li $\phi$ difeomorfismus, pak složení $\phi$ a $\phi^{-1}$ je identita a součin příslušných Jacobiho matic je jednotková matice. Determinant Jacobiho matice $\phi$ je tedy nenulový. Z toho plyne, že $\mathbf{p}'$ je regulární, právě když je regulární $\mathbf{p}$.
(2) Zobrazení $\phi$ budeme definovat předpisem $\phi = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{p}'$. Toto zobrazení je podle předpokladu homeomorfismus na svém definičním oboru. Je ale třeba dokázat, že je hladké. Zvolme bod $a' \in \mathcal{O}'$, pak $\phi(a') = a \in \mathcal{O}$. Jeden ze tří minorů řádu 2 Jacobiho matice zobrazení $\phi$ v bodě $a$ je nenulový. Můžeme předpokládat, že je to determinant

$$\det \frac{\partial(p_2, p_3)}{\partial(u, v)}.$$

Označme $\pi$ projekci $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^2$, danou průmětem na poslední dvě souřadnice. Pak má zobrazení $\pi \circ \mathbf{p}$ v bodě $a$ nenulový Jakobián a podle věty o inverzním zobrazení existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^2$ bodu $a$ takové, že $\pi \circ \mathbf{p}$ je difeomorfismus $U$ na $\pi \circ \mathbf{p}(U)$.

Zobrazení $\phi$ můžeme v otevřené množině $\phi^{-1}(U) \subset \mathcal{O}'$ napsat ve tvaru

$$\phi = (\pi \circ \mathbf{p})^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{p}'),$$

je to tedy složení dvou hladkých zobrazení. □

Pojem regulární parametrické plochy, resp. mapy, stačí pro lokální problémy. Pro globální výsledky je třeba definici plochy zobecnit. Typickým příkladem plochy, která není obrazem regulární parametrické plochy, je sféra. Sféra se nedá pokrýt jednou mapou (homeomorfismus nemůže zobrazit otevřenou množinu na kompaktní množinu). Není pochyb o tom, že sféra je pro nás typickým příkladem plochy a že by naše definice tuto plochu měla zahrnovat. Rozšíříme si tedy pojem plochy následujícím způsobem.

**Definice 4.1.3** *Řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^3$ je (hladká) plocha, pokud pro každý bod $s \in S$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ a mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ tak, že $U \cap S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Soubor map, které pokrývají plochu $S$, se nazývá atlas plochy $S$.*

*Jsou-li $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ dvě mapy (s neprázdným průnikem svých obrazů) na $S$, pak budeme zobrazení $\phi = (\mathbf{p}')^{-1} \circ \mathbf{p}$ nazývat (tam kde je definované) přechodové zobrazení mezi těmito dvěma mapami.*

**Poznámka.** Pokud pro množinu $S \subset \mathbb{R}^3$ dokážeme najít atlas, je $S$ (hladká) plocha. Atlas pro danou plochu $S$ není určen jednoznačně. Jak uvidíme na příkladech, je takových možností vždy mnoho. Pro popis plochy je vhodné si zvolit atlas, který má pokud možno co nejméně map. Na volbě atlasu nezáleží, ze dvou atlasů můžeme např. jejich sjednocením vyrobit větší atlas, který oba předchozí atlasy obsahuje. Sjednocení všech atlasů je maximální možný atlas, který má ovšem přiliš mnoho map (nekonečně mnoho), s každou mapou tam při nejmenším leží všechny její restrikce na otevřené podmnožiny jejího definičního oboru. z Věty 4.1.2 (2) plyne, že přechodové zobrazení libovolných dvou map je reparametrizací.

Budeme obvykle používat pro plochu jeden vybraný atlas, ale kdykoliv k němu můžeme přidat jakoukoliv další mapu, bude-li třeba.

**Příklad 4.1.4**
*(1) Rovina.*

*Je-li $R$ rovina v $\mathbb{R}^3$ a zvolíme-li její tři body $A, B, C \in R$ v obecné poloze, pak jeden její parametrický popis má tvar*

$$\mathbf{p}(u, v) = A + u(B - A) + v(C - A)$$

*Toto zobrazení je mapa (ověřte!) a $< \mathbf{p} >= R$.*

*Rovina je tedy plocha ve smyslu předchozí definice. Její atlas se skládá z jediné mapy.*
*(2) Sféra.*

*Sféra $S_2$ je dána rovnicí*

$$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

*Standardní mapa na sféře má tvar*

$$\mathbf{p}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi);\ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2),\ \theta \in (0, 2\pi).$$

*Najděte další tři mapy natočením této mapy, aby tvořily atlas pro sféru.*

*Jiný atlas, který má jen dvě mapy, se získá pomocí stereografické projekce ze severního a jižního pólu sféry. Je-li $S$ severní pól a je-li $R$ rovina $x_3 = 0$, pak úsečka $SA, A \in S_2 - \{S\}$ spojující severní pól s bodem $A$ sféry protíná rovinu $R$ v jediném bodě $X(A)$. Zobrazení $A \mapsto X(A)$ je stereografická projekce sféry bez bodu $S$ na rovinu $R$. Rovina zabalí sféru celou, kromě jediného bodu. Příslušné inverzní zobrazení je pak mapa. Napište vzorce pro tuto mapu, pro mapu odpovídající projekci z jižního pólu a pro příslušné přechodové zobrazení! Ověřte, že jsou to opravdu mapy!*
*(3) Jako cvičení si napište definici toru (pneumatiky) pomocí jedné rovnice v $\mathbb{R}^3$ a atlas pro torus.*
*(4) Standardní kužel $K = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ má vrchol v počátku. Je lehké najít mapu, která pokrývá kužel bez jedné přímky:*

$$\mathbf{p}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), r \neq 0, \theta \in (0, 2\pi)$$

*a druhou (otočenou) mapu, které pak tvoří atlas pro kužel bez vrcholu. Ale neexistuje mapa, která by pokrývala okolí vrcholu. To je vidět z toho, že pro libovolně malé okolí $U$ počátku $0$ v $\mathbb{R}^3$ je množina $U \cap K - \{0\}$ nesouvislá,*

*zatímco její vzor v libovolné mapě je nutně množina souvislá. Ty se ovšem na sebe nemohou žádným homeomorfismem zobrazit. Kužel tedy není plocha ve smyslu naší definice, kužel bez vrcholu plochou je.*
*(5) Graf hladké funkce je vždy plocha. Přesněji, je-li $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hladká funkce na otevřené množině $\mathcal{O}$ v $\mathbb{R}^2$, pak její graf $S$ je obraz mapy*

$$\mathbf{p}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2));\ (x_1, x_2) \in \mathcal{O}.$$

*Je zřejmé, že Jacobián tohoto zobrazení má všude hodnost 2 a že je to homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$ (ověřte!).*
*(6) Klasické příklady ploch jsou tzv. kvadriky, tj. plochy zadané v $\mathbb{R}^3$ kvadratickou rovnicí. Mezi ně patří sféra, kužel, elipsoid, hyperboloidy. Je zajímavé znát klasifikaci kanonických tvarů těchto kvadrik a plochy, které jim odpovídají.*

Plochy v $\mathbb{R}^3$ se nejčastěji zadávají jednou rovnicí

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Následující velmi důležitá věta ukazuje postačující podmínku pro funkci $f$, aby tato množina $S$ byla plocha. Podmínka říká, že stačí, aby gradient funkce $f$ byl na ploše $S$ nenulový.

**Věta 4.1.5** *Předpokládejme, že $f$ je hladká funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a definujme množinu $S$ rovnicí*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0}\}.$$

*Pokud platí podmínka*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \neq 0$$

*na celé množině $S$, pak $S$ je plocha.*

*Důkaz.*
Je-li $\bar{x} \in S$ libovolný bod, pak $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Předpokládejme například, že $\frac{\partial f}{\partial x_3}(\bar{x}) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích pak existuje okolí

$$U = U_1 \times U_2,\ U_1 \subset \mathbb{R}^2, U_2 \subset \mathbb{R}$$

a hladká funkce $g : U_1 \to U_2$ tak, že $S \cap U$ je právě graf funkce $g$. Zobrazení

$$\mathbf{p}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2));\ (x_1, x_2) \in U_1$$

je pak mapa, obsahující bod $\bar{x}$. □

## 4.2 Tečné vektory, tečná rovina plochy.

Z předchozí kapitoly víme, co je to tečný vektor ke křivce. Nyní si budeme definovat tečný vektor k ploše v jejím daném bodě. V další části přednášky budeme studovat vlastnosti plochy $S$, které zavisí jen na $S$ a ne na zvolené mapě. A tak i pro tečný vektor napíšeme nejdříve definici, která nezávisí na volbě mapy a pak ukážeme, jak tečné vektory popisovat pomocí zvolené mapy. Tečný vektor plochy budeme definovat jako tečný vektor křivky, která leží v dané ploše.

**Definice 4.2.1** *Řekneme, že vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je tečný vektor k ploše $S$ v bodě $s \in S$, pokud existuje křivka $\mathbf{c}, < \mathbf{c} > \subset S$ taková, že*

$$\mathbf{c}(t_0) = s;\ \dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{v}.$$

*Množina všech tečných vektorů v bodě $s \in S$ se nazývá tečný prostor k ploše $S$ v bodě $s$ a značí se $T_sS$.*

**Věta 4.2.2** *Nechť $(U, \mathbf{p})$ je mapa na $S$ a $s = \mathbf{p}(u_1, u_2)$ je bod v jejím obraze. Pak*

$$T_sS = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} = \alpha\mathbf{p}_{u_1} + \beta\mathbf{p}_{u_2};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

*kde $\mathbf{p}_{u_1}$, resp. $\mathbf{p}_{u_2}$ označuje parciální derivace $\mathbf{p}$ podle $u_1$, resp. $u_2$ v bodě $(u_1, u_2)$.*

*Důkaz.*
(1) Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná a $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{p}_{u_1} + \beta\mathbf{p}_{u_2}$, pak definujeme křivku $\mathbf{c}$ předpisem (pro $\varepsilon$ dostatečně malé)

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u_1 + \alpha t, u_2 + \beta t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Křivka $\mathbf{c}$ zřejmě leží v ploše $S$, $\mathbf{c}(0) = s$ a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(0)$.
(2) Pokud křivka $\mathbf{c}$ leží v ploše $S$, pak existuje křivka $\mathbf{d}$ v definičním oboru $\mathcal{O}$ mapy $\mathbf{p}$ taková, že

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \mathbf{d}.$$

(Stačí zvolit $\mathbf{d} = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{c}$.) Označme $\mathbf{d}(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Je-li $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(t_0)$, pak

$$\mathbf{v} = \dot{u}_1\mathbf{p}_{u_1} + \dot{u}_2\mathbf{p}_{u_2},$$

a stačí položit $\alpha = \dot{u}_1$, $\beta = \dot{u}_2$. □

Ukázali jsme tedy, že volba mapy $(U, \mathbf{p})$ v okolí bodu $s \in S$ zadává bazi $(\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2})$ v tečném prostoru $T_sS$. Navíc derivace $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in T_sS$ vůči této bazi. Z lineárníalgebry navíc víme, že zobrazení, které vektoru ve vektorovém prostoru přiřadí jeho souřadnice vůči zvolené bazi je isomorfismus.

## 4.3 Normálové vektory.

Každý podprostor v $\mathbb{R}^3$ dimenze 2 je určen jednoznačně jednotkovým vektorem, který je na něj kolmý. Takové jednotkové vektory jsou zřejmě dva. Můžeme tedy tečné prostory charakterizovat pomocí těchto kolmých vektorů, které budeme nazývat jednotkové normály k dané ploše v daném bodě. Jsou zřejmě (až na výběr znaménka) určeny jednoznačně danou plochou.

Všimněte si, že tečný prostor je podprostor v $\mathbb{R}^3$, tj. vektory jsou umístěny v počátku, ale vektory z tečného prostoru $T_sS$ k ploše si kreslím umístěné do bodu $s$. Je možné tento rozdíl formalizovat tím, že podprostor $T_sS$ by byl definován jako koncové body tečných vektorů umístěných do bodu $s$, byl by to afinní podprostor v $\mathbb{R}^3$ (tj. podprostor, posunutý do bodu mimo počátek) a $T_sS$ by bylo jeho zaměření (tj. množina koncových bodů tečných vektorů, umístěných do počátku).

**Definice 4.3.1** *Je-li $T_sS$ tečný prostor v bodě $s$ k ploše $S$, pak existuje jednotkový vektor $\mathbf{N}$ tak, že*

$$T_sS = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0.\}$$

*Vektor $\mathbf{N}$ je určen jednoznačně až na znaménko a nazývá se vektor jednotkové normály k ploše $S$ v bodě $s$.*

*Je-li $\mathbf{p}$ mapa na $S$, pak je normálový vektor $\mathbf{N}$ jednoznačně předpisem*

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

*Dvě mapy pro tentýž bod mají stejnou jednotkovou normálu právě když determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě je kladný. V tom případě nazýváme tyto mapy souhlasně orientovanými. Pokud je determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě záporný, nazveme mapy opačně orientovanými.*

*Atlas plochy nazveme orientovaným atlasem, pokud jsou všechny jeho mapy po dvou souhlasně orientované. Orientovaná plocha $S$ je plocha s orientovaným atlasem.*

*Orientovatelná plocha je plocha, pro kterou existuje orientovaný atlas.*

Z definice je vidět, že dvě mapy jsou souhlasně orientované právě když jim odpovídající normály splývají. Bylo by tedy možné orientaci zadávat volbou normály v každém bodě. Museli bychom ovšem požadovat aby toto pole jednotkových normál rozumně (aspoň spojitě) záviselo na volbě bodu z plochy. Definice orientace pomocí orientovaného atlasu je tedy jednodušší, tento požadavek je implicitně obsažen v definici atlasu.

Zvolím-li si mapu na orientovatelné ploše, pak mohu vzít maximální orientovaný atlas jako sjednocení všech souhlasně orientovaných map s vybraným atlasem. Podobně lze vzít množinu všech opačně orientovaných map, které opět dohromady tvoří orientovaný atlas (ověřte!).

Na orientovatelné ploše tedy existují dva disjunktní orientované atlasy, které na ploše zadávají dvě různé (opačné) orientace. Na neorientovatelné ploše žádný orientovaný atlas neexistuje.
**Cvičení.**
1) Ukažte, že sféra $S^2$ je orientovatelná plocha. Najděte orientovaný atlas na sféře tak, aby orientace sféry byla dána v každém bodě vnější normálou (tj. normálou směřující ven z koule o poloměru 1).
2) Nechť $S$ je (nekonečný) válec $S = S^1 \times \mathbb{R}$. Najděte jeho orientovaný altas tak, aby orientace byla dána vnější normálou.
3) Möbiův list je plocha, která vznikne z proužku papíru slepením jeho konců, z nichž jeden překroutíme o 180 stupňů. Popište Möbiův list jako plochu $S$ vnořenou v $\mathbb{R}^3$ ukažte, že není orientovatelná.

## 4.4 Hladké zobrazení mezi plochami, tečné zobrazení.

**Definice 4.4.1** *Nechť $S$ a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a $F$ zobrazuje $S$ do $\tilde{S}$. Řekneme, že je zobrazení $F$ hladké v bodě $s \in S$, pokud existuje mapa $(U, \mathbf{p})$ na $S$ obsahující bod $s$ a mapa $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$ na $\tilde{S}$, obsahující bod $f(s)$ tak, že zobrazení $(\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ je hladké v bodě $(\mathbf{p})^{-1}(s)$.*

*Zobrazení $F$ je hladké na $S$, pokud je hladké v každém bodě $S$. Zobrazení $F$ je difeomorfismus $S$ na $\tilde{S}$, pokud je $F$ vzájemně jednoznačné a $F$ i $F^{-1}$ jsou hladké na svých definičních oborech.*

**Cvičení.** Rozmyslete si, že definice hladkosti v daném bodě je nezávislá na výběru map ve vzorech a obrazech.

**Definice 4.4.2** *Nechť $S$ a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a $F$ zobrazuje $S$ do $\tilde{S}$. Pak pro každý bod $s \in S$ definujeme* **tečné zobrazení**

$$T_sF : T_sS \to T_{f(s)}\tilde{S}$$

*následujícím předpisem:*

*je-li $\mathbf{c}$ na $(-\varepsilon, \varepsilon)$ regulární křivka, $\mathbf{c}(0) = s$ a $\dot{\mathbf{c}}(0) = \mathbf{v} \in T_sS$, pak definujeme*

$$T_sF(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(F \circ \mathbf{c})(0) \in T_{f(s)}\tilde{S}.$$

**Lemma 4.4.3** *1) Zobrazení $T_sF$ je dobře definované, tj. jeho hodnota nezávisí na výběry křivky, jejíž tečný vektor je vektor $s \in T_sS$.*
*2) Zobrazení $T_sF$ je lineární.*
*3) Pokud bod $s$ patří do mapy $(U, \mathbf{p})$ a bod $f(s)$ patří do mapy $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$, pak tyto mapy určují souřadnice vektorových prostorů $T_sS$ a $T_{f(s)}\tilde{S}$ a matice tečného zobrazení $T_sF$ vzhledem k těmto bazím je Jakobiho matice zobrazení $\bar{F} = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ v bodě $\mathbf{p}^{-1}(s)$.*

*Důkaz.*

Je-li $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(0)$, pak souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bazi $(\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2})$ v tečném prostoru $T_sS$ jsou složky vektoru $(\dot{d}_1, \dot{d}_2)$, kde $d = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{c}$, $d = (d_1, d_2)$.

Tedy

$$(F \circ \mathbf{c})(t) = (F \circ \mathbf{p})(d_1(t), d_2(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\left[(F \circ \mathbf{p}) \circ d\right](0) = \dot{d}_1 \frac{\partial}{\partial u_1}(F \circ \mathbf{p}) + \dot{d}_2 \frac{\partial}{\partial u_2}(F \circ \mathbf{p}).$$

Obraz $T_F(\mathbf{v})$ tedy závisí jen na souřadnicích vektoru $\mathbf{v}$, ne na volbě křivky $\mathbf{c}$ a zobrazení $T_F$ je zřejmě lineární.

Souřadnice obrazu $T_F(\mathbf{v})$ v bazi indukované mapou $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$ spočteme takto. Podle definice musíme vypočítat souřadnice obrazů bazových vektorů v $T_sS$ vůči bazi v $T_{F(s)}\tilde{S}$. První vektor $\mathbf{v} = \mathbf{p}_{u_1}$ je určen křivkou $d(t) = (t, 0)$ a jeho obraz je

$$T_sF(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial u_1}[F \circ \mathbf{p}_1] = \frac{\partial}{\partial u_1}[\tilde{\mathbf{p}} \circ \bar{F}] = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{u}_1}\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{u}_2}\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial u_1}.$$

Stejně se vypočte obraz druhého vektoru baze. □

## 4.5 Délky křivek na ploše, 1. fundamentální forma plochy.

Zkoumání dvourozměrných ploch a jejich zobrazování pomocí map bylo odedávna jednou z nejdůležitějších lidských činností. Snahou bylo zachytit pomocí mapy daný kus zemského povrchu co nejpřesněji. Nejlépe tak, aby se všechny vzdálenosti věrně zachovaly na mapě. Uvidíme časem, že to je úkol příliš těžký. V tuto chvíli se naučíme měřit vzdálenosti na ploše.

Je třeba odlišit vzdálenosti měřené na ploše od vzdáleností bodů v příslušném prostoru, které jsou dány obvyklým vzorcem z Eukleidovské geometrie. Vzdálenost dvou bodů na ploše je, podle definice, infimum délek všech křivek, které leží na ploše a spojují tyto dva body. První, co se tedy musíme naučit, je počítat délky křivek, které leží na ploše.

Abychom mohli počítat délky křivek na ploše, musíme umět počítat délky jejich tečných vektorů a jejich úhly. Tečné vektory ovšem leží v příslušných tečných prostorech, je tedy třeba definovat skalární součin na těchto tečných vektorech. Tradiční způsob, odpovídající naší geometrické intuici, je zúžit skalární součin v Eukleidovském třírozměrném prostoru (ve kterém je plocha vnořena) na příslušný tečný prostor. To vede k následující definici.

**Definice 4.5.1** *Je-li dána plocha $S$ a její bod $s \in S$, pak definujeme skalární součin $I_s = g_s$ na $T_sS$ jako restrikci Eukleidovského skalárního součinu $(.,.)$ v $\mathbb{R}^3$ :*

$$I_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

*Tato restrikce se nazývá* **první fundamentální forma** *plochy $S$ v bodě $s \in S$.*

Chceme-li délku křivky spočítat podle údajů na mapě, tj. pomocí údajů, které definují příslušnou parametrizaci plochy a údajů, které charakterizují zvolenou křivku, pak můžeme postupovat takto.

Předpokládejme, že je dána mapa $(U, \mathbf{p})$, kde $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in \mathcal{O}$. Je-li $d(t) = (u_1(t), u_2(t)), t \in I$ rovinná křivka, jejíž obraz leží v $\mathcal{O}$, pak $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ d$ je křivka na ploše $< \mathbf{p} >$ .

Délka $l$ křivky $\mathbf{c}$ je dána vztahem $l = \int_I |\dot{\mathbf{c}}| d\tau$. Integrand vypočítáme takto:

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{u_1}\mathbf{p}_{u_1} + \dot{u_2}\mathbf{p}_{u_2}; |\dot{\mathbf{c}}|^2 = g_{11}(\dot{u_1})^2 + 2g_{12}\dot{u_1}\dot{u_2} + g_{22}(\dot{u_2})^2,$$

kde jsme funkce $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ proměnných $u_1, u_2$ definovali pomocí vztahů

$$g_{11} = (\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_1});\ g_{12} = g_{21} = (\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2});\ g_{22} = (\mathbf{p}_{u_2}, \mathbf{p}_{u_2}).$$

V klasické literatuře se tradičně používalo označení

$$g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G.$$

To vede k následující základní definici.

**Definice 4.5.2** *Je-li $(U, \mathbf{p})$ mapa, pak se výraz*

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du_i\, du_j = E{du_1}^2 + 2F du_1 du_2 + G du_2^2$$

*tradičně nazývá první fundamentální forma plochy $S$ vyjádřená ve zvolených souřadnicích.*

*Matice*

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

*je pak maticí první fundamentální formy vůči bazi tečného prostoru odpovídající zvolené mapě. Pro libovolný vektor $A = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ definujeme hodnotu $I(A)$ první fundamentální formy*

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

**Poznámka.**

Předchozí výpočet ukazuje, že pokud počítáme délku křivky ve zvolených souřadnicích, stačí nám znát první fundamentální formu $I$, resp. její koeficienty $E, F, G$ vzhledem ke zvoleným souřadnicím. Množina $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ je tedy model pro plochu a první fundamentální forma $I$ umožnuje v tomto modelu počítat délky (resp. úhly nebo plochy).

**Příklad 4.5.3** *(1) Pokud je* $\mathbf{p} = \mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ *parametrizace roviny, pak* $\mathbf{p}_u = \mathbf{b}, \mathbf{p}_v = \mathbf{c}$ *a tedy*

$$E = |\mathbf{b}|^2,\ F = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},\ G = |\mathbf{c}|^2.$$

*Pokud* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, *pak* $F = 0$. *Pokud* $|\mathbf{b}| = \mathbf{c}| = 1$, *pak* $E = G = 1$.
*(2) Jsou-li* $\theta, \varphi$ *obvyklé sférické souřadnice na jednotkové sféře, pak* $E = 1, F = 0$ *a* $G = \cos^2\theta$.
*(3) Zvolte si parametrizaci válce a spočítejte si tvar první fundamentální formy pro válec.*
*(4) Parametrický popis standardního kuželu je*

$$\mathbf{p}(v, \varphi) = (v\cos\varphi, v\sin\varphi, v);\ v \in (0, 1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

*Příslušná první fundamentální forma je rovna* $2dv^2 + v^2 d\varphi^2$.

# Kapitola 5

# Druhá fundamentální forma plochy.

## 5.1 Gaussovo zobrazení, Weingartnerovo zobrazení.

**Definice 5.1.1** *Označme symbolem $S_2$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$. Předpokládejme, že $S$ je plocha a $N : S \to S_2$ je hladké zobrazení, které každému bodu $s \in S$ přiřadí jednotkovou normálu $N(s) \in S_2$. Zobrazení $N$ je tedy (spojité) pole jednotkových normál na ploše $S$.*

*Pak v každém bodě $s \in S$ existuje tečné zobrazení*

$$T_s N : T_s\, S \to T_{N(s)}\, S_2.$$

*Vzhledem k tomu, že oba tečné prostory $T_s\, S$ a $T_{N(s)}\, S_2$ jsou kolmé na normálu $N(s)$, musí platit $T_s\, S = T_{N(s)}\, S_2$. Tedy můžeme zobrazení $T_s\, N$ považovat za zobrazení z $T_s\, S$ do sebe.*

*Lineární zobrazení*

$$W_s := -T_s\, N : T_s\, S \to T_s\, S$$

*budeme nazývat Weingartenovo zobrazení.*

**Definice 5.1.2** *Předpokládejme, že $S$ je plocha a $N : S \to S_2$ je hladké zobrazení zadávající jednotkovou normálu v každém bodě $S$.*

*Druhá fundamentální forma $II_s$ plochy $S$ v bodě $s \in S$ je bilineární forma na $T_s\, S$ zadaná předpisem*

$$II_s(X, Y) := I_s(W_s(X), Y);\ X, Y \in T_s\, S.$$

*Pro jednoduchost budeme často index $s$ pro první a druhou fundamentální formu vynechávat a psát jenom $I$ nebo $II$.*

Druhá fundamentální forma je tedy bilineární forma na tečných prostorech. Následující lemma říká, že je to symetrická bilineární forma a jak se vypočítá v lokálních souřadnicích.

**Lemma 5.1.3** *Weingartnerovo zobrazení je samoadjungované, tedy druhá fundamentální forma je symmetrická bilineární forma. To znamená, že pro všechny $X, Y \in T_s\, S$ platí*

$$II(X,Y) = I(W(X),Y) = I(X, W(Y)) = II(Y,X).$$

*Je-li $(U, \mathbf{p})$ mapa na $S$ obsahující bod $s \in S$, pak má druhá fundamentální forma v lokálních souřadnicích daných bazí $\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2}$ tvar*

$$II(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\alpha_i\beta_j,$$

*kde*

$$h_{ij} = \left(\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u_i \partial u_j}, N\circ\mathbf{p}\right),\ \mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{p}_{u_1} + \alpha_2\mathbf{p}_{u_2},\ \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{p}_{u_1} + \beta_2\mathbf{p}_{u_2}.$$

*Důkaz.*

Nejdříve si rozmyslíme, jaký tvar má druhá fundamentální forma v lokálních souřadnicích. Připomeňme si, že tečné zobrazení $T_s\Phi$ k hladkému zobrazení $\Phi : S \to \tilde{S}$ je definováno nasledujícím způsobem. Uvažujme vektor $\mathbf{v}$ v tečném prostoru $T_sS$. Pak existuje křivka $\mathbf{c}$ v ploše $S$ pro kterou $\mathbf{c}(0) = s$ a $\frac{d}{dt}\mathbf{c}(0) = \mathbf{v}$. Obrazem $T_s\Phi(\mathbf{v})$ je pak tečný vektor $\frac{d}{dt}(\Phi\circ\mathbf{c})(0)$. V našem případě chceme najít obraz $T_sN(\mathbf{p}_{u_1})$. Předpkládejme, že $\mathbf{p}(u_1,u_2) = s$. Vektor $\mathbf{p}_{u_1} \in T_s\, S$ je tečný ke křivce $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u_1 + t, u_2)$ v bodě $s$. Obraz $T_sN(\mathbf{p}_{u_1})$ je tedy podle definice tečný ke křivce $N\circ\mathbf{c}(t)$. Tedy

$$T_sN(\mathbf{p}_{u_1}) = \frac{\partial}{\partial u_1}(N\circ\mathbf{p}).$$

Dostaneme tedy

$$W(\mathbf{p}_{u_1}) = -T_sN(\mathbf{p}_{u_1}) = -\frac{\partial}{\partial u_1}(N\circ\mathbf{p});\ W(\mathbf{p}_{u_2}) = -T_sN(\mathbf{p}_{u_2}) = -\frac{\partial}{\partial u_2}(N\circ\mathbf{p}).$$

Derivací vztahu

$$(\mathbf{p}_{u_i}, N\circ\mathbf{p}) = 0$$

který platí ve všech bodech plochy, dostaneme

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_j}(\mathbf{p}_{u_i}, N\circ\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u_i\partial u_j}, N\circ\mathbf{p}\right) - (\mathbf{p}_{u_i}, W(\mathbf{p}_{u_j})).$$

Tedy

$$h_{ij} = \left(\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u_i\partial u_j}, N\circ\mathbf{p}\right)$$

je matice druhé fundamentální formy vzhledem k bazi $\{\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2}\}$.

Symetrie druhé fundamnetální formy plyne z jejího vyjádření v lokálních souřadnicích a ze záměnnosti druhých parciálních derivací.

□

V lokálních souřadnicích daných mapou $(U, \mathbf{p})$ značíme obvykle matici 1. fundamentální formy symbolem $G = (g_{ij})$, matici 2. fundamentální formy symbolem $H = (h_{ij})$ , a matici Weingartnerova zobrazení symbolem $W = (w_{ij})$. Z definice 2. fundamentální formy pak dostaneme (v daných souřadnicích) vztah

$$H = G \cdot W;\ W = G^{-1} \cdot H.$$

Často se druhá fundamentální forma plochy píše v symbolickém tvaru jako kvadratická forma

$$Ldu_1^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2^2;\ L = h_{11}, M = H_{12} = h_{21}, N = h_{22},$$

Diferenciály $du_1, du_2$ jsou formální výrazy, které nemají samostatný význam a označují jen proměnné v příslušné kvadratické formě.

Dá se odvodit, že druhá fundamentální forma na tečném prostoru se nemění při změně parametrizace, která zachovává orientaci (a tedy nemění $\mathbf{N}$). Na rozdíl od první fundamentální formy, která na parametrizaci zřejmě nezávisí, mění druhá fundamentální forma znaménko při parametrizaci, která mění orientaci. Druhá fundamentální forma se také nemění, pokud plochu v prostoru posuneme nebo otočíme. Obě tyto tvrzení lze dokázat přímo výpočtem změny formy $II$ při změně orientace nebo při složení parametrizace se shodností (je to užitečné domácí cvičení!). Až si uvedeme geometrickou interpretaci formy $II$ pomocí křivosti normálových řezů plochy, odvodíme tuto nezávislost na parametrizaci jiným způsobem.

**Příklad 5.1.4** *(1)*

*Ihned z definice plyne, že rovina má druhou fundamentální formu triviální. Je-li $\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$ její parametrizace, je zřejmě $\mathbf{p}_{uu} = \mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vv} = 0$.*

*(2) Rotační plocha.*

*Předpokládejme, že je dána regulární parametrická křivka $x = f(s), z = g(s), s \in I$ v polorovině $z > 0$, t.j. předpokládejme, že $g(t) > 0$. Předpokládejme také, že jde o parametrizaci obloukem $(f'^2 + g'^2 = 1)$.*

*Rotační plocha je dána mapou*

$$\mathbf{p}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u));\ (u, v) \in I \times (0, 2\pi),$$

*resp. podobnou mapou pro $v \in (\pi, 3\pi)$. Pak*

$$\mathbf{p}_u(u, v) = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)),\ \mathbf{p}_v(u, v) = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0),$$

$$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = (-fg'\cos v, -fg'\sin v, ff'),\ \mathbf{N} = (-g'\cos v, -g'\sin v, f');$$

$\mathbf{p}_{uu}(u,v) = (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)), \mathbf{p}_{uv}(u,v) = (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0),$

$$\mathbf{p}_{vv}(u,v) = (-f\cos v, -f\sin v, 0).$$

*Protože* $E = f'^2 + g'^2 = 1$, $F = 0$, $G = f^2$ *má první fundamentální forma tvar* $I(\alpha,\beta) = \alpha^2 + f^2\beta^2$. *Dále,* $L = -f''g' + g''f'$, $M = 0$, $N = fg'$, *tedy*

$$II(\alpha,\beta) = (-f''g' + g''f')\alpha^2 + fg'\beta^2.$$

*(3) Mezi speciální případy rotační plochy patří případy sféry:*

$$f = \cos u, g = \sin u;\ II(\alpha,\beta) = \alpha^2 + \cos^2 u\beta^2;$$

*a válce*

$$f = 1, g = u;\ II(\alpha,\beta) = \beta^2.$$

### 5.1.1 Normálová křivost, normálové řezy.

Zvolme bod $s$ plochy $S$ a jednotkový tečný vektor $\mathbf{v} \in T_P S$, $|\mathbf{v}| = 1$. Jednotková normála $\mathbf{N}$ určuje spolu s vektorem $\mathbf{v}$ rovinu $R$, která protíná plochu $S$ v křivce $\mathbf{c}$. Tuto křivku nazveme normálovým řezem ve směru $\mathbf{v}$.

Předpokládejme, že je $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizovaná obloukem tak, že $\mathbf{c}(0) = P, \mathbf{t} = \mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$. Frenetovu bazi v bodě $P$ označíme $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Pro křivost $\kappa$ křivky $\mathbf{c}$ v bodě $P$ platí

$$\mathbf{c}''(0) = \kappa\mathbf{n},\ \kappa = \mathbf{c}''(0)\cdot\mathbf{n}.$$

Protože křivka $\mathbf{c}$ leží v rovině $R$, je zřejmě $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$. Zvolme mapu $\mathbf{p}(u,v)$ na $S$, jejíž obraz obsahuje bod $P$ a pro kterou $\mathbf{N} = \mathbf{n}$.

Protože křivka $\mathbf{c}$ leží na ploše $S$, existují funkce $u_1 = u_1(s), u_2 = u_2(s)$ takové, že $\mathbf{c}(s) = \mathbf{p}(u_1(s), u_2(s))$. Pak

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{p}_{u_1}u_1' + \mathbf{p}_{u_2}u_2';$$

$$\mathbf{c}'' = \mathbf{p}_{u_1u_1}(u_1')^2 + 2\mathbf{p}_{u_1u_2}u_1'u_2' + \mathbf{p}_{u_2u_2}(u_2')^2 + \mathbf{p}_{u_1}u_1'' + \mathbf{p}_{u_2}u_2'';$$

$$\mathbf{c}''\cdot\mathbf{N} = II(u_1', u_2').$$

To vede k následující definici.

**Definice 5.1.5** *Uvažujme regulární parametrickou plochu* $S$, *parametrizovanou zobrazením* $\mathbf{p}$ *a její bod* $s$. *Normálovou křivost* $\kappa_n(\mathbf{v})$ *ve směru* $v \in T_sS, |\mathbf{v}| = 1$ *definujeme vztahem*

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = II(\mathbf{v},\mathbf{v}) = h_{11}\alpha_1^2 + 2h_{12}\alpha_1\alpha_2 + h_{22}\alpha_2^2,$$

*kde* $(\alpha_1, \alpha_2)$ *jsou souřadnice vektoru* $\mathbf{v}$, *tj.* $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{p}_u + \alpha_2\mathbf{p}_v$.

Z výpočtu před definicí plyne ihned, že normálová křivost $\kappa_n(\mathbf{v})$ je rovna, až na znaménko, křivosti normálového řezu ve směru $\mathbf{v}$. Rovnost platí, pokud $\mathbf{N} = \mathbf{n}$; křivosti jsou opačné, pokud $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$.

Z této geometrické interpretace druhé fundamentální formy plyne nezávislost této formy na změně parametrizace, která zachovává orientaci. Je také vidět, že druhá fundamentální forma mění znaménko, pokud změna parametrizace mění orientaci. Navíc je zřejmé, že posunutí nebo otočení plochy nemění druhou fundamentální formu.

### 5.1.2 Hlavní křivosti, hlavní směry.

Normálová křivost $\kappa_n(\alpha_1, \alpha_2) = II(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ je spojitá funkce na jednotkové kružnici v $\mathbb{R}^2$. Nabývá tedy svého maxima i minima. Hodnoty těchto extrémů a směry ve kterých se nabývají, jsou důležité geometrické informace o dané ploše.

**Definice 5.1.6** *Řekneme, že jednotkový tečný vektor* $\mathbf{v}$ *je hlavní směr plochy* $S$ *v bodě* $s \in S$, *pokud je to směr, ve kterém se nabývá extrém normálové křivosti* $\kappa_n$ *v bodě* $s$. *Odpovídající hodnota normálové křivosti se nazývá hlavní křivost.*

**Věta 5.1.7**
*(1) Předpokládejme, že číslo* $\lambda$ *je hlavní křivost plochy v bodě* $s \in S$ *a* $(U, \mathbf{p})$ *je mapa v okolí bodu* $s$. *Pak pro matice* $G$, *resp.* $H$ *první, resp. druhé fundamentální formy v bodě* $s$ *vzhledem k dané mapě platí*

$$\det \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = \det(H - \lambda G) = 0.$$

*Hlavní směry jsou pak řešení rovnice*

$$\begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (H - \lambda G) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*(2) Hlavní směry, resp. hlavní křivosti, jsou vlastní vektory, resp. vlastní čísla Weingartenovy matice*

$$W = G^{-1} H.$$

*Důkaz.*
(1) Vázané extrémy funkce $\kappa_n$ najdeme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Snadno se zjistí, že

$$\nabla I(\alpha_1, \alpha_2) = 2G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; \; \nabla II(\alpha_1, \alpha_2) = 2H \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Je-li $(\alpha_1, \alpha_2)$ kritický bod $\kappa_n$, pak

$$(H - \lambda G)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Rovnice pro hlavní křivosti je pak

$$\det(H - \lambda G) = 0.$$

(2) Tvrzení plyne z rovnosti

$$H - \lambda G = G\left(W - \lambda \mathbb{I}\right),$$

kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice. $\square$

Normálová křivost $\kappa_n$ plochy $S$ v bodě $s \in S$ je funkce definovaná na množině všech jednotkových vektorů v tečném prostoru $T_s S$ a nezávisí na volbě mapy v okolí bodu $s$. Tedy i hlavní křivosti a hlavní směry plochy $S$ v bodě $s \in S$ nezávisí na výběru mapy. Obvykle je ale počítáme ve vhodně zvolených souřadnicích, pomocí matic $G$ a $H$ první a druhé fundamentální formy vzhledem ke zvolené mapě $(U, \mathbf{p})$.

**Věta 5.1.8** *Nechť $G$ a $H$ jsou matice 1. a 2. fundamentální formy plochy $S$ v bodě $s \in S$ vzhledem k mapě $(U, \mathbf{p})$.*
*(1) Rovnice $\det(H - \lambda G) = 0$ pro hlavní křivosti je kvadratická rovnice, která má reálné kořeny $\kappa_1, \kappa_2$.*
*(2) Pokud je kořen dvojnásobný ($\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$), pak $H = \kappa G$ a každý jednotkový vektor je hlavní vektor. Bod, kde toto platí, nazveme kruhovým bodem. Pokud navíc $\kappa = 0$, pak bod nazveme planárním bodem plochy.*
*(3) Je-li $\kappa_1 \neq \kappa_2$, pak odpovídající hlavní vektory $A_1, A_2 \in T_s S$ jsou na sebe kolmé, tj. $I(A_1, A_2) = 0$.*

*Důkaz.*
(1) Normálová křivost $\kappa_n$ je spojitá funkce, má tedy maximum a minimum na kružnici jednotkových vektorů a tyto globální extrémy jsou reálná čísla.
(2) Pokud $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$, pak zřejmě $H$ je konstantní násobek $G$ a tato konstanta je $\kappa$.
(3) Tato část je důsledkem obecné vlastnosti, že vlastní vektory pro různá vlastní čísla jsou na sebe kolmé. $\square$

## 5.2 Gaussova a střední křivost.

**Definice 5.2.1** *Jsou-li $\kappa_1, \kappa_2$ hlavní křivosti plochy $S$ v bodě $s \in S$, pak definujeme:*
*(1) Gaussovu křivost $K(s) := \kappa_1 \kappa_2$.*
*(2) Střední křivost $H(s) := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.*

**Věta 5.2.2** *Jsou-li $G$, resp. $H$ matice první, resp. druhé fundamentální formy plochy $S$ v bodě $s \in S$ vzhledem k mapě $(U, \mathbf{p})$, a $W$ je matice Weingartnerova zobrazení v tomto bodě, pak:*
*(1)*

$$K(s) = \det W = \frac{\det H}{\det G};$$

*(2)*

$$H(s) = \frac{1}{2}\,Tr(W) = \frac{g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}}{2\det G},$$

*kde $\mathrm{Tr}\, W$ označuje stopu matice $W$;*
*(3)*

$$\kappa_{1,2} = H(s) \pm \sqrt{H(s)^2 - K(s)}.$$

*Důkaz.*
Rovnice pro $\kappa_{1,2}$ má tvar

$$\det(H - \lambda\, G) = \det G \det(W - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0.$$

kde $W = G^{-1} \cdot H$. Tedy platí

$$\det G(\kappa^2 - \kappa\; Tr\; W + \det W) = 0.$$

Stačí tedy dosadit do vzorců pro řešení kvadratické rovnice. Ze vztahu

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -G_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

plyne, že $Tr\; W = g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}$. □

Všimněte si, že $K$ a $H$ jsou základní symmetrické polynomy v proměnných $\kappa_1, \kappa_2$.

**Příklad 5.2.3** *(1) Jednotková sféra má hlavní křivosti $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, tedy $K = H = 1$ všude.*
*(2) Válec nad jednotkovou kružnicí má hlavní křivosti $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 0$, tedy $K = 0$ a $H = \frac{1}{2}$ všude.*
*(3) Pro rovinu platí $\kappa_1 = \kappa_2 = 0 = K = H$ všude.*
*(4) Pro rotační plochu*

$$\mathbf{p}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u));\; \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1, f > 0$$

*platí*

$$E = 1, F = 0, G = f^2;\; L = \dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g}, M = 0, N = f\dot{g}.$$

*Ze vztahu $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ plyne, že $\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} = 0$. Pak*

$$K = \frac{(\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g})f\dot{g}}{f^2} = \frac{-\ddot{f}f}{f^2} = \frac{-\ddot{f}}{f}.$$

### 5.2.1 Geometrická interpretace hlavních křivostí.

Nyní si chceme rozmyslet, co říkají znaménka hlavních křivostí o geometrickém tvaru příslušné plochy. Uvažme plochu $S$ a vyšetřujme ji v okolí zvoleného bodu $s \in S$. Odpovídající plochu můžeme, beze změny geometrických vlastností posunout a otočit. Posuneme ji tedy tak, aby zvolený bod $s$ ležel v počátku a aby tečná rovina v počátku byla kolmá na osu $z$.

Hlavní směry jsou na sebe kolmé a jednotkové, můžeme tedy také otočením plochy dosáhnout toho, že hlavní směry mají tvar $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$.

Zvolím-li nyní mapu $(U, \mathbf{p})$ obsahující bod $s$ tak že $\mathbf{p}(0, 0) = s$, pak tečné zobrazení $T_{(0,0}\mathbf{p}$ zobrazuje $\mathbb{R}^2$ prostě na $T_s\, S$. Podle věty o inverzním zobrazení mohu tedy najít novou parametrizaci, definovanou na otevřené podmnožině v $T_sS = \mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0)\}$ a plocha $S$ je pak v okolí počátku graf funkce $z = f(x, y)$.

Vezmu-li za ortonormální bazi $T_sS$ hlavní vektory $A_1, A_2$, pak pro parametrizaci $\mathbf{p}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ v souřadnicích daných touto bazí platí $\mathbf{p}_x = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{p}_y = (0, 1, 0)$. První fundamentální forma $S$ vzhledem k této mapě je tedy jednotková matice.

Do druhého řádu má funkce $f$ tvar

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2).$$

Matice 2. fundamentální formy je diagonální matice která má na diagonále hlavní křivosti $\kappa_1, \kappa_2$. Dostáváme tedy v nových souřadnicích vztah

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\kappa_1\, x^2 + \kappa_2\, y^2\right).$$

Nyní mohou nastat čtyři různé případy.

(1) $\kappa_1$ a $\kappa_2$ jsou obě různá od nuly a mají stejná znaménka; pak graf funkce $f(x, y)$ je parabolický elipsoid, jeho rovnice má (pro vhodnou volbu konstant) tvar

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right).$$

(2) $\kappa_1$ a $\kappa_2$ jsou obě různá od nuly a mají opačná znaménka; pak graf funkce $f(x, y)$ je parabolický hyperboloid, jeho rovnice má (pro vhodnou volbu konstant) tvar

$$z = \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}.$$

(3) Jedna z hlavních křivostí je nula, druhá je různá od nuly; pak graf funkce $f(x, y)$ je parabolický válec, jeho rovnice má (pro vhodnou volbu konstant) tvar

$$z = \pm\frac{x^2}{p^2}.$$

(4) Obě hlavní křivosti jsou nula. Pak jde o planární body plochy a o tvaru plochy nejde nic říct, tvar závisí na chování Taylorova rozvoje třetího, resp. vyššího, řádu.

### 5.2.2 Theorema egregium

Mezi velké Gaussovy objevy patří fakt, že Gaussova křivost $K$ má nečekanou a velmi důležitou vlastnost - závisí jen na první fundamentální formě plochy. Není pravda, že by se všechny koeficienty druhé fundamentální formy daly vypočítat pomocí první fundamentální formy. Ani normálová, ani střední křivost nezávisí jen první fundamentální formě. Jen specifická kombinace koeficientů formy $II$ se dá vypočítat pomocí $E, F, G$ a jejich parciálních derivací. Gauss sám si této věty tak cenil, že ji pojmenoval Theorema egregium (tj. pozoruhodná, skvělá věta).

**Věta 5.2.4 (Theorema egregium.)** *Gaussova křivost $K$ se dá vypočítat pomocí koeficientů první fundamentální formy a jejich derivací.*

*Přesný vzorec pro tuto závislost je*

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}.$$

Je vidět, že formule pro Gaussovu křivost pro obecnou parametrizaci je složitá a její (přímočarý) důkaz je dlouhý a únavný. Pochopitelný a přehledný začne být teprve, pokud se zavedou a začnou používat adekvátní geometrické pojmy (kovariantní derivace a její křivost). To v čase vymezeném této přednášce udělat nelze. Ukážeme si tedy zanedlouho důkaz Gaussovy věty pomocí speciálních souřadnic (důkaz, že takovéto souřadnice lze zavést na každé ploše, může zájemce najít v Apendixu).

V Gaussově větě není podstatný přesný tvar složité závislosti křivosti $K$ na koeficientech $E, F, G$. Klíčovým faktem je, že je možné vyjádřit křivost $K$ pomocí koeficientů první kvadratické formy a jejich derivací. Z toho pak plyne okamžitě Důsledek 5.2.5. To je velmi důležitá informace.

**Důsledek 5.2.5** *Pokud jsou dvě plochy isometrické, pak mají stejnou Gaussovu křivost.*

Od mapy bychom zajisté chtěli, aby věrně zobrazovala zemský povrch. Pokud je povrch zeměkoule část sféry, chci tuto část zobrazit věrně, se zachováním vzdáleností, na část roviny. Pokud se pokusíme zabalit kouli do papíru, papír se pomačká. Je možné tedy odhadnout, že nebude existovat isometrie mezi částí sféry a částí roviny.

Předchozí Důsledek to potvrzuje, sféra má Gaussovu křivost rovnu 1 a rovina má Gaussovu křivost 0. Mezi nimi tedy žádná isometrie existovat nemůže. Je možné tedy zformulovat následující heuristické tvrzení.

**Věta 5.2.6** *Každá mapa je špatná. (Přesněji, každá rovinná mapa zkresluje vzdálenosti.)*

Ukážeme si tedy důkaz Gaussovy věty pomocí speciálních souřadnic (důkaz, že takovéto souřadnice lze zavést na každé ploše může zájemce najít v Apendixu).

Nejdříve si dokážeme drobnou poznámku o vlastnostech derivací normály k ploše.

**Lemma 5.2.7** *Pro každý bod plochy existují čísla $a, b, c, d$, pro které platí*

$$\mathbf{N}_u = a\,\mathbf{p}_u + b\,\mathbf{p}_v,\ \mathbf{N}_v = c\,\mathbf{p}_u + d\,\mathbf{p}_v. \tag{5.2.1}$$

*a tedy*

$$\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v = (a\,d - b\,c)\,\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v.$$

*Pro Gaussovu křivost $K$ v tomto bodě pak platí*

$$K = a\,d - b\,c$$

*Důkaz.*

Normála $\mathbf{N}$ má jednotkovou délku, tedy její derivace podle $u$ a $v$ musí být kolmé na $\mathbf{N}$, a leží tedy v tečném prostoru v daném bodě. Z toho ihned plyne existence čísel $a, b, c, d$, i následující rovnost pro vektorový součin.

Z kolmosti $\mathbf{N}$ na $\mathbf{p}_u$ a $\mathbf{p}_v$ plyne derivací alternativní definice koeficientů druhé fundamentální formy

$$L = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{uu} = -\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{p}_u,\ M = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{vu} = -\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{p}_v,$$

$$N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{vv} = -\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{p}_v$$

a po dosazení ze vztahů 5.2.1 dostaneme

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Z toho ihned plyne tvrzení lemmatu. □

**Věta 5.2.8** *Předpokládejme, že $S$ je plocha v $\mathbb{R}^3$ s parametrizací $\mathbf{p}$, pro kterou má první fundamentální forma tvar $du^2 + G(u,v)\,dv^2$.*

*Pak platí*

$$K = \frac{-(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

*Důkaz.*

Pro každý bod $(u, v) \in O$ si vybereme vhodnou (adaptovanou) ortonormální bazi v $\mathbb{R}^3$ takto:

$$e = \mathbf{p}_u, f = \frac{1}{\sqrt{G}}\mathbf{p}_v, \mathbf{N}.$$

Vektory $e$ a $f$ jsou jednotkové, tedy derivací podle $u$ a $v$ vidíme, že pro vhodná čísla $\alpha, \alpha', \beta, \beta', a, b, c, d$ musí platit

$$e_u = \alpha\, f + a\,\mathbf{N},\ e_v = \beta\, f + b\,\mathbf{N}. \tag{5.2.2}$$

a

$$f_u = -\alpha'\, e + c\,\mathbf{N},\ f_v = -\beta'\, e + d\,\mathbf{N}. \tag{5.2.3}$$

Informace o jednotlivých koeficientech dostaneme postupně pomocí vhodných skalárních součinů.

Ze vztahu $e \cdot f = 0$ dostaneme

$$e_u \cdot f + e \cdot f_u = 0,\ e_v \cdot f + e \cdot f_v = 0.$$

Z těchto vztahů plyne, že $\alpha' = \alpha = e_u \cdot f$, $\beta' = \beta = e_v \cdot f$. Navíc

$$\alpha = e_u \cdot f = \frac{1}{\sqrt{G}}\mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{p}_v =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}}(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)_u - \frac{1}{2\sqrt{G}}(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)_v = 0$$

a

$$\beta = e_v \cdot f = \frac{1}{\sqrt{G}}\mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{p}_v = \frac{1}{2\sqrt{G}}G_u = (\sqrt{G})_u.$$

Podobně,

$$a\,d - b\,c = e_u \cdot f_v - f_u \cdot e_v = -\beta_u + 0 = -(\sqrt{G})_{uu}.$$

Pro koeficienty $a, b, c, d$ platí

$$a = \mathbf{N} \cdot e_u = -\mathbf{N}_u \cdot e;\ b = \mathbf{N} \cdot e_v = -\mathbf{N}_v \cdot e;$$

$$c = \mathbf{N} \cdot f_u = -\mathbf{N}_u \cdot f;\ d = \mathbf{N} \cdot f_v = -\mathbf{N}_v \cdot f.$$

Tedy $-\mathbf{N}_u = a\,e + b\,f$, $-\mathbf{N}_v = c\,e + d\,f$ a

$$\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v = (a\,d - b\,c)e \times f = \frac{a\,d - b\,c}{\sqrt{G}}\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v.$$

Podle předchozího lemmatu je tedy

$$K = \frac{a\,d - b\,c}{\sqrt{G}} = \frac{-(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

□

### 5.2.3 Zobrazení, která zachovávají velikost plochy.

Nejdříve se naučíme, jak se počítá velikost povrchu (části) plochy pomocí integrálu. Je-li $S$ plocha v Eukleidovském prostoru a je-li $f$ funkce na $S$ pak integrál funkce $f$ přes plochu $S$ se značí $\int_S f\,dS$ a fyzikové mu obvykle říkají plošný integrál prvního druhu. Definice plošného integrálu prvního a druhého druhu je obsažena v každé slušné učebnici kalkulu (i když asi ne v obecnosti, kterou bychom si přáli). Pokud jste se plošný integrál dosud nenaučili, musíme teď chvíli strávit s jeho definicí. Velikost $P(S)$ plochy $S$ je pak dána vzorcem $P(S) = \int_S 1\,dS$.

**Definice 5.2.9** *Je-li $f$ hladká funkce na ploše $S$ a je-li $S$ pokryto jedinou mapou $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$, pak definujeme integrál z $f$ přes plochu $S$ vzorcem*

$$\int_S f\,dS = \int_{\mathcal{O}} f|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|du\,dv = \int_{\mathcal{O}} f\sqrt{EG - F^2}du\,dv.$$

*Předpokládejme, že je možné $S$ napsat jako disjunktní sjednocení*

$$S =< \mathbf{p}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{p}_j > \cup < \mathbf{c}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{c}_l >,$$

*kde $\mathbf{p}_i$ jsou mapy na plochách $S_i =< \mathbf{p}_i >, i = 1, \ldots, k$ a $\mathbf{c}_j, j = 1, \ldots, l$ jsou regulární křivky. Pak definujeme*

$$\int_S f\,dS = \sum_1^k \int_{S_i} f\,dS$$

Ve všech standardních případech, kdy potřebujeme integrovat přes plochy, není těžké najít vhodný rozklad plochy na několik otveřených částí, které se dají pokrýt jednou mapou a zbytkem, který se vejde od jedné, nebo více křivek. U sféry lze vynechat jednu polokružnici a severní a jižní pól,zbytek je obraz otevřeného dvourozměrného intervalu při standardních sférických souřadnicích. Podobně je tomu u válce či toru.

**Věta 5.2.10** *Integrál $\int_S f\,dS$ nezávisí ani na rozkladu plochy $S$, ani na volbě parametrizací $\mathbf{p}_i$.*

*Důkaz.*

Připomeňme si nejprve, že plocha rovnoběžníka v $\mathbb{R}^3$, jehož hrany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ je rovna

$$|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| = \sqrt{\det(g_{ij})};\ g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j;\ i, j = 1, 2.$$

Rovnost obou výrazů plyne ze vztahu

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

dosazením $\mathbf{c} = \mathbf{a}, \mathbf{d} = \mathbf{b}$. Pro případ $\mathbf{a} = \mathbf{p}_u, \mathbf{b} = \mathbf{p}_v$ dostaneme determinant rovný $EG - F^2$.

Nejdříve si ukážeme, že plošný integrál nezávisí na výběru map. Předpokládejme, že máme dvě parametrizace $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ takové, že $< \mathbf{p}_1 > = < \mathbf{p}_2 >$ . Pak víme, že existuje změna parametrizace

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) = \Phi(u,v)$$

taková, že $\mathbf{p}_1(u,v) = \mathbf{p}_2(\Phi(u,v))$. Z toho plyne

$$(\mathbf{p}_1)_u \times (\mathbf{p}_1)_v = (\det J_\Phi)(\mathbf{p}_2)_{\tilde{u}} \times (\mathbf{p}_2)_{\tilde{v}},$$

kde $J_\Phi$ je Jacobiho matice zobrazení $\Phi$.

Je-li $\mathbf{p}$ definováno na $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ a $\tilde{\mathcal{O}} = \Phi(\mathcal{O})$, pak podle věty o substituci platí

$$\int_{\mathcal{O}} |(\mathbf{p}_1)_u \times (\mathbf{p}_1)_v| du\, dv = \int_{\mathcal{O}} |(\det J\Phi)||(\mathbf{p}_2)_{\tilde{u}} \times (\mathbf{p}_2)_{\tilde{v}}| du\, dv =$$

$$= \int_{\tilde{\mathcal{O}}} |(\mathbf{p}_2)_{\tilde{u}} \times (\mathbf{p}_2)_{\tilde{v}}| d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$$

Dále si ukážeme, že výsledný integrál nezávisí na rozdělení plochy na otevřené části, které jsou obrazy map. Předpokládejme, že máme dvě taková rozdělení

$$S = < \mathbf{p}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{p}_j > \cup < \mathbf{c}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{c}_l >,$$

$$S = < \mathbf{p}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{p}'_j > \cup < \mathbf{c}_1 > \cup \ldots \cup < \mathbf{c}'_l > .$$

Pak si najdeme společné zjemnění, kde za otevřené části vezmeme všechny průniky

$$S_{ii'} := S_i \cap S_{i'},\ i = 1, \ldots, j,\ i' = 1, \ldots, j'$$

a doplníme je do celé plochy vhodnými obrazy křivek (to zřejmě jde). Stačí nyní ukázat, že

$$\sum_{i=1}^{j} \int_{S_i} f dS = \sum_{i=1, i'=1}^{j,j'} \int_{S_{ii'}} f dS.$$

Ale pro to stačí si uvědomit, že plocha $S_i$, přes kterou integrujeme se rozloží na disjunktní sjednocení průniků $S_i \cap S_{i'}$, $i' = 1, \ldots, j'$ a několika obrazů křivek. Pokud podle definice převedeme integrál přes $S_i$ na integrál přes otevřenou množinu $\mathcal{O}'_i \subset \mathbb{R}^2$ z hladké funkce, pak stačí si uvědomit, že vzor křivek v rozkladu při parametrizaci dané mapou jsou opět obrazy hladkých křivek v $\mathbb{R}^2$ a že mají tedy míru nula. Integrál přes ně je tedy nulový a zbytek plyne z aditivity integrálu. $\square$

**Definice 5.2.11** *Řekneme, že hladké zobrazení $f : S_1 \to S_2$ mezi dvěma plochami zachovává velikost povrchů, pokud pro každou mapu $(U, \mathbf{p})$ plochy $S_1$ (pro kterou je $\int_U 1\,dS$ konečný) platí, že*

$$\int_U 1\,dS = \int_{f(U)} 1\,dS. Tedyvelikostipovrchodpovdajcchplochvevzorechaobrazechmusbtstejn.$$

**Věta 5.2.12** *Hladké zobrazení $f : S_1 \to S_2$ mezi dvěma plochami zachovává velikost povrchů, právě když pro koeficienty $E_1, F_1, G_1$ první fundamentální formy parametrizace $\mathbf{p}$ a koeficienty $E_2, F_2, G_2$ první fundamentální formy parametrizace $f \circ \mathbf{p}$ plochy $S_2$ vztah*

$$E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2.$$

*Důkaz.*

Důkaz se provede stejně jako důkaz nutné a postačující podmínky pro isometrii. Je zřejmé, že vztah ve větě zaručuje, že odpovídající integrály (a tedy i odpovídající velikosti ploch) vzoru a obrazu při zobrazení $f$ budou stejné. □

Následující větu objevil slavný řecký matematik Archimedes. V jeho době, kdy neexistoval kalkulus, bylo pozoruhodným výkonem spočítat velikost povrchu sféry, resp. velikost výsečí na sféře, omezených dvěma hlavními kružnicemi na sféře. Archimedes tuto úlohu dokázal vyřešit tím, že ji převedl na výpočet ploch na válci, kde se vše redukuje na znalost velikosti obvodu kružnice, resp. její poměrné části. Legenda říká, že po obléhání Syracus, při kterém Archimedes zahynul, nechal tuto větu vytesat římský generál Marcellus na jeho hrob.

**Věta 5.2.13 (Archimedes.)** *Uvažujme jednotkovou sféru bez dvou bodů*

$$S_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \neq \pm 1\}$$

*a část válce*

$$S_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, \ -1 < z < 1\}.$$

*Každému bodu $P \in S_1$ odpovídá bod $Q \in S_2$, který má tutéž souřadnici $z$ a pro který přímka $PQ$ protíná osu $z$. Zobrazení $f$, které přiřadí bodu $P$ bod $Q$, je v souřadnicích popsáno vztahem*

$$f(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

*Pak $f$ je difeomorfismus $S_1$ na $S_2$, který zachovává velikost ploch.*

*Důkaz.*

Zvolme si mapu

$$\mathbf{p}_1(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta);\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2),\ \varphi \in (-\pi, \pi),$$

která pokrývá celou plochu $S_1$ až na jednu polokružnici. Mapa $\mathbf{p}_2 = f \circ \mathbf{p}_1$ má pak tvar

$$\mathbf{p}_2(\theta,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin\theta);\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2),\ \varphi \in (-\pi, \pi).$$

Odpovídající koeficienty první fundamentální formy jsou

$$E_1 = 1, F_1 = 0, G_1 = \cos^2\theta;\ E_2 = \cos^2\theta, F_1 = 0, G_1 = 1.$$

Je zřejmé, že požadovaný vztah v předchozí větě platí.

Totéž platí pro druhou mapu na $S_1$, která je dána zobrazením $\mathbf{p}_1$ s $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Obě mapy tvoří atlas na $S_1$. Podle předchozí věty tedy $f$ zachovává velikost ploch.

$\square$

Archimedes tuto větu použil k odvození velikosti plochy výseče, omezené na jednotkové sféře dvěma hlavními kružnicemi, které svírají úhel $\alpha$. Po promítnutí na povrch válce je obrazem část válce nad obloukem kružnice, který odpovídá úhlu $\alpha$. Velikost plochy tohoto obrazce je zřejmě $2\alpha$. Pro povrch celé sféry dostaneme známou hodnotu $4\pi$.

# Kapitola 6

# Riemannova metrika.

**Poznámka.** Riemannova habilitační přednáška.

V devatenáctém století bylo zvykem, že zájemci o učitelské místo na univerzitě museli po doktorátu jistou dobu asistovat a zároveň se zabývat výzkumem. Výsledky výzkumu pak museli sepsat ve formě habilitační práce a spolu s jejím podáním museli prokázat svoji způsobilost specielní přednáškou. Desátého června roku 1854 takovouto habilitační přednášku přednesl na universitě v Göttingen Bernhard Riemann. Jeho školitelem byl Gauss, který ze tří témat přednášky navržených Riemannem vybral to nejméně očekávané, to, o kterém Riemann předtím nic nepublikoval (na rozdíl od druhých dvou témat). Toto třetí navržené téma mělo název "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", tedy 'O předpokladech, které leží v základech geometrie'.

V polovině devatenáctého století měl Gauss svoje objevy o neeukleidovské geometrii ještě stále v šuplíku, a přes výsledky Lobačevského (1829, 1837 francouzsky, 1840 německy) a Bolyaie (1831) téměř nikdo nevěděl, že opravdu existují geometrie, kde pátý Eukleidův axióm neplatí. A že to nejsou jen kuriozity, anomálie, ale plnohodnotné alternativy pro Eukleidovskou geometrii. Z poznámek Dedekinda se zdá, že Gauss toto třetí téma v rozporu s tradicí vybral, protože "chtěl vědět, jak se tak mladý člověk s tak složitým tématem vypořádá".

Riemannova přednáška převrátila geometrii naruby. V Euklidovské geometrii byly primitivní pojmy body, přímky a roviny. Riemann si vybral jako základní pojem pro definici geometrie vzdálenost. Oddělil od sebe prostor a geometrii. Jedna a ta samá množina může nést víc geometrií; geometrie je dodatečná strukutra definovaná na dané množině. Jako základní pojem zavedl Riemann délku vektorů v daném bodě (v současných pojmech skalární součin na množině vektorů umístěných v daném bodě), která se ovšem mohla měnit bod od bodu. Pomocí diferenciálního počtu ukázal, jak v takto zadané množině s touto dodatečnou strukturou počítat délku křivek, vzdálenosti a velikosti ploch. Přímky pak definoval jako geodetiky – křivky, které minimizují vzdálenosti. Pomocí skalárního součinu mohl definovat také úhly a počítat velikosti ploch. To vše zároveň rozšířil z dvourozměrných ploch (výhradně zkoumaných v jeho době) na obecné $n$-rozměrné plochy. Riemann sám zemřel mladý a jeho idee pak postupně propracovala řada následovníků (první mezi nimi byl William Clifford, který si ihned uvědomil význam Riemannovy práce pro fyziku, ale naneštěstí také zemřel velmi brzy, ještě než mu bylo 40 let). Riemann svoji habilitační přednášku nikdy nepublikoval a zemřel 12 let po ní, ve věku nedožitých 40 let. Jeho idee ale brzy získaly obrovský vliv a v době, kdy Einstein na začátku 20. století připravoval svoji obecnou teorii relativity, měl už celý aparát Riemannovy geometrie k dispozici (jen bylo třeba změnit signaturu příslušné kvadratické formy v souladu se speciální teorií relativity).

**Definice 6.0.14** *Předpokládejme, že $S$ je plocha v $\mathbb{R}^3$. Riemannova metrika na $S$ přiřazuje každému bodu $s \in S$ skalární součin $g_s$ na tečném prostoru $T_sS$ takový, že pro každou mapu $(U, \mathbf{p})$ na $S$ jsou funkce*

$$g_{ij}(u) := g_{\mathbf{p}(u)}\left(\mathbf{p}_{u_i}, \mathbf{p}_{u_j}\right)$$

*hladké. Symbolicky tuto Riemannovu metriku (ve zvolených souřadnicích) zapisujeme jako výraz*

$$ds^2 := E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du_i du_j.$$

**Příklad 6.0.15** 1. *Každá regulární parametrizace $\mathbf{p}$ plochy $S$ zřejmě zadává Riemannovu metriku na svém definičním oboru $O$, která popisuje geometrii plochy $S$. Jak jsme viděli, můžeme délky křivek měřit buď přímo na ploše $S$, nebo v definičním oboru její parametrizace (s pomocí první fundamentální formy, která zadává na $O$ Riemannovu metriku). V tomto smyslu jsou oba popisy příslušné geometrie rovnocenné. Pojem Riemannovy metriky tedy umožňuje ekvivalentní popis geometrií všech ploch, vnořených do Eukleidovského prostoru, pomocí otevřených podmnožin v rovině a na nich zadaných Riemannových metrik.*

*Existují ale Riemannovy geometrie, které nelze získat jako souřadnicový popis geometrií ploch vnořených do Eukleidovského prostoru. Význačným příkladem takovéto geometrie je hyperbolická geometrie, o které budeme mluvit zanedlouho. Příslušnou větu o nemožnosti vnoření (celého) hyperbolického prostoru do Eukleidovského třídimenzionálního prostoru dokázal Hilbert. Proto pro nás bude možnost popsat hyperbolickou geometrii jako jednoduchý příklad Riemannovy geometrie podstatná.*

2. *Ve velkém množství Riemannových geometrií, které jsme si právě zavedli, nejsou všechny mezi sebou různé. Existuje přirozený pojem ekvivalence, který se v tomto případě bude nazývat izometrie. Dvě plochy*

*(resp. Riemannovy geometrie), které jsou izometrické, budou pro nás jen různé popisy téže geometrie.*

### 6.0.4 Izometrie.

**Definice 6.0.16** *Nechť $S$, resp. $\tilde{S}$ jsou dvě plochy v $\mathbb{R}^3$. Hladké zobrazení $F$ z $S$ do $\tilde{S}$ se nazývá lokální izometrie, pokud pro všechny body $s \in S$ je tečné zobrazení $T_sF : T_sS \to T_{F(s)}\tilde{S}$ izometrie vektorových prostorů se skalárním součinem. Musí tedy pro všechny body $s \in S$ a pro všechny vektory $X, Y \in T_sS$ platit*

$$g_s(X, Y) = g_{F(s)}(T_sF(X), T_sF(Y)).$$

*Řekneme, že $F$ je izometrie $S$ na $\tilde{S}$, pokud je navíc $F$ vzájemně jednoznačné. Plochy $S$ na $\tilde{S}$jsou izometrické, pokud existuje izometrie mezi nimi.*

V definici izometrie se používá tečné zobrazení $T_sF$ ke zobrazení $F$, které bylo definováno pomocí křivek, jejichž tečné vektory chci zobrazit. To je poměrně složitá definice. Jedna z možností, jak s ní počítat, je přejít do souřadnic ve vzorech a obrazech, jak je popsáno v důkazu následujícího tvrzení.

**Lemma 6.0.17** *Difeomorfismus $F$ z $S_1$ do $S_2$ je izometrie právě když pro každou mapu $\mathbf{p}$ daného atlasu plochy $S_1$ první fundamentální formy map $\mathbf{p}$ na $S_1$ a $f \circ \mathbf{p}$ na $S_2$ rovnají na svém společném definičním oboru.*

*Důkaz.*
Víme již, že tečné zobrazení $T_sF$ ke zobrazení $F$ v bodě $s$ v souřadnicích určených zvolenými mapami je popsáno Jacobiho maticí zobrazení $\tilde{F}$, které popisuje zobrazení $F$ v souřadnicích. Dvojici map ve vzorech a obrazech si můžeme vzít libovolně, a situace se výrazně zjednoduší, pokud si obě mapy zvolíme šikovně. Specielně, je-li $(U, \mathbf{p})$ mapa v okolí bodu $s$, pak $(F(U), F\circ\mathbf{p})$ je mapa v okolí bodu $F(s)$. V těchto souřadnicích je zobrazení $F$ popsáno zobrazením $\tilde{F} = (F \circ \mathbf{p})^{-1} \circ F \circ \mathbf{p}$, což je zřejmě identita a jeho Jacobiho zobrazení je taky identita. Z toho plyne, že souřadnice vektoru $X \in T_sS$ vzhledem k mapě $(U, \mathbf{p})$ a souřadnice vektoru $T_sF(X)$ vzhledem k mapě $(F(U), F \circ \mathbf{p})$ jsou stejné. Z toho již tvrzení lemmatu ihned plyne. □

**Věta 6.0.18** *Difeomorfismus $F : S_1 \to S_2$ je izometrie právě když $F$ zachovává délku křivek.*

*Důkaz.*
Protože můžeme délku křivky počítat tak, že ji rozdělíme na části a jejich délky sečteme, je možné bez újmy na obecnosti předpokládat, že plocha $S_1$ (a tedy i $S_2$) je pokryta jedinou mapou.

Předpokládejme nejprve, že se první fundamentální formy map $\mathbf{p}$ na $S_1$ a $f \circ \mathbf{p}$ na $S_2$ rovnají. Je-li $\mathbf{c}$ křivka na $S_1$ a $f \circ \mathbf{c}$ odpovídající křivka na $S_2$, pak dostáváme pro délku obou křivek tentýž vzoreček. Zobrazení $f$ je tedy isometrie.

Naopak, je-li $f$ isometrie a je-li $\mathbf{p}$ mapa na $S_1$, pak $f \circ \mathbf{p}$ je mapa na $S_2$. Označme $E_1, F_1, G_1$, resp. $E_2, F_2, G_2$, koeficienty první fundamentální formy v obou mapách. Zvolme bod $P = \mathbf{p}(\bar{u}, \bar{v})$ a zvolme si soubor křivek v $\mathbb{R}^2$ závisející na parametrech $\alpha, \beta$ takto:

$$u = \bar{u} + \alpha t;\ v = \bar{v} + \beta t,\ t \in (-\varepsilon', \varepsilon),$$

kde $\varepsilon$ a $\varepsilon'$ jsou dostatečně malá kladná čísla. Pak $\dot{u} = \alpha, \dot{v} = \beta$. Délky jejich obrazů při obou mapách se podle předpokladu rovnají, tedy pro každé dostatečně malé $\varepsilon, \varepsilon'$ a pro všechna $\alpha, \beta$ platí

$$\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon} \left(E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2\right)^{1/2} dt = \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon} \left(E_2\alpha^2 + 2F_2\alpha\beta + G_2\beta^2\right)^{1/2} dt.$$

Z toho (derivací podle $\varepsilon$ ) plyne, že se integrandy rovnají, a tedy že $E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$. □

Zobrazení isometrie mezi dvěma plochami odpovídá názorně tomu, že první plochu ohnu bez deformace a pomačkání tak, abych ji ztotožnil s druhou plochou. Zkušenost ukazuje, že tedy existuje isometrie (části) povrchu válce na pás v rovině (rolování papíru) a isometrie (části) povrchu kužele na kruhovou výseč roviny (balení kornoutu). Právě tak zkušenost ukazuje, že těžko bude existovat isometrie (části) povrchu sféry na část roviny. První dvě tvrzení si teď pomocí předchozí věty ověříme.

**Příklad 6.0.19**
*(1) Nechť $S_1$ je pás v rovině, daný parametrizací $\mathbf{p}_1(u, v) = (u, v, 0), u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$ a nechť $S_2$ je válec (bez jedné přímky), zadaný parametrizací $\mathbf{p}_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v), u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$. Chceme vědět, jestli je zobrazení $f : S_1 \to S_2$ dané vztahem $f(u, v, 0) = (\cos u, \sin u, v)$ isometrie. První fundamentální forma plochy $\mathbf{p}_1$ má tvar $du^2 + dv^2$, první fundamentální forma plochy $f \circ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ má tentýž tvar $du^2 + dv^2$. Tedy jsou obě plochy izometrické.*
*(2) Kužel (bez jedné přímky) je isometrický s částí roviny. Parametrický popis standardního kuželu je*

$$\mathbf{p}_1(v, \varphi) = (v\cos\varphi, v\sin\varphi, v);\ v \in (0, 1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

*Příslušná první fundamentální forma je rovna $2dv^2 + v^2 d\varphi^2$.*

*Zvolme si parametrizaci kruhové výseče v rovině takto:*

$$\mathbf{p}_2(v, \varphi) = \left(\sqrt{2}v\cos\frac{\varphi}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}v\sin\frac{\varphi}{\sqrt{2}}, 0\right);\ v \in (0, 1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

*Pak jsou příslušné první fundamentální formy stejné (spočítejte si!).*

*Příslušná isometrie $f$ je zobrazení plochy $S_1$ na plochu $S_2$ dané předpisem $f = \mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1^{-1}$.*

### 6.0.5 Konformní zobrazení.

Nyní si budeme definovat konformní zobrazení mezi dvěma plochami. Je to zobrazení, které nemusí zachovávat vzdálenosti na ploše, ale které zachovává úhly. Připomeňme si středoškolskou informaci, jak se vypočítá úhel, který svírají dvě strany v trojúhelníku. Označíme-li tyto dvě strany vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, pak jejich úhel $\varphi$ se vypočte ze vztahu

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{a}_2|},\ \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

**Definice 6.0.20** *Řekneme, že $F : S \to \tilde{S}$ je konformní zobrazení, pro každý bod $s \in S$ zachovává tečné zobrazení $T_sF$ úhly.*

Již jsme si připomněli, že zobrazení $A : V_1 \to V_2$ mezi dvěma vektorovými prostory se zadaným skalárními součiny je izometrie, pokud skalární součin libovolných vzorů se rovná skalárnímu součinu obrazů. Z výše uvedeného výpočtu úhlu dvou vektorů vyplývá, že zobrazení $A$ zachovává úhly ve $V_1$ a $V_2$ právě když existuje nenulová konstanta $c$ taková, že skalární součin libovolných vzorů se rovná $c$-násobku skalárního součinu obrazů. To je vhodná informace pro následující tvrzení.

**Definice 6.0.21** *Zobrazení $F : S \to \tilde{S}$ je konformní zobrazení, právě když pro každý bod $s \in S$ existuje nenulová konstanta $c$ (která může záviset na volbě bodu $s$) taková, že pro každé dva vektory $X, Y \in T_sS$ platí*

$$(X, Y) = c(T_sF(X), T_sF(Y)).$$

Dá se ukázat také následující tvrzení

**Věta 6.0.22** *Zobrazení $f : S_1 \to S_2$ je konformní zobrazení právě když pro každou mapu $\mathbf{p}$ daného atlasu plochy $S_1$ je první fundamentální forma parametrizace $\mathbf{p}$ (nenulovým) konstantním násobkem první fundamentální formy parametrizace $f \circ \mathbf{p}$ plochy $S_2$.*

*Důkaz.*

Budeme opět bez újmy na obecnosti předpokládat, že plocha $S_1$ (a tedy i $S_2$) je pokryta jedinou mapou $\mathbf{p}_1$, resp. $\mathbf{p}_2 = f \circ \mathbf{p}_1$. Označme $E_i, F_i, G_i$, $i = 1, 2$ koeficienty příslušné první fundamentální formy.

Délka vektoru i skalární součin dvou vektorů se vypočítá pomocí první fundamentální formy plochy. Pokud se tato forma vynásobí konstantou, vynásobí se délka vektoru toutéž konstantou a skalární součin se vynásobí kvadrátem této konstanty. Je tedy zřejmé ze vzorce pro úhel dvou vektorů, že se příslušný úhel nezmění. Pokud je tedy vektor $(E_1, F_1, G_1)$ (nenulový) násobek $(E_2, F_2, G_2)$, pak je zobrazení $f$ konformní.

Toto tvrzení je zřejmě nezávislé na změně parametrizace zvolené mapy.

Důkaz opačné implikace je složitější a nebudeme ho na přednášce probírat.

□

**Příklad 6.0.23** *Příkladem konformního zobrazení (části) jednotkové sféry na rovinu je tzv. stereografická projekce. Označme $N$ severní pól sféry ($N = (0,0,1)$). Pro libovolný jiný bod $Q$ sféry protíná přímka $NQ$ rovinu $z = 0$ v jediném bodě $P$. Zobrazení, které bodu $Q$ na sféře přiřadí bod $P$ v rovině se souřadnicemi $(u, v)$, se nazývá stereografická projekce. Snadno zjistíme, že inverzní zobrazení $P \mapsto Q$ je popsáno vzorcem*

$$Q = (x, y, z) = \mathbf{p}(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2}\right).$$

*Ověřte, že je to konformní zobrazení! Derivace mají tvar*

$$\mathbf{p}_u = \left(\frac{2(v^2-u^2+1)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2}\right)$$

$$\mathbf{p}_v = \left(\frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2(u^2-v^2+1)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2}\right)$$

*Tedy $E = G = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$, $F = 0$.*

# Kapitola 7

# Hyperbolická geometrie.

Sférická geometrie je první příklad neeukleidovské geometrie, kde platí všechny 4 první axiómy, ale neplatí axióm pátý. Ve sférické geometrii se každé dvě přímky protínají.

Gauss, Lobačevskij a Bolyai popsali jiný, složitější případ neeukleidovské geometrie, ve které existuje pro danou přímku a daný bod nekonečně mnoho rovnoběžek, které tímto bodem procházejí. Pro tuto geometrie se vžil název hyperbolická geometrie. Její vlastnosti je možné nejlépe pochopit popisem několika různých modelů.

## 7.1 Hyperboloid.

Budeme uvažovat vektorový prostor $M^3 = \{x = (x_0, x_1, x_2) | x_i \in \mathbb{R}\}$ s kvadratickou formou $Q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ s Minkowského signaturou $(1,2)$. Kvadratická forma $Q$ zadává dvoulistý hyperboloid $\{x \in M^3 | Q(x) = -1\}$. Jeho horní list označíme $H_2$, tedy

$$H_2 = \{x \in M^3 | Q(x) = -1, x_0 > 0\} = \{x \in M^3 | x_0 = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}\}.$$

### 7.1.1 Přímky v hyperbolickém prostoru.

Analogie se sférickou geometrií je velmi silná. Ve sférické geometrii byla sféra definována jako řešení rovnice $Q(x) = 1$, kde $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ je kanonická positivně definitní kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$. Grupa symetrií sféry je grupa $SO(3)$ všech rotací v Eukleidovském trojrozměrném prostoru $E^3$. Tato grupa transformací zachovává sféru. Přímky jsou průniky dvourozměrných podprostorů v $\mathbb{R}^3$ se sférou (tj. hlavní kružnice na sféře).

Podobně je možné postupovat v hyperbolické geometrii. Hyperboloid $H_2$ je definován jako (horní list) dvoulistého hyperboloidu s rovnicí $Q(x) = -1$, kde $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$ je kanonická nedegenerovaná kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$ se signaturou $(2,1)$. Dvojice $(\mathbb{R}^3, Q)$ se obvykle nazývá (třírozměrný) Minkowského prostor a značí se $M_3$.

### 7.1.2 Grupa isometrií prosotru $H_2$.

Grupa symetrií hyperboloidu je grupa $G = SO(2,1)$ všech lineárních zobrazení $\mathbb{R}_3$ do sebe, které zachovávají Minkowského kvadratickou formu na prostoru $\mathbb{R}^3$ a mají determinant rovný jedné. Tato grupa transformací zachovává hyperboloid $H_2$. Tato grupa je méně dimenzionální verzí slavné Lorentzovy grupy (pro Minkowského prostor $M_4 = \mathbb{R}^4$ s nedegenerovanou kvadratickou formou signatury (3,1)). Všechny rovnice relativistické fyziky musí být invariantní vůči akci Lorentzovy grupy.

Podobně jako grupa rotací v Eukleidovském trojrozměrném prostoru obsahuje podgrupy rotací v jednotlivých souřadnicových rovinách, i grupa $SO(2,1)$ má podobné podgrupy 'rotací', které skládáním generují celou grupu $G$. Jsou to podgrupy rotací v rovině souřadnic $x_1, x_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

a podgrupa 'hyperbolických' rotací v rovině souřadnic $x_0, x_1$

$$\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Fyzikové těmto transformacím, které míchají dohromady jednu prostorovou proměnou s časem říkají 'Lorentz boosts'. Jsou to transformace, které přímo protiřečí Newtonově představě absolutního času.)

### 7.1.3 Přímky v hyperbolickém prostoru.

Přímky budeme zatím definovat analogií s definicí přímky ze sférické geometrie. Za chvíli si ukážeme, že mají vlastnost, která se od přímek očekává a která se bere často jako obecná definice, tj. že každá úsečka na přímce musí být nejkratší spojnice mezi koncovými body úsečky.

Přímky v $H_2$ definujeme jako průniky dvourozměrných podprostorů v $\mathbb{R}^3$ s $H_2$. Zdá se na první pohled, že symetrie sféry (všechny body i přímky vypadají stejně) je v hyperbolické verzi ztracena. To je ale matoucí, je to způsobeno tím, že hyperboloid automaticky vnímáme jako množinu v Eukleidovském trojrozměrném prostoru. Viděli jsme ale, že hyperboloid $H_2$ má obdobně velkou grupu izometrií jako sféra.

### 7.1.4 Popis $H_2$ v souřadnicích.

Pro souřadnicový popis hyperboloidu $H_2$ použijeme analogii stereografické projekce ze sférické geometrie. Mapa na $H_2$ je zobrazení $\Phi : U \mapsto H_2$ z jednotkového kruhu $U := \{\zeta = u + iv \in \mathbb{C} || \zeta| < 1\}$ v komplexní rovině na $H_2$ dané předpisem

$$\Phi(u,v) = \left( \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}, \frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2}, \right).$$

Je snadné se přesvědčit, že obraz $x = \Phi(u,v)$ patří do $H_2$ a z daných hodnot bodu $(x_0, x_1, x_2) \in H_2$ je možné zpětně vypočítat hodnotu vzoru $(u,v) \in U$, takže $\Phi$ je prosté a na.

Chceme teď spočítat, jak vypadá první fundamentální forma plochy v souřadnicích $(u,v) \in U$. Stačí spočítat

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2} \left( 2u, 2uv, 1+u^2-v^2 \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2} \left( 2v, 1-u^2+v^2, 2uv \right)$$

(druhá rovnice plyne z první záměnou $u$ a $v$). Koeficienty $E, F, G$ první fundamentální formy vyjdou

$$E = G = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}, F = 0.$$

Tedy $\Phi$ je izometrie s množinou $U$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2 + dv^2).$$

To vede ihned ke druhému modelu hyperbolického prostoru, kterému se obvykle říká Poincarého disk (je to konformní násobek Eukleidovské metriky v rovině). Všimněte si, že kvadratická forma $Q$ sice není pozitivně definitní, má signaturu $(2,1)$, ale indukovaný skalární součin na tečném prostoru v libovolném bodě je positivně definitní (v souřadnicích $(u,v)$ popsaný příslušnou Riemannovou metrikou). To vede k následující definici.

### 7.1.5 Poincarého jednotkový disk.

**Definice 7.1.1** *Množina $U$ spolu s Riemannovou metrikou*

$$ds^2 = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2 + dv^2)$$

*se nazývá Poincarého model hyperbolické roviny.*

Abychom dobře popsali množinu všech přímek, zavedeme si ještě třetí model (pomocí vhodné izometrie).

### 7.1.6 Horní polorovina.

Označme $H_+ := \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0.\}$ Je to tedy horní polorovina, její hranicí je reálná osa. Existuje jednoduché lineární lomené zobrazení, které převádí jednotkový kruh na horní polorovinu. Chceme najít prvek Möbiovy grupy, který převádí body $\pm 1$ hranice jednotkového disku na body $0, \infty$ z reálné osy a bod $0 \in U$ na bod $i \in H_+$. Stačí vzít transformaci

$$z = \frac{i(1+\zeta)}{1-\zeta} \tag{7.1.1}$$

s inverzní transformací

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i}. \tag{7.1.2}$$

Z hlediska hyperboloidu $H_2$ jde zřejmě o změnu parametrizace. Chceme si nyní spočítat, jak se změní příslušné koeficienty v první fundamentální formě, jak bude první fundamentální forma vypadat v nových souřadnicích. V tuto chvíli si trochu vypomůžeme postupy, které se naučíte příští rok v komplexní analýze (jak vidíte, diferenciální geometrie je vlastně kombinací geometrie a analýzy). Pro jednodušší zápis se budeme snažit držet reálnou a imaginární část často pohromadě. Například snadno se spočítá, že derivace podle reálných proměnných $x$ a $y$ zobrazení (7.1.2) vypadají

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{z+i} - \frac{z-i}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2} = (-i)\frac{d\zeta}{dy}.$$

Všimněte si, že násobení nějakého komplexního čísla číslem $(-i)$ odpovídá rotaci příslušného vektoru o pravý úhel. Tedy $\frac{d\zeta}{dx}$ a $\frac{d\zeta}{dy}$ jsou na sebe kolmé (jako vektory v $\mathbb{R}^2$). Dále z rovnice pro lineární lomené zobrazení dostaneme ihned

$$1 - |\zeta|^2 = 1 - \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}$$

a

$$\frac{1}{1-|\zeta|^2} = \frac{|z+i|^2}{|z+i|^2 - |z-i|^2} = \frac{|z+i|^2}{4 \operatorname{Im} z}.$$

Koeficienty první fundamentální formy v nových souřadnicích tedy mají tvar

$$E = G = 4\frac{4}{|z+i|^4}\left(\frac{|z+i|^2}{4 \operatorname{Im} z}\right)^2 = \frac{1}{y^2}$$

a $F = 0$.

To vede k třetímu (ekvivalentnímu) modelu hyperbolické geometrie.

**Definice 7.1.2** *Nechť $H = H_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ označuje horní polorovinu. Riemannovu metriku na $H$ definujeme vztahem*

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

*Tím je zadána geometrie, která tvoří třetí model pro hyperbolickou geometrii (v dimenzi 2), tj. pro hyperbolickou rovinu.*

V tomto modelu si postupně rozmyslíme, jak vypadá grupa všech isometrií, jak v ní vypadají úsečky a přímky a vypočítáme plochy trojúhelníků.

### 7.1.7 Isometrie hyperbolické roviny.

Označme $G_0$ podgrupu Möbiovy grupy $G$, která odpovídá podgrupě $SL(2,\mathbb{R}) \subset SL(2,\mathbb{C})$. Je to tedy grupa všech lineárních lomených transformací s reálnými koeficienty a determinantem příslušné matice rovným jedné.

**Věta 7.1.3** *Všechna zobrazení $\phi(g), g \in G_0$ jsou izometrie $H$. Také zobrazení $R$ dané reflexí v Eukleidovské rovině podle osy $y$ (zúžené na $H$) je izometrie $H$.*

*Důkaz.*
Tvrzení je zřejmé pro reflexi $R$. Především je třeba ověřit, že všechny lineární lomené transformace s reálnými koeficienty zobrazují $H$ do $H$. To je jasné z toho, že body hranice $H$, tvořené reálnou osou (a nekonečnem) se zobrazují do sebe. Navíc se zřejmě bod $z = 1$ zobrazuje do horní poloroviny právě když je determinant matice $g$ kladný.

Tvrzení věty stačí nyní ověřit pro generátory $G_0$. Stejným postupem jako pro grupu $G$ se ukáže, že $G_0$ je generována zobrazeními

$$\phi_a(z) = z + a, a \in \mathbb{R};\ \phi_b(z) = bz, b > 0;\ \phi(z) = \frac{-1}{z}.$$

To je zřejmé pro posunutí a okamžitě vyjde pro dilatace.

Nejsložitější je to pro zobrazení $\phi$. Množina $H$ je pokryta jedinou mapou (identita). Označíme tedy $\mathbf{p}_1(x,y) = (x,y,0)$ a dostaneme

$$\mathbf{p}_2(x,y) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Je třeba nyní ukázat, že koeficienty $E_i, F_i, G_i, i = 1,2$ první fundamentální formy splývají pro obě mapy $\mathbf{p}_i$.

Zobrazení $\phi$ teď uvažujeme jako zobrazení z hyperbolické poloroviny do sebe. Riemannova metrika na $H$ je definována vztahem

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Tedy pro mapu danou identickým zobrazením dostaneme

$$E_1 = G_1 = \frac{1}{y^2},\ F_1 = 0.$$

Pro $\mathbf{p}_2$ dostaneme opět

$$\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x} = \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0 \right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} = \left( \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, 0 \right).$$

Tentokrát ale

$$E_2 = G_2 = \left\{ \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \right)^2 + \left( \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)^2 \right\} \frac{1}{\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{y^2}$$

and $F_2 = 0$. Tedy $\phi$ je izomorfismus podle věty 6.0.18.

□

Zjistili jsme tedy, že všechny transformace z $G_0$ a jejich složení s reflexí $R$ jsou izometrie. Množina $G$ všech těchto izometrií tvoří zřejmě grupu, a dá se ukázat, že je to již grupa všech izometrií $H$. My to v tuto chvíli budeme jen konstatovat, a nebudeme to ověřovat.

Grupa $G_0$ působí transitivně na horní polorovině, tj. libovolný bod $H_+$ lze převést na libovolný další bod $H_+$ izometrií. Chceme-li ověřit toto tvrzení, stačí si uvědomit, že je možné libovolný bod translací a dilatací převést na bod $i \in H_+$.

Podobně je možné libovolnou přímku v $H_+$ převést na $L_+$ (osu $y$). Pro svislou přímku stačí použít vhodné posunutí. Pro kružnici, která končí na reálné ose v bodech $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$, stačí vzít lineární lomenou transformaci $\frac{z-t}{z-s}$, která převádí bod $t$ do nuly a bod $s$ do nekonečna. Obrazem této kružnice tedy musí být osa $y$.

Izometrií se tato vlastnost zachová, tedy platí i ve všech dalších modelech.

**Poznámka.**

Grupa izometrií v modelu Poincarého disku se dostane snadno jako obraz grupy izometrií v horní polorovině složené se zobrazením reparametrizace (7.1.1). Jsou to tedy opět prvky Möbiovy grupy, které zachovávají jednotkovou kružnici (plus obraz reflexe $R$). Dá se ukázat, že mají tvar

$$g(\zeta) = e^{i\theta} \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}, \ \theta \in \langle 0, \pi \rangle, \ a \in U.$$

### 7.1.8 Úsečky v hyperbolické geometrii.

Úsečky v dané geometrii definujeme vždy jako křivky s nejmenší délkou, které spojují dané body. Nejprve si rozmyslíme případ dvou bodů v hyperbolické rovině, které mají stejnou reálnou část.

**Věta 7.1.4** *Jsou-li $P = (0, A), Q = (0, B)$, $a < b$ dva body v hyperbolické rovině a $c(t) = (0, t), t \in \langle a, b\rangle$ úsečka, která je spojuje, pak má křivka $c$ nejkratší délku mezi všemi regulárními křivkami v $H$, které začínají v bodě $P$ a končí v bodě $Q$.*

*Důkaz.*

Je-li $c' = (c'_1, c'_2)$ libovolná křivka na $\langle a, b\rangle$, pro kterou $c'(a) = P$ a $c'(b) = Q$, pak

$$\ell(c') = \int_a^b \left(\left(\frac{dc'_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc'_2}{dt}\right)^2\right)^{1/2} \frac{dt}{c'_2(t)} \geqslant$$

$$\geqslant \int_a^b \left|\frac{dc'_2}{dt}\right| \frac{dt}{c'_2(t)} \geqslant \int_a^b \frac{dc'_2/dt}{c'_2} dt = [\log c'_2]_a^b = \log \frac{B}{A} = \ell(c).$$

□

Pokud $\phi$ je izometrie $H$, pak zřejmě obdobná vlastnost platí pro obraz úsečky $c$. Osa $y$ (označíme ji $L_+$) je tedy přímka (ve smyslu, že každá úsečka na ní má vlastnost, že její délka je minimum délek všech křivek, které spojují příslušné body (později si pro křivky s touto vlastností zavedeme název geodetika). Z vlastností izometrie plyne ihned, že i všechny její obrazy pomocí izometrií $H_+$ mají tuto vlastnost. Je snadné zjistit, jak všechny obrazy přímky $L_+$ vypadají. Víme, že prvky Möbiovy grupy převádějí zobecněné kružnice na zobecněné kružnice a že zachovávají úhly. Tedy každý obraz $L_+$ při transformaci, která patří do grupy $G$ izometrií $H$ je opět přímka nebo kružnice a její úhel s osou $x$ musí být pravý. Je to tedy buď přímka rovnoběžná s osou $y$ nebo průnik $H$ s kružnicí, která má střed na reálné ose. To vede k následující definici.

**Definice 7.1.5** *Řekneme, že množina $L \subset H$ je přímka, pokud je to buď polopřímka kolmá na osu $x$ nebo polokružnice v $H$ se středem na reálné ose.*

### 7.1.9 Eukleidův pátý postulát

Hyperbolická polorovina $H$ spolu s výše uvedenou množinou přímek tvoří model geometrie, kde jsou splněny první 4 Eukleidovy axiomy, ale není splněn pátý. Daným bodem lze k dané přímce vést nekonečně mnoho rovnoběžek.

### 7.1.10 Trojúhelníky v hyperbolické polorovině

**Věta 7.1.6** *Plocha $|\Delta|$ hyperbolického trojúhelníka $\Delta$ s úhly $\alpha, \beta, \gamma$ je roven*

$$|\Delta| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Důkaz.*

Nejdřív vypočítáme (explicitní integrací, pomocí Fubiniovy věty) příslušný povrch pro případ trojúhelníka, jehož jeden vrchol $C$ je v nekonečnu (tedy úhel $\gamma$ je nula) a úhly $\alpha$ a $\beta$ jsou v intervalu $\langle 0, \pi/2)$. Předpokládáme tedy, že bod $C$ hyperbolického trojúhelníka je v nekonečnu (a tedy odpovídající strany jsou polopřímky kolmé na osu $x$). Použitím vhodné translace a dilatace můžeme zařídit, že strana $AB$ trojúhelníka leží na jednotkové kružnici se středem v počátku. Předpokládejme tedy, že

$$A = (\cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha)), B = (\cos\beta, \sin\beta)$$

kde $0 \leqslant \beta < \pi - \alpha \leqslant \pi$.

Pak plochu $|\Delta|$ tohoto trojúhelníka spočítáme pomocí integrálu $\int_S 1\, dS$ :

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \int_{(1-x^2)^{1/2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} dx = \\ &= \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \\ &= [-\arccos x]_{\cos\pi-\alpha}^{\cos\beta} = \\ &= \pi - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Obecný případ plyne z předchozího speciálního případu jednoduchým odčítáním ploch. Každý hyperbolický trojúhelník $\Delta = ABC$ lze izometrií převést na případ, že strana $AC$ je svislá úsečka, můžeme také předpokládat, že bod $C$ leží nad bodem $A$. Pak budeme uvažovat dva trojúhelníky s vrcholy v nekonečnu: $\Delta_1 = AB\infty$ a $\Delta_2 = CB\infty$. Označme úhel strany $BC$ a $B\infty$ písmenem $\delta$. Pak

$$|\Delta_1| = \pi - \alpha - (\beta + \delta), |\Delta_2| = \pi - \delta - (\pi - \gamma).$$

a

$$|\Delta| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□

Jako důsledek dostaneme snadno vzorec pro obsah hyperbolického $n$-úhelníka $M$, jehož hrany jsou tvořeny hyperbolickými úsečkami:

$$|M| = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n),$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou vnitřní úhly u vrcholů $M$.

### 7.1.11 Kosinová a sinová věta.

Kosinová věta (zobecnění Pythagorovy věty) a sinová věta mají v hyperbolické geometrii následující tvar. Pro výpočet použijeme model hyperboloidu.

**Věta 7.1.7** *Předpokládejme, že $\Delta$ je trojúhelník v hyperbolické geometrii s úhly $\alpha, \beta, \gamma$ a stranami $a, b, c$ (strana $a$ je jako obvykle proti úhlu $\alpha$, apod. pro $b$ a $c$). Pak*

*1.*
$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

*2.*
$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

*Důkaz.*

Nejdříve si všimněme parametrického popisu význačných přímek (které jsou dány průnikem s rovinou, která prochází osou $x_0$). Pokud si pro jednoduchost vezmeme rovinu os $x_0, x_1$ má příslušná přímka parametrizaci

$$c(t) = (\cosh t, \sinh t, 0).$$

Vzhledem k tomu, že $\dot{c}(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$, je $|\dot{c}| = -\sinh^2 t + \cosh^2 t = 1$. Bude-li, křivka definována na intervalu $\langle 0, a \rangle$, bude její délka rovna $a$. Tedy parametr $t$ na přímce má geometrický význam délky úsečky od bodu $U_0 = (1, 0, 0)$ do bodu $c(t)$.

Uvažujme libovolný trojúhelník v $H_2$. Vhodnou izometrií (tranzitivnost na množině přímek) mohu jednu jeho stranu převést na úsečku $AC$, kde $C = U_0$ a $A = (\cosh b, \sinh b, 0)$. Jeho třetí vrchol se převede na nějaký bod $B$. Obecný bod na $H_2$ má tvar (polární souřadnice)

$$B = (\cosh a, \sinh a \cos \gamma, \sinh a \sin \gamma).$$

Úsečka $BC$ patří další význačné kružnici. Úhel rovin, které definují přímky obsahující $AC$, resp. $BC$ je zřejmě roven úhlu při vrcholu $C$, tedy $\gamma$. Parametr $a$ opět označuje délku úsečky $BC$ na význačné přímce.

Použijme nyní jednu 'hyperbolických' izometrií

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cosh b & -\sinh b & 0 \\ -\sinh b & \cosh b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta převádí trojúhelník $ABC$ na nový trojúhelník $A'B'C'$. Bod $C$ se převede na $C' = (\cosh b, -\sinh b, 0)$ a bod $A$ se převede na $U_0$. Tedy čárkovaný trojúhelník má opět jeden vrchol v bodě $U_0$. Bod $B$ se převede na bod $B'$. Co víme o jeho souřadnicích. Obecně mají tvar $B' = (\cosh f, \sinh f \cos \varphi, \sinh f \sin \varphi)$. Délka úsečky $AB$ se zachová, a úsečka $A'B'$ leží na význačné kružnici. Tedy parametr $f$ má význam délky úsečky $A'B'$, tj. $c$. Parametr $\varphi$ má opět význam úhlu při vrcholu $A'$, tentokrát vyjde $\pi - \alpha$. Tedy

$$B' = (\cosh c, -\sinh c \cos \alpha, \sinh c \sin \alpha).$$

Rovnost $\Phi(B) = B'$ ma tvar

$$\begin{pmatrix} \cosh c \\ -\sinh c \cos\alpha \\ \sinh c \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh b & -\sinh b & 0 \\ -\sinh b & \cosh b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh a \\ \sinh a \cos\gamma \\ \sinh a \sin\gamma \end{pmatrix}.$$

Rovnosti v prvním a třetím řádku této relace jsou právě tvrzení kosinové a sinové věty. □

# Kapitola 8

# Geodetiky.

## 8.1 Definice

V duchu Riemannovy habilitační přednášky budeme definovat přímky jako křivky, které minimizují (lokálně) vzdálenost každých svých dvou bodů. To vede na úlohud hledat minimum příslušného funkcionálu, který přiřadí dané křivce její délku. Existuje klasická matematická disciplína (variační počet), která dovede vyjádřit nutnou podmínku pro existenci extrému pomocí diferenciálních rovnic (které v klasickém případě mají název Euler-Lagrangeovy rovnice).

Víme, že délka $\ell(\mathbf{b})$ křivky $\mathbf{b}$ se pomocí 1. fundamentální formy vyjádří pomocí integrálu

$$\ell(\mathbf{b}) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u)\dot{u}_i\,\dot{u}_j}\,dt;\ \dot{u}_i = \frac{du_i}{dt}.$$

Místo hledání křivek, které minimizují délku, se ukazuje být jednodušší hledat minimum jiného funkcionálu, který vyjadřuje tzv. energii křivky. Popíšeme si teď odpovídající Euler-Lagrangeovy rovnice.

**Definice 8.1.1** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená podmnožina se zadanou Riemannovou metrikou $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(u)du_i du_j$. Pak pro křivku*

$$\mathbf{b} : \langle a, b\rangle \to U;\ \mathbf{b}(t) = (u_1(t), u_2(t))$$

*definujeme energii $E(\mathbf{b})$ předpisem*

$$E(\mathbf{b}) = \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u)\dot{u}_i\,\dot{u}_j\right) dt;\ \dot{u}_i = \frac{du_i}{dt}. \tag{8.1.1}$$

### 8.1.1 Euler-Lagrangeovy rovnice variačního počtu.

Abychom si mohli odvodit diferenciální rovnice pro geodetiky, ukážeme si odvození Euler-Lagrangeových rovnic klasického variačnho počtu v jednoduchém případě. Nechť $I = I(t, u_1, u_2, v_1, v_2)$ je hladká funkce na $\langle a, b\rangle \times \mathbb{R}^4$. Pro libovolnou křivku $\mathbf{b} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2, \mathbf{b}(a) = A, \mathbf{b}(b) = B$, definujeme funkcionál

$$\Phi(\mathbf{b}) = \int_a^b I(t, u_1, u_2, \dot{u_1}, \dot{u_2})dt;\ \mathbf{b}(t) = (u_1(t), u_2(t)).$$

Pak platí následující tvrzení.

**Věta 8.1.2** *Pokud je křivka* $\mathbf{b}$ *minimem funkcionálu* $\Phi$, *pak* $\mathbf{b}$ *je řešení následujících (tzv. Euler-Lagrangeových) rovnic:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial v_1}(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)\right) = \frac{\partial I}{\partial u_1}(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2), \tag{8.1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial v_2}(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)\right) = \frac{\partial I}{\partial u_2}(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2). \tag{8.1.3}$$

*Řešení EL-rovnic se nazývají kritické body funckionálu* $\Phi$.

*Důkaz.*

Zvolme pevně křivku $\mathbf{c} = (w_1, w_2)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ s vlastností $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b) = (0, 0)$ a definujme funkci $\varphi(t)$ jedné proměnné předpisem

$$\varphi(t) = \Phi(\mathbf{b} + t\,\mathbf{c}).$$

Funkce $\varphi(t)$ je definovaná ve (vhodně malém) okolí nuly. Protože má funkce $\varphi(t)$ v bodě $t = 0$ minimum, musí platit $\varphi'(0)$. Tedy

$$0 = \varphi'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial I}{\partial u_1} w_1 + \frac{\partial I}{\partial v_1}\dot{w}_1 + \frac{\partial I}{\partial u_2} w_2 + \frac{\partial I}{\partial v_2}\dot{w}_2\right) dt =$$

$$= \int_a^b \left[\left(\frac{\partial I}{\partial u_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial v_1}\right)\right) w_1 + \left(\frac{\partial I}{\partial u_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial v_2}\right)\right) w_2\right] dt.$$

Hraniční člen při per partes vypadne díky tomu, že funkce $w_1, w_2$ mají v koncových bodech nulové hodnoty.

Nyní použijeme následující drobné tvrzení (jehož důkaz necháme laskavému čtenáři jako drobnou, nepříliš těžkou úlohu z analýzy):
Předpokládejme, že $h_1(t), h_2(t)$ jsou dvě hladké funkce na $\langle a, b\rangle$ a že platí $\int_a^b [h_1\, f + h_2\, g]dt = 0$ pro každé dvě hladké funkce $f(t), g(t)$ na $\langle a, b\rangle$, které jsou rovny nule v bodech $a, b$. Pak $h_1$i $h_2$ jsou identicky nulové funkce na $\langle a, b\rangle$.

Protože $\varphi'(0) = 0$ pro každou dvojici funkcí $w_1, w_2$ s nulovými hodnotami v bodech $a$ a $b$, dostaneme ihned tvrzení věty. □

### 8.1.2 Vztah funkcionálu energie a délky.

Připomeňme si Cauchy-Schwarzovu nerovnost pro integrály. Jsou-li $f, g$ spojité reálné funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\left(\int_a^b f\,g\right)^2 \leqslant (\int_a^b f^2)\,(\int_a^b g^2), \tag{8.1.4}$$

a rovnost nastává právě když buď $f = 0$, nebo $g = \lambda\, f$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme nyní, že je dána křivka $\mathbf{b} : \langle a, b\rangle \to U$ v Riemannově ploše $(U, g_{ij}(u))$. Pak platí následující tvrzení.

**Věta 8.1.3** *Pokud $\ell = \ell(\mathbf{b})$ označuje délku křivky $\mathbf{b}$ a $E = E(\mathbf{b})$ její energii, pak*

$$(\ell)^2 \leqslant (b - a)\, E. \tag{8.1.5}$$

*Křivka $\mathbf{b}_0$ je minimum pro funkcionál energie $E(\mathbf{b})$ právě když je minimum pro funkcionál délky $\ell(\mathbf{b})$ a $|\dot{\mathbf{b}}_0|$ je konstantní na $\langle a, b\rangle$.*

*Důkaz.*

První část věty plyne z (8.1.4) pro $f = 1$ and $g = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u)\dot{u}_i\,\dot{u}_j}$.

Délka křivky se při parametrizaci nemění, takže můžeme předpokládat, že minimum funkcionálu $\ell$ se nabývá v křivce $\mathbf{b}$, která je parametrizovaná obloukem. Ještě ji pak přeparametrizujeme tak, aby byla definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a měla vlastnost, že $|\dot{\mathbf{b}}|$ je konstantní. Pro tuto křivku ale platí (podle (8.1.4)) $\ell(\mathbf{b}) = E(\mathbf{b})$. Nerovnost 8.1.5 ukazuje, že minimum energie $E$ je větší nebo rovno minimu $\ell$, tj. $\ell(\mathbf{b})$, tedy se obě minima rovnají. $\square$

Všimněte si, že rozdíl mezi regulárními křivkami, které minimizují funkcionál délky a regulárními křivkami, které minimizují funkcionál energie, je jen v jejich paprametrizaci. Víme totiž, že je možné každou regulární křivku parametrizovat obloukem a v této parametrizaci má její derivace konstatní (jednotkovou) délku. A délka křivky se při změně parametrizace nemění. Hodnota funkcionálu energie se ale při změně parametrizace obecně mění. Jeho minimum se tedy nabývá jen pro speciální parametrizace.

Názorně je tento rozdíl vidět, pokud si představíme cyklistu, který projede určitou trasu různou rychlostí. Délka trasy na rychlosti jízdy nezávisí, ale výdej energie ano. Pokud cyklista nejede konstantní rychlostí, brzdí a zase zrychluje, pak spotřebuje větší energii.

### 8.1.3 Rovnice pro geodetiky.

Tradičně bývá zvykem používat název geodetika pro kritické body odpovídajících Euler-Lagrangeových rovnic pro funkcionál délky (které jsou stejné jako EL rovnice pro funkcionál energie).

**Definice 8.1.4** *Řekneme, že křivka* $\mathbf{c}$ *na ploše* $S$ *je geodetika právě když pro každou část křivky* $\mathbf{c} = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ *obsažené v jedné mapě* $\mathbf{p}$ *plochy* $S$ *jsou splněny následující rovnice*

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2),$$

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2),$$

*kde* $E, F, G$ *jsou koeficienty první fundamentální formy.*

*Tato soustava rovnic se nazývá rovnice pro geodetiky.*

Jako důsledek definice dostaneme okamžitě následující tvrzení.

**Důsledek 8.1.5** *Libovolná isometrie převádí geodetiky na geodetiky.*

### 8.1.4 Geodetiky na ploše vnořené do $\mathbb{R}^3$.

**Věta 8.1.6** *Křivka* $\mathbf{c}$ *na ploše* $S$ *vnořené do* $\mathbb{R}^3$ *je geodetika právě když pro každý bod plochy* $S$ *je vektor* $\ddot{\mathbf{c}}$ *kolmý k tečné rovině* $T_sS$*.*

*Důkaz.*

Předpokládejme, že křivka $\mathbf{c}$ je křivka na ploše zadané pomocí parametrizace $\mathbf{p}$, tj. $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$, kde $(u(t), v(t))$ je odpovídající křivka v prostoru parametrů. Derivace podle proměnné $t$ budeme označovat tečkou.

Tečný vektor $\dot{\mathbf{c}}$ má ve zvolené mapě souřadnice $(\dot{u}, \dot{v})$, tj. $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v}$. Vektor $\ddot{\mathbf{c}}$ je tedy kolmý k tečné rovině $T_sS$ právě když platí rovnice

$$\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v})\right) \cdot \mathbf{p}_u = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v})\right) \cdot \mathbf{p}_v = 0.$$

Ukážeme, že tyto dvě rovnice jsou ekvivalentní s dvěma rovnicemi v definici geodetiky. První rovnici upravíme takto.

$$\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v})\right) \cdot \mathbf{p}_u =$$

$$= \frac{d}{dt}\left((\mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v}) \cdot \mathbf{p}_u\right) - (\mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v})\frac{d\mathbf{p}_u}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) - (\mathbf{p}_u\dot{u} + \mathbf{p}_v\dot{v}) \cdot (\mathbf{p}_{uu}\dot{u} + \mathbf{p}_{uv}\dot{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) - \big(\dot{u}^2(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uu}) + \dot{u}\dot{v}(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uv} + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uu}) + \dot{v}^2(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uv})\big)\,.$$

Nyní stačí rozepsat

$$E_u = (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)_u = 2\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uu},$$

$$F_u = (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)_u = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_{uv},$$

$$G_u = (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v)_u = 2\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uv}.$$

Dosazením dostaneme první rovnici pro geodetiku ve znění věty.

Druhá rovnice se odvodí přesně stejně. □

Jako okamžitý důsledek dostaneme vlastnost, že pro libovolnou geodetiku musí platit, že $|\dot{\mathbf{c}}|$ je konstantní. Platí totiž

$$\frac{d}{dt}(|\dot{\mathbf{c}}|^2) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) = 2\ddot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}.$$

Ale $\dot{\mathbf{c}}$ leží v tečné rovině a $\ddot{\mathbf{c}}$ je na ní kolmé. Totéž tvrzení se dá dokázat i pro geodetiku na obecné Riemannově ploše, ale důkaz je složitější a nebude ho dělat.

Pro každou geodetiku je tedy možné změnit parametrizaci tak, aby výsledkem byla geodetika parametrizovaná obloukem. Stačí použít substituci $t = a\tau$ pro vhodnou konstantu $a$. Vektor $\ddot{\mathbf{c}}$ se při této změně parametrizace jen vynásobí konstantou a zůstane tedy kolmý k ploše. Výsledná křivka po změně parametrizace je tedy opět geodetika.

Nejjednodušší příklady geodetiky se získají pomocí normálových řezů.

**Příklad 8.1.7**

*(1) Předpokládejme, že je křivka* $\mathbf{c}$ *dána jako průnik roviny* $\Pi$ *a plochy* $S$ *a že je parametrizovaná obloukem. Křivka* $\mathbf{c}$ *je tedy rovinná křivka, její tečný i normálový vektor leží v rovině* $\Pi$. *Vektor* $\ddot{\mathbf{c}}$ *je kolmý k tečné rovině v daném bodě právě když rovina* $\Pi$ *obsahuje jednotkovou normálu k ploše v daném bodě.*

*(2) Velké kružnice na sféře (tj. průniky s rovinou, která prochází středem sféry) jsou geodetiky. Rovina, která prochází středem je zřejmě v každém bodě řezu kolmá na plochu (tj. na její tečnou rovinu). Velké kružnice jsou tedy normálové řezy, a tudíž geodetiky.*

*(3) Libovolná (část) přímky na ploše je geodetika, protože existuje parametrizace* $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t$, *kde* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *jsou konstantní vektory. Pak zřejmě* $\ddot{\mathbf{c}} = 0$.

*(4) Je-li* $S$ *rotační plocha, pak jsou všechny poledníky normálové řezy, a tudíž geodetiky. Co se týče rovnoběžek, ty jsou normálové řezy v tom případě, když příslušná rovina řezu obsahuje normálu. To nastane zřejmě tehdy, když jde o kritický bod funkce* $x = f(u)$.

Rovnice pro geodetiky tvoří soustavu dvou obyčejných nelinárních rovnice druhého řádu. Takovéto rovnice se velmi obtížně dají řešit. Existují ale věty o existenci a jednoznačnosti řešení pro takovéto soustavy.

**Věta 8.1.8** *Je-li* $\mathbf{v}$ *jednotkový tečný vektor v bodě* $P$ *plochy* $S$*, pak existuje jediná geodetika parametrizovaná obloukem, která prochází bodem* $P$ *a jejíž tečný vektor v tomto bodě je vektor* $\mathbf{v}$.

*Důkaz.*

Rovnice pro parametrický popis geodetiky $(u(t), v(t))$ v dané mapě mají tvar

$$\ddot{u} = f(u, v, \dot{u}, \dot{v});\ \ddot{v} = g(u, v, \dot{u}, \dot{v})$$

kde $f, g$ jsou hladké funkce čtyř proměnných. Základní věty o řešení této soustavy říkají, že pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d$ a každou hodnotu $t_0$ proměnné $t$ existuje $\varepsilon > 0$ a řešení $(u(t), v(t))$ soustavy na intervalu $|t-t_0| < \varepsilon$, splňující počáteční podmínky

$$u(t_0) = a, v(t_0) = b, \dot{u}(t_0) = c, \dot{v}(t_0) = d.$$

Navíc, libovolná taková dvě řešení se rovnají v jistém okolí bodu $t_0$.

Zadání jednotkového tečného vektoru odpovídá zadání počátečních podmínek pro tuto soustavu. □

Jako příklady můžeme pomocí této věty odvodit tvar všech geodetik v rovině či na sféře. V prvním případě jsou to všechny přímky, v druhém všechny hlavní kružnice.

Z obecných vět o existenci řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu a o spojité (hladké) závislosti řešení na počátečních podmínkách je možné dokázat existenci tzv. geodetických polárních souřadnic na libovolné ploše. Idea je prostá. Zvolím si bod na ploše a budu počítat v lokálních souřadnicích. Pro každý úhel $\theta \in < 0, 2\pi >$ existuje geodetika procházející daným bodem, jejíž tečný vektor svírá s vybraným pevným jednotkovým tečným vektorem úhel $\theta$. Je možné ukázat, že za její definiční obor mohu vzít interval $(-\epsilon, \epsilon)$ nezávisle na úhlu $\theta$. Tím jsou definovány polární geodetické souřadnice na okolí daného bodu, jejich definiční obor je $(-\epsilon, \epsilon) \times (a, 2\pi + a)$, kde $a$ mohu měnit, abych pokryl celé okolí. Klíčová informace o geodetických polárních souřadnicích je fakt (tzv. Gaussovo lemma), že tyto souřadnice jsou ortogonální, tj. $F = 0$ v první fundamentální formě. Pokud navíc vezmu geodetiky parametrizované obloukem, je $E = 1$. Tedy první fundamentální forma má v geodetických polárních souřadnicích tvar

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

# Kapitola 9

# Gauss-Bonnetova věta.

Abychom mohli formulovat lokální verzi Gauss-Bonnetovy věty, zavedeme si nejprve pojem geodetické křivosti. Předpokládejme, že $\mathbf{c}$ je křivka na ploše $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem a $b = \mathbf{c}(s_0) \in S$ je její bod. Pak $\mathbf{c}' = \mathbf{c}'(s_0)$ je jednotkový vektor v $T_bS$ a $\mathbf{c}''$ je vektor kolmý k $\mathbf{c}'$. Víme již, že křivka v bodě $b$ splňuje rovnice pro geodetiku právě když $\mathbf{c}''$ je kolmý na $T_bS$, což je totéž jako že $\mathbf{c}''$ je násobek normály $N$.

Ale tato podmínka nemusí být splněna, vektory $\mathbf{c}''$ a $N$ mohou být lineárně nezávislé. Pak víme jen, že vektor $\mathbf{c}''$ v rovině kolmé k $\mathbf{c}'$. Tato rovina má vektory $N$ a $Ntimes\mathbf{c}'$ jako bazi a vektor $\mathbf{c}''$ můžeme tedy napsat jako lineární kombinaci

$$\mathbf{c}'' = \kappa_n\, N + \kappa_g(N \times \mathbf{c}'), \tag{9.0.1}$$

kde $\kappa_n = \mathbf{c}'' \cdot N$ a $\kappa_g = \mathbf{c}'' \cdot (N \times \mathbf{c})$. To vede k následující definici.

**Definice 9.0.9** *Geodetická křivost křivky* $\mathbf{c}$ *na ploše* $S$ *v bodě* $\mathbf{c}(s_0)$ *je definována vztahem*

$$\kappa_g = (N \times \mathbf{c}') \cdot \mathbf{c}''.$$

### 9.0.5 Greenova věta.

V důkazu Gauss-Bonnetovy věty bude potřebovat použít Greenovu větu o souvislosti integrálu přes dvourozměrnou oblast a integrálem přes její hranici. Nejprve si připomeneme definici křivkového integrálu. Je-li $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ po částech hladká regulární křivka a $f$ a $g$ jsou dvě hladké funkce definované v okolí geometrického obrazu $\langle\varphi\rangle$ křivky $\varphi$, pak je křivkový integrál definován následujícím způsobem.

$$\int_\phi f\, du_1 + g\, du_2 \;= \int_a^b [f(\phi(t)) \cdot u_1 + g(\phi(t)) \cdot u_2] dt.$$

Pro formulaci Greenovy věty budeme potřebovat křivky speciálního tvaru. Řekneme, že (po částech hladká) křivka $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$ a $\varphi$ je prostá na polouzavřeném intervalu $\langle a, b)$. Takováto křivka rozděluje rovinu na dvě komponenty souvislosti. Jedna z těchto dvou komponent je omezená a nazývá se vnitřek křivky (a značí *Int* $\varphi$). Křivka $\varphi$ je kladně orientovaná, pokud při probíhání křivky ve směru vzrůstajících hodnot $t \in \langle a, b\rangle$ je vnitřek křivky na levé straně. Pak Greenova věta říká:

**Věta 9.0.10** *Předpokládejme, že $\varphi$ je po částech hladká, jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka a* Int $\varphi$ *je její vnitřek. Předpokládejme dále, že funkce $f$ a $g$ jsou hladké v okolí uzávěru vnitřku* Int $\varphi$. *Pak*

$$\int_{Int\,\varphi} \left[\frac{\partial g}{\partial u_1} - \frac{\partial f}{\partial u_2}\right] du_1 du_2 = \int_{\varphi} \left[f\, du_1 + g\, du_2\right]. \tag{9.0.2}$$

## 9.1 Lokální verze Gauss-Bonnetovy věty.

Gauss-Bonnetova věta patří k nejhezčím a nejhlubším výsledkům v teorii ploch. Navíc je to prototyp základních vět ve vyšších dimenzích, které spolu svazují geometrické a topologické vlastnosti ploch. Nejdřív si vysvětlíme její lokální tvar.

**Věta 9.1.1** *Předpokládejme, že $S$ je hladká plocha v $\mathbb{R}^3$ a $(U, \mathbf{p})$ je mapa na $S$. Předpokládejme, že definiční obor parametrizace $\mathbf{p}$ je otevřená podmonžina $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$.*

*Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{O}$ je kladně orientovaná, po hladká jednoduchá uzavřená křivka taková, že* Int $\varphi \subset \mathcal{O}$ *a $\varphi'(b_-) = \varphi'(a_+)$. Definujme nyní křivku $\mathbf{c}$ na ploše $S$ předpisem $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \varphi$ a označme* Int $\mathbf{c} = \mathbf{p}(Int\,\varphi)$.

*Pak*

$$\int_{Int\,\mathbf{c}} K\, dS = 2\pi - \int_a^b k_g(\mathbf{c}(t)\, dt,$$

*kde $k_g$ je geodetická křivost křivky $\mathbf{c}$ a $K$ je Gaussova křivost plochy $\mathbf{p}$.*

*Důkaz.*

Stejně jako v důkazu Theoremy egregium budeme tvrzení dokazovat za předpokladu, že má první fundamentální forma parametrizace $\mathbf{p}$ tvar

$$d\,u_1^2 + G(u) d\,u_2^2,$$

kde $G(u)$ je kladná funkce. Pak víme, že

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{u_1 u_1}}{\sqrt{G}}$$

kde index $u_1 u_1$ označuje druhou parciální derivaci podle proměnné $u_1$.

Opět budeme používat bazi $e = \mathbf{p}_{u_1}$ a $f = \frac{1}{\sqrt{G}}\mathbf{p}_{u_2}$. V důkazu Gaussovy velké věty jsme si rozmysleli, že platí

$$-e_{u_1} \cdot f = e \cdot f_{u_1} = 0,\ -e_{u_2} \cdot f = e \cdot f_{u_2} = -(\sqrt{G})_{u_1}.$$

Tedy

$$\int_{\mathbf{p}(Int\,\varphi)} K\,dS = -\int_{Int\,\varphi} \frac{(\sqrt{G})_{u_1u_1}}{\sqrt{G}}\sqrt{G}\,d\,u_1\,d\,u_2 =$$
$$= \int_{Int\,\varphi} (e \cdot f_{u_2})_{u_1}\,d\,u_1\,d\,u_2 = \int_{\varphi} (e \cdot\ f_{u_2})du_2 =$$
$$= \int_a^b (e \cdot \frac{d}{dt} f(u(t)))dt.$$

Pro další výpočet si připravíme výpočet geodetické křivosti.

Označme nyní $\theta(s)$ úhel, který svírá jednotkový tečný vektor $\dot{\mathbf{c}}$ ke křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(s)$ s vektorem $\mathbf{e}$ v tomtéž bodě. Přesněji, úhel $\theta$ je definován vztahem

$$\dot{\mathbf{c}} = \cos\theta\mathbf{e} + \sin\theta\mathbf{f}. \tag{9.1.1}$$

Pak

$$\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{c}} = -\sin\theta\mathbf{e} + \cos\theta\mathbf{f},$$
$$\ddot{\mathbf{c}} = \cos\theta\dot{\mathbf{e}} + \sin\theta\dot{\mathbf{f}} + \dot{\theta}(-\sin\theta\mathbf{e} + \cos\theta\mathbf{f}).$$

Geodetickou křivost $k_g$ je možno vypočíst pomocí vztahu $k_g = (\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{c}}) \cdot \ddot{\mathbf{c}}$. Po dosazení dostaneme

$$k_g = \dot{\theta}(-\sin\theta\mathbf{e}+\cos\theta\mathbf{f})(-\sin\theta\mathbf{e}+\cos\theta\mathbf{f})+(\cos\theta\mathbf{e}+\sin\theta\mathbf{f})(-\sin\theta\mathbf{e}+\cos\theta\mathbf{f}) =$$
$$= \dot{\theta} + \cos^2\theta(\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{f}) - \sin^2\theta(\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{e}) + \sin\theta\cos\theta(\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{f} - \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}).$$

Užitím vztahů

$$\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{f}} = 0, \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$$

dostaneme

$$k_g = \dot{\theta} - \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{f}},$$
$$I = \int_0^a (\dot{\theta} - k_g), ds.$$

Zbývá tedy dokázat vztah

$$\int_0^a \dot{\theta}\,ds = 2\pi.$$

Tvrzení je mimořádně názorné. Integrál se rovná přírůstku úhlu $\theta$ podél křivky mezi počátečním a koncovým bodem. Nakreslíte-li si obrázek jednoduché křivky, je zřejmé že úhel přiroste při oběhu křivky o $2\pi$.

Trochu přesnější odůvodnění lze založit na názorné představě, že křivku **c** můžeme hladce deformovat do malé kružnice (tato vlastnost bývá často charakteristická vlastnost tzv. jednoduše souvislých oblastí a bylo by třeba ukázat, že vnitřek jednoduché uzavřené křivky je jednoduše souvislá oblast - to už ale dokazovat nebudeme). Při deformaci se hodnota integrálu z $\dot{\theta}$ nemění, protože výsledná hodnota je celočíselná a přitom se spojitě mění při deformaci. Musí tedy být konstatní. Ale hodnota integrálu pro kružnici je evidentně $2\pi$. $\square$

### 9.1.1 Gauss-Bonnetova věta pro křivočaré mnohoúhelníky.

Chtěli bychom Gauss-Bonnetovu větu zobecnit na případ, kdy okraj plochy nemusí být hladká křivka, ale může být jen po částech hladká křivka. To pak umožňuje počítat velikosti ploch trojúhelníků a mnohoúhelníků na plochách. Nejdříve si zavedeme potřebné definice.

**Definice 9.1.2** *Řekneme, že křivka $\gamma(t) = (u(t), v(t)), t \in \mathbb{R}$ je po částech hladká jednoduchá křivka s periodou $a$, pokud existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j = a$ intervalu $< 0, a >$ takové, že platí:*
*(i) $\gamma(t) = \gamma(t')$ právě když $t' - t$ je celočíselný násobek $a$;*
*(ii) $\gamma$ je hladká a regulární na intervalech $(t_0, t_1), \ldots, (t_{j-1}, t_j)$;*
*(iii) existují jednostranné derivace $\gamma'_-(t_i)$ a $\gamma'_+(t_i)$ pro všechna $i = 0, \ldots, n$, jsou nenulové a nejsou rovnoběžné.*

*Křivka $\gamma$ je Jordanova křivka, a tak můžeme mluvit opět o jejím vnitřku a vnějšku. Definici kladně orientované jednoduché křivky s periodou a lze zřejmě snadno rozšířit i na po částech hladký případ.*

*Množinu $\mathcal{M} = \gamma \cup Int(\gamma)$ budeme nazývat křivočarý mnohoúhleník, body $\gamma(t_i)$ se nazývají vrcholy tohoto mnohoúhleníka a křivka $\gamma$ zúžená na dílčí intervaly dělení se nazývá hranou mnohoúhelníka. Křivka $\gamma$ se nazývá obvod mnohoúhleníka.*

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{p}(u, v)$ je regulární parametrická plocha na $\mathcal{O}$ a $\gamma \cup Int(\gamma)$ je křivočarý mnohoúhelník v $\mathcal{O}$. Vnitřek $Int(\mathbf{c})$ křivky $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \gamma$ definujeme jako obraz $\mathbf{p}(Int\,\gamma)$. Křivku $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \gamma$ budeme nazývat obvodem křivočarého mnohoúhelníka na ploše $\mathbf{p}$ a množinu $< \mathbf{c} > \cup Int\,\mathbf{c}$ nazveme křivočarým mnohoúhelníkem na $\mathbf{p}$. Jednostranné derivace $\mathbf{c}'_-(t_i)$ a $\mathbf{c}'_+(t_i)$ pak existují a nejsou rovnoběžné. Zvolme si opět ortonormální bazi $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ v tečné rovině v příslušném bodě a definujme úhly $\theta_i^{\pm}$ pomocí vztahu (9.1.1). Označme dále

$$\delta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-; \alpha_i = \pi - \delta_i.$$

Úhly $\delta_i$, resp. $\alpha_i$ jsou vnější, resp. vnitřní úhly u $i$-tého vrcholu křivočarého mnohoúhelníka na dané ploše. Tyto úhly jsou definovány modulo celočíselné násobky $2\pi$. Budeme předpokládat, že $\alpha_i \in (0, 2\pi)$ pro všechna $i$.

Řekneme, že je křivočarý mnohoúhleník na ploše parametrizovaný obloukem, pokud to platí pro všechny křivky na dílčích intervalech dělení, tj. mimo vrcholy mnohoúhelníka.

**Věta 9.1.3 (Gauss-Bonnet pro křivočaré mnohoúhelníky.)** *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}$ *je obvod křivočarého mnohoúhelníka na ploše* $\mathbf{p}$ *s periodou* $a$ *a s vnitřními úhly* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *u svých vrcholů. Pak*

$$\int_{Int\,\mathbf{c}} K\,dS = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi - \int_0^a k_g\,ds,$$

*Důkaz.*

Důkaz věty je stejný jako pro větu předchozí. Je třeba si jen rozmyslet, čemu se rovná $\int_0^a \dot{\theta}\,ds$, ukázat, že

$$\int_0^a \dot{\theta}\,ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

To je snadno vidět pokud si v každém vrcholu křivku 'zaoblíme', tj. nahradíme ji v malém okolí $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$ bodu $t_i$ hladkou křivkou, jejíž tečna bude svírat úhel $\tilde{\theta}$. Je intuitivně zřejmé (a lehké si rozmyslet přesně), že

$$\int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} \dot{\tilde{\theta}}\,ds = \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} \dot{\theta}\,ds + \delta_i.$$

Znamená to, že úhel se nemění postupně a hladce, ale skočí o velikost $\delta_i$ v bodě $t_i$. Také je to možné formulovat tak, že geodetická křivost není hladká funkce, ale má nekonečné příspěvky v bodech $t_i$, které při integraci přispějí velikostí $\delta_i$. (Toto poslední konstatování zní velmi nepřesně, ale je elegantně a přesně formalizovánou v teorii zobecněných funkcí, neboli distribucí, které možná v budoucnosti ještě potkáte.) □

**Důsledek 9.1.4** *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}$ *je křivočarý mnohoúhelník na ploše* $\mathbf{p}$ *s periodou* $a$ *a s vnitřními úhly* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *u svých vrcholů a že jeho hrany jsou jsou geodetiky. Pak*

$$\int_{Int\,\mathbf{c}} K\,dS = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi.$$

**Domácí cvičení.**

Rozmyslete si, že:

(1) v rovině je $K = 0$, tedy dostaneme

$$\sum_{i-1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi.$$

(2) Sféra má Gaussovu křivost rovnu 1. Pro křivočaré trojúhelníky $ABC$ na sféře, jejichž hrany jsou geoedetiky, dostaneme tedy

$$V(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

kde $\alpha, \beta$ a $\gamma$ jsou úhly při příslušných vrcholech.
(3) Pseudosféra má Gaussovu křivost rovnu $-1$. Pro křivočaré trojúhelníky $ABC$ na sféře, jejichž hrany jsou geoedetiky, dostaneme tedy

$$V(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

kde $\alpha, \beta$ a $\gamma$ jsou úhly při příslušných vrcholech.

### 9.1.2 Gaussova věta pro kompaktní plochy.

Nejdříve si zavedeme zajímavý invariant, spojený s kompaktní plochou, kterému se říká Eulerova charakteristika. Ten se definuje pomocí triangulace plochy.

**Definice 9.1.5** *Nechť $S$ je kompaktní plocha. Její triangulace je soubor křivočarých mnohoúhelníků $\mathcal{M}_i, i = 1, \ldots, k$ na $S$ s následujícími vlastnostmi:*
*(1) existuje atlas na $S$ takový, že každý mnohoúhelník $\mathcal{M}_i$ se vejde i se svým obvodem do některé mapy tohoto atlasu;*
*(2) $S \subset \cup_{i-1}^{k} \mathcal{M}_i$;*
*(3) pro $i \neq j$ je $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ buď prázdná množina, nebo společná hrana, nebo společný vrchol;*
*(4) Každá hrana triangulace je hrana právě dvou mnohoúhelníků.*

*Eulerova charakteristika plochy $S$ je číslo, určené následujícím způsobem: zvolme trinagulaci $S$ a označme $V$ počet všech vrcholů, $H$ počet všech hran, a $S$ počet všech mnohoůhelníků (stěn). Pak Eulerova charakteristika $\chi$ se definuje vztahem*

$$\chi = V - H + S.$$

**Příklad 9.1.6** *Triangulaci sféry je možné zvolit tím, že si zadáme tři hlavní kružnice - rovník a dvě hlavníkružnic na sebe kolmé, obě procházející oběma póly. Tyto tři kružnice určují triangulaci sféry. Ta má 6 vrcholů,12 hran a 8 stěn, a příslušná Eulerova charakteristika je rovna dvěma.*

*Zvolme si jinou trinagulaci. Například vezměme pravidlený čtyřstěn, a nafoukněme a zaobleme ho na sféru. Tato triangulace má* 4 *vrcholy, šest společných hran a* 4 *vrcholy. Eulerova charakteristika je opět rovna* 2.

**Věta 9.1.7 (Gauss-Bonnetova věta.)** *Nechť $S$ je kompaktní plocha, pak*

$$\int_S K\, dS = 2\pi\chi,$$

*kde $K$ je Gaussova křivost a $\chi$ je Eulerova charakteristika $S$.*

**Důsledek 9.1.8**
*(1) Eulerova charakteristika nezávisí na volbě triangulace.*
*(2)* $\int_S K\,dS$ *se neměnní při hladké deformaci kompaktní plochy.*

To jsou již snadné důsledky. Integrál z Gaussovy křivosti zřejmě nezávisí na volbě triangulace, tedy totéž je pravda pro Eulerovu charakteristíku.

Při hladké deformaci plochy se triangulace deformuje, ale její Eulerova charakteristika se zřejmě neměnní. Totéž tedy platí o integrálu z Gaussovy křivosti.

Nyní si Gauss-Bonnetovu větu dokážeme.

*Důkaz.*

Zvolíme si atlas na $S$ tak, aby jednotlivé mnohoúhelníky byly obsaženy v nějaké mapě. Pro $n_j$-úhleník $\mathcal{M}_j$, jehož obvod je popsán křivkou $\mathbf{c}_j$ s periodou $a_j$ a jehož vnitřní úhly při jednotlivých vrcholech jsou $\alpha_i^j$ pak platí

$$\int_{\mathit{Int}\,\mathbf{c}_j} K\,dS = \sum_i \alpha_i^j - (n_j - 2)\pi - \int_0^{a_j} k_g\,ds,$$

Integrál $\int_S K\,dS$ je součtem všech levých stran pro všechny mnohoúhelníky triangulace.

Součet všech prvních sčítanců na pravé straně přeuspořádáme tak, že budeme nejprve sčítat všechny úhly při daném vrcholu Tento součet je $2\pi$. Pak sečteme přes všechny vrcholy triangulace a dostanem $2\pi V$.

Součet všech sčítanců tvaru $-n_i\pi$ je $-2\pi H$, protože se každá hrana triangulace vyskytne právě dvakrát jako hrana některého z mnohoúhelníků.

Součet členů tvaru $2\pi$ je zřejmě $2\pi S$.

Konečně součet členů $-\int_0^{a_i} k_g\,ds$ je nula, protože se vyskytne příslušná křivka dvakrát jako hrana mnohoúhelníka, pokaždé s opačnou orientací. Výsledné integrály budou opačné a odečtou se!

Tím je věta dokázána.

□

# Kapitola 10

# Apendix.

V této části je možné najít důkazy, resp. návody k důkazům některých tvrzení, které nebyly v textu samotném odůvodněny.

## 10.1 Klasifikace shodností v $\mathbb{R}^3$.

**Věta 10.1.1** *Libovolná shodnost je affiní zobrazení, tj.* $S(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, *kde* $A$ *je* $n \times n$ *reálná matice,* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. *Affiní zobrazení je shodností právě když* $A$ *je ortogonální matice. Shodnost se nazývá přímou shodností, pokud je* $\det A > 0$, *v opačném případě se nazývá nepřímou shodností.*

## 10.2 Reflexe generují grupu shodností.

**Věta 10.2.1** *Každá shodnost se dá vyjádřit jako složení nejvýše 4 reflexí.*

**Důkaz.** Označme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ kanonickou bazi v $\mathbb{R}^3$. Podstata důkazu je v tom, že libovolná shodnost, která zachovává počátek $\mathbf{0}$ a všechny tři vektory kanonické baze je už nutně identita. To je ihned vidět z věty o klasifikaci shodností (jediné lineární zobrazení, které převádí na sebe vektory nějaké baze, je identita).

Předpokládejme, že $S$ je shodnost v $\mathbb{R}^3$. Pokud je $\mathbf{a} = S(\mathbf{0})$ nenulový vektor, najdeme reflexi $R_0$, pro kterou $R_0(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Pokud shodnost $S_0 = R_0 \circ S$ převádí $\mathbf{e}_1$ na vektor $\mathbf{v}_1$ různý od $\mathbf{e}_1$, pak existuje nadrovina $H_1$ s vlastností, že odpovídající reflexe $R_1$ převádí $\mathbf{v}_1$ na $\mathbf{e}_1$. Vzhledem k tomu, že $S_1$ zachovává počátek, musí platit $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{v}_1|$, a tedy nadrovina $H_1$ obsahuje počátek. Shodnost $S_1 = R_1 \circ S_0$, tedy převádí počátek, i vektor $\mathbf{e}_1$ na sebe.

Stejně postupujeme dál. Pokud $S_1$ převádí $bfe_2$ na jiný vektor $v_2$, pak najdeme reflexi $R_2$ vzhledem k nadrovině $H_2$ která převádí $\mathbf{v}_2$ an $\mathbf{e}_2$. Protože shodnosti zachovávají vzdálenosti, musí nutně nadrovina $H_2$ obsahovat počátek i vektor $\mathbf{e}_1$. Tedy shodnost $S_2 = R_2 \circ S_1$ zachovává počátek i vektory

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Složením $S_2$ s další reflexí $R_3$ dosáhneme toho, že $R_3 \circ S_3$ zachovává počátek i všechny vektory kanonické baze, a je tedy identita. Tedy $S$ lze vyjádřit jako složení nejvýše 4 reflexí.

## 10.3 Vlastnosti vektorového součinu

**Tvrzení 10.3.1** *Pro každé tři vektory v* $\mathbb{R}^3$ *platí*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Návod k důkazu:
(1) Tvrzení je ekvivalentní s tvrzením, že pro každé čtyři vektory v $\mathbb{R}^3$ platí

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$$

(2) Tvrzení je ekvivalentní s tvrzením, že pro každé čtyři vektory v $\mathbb{R}^3$ platí

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}),$$

protože smíšený součin se nemění při cyklické záměně.
(3) Předchozí tvrzení se lehko ověří pro případ, že $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ a oba vektory $\mathbf{c}$ a $\mathbf{d}$ jsou kolmé na $\mathbf{a}$.
(4) Je ihned vidět, že levá strana rovnosti (2) se nemění pro transformaci

$$\mathbf{a}' = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{d}, \mathbf{d}' = \gamma_1\mathbf{a} + \delta_1\mathbf{d}; \mathbf{b}' = \alpha_2\mathbf{b} + \beta_2\mathbf{c}, \mathbf{c}' = \gamma_2\mathbf{b} + \delta_2\mathbf{c};$$

kde matice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

patří do $SL(2, \mathbb{R})$.
(5) Přímým a jednoduchým výpočtem se ukáže, že i pravá strana rovnosti (2) se nemění při této transformaci.
(6) Výše uvedenou transformací je možné tvrzení (2) převést na případ (3). (Obě dvojice vektorů zadávají dvě roviny, které se nutně obsahující společnou přímku. V této přímce si zvolím vektor $\mathbf{a}'$ a oba vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{d}$ převedu vhodnou transformací na tento vektor. Zbylou libovůli využiji na to, abych vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ převedl na vektory kolmé k $\mathbf{a}'$.)